1. Trazado inverso de rayos	Transformaciones directa e inversa	Las transformaciones del tipo $\vec{y} \rightarrow \vec{x} = \vec{y} + \vec{\alpha}(\vec{x})$, son en general multivaluadas y puede ser muy difícil determinar las $\overrightarrow{x_N}$ imágenes del punto $\vec{y}$ (es decir, obtener las soluciones de la ecuación $\vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}) = \vec{y}$ para un valor de $\vec{y}$). La transformación inversa, $\vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x})$, sin embargo, es unívoca y se calcula de manera inmediata. Supongamos, ahora, que queremos obtener la imagen de una fuente extensa (una fotografía en blanco y negro de una galaxia, por ejemplo, que denotaremos como $F(\vec{y}) = F(y_1, y_2)$) bajo una transformación del tipo: $\vec{y} \rightarrow \vec{x} = \vec{y} + \vec{\alpha}(\vec{x})$. Deberíamos: (i) Encontrar para cada pixel de la fuente $\vec{y} = (y_1, y_2)$, las $\overrightarrow{x_N}$ soluciones de la ecuación $\vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}) = \vec{y}$ (ii) Asignar a cada solución $\overrightarrow{x_N}$ un píxel en la imagen (en una primera aproximación el de centro más cercano). (La imagen la denotaremos por $I(\vec{x}) = I(x_1, x_2)$). (iii) Asignar a la imagen el valor de la fuente: $I(\overrightarrow{x_N}) = F(\vec{y})$ Este sería el procedimiento directo que se resume en: $\vec{y} \rightarrow \overrightarrow{x_i}\ (\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{N})$ $F(\vec{y}) \rightarrow I(\overrightarrow{x_i})\ (\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{N})$ La dificultad de este procedimiento reside en la búsqueda de las N imágenes. Alternativamente, podemos utilizar la transformación inversa: $\vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x})$, En este caso, para cada pixel $\vec{x}$ de la imagen deberíamos: (i) Calcular el único origen: $\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x})$ (ii) Asignar un píxel a $\vec{y}$ (en una primera aproximación el de centro más cercano). (iii) Asignar a la imagen el valor de la fuente: $I(\vec{x}) = F(\vec{y})$ El procedimiento inverso se resumiría en: $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$ $I(\vec{x}) \leftarrow F(\vec{y})$ En esta práctica vamos a aplicar el procedimiento inverso a las Lentes Gravitatorias.
1.1. Generación de fuentes extensas de varios tipos	Generación de una fuente extensa cuadrada	Utilizando las herramientas de programación preferidas (IDL, Fortran, DS, etc.) generar y ver una matriz que tenga todos los valores a cero excepto un cuadrado central.

	Generación de una fuente extensa circular	Utilizando las herramientas de programación preferidas (IDL, Fortran, DS, etc.) generar y ver una matriz que tenga todos los valores a cero excepto un círculo central.
	Generación de una fuente extensa formada por anillos concéntricos	Utilizando las herramientas de programación preferidas (IDL, Fortran, DS, etc.) generar y ver una matriz que tenga todos los valores a cero excepto un círculo central formado por anillos concéntricos de diferente valor.
1.2. Código para la transformación identidad $\vec{x} \to \vec{y} = \vec{x}$ $I(\vec{x}) \leftarrow F(\vec{y})$	Utilizar las herramientas de programación preferidas. Se adjuntan líneas de código en FORTRAN como ejemplo.	real*8 f(1000,1000), i(2000,2000) open(1,file='fuente') open(2,file='imagen')
	Comenzaremos leyendo la fuente como una matriz $F(i_1, i_2)$ de dimensiones $n_x\, X\, n_x$. A la imagen le haremos corresponder una matriz $I(j_1, j_2)$ de dimensiones $n_y\, X\, n_y$. n_y debe ser mayor (3 veces por ejemplo) que n_x.	nx=1001 !numero de pix. de la imagen ny=388 !numero de pix. de la fuente
	Hay que definir las escalas relativas en el plano de la fuente y de la imagen. Estas escalas están relacionadas con la masa de la lente y la geometría del problema. Podemos elegir, por ejemplo, $x_l = 8$ e $y_l = 4$. Variando estas escalas podemos conseguir efectos diferentes.	xl=8 !tamaño físico del lado de la imagen yl=4 !tamaño físico del lado de la fuente
	Utilizando estas escalas y el número de píxeles calculamos el tamaño físico de un píxel en los planos de la imagen y de la fuente: $x_s = 2x_l/(n_x - 1)$; $y_s = 2y_l/(n_y - 1)$.	xs=2*xl/(nx-1) ! tamaño pix. en la imagen ys=2*yl/(ny-1) ! tamaño pix. en la fuente

	Leemos la fuente recorriendo las variables i_1 e i_2.	do i1=1,ny
		  do i2=1,ny
		    read (1,*) f(i1,i2)
		  end do
		end do

	muestreamos la imagen pixel a pixel	do j1=1,nx do j2=1,nx
	Transformamos los pixeles de la imagen a coordenadas:	x1=-xl+(j1-1)*xs

	$x_1 = -x_l + (j_1 - 1)x_s$;
	$x_2 = -x_l + (j_2 - 1)x_s$.
	.
	
	Aplicamos la transformación inversa identidad: $\vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x}$.
	
	Transformamos las coordenadas en el plano de la fuente a píxeles:
	$i_1 = (y_1 + y_l)/y_s + 1$;
	$i_2 = (y_2 + y_l)/y_s + 1$;
	
	Comprobamos que los píxeles caen dentro de la fuente. En caso contrario les damos un valor arbitrario. Es decir, Si i_1 e i_2 están contenidos en el rango $(1, n)$ hacemos la asignación:
	$I(j_1, j_2) = F(i_1, i_2)$
	en caso contrario hacemos $I(j_1, j_2) = C$
	Donde C es una constante arbitraria (el fondo de cielo...).
	
	Escribimos la imagen $I(j_1, j_2)$.
	
	Final de los bucles
	
	Final del código
	
	Ejecutar varias veces el código variando las escalas relativas de los planos de la fuente y de la imagen para explorar la influencia de estos parámetros. Examinar los resultados.
		x2=-xl+(j2-1)*xs
		
		y1=x1
		y2=x2
		
		i1=(y1+yl)/ys+1
		i2=(y2+yl)/ys+1
		
		if ((i1.ge.1).and.(i1.le.ny).and.(i2.ge.1).and.(i2.le.ny)) then
		i(j1,j2)=f(i1,i2)
		else
		i(j1,j2)=0
		end if
		
		write (2,*) i(j1,j2)
		
		end do
		end do
		
		end

1.3. Código para una lente puntual $\vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - \frac{\vec{x} - \overrightarrow{x_0}}{(\vec{x} - \overrightarrow{x_0})^2}$	En el código para la transformación identidad, definir, antes de empezar los bucles, las coordenadas de la lente, $\overrightarrow{x_0} = (x_{01,} x_{02})$ Hay que reemplazar las líneas de código correspondientes a la transformación inversa identidad: $\vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x}$, por las líneas de código correspondientes a la transformación inducida por una	X01=0.0 X02=0.25 Substituir y1=x1 y2=x2 por

	lente puntual: $$\vec{x} \to \vec{y} = \vec{x} - \frac{\vec{x}-\overrightarrow{x_0}}{(\vec{x}-\overrightarrow{x_0})^2}$$ Ejecutar varias veces el código variando la posición de la lente y el tamaño de la fuente. Probar con la fuente circular y con la fuente de anillos concéntricos.
	
	Describir lo que sucede cuando: (i) la lente está en el (0,0), (ii) la lente está ligeramente desalineada, (iii) la lente está muy desplazada.
	
	Representar los siguientes fenómenos: imagen simple, imagen doble, arcos, anillo de Einstein.
	
	Hacer una animación en la que se vea como cambian las imágenes a medida que la lente se desplaza
		`d2=(x1-x01)^2+(x2-x02)^2`
		`y1=x1-(x1-x01)/d2`
		`y2=x2-(x2-x02)/d2`

1.4. Lente puntual con perturbación cuadrupolar	La perturbación cuadrupolar más sencilla de la lente puntual consiste en hacer una transformación: $$\vec{x} \to \vec{y} = \begin{pmatrix} 1-\gamma & 0 \\ 0 & 1+\gamma \end{pmatrix} \vec{x} - \frac{\vec{x}-\overrightarrow{x_0}}{(\vec{x}-\overrightarrow{x_0})^2}$$ γ es un parámetro que haremos variar entre 0.1 y 0.7
	
	Ejecutar varias veces el código variando γ, la posición de la lente y el tamaño de la fuente. Probar con la fuente de anillos concéntricos.
	
	Describir lo que sucede cuando: (i) la lente está en el (0,0), (ii) la lente está ligeramente desalineada, (iii) la lente está muy desplazada.
	
	Representar los siguientes fenómenos: imagen doble, imagen cuádruple, arcos, anillo de Einstein.
	
	Hacer una animación en la que se vea como cambian las imágenes a medida que la lente se desplaza
		Para introducir la perturbación cuadrupolar, simplemente hay que substituir:
		
		`y1=x1-(x1-x01)/d2`
		`y2=x2-(x2-x02)/d2`
		
		Por
		
		`y1=x1*(1-gamma)-(x1-x01)/d2`
		`y2=x2*(1+gamma)-(x2-x02)/d2`

1.5. Esfera isoterma singular (SIS)	La esfera isoterma es la solución general asociada a una distribución Maxweliana de velocidades de las componentes de un sistema (estrellas en una galaxia, por ejemplo).
	
	Una solución particular de las ecuaciones para una distribución Maxweliana es la esfera isoterma singular (SIS). En el contexto de las lentes gravitatorias, esta solución se adopta para el bubo de las espirales, las elípticas y los cúmulos de galaxias.
	
	La ecuación de la lente para un SIS es:
	
	$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{\vec{x} - \overrightarrow{x_0}}{\lvert\vec{x} - \overrightarrow{x_0}\rvert}$$
	
	Para programarlo simplemente tendremos que substituir las ecuaciones de la lente puntual por las del SIS.
		Substituir las ecuaciones de la lente puntual:
		
		`d2=(x1-x01)^2+(x2-x02)^2`
		`y1=x1-(x1-x01)/d2`
		`y2=x2-(x2-x02)/d2`
		
		Por las del SIS:
		
		`d=sqrt((x1-x01)^2+(x2-x02)^2)`
		`y1=x1-(x1-x01)/d`
		`y2=x2-(x2-x02)/d`

1.6. Esfera isoterma singular con perturbación cuadrupolar	La perturbación cuadrupolar más sencilla del SIS es: $$\vec{x} \to \vec{y} = \begin{pmatrix} 1-\gamma & 0 \\ 0 & 1+\gamma \end{pmatrix}\vec{x} - \frac{\vec{x} - \overrightarrow{x_0}}{\lvert\vec{x} - \overrightarrow{x_0}\rvert}$$ γ es un parámetro que haremos variar entre 0.1 y 0.7 Ejecutar varias veces el código variando γ, la posición de la lente y el tamaño de la fuente. Probar con la fuente de anillos concéntricos. Describir lo que sucede cuando: (i) la lente está en el (0,0), (ii) la lente está ligeramente desalineada, (iii) la lente está muy desplazada. Representar los siguientes fenómenos: imagen doble, imagen cuádruple, arcos, anillo de	

	Einstein. Hacer una animación en la que se vea como cambian las imágenes a medida que la lente se desplaza	
1.7. Búsqueda de soluciones		
1.8. Comparación con sistemas de imágenes múltiples de quásares en la lista de CASTLES	Usando SIS+gamma intentar reproducir la geometría de las siguientes lentes gravitatorias: H1413+117 PG1115+080 B1422+231 B1938+666 B0631+519	Buscar las imágenes de los sistemas en la página web: http://www.cfa.harvard.edu/castles/
1.9. Animación para SIS y HDF	Leer una imagen del Hubble Deep Field y transformarla desplazando una lente SIS sobre la imagen.	
1.10. Comparación con arcos gigantes de la galería del HST		
2. Mapas de magnificación	Leer apartados 4.2 y 9.2 de la sección 4 del documento guía_alumnos.doc	
2.1. Código para calcular mapas de magnificación	Para calcular un mapa de magnificación nos olvidaremos de las matrices que representan el plano imagen, $I(j_1,j_2)$, y el plano fuente, $F(i_1,i_2)$, e introduciremos una nueva matriz en el plano fuente, $A(i_1,i_2)$, en la que vamos a ir sumando las áreas de los píxeles del plano imagen transportados inversamente al plano fuente. Lo primero que hay que hacer es inicializar a cero los valores de las matriz de magnificaciones: $A(i_1,i_2)=0$	Para poner a cero la matriz de magnificaciones substituimos: do i1=1,ny do i2=1,ny read (1,*) f(i1,i2) end do end do por: do i1=1,ny do i2=1,ny a(i1,i2)=0.0 end do end do

	Después modificaremos el código de trazado inverso de rayos substituyendo la asignación
	
	$I(j_1, j_2) = F(i_1, i_2)$
	
	por una nueva asignación:
	
	$A(i_1, i_2) = A(i_1, i_2) + 1$
	
	Con la que añadimos un área de tamaño (relativo) 1 al pixel del plano fuente.
	
	En este caso, si el "rayo" cae fuera de la matriz, simplemente lo ignoramos.
	
	Finalmente representaremos $A(i_1, i_2)$
		Es decir, substituiremos:
		
		if ((i1.ge.1).and.(i1.le.ny).and.(i2.ge.1).and.(i2.le.ny)) then
		i(j1,j2)=f(i1,i2)
		else
		i(j1,j2)=0
		end if
		
		por
		
		if ((i1.ge.1).and.(i1.le.ny).and.(i2.ge.1).and.(i2.le.ny)) then
		a(i1,i2)= a(i1,i2)+1.0
		end if

2.2. Mapa de magnificación para una lente puntual	El primer mapa de magnificación que podemos obtener y estudiar es el de una lente puntual. Para conseguir un mapa de magnificación consistente es necesario que el tamaño de la región de tiro (el tamaño del plano imagen) sea lo suficientemente grande. Es decir queremos que x_l sea grande. Por otra parte, para que la relación S/R del mapa sea buena tienen que llegar bastantes rayos por pixel al plano fuente. Por lo que nos gustaría que hubiera muchos píxeles en el plano imagen. Es decir queremos que $\frac{n_x}{x_l}$ sea grande. Finalmente, para que la resolución del mapa de magnificación sea buena, nos gustaría que hubiera bastantes píxeles en el plano fuente. Es decir queremos que $\frac{n_y}{y_l}$ sea grande. Obviamente, todos estos requerimientos no pueden alcanzarse simultáneamente sin evitar que el tiempo de computación se dispare. Se recomienda empezar por $\frac{n_y}{y_l}$ relativamente pequeño y variar los otyros parámetros hasta obtener	

	un mapa de baja resolución y después ir modificando todos los demás parámetros. El mapa de magnificación de una fuente puntual tiene que aparecer con simetría axial, con un máximo en el centro y con un decaimiento suave hacia afuera. Extraer diversos cortes de un mapa de magnificación. Estos cortes representan la variación en brillo de un objeto puntual (una estrella por ejemplo) cuando una lente (otra estrella o un MACHO, por ejemplo) cruzan por delante de ella. Leer los artículos clásicos de MACHOS sobre microlensing por una fuente puntual y comprobar que las curvas teóricas de microlensing que se presentan en estos artículos se parecen razonablemente a los cortes obtenidos del mapa de magnificación	 Alcock et al. 1993, Nature, 365, 621 Alcock et al. 2000, ApJ, 542, 281
2.3. Mapa de magnificación para una lente puntual con perturbación cuadrupolar	Calcular el mapa de magnificación para una lente puntual con perturbación cuadrupolar. Tiene que aparecer una curva de gran magnificación con forma de “diamante” (astroide) que se denomina cáustica. Variar los parámetros, si es necesario, para generar un mapa en el que la cáustica se vea entera y con buena relación S/R. Generar cortes en el mapa y comprobar que el cruce por una cáustica se traduce en un súbito cambio en la magnificación.	
2.4. Curvas cáusticas	Puesto que el mapa de magnificación corresponde al plano fuente, podemos repetir el ejercicio final del apartado 1.4. haciendo una animación en la que se vea como cambian las imágenes a medida que la lente	

	se desplaza sobre el mapa de magnificación correspondiente. ¿Qué pasa cuando la fuente está sobre la cáustica? ¿Cómo cambia el número de imágenes cuando la fuente atraviesa la cáustica?	
2.5. Mapa de magnificación para SIS+gamma	Calcular el mapa de magnificación para SIS+gamma. Al igual que en el punto 1.8. intentaremos reproducir la geometría de las siguientes lentes gravitatorias: H1413+117 PG1115+080 B1422+231 B1938+666 B0631+519 Pero ahora fijándonos en que posición ocupa la fuente sobre el mapa de magnificación. Intentar reproducir también la geometría de: SBS0909+532	
2.6. Mapa de magnificación para un sistema binario	Siguiendo el artículo clásico de Alcock et al. sobre eventos de microlensing binarios, calcular el mapa de magnificación para dos fuentes puntuales de diferentes separaciones y razones de masa. Reproducir algunos de los eventos presentados en el artículo (mapas de magnificación para reproducir las cáusticas y cortes para reproducir las curvas de luz de los eventos binarios). La ecuación de la lente para un sistema binario se escribe: $\vec{y} = \vec{x} - \epsilon_1 \frac{\vec{x} - \overrightarrow{x_1}}{(\vec{x} - \overrightarrow{x_1})^2} - \epsilon_2 \frac{\vec{x} - \overrightarrow{x_2}}{(\vec{x} - \overrightarrow{x_2})^2}$ donde $\overrightarrow{x_1}$ y $\overrightarrow{x_2}$ son las posiciones de los miembros del sistema binario y ϵ_1y ϵ_2 representan la “fuerza” relativa de cada miembro del sistema:	Alcock et al. 2000, ApJ, 541, 270

	$$\epsilon_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}$$ $$\epsilon_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2}$$ En la Tabla 2 de Alcock et al. 2000, se dan las separaciones, a, y los cocientes de masa, M_1/M_2, para los diferentes eventos de microlensing binario. Se recomienda escoger: $$\overrightarrow{x_1} = \left(-\frac{a}{2}, 0\right)$$ $$\overrightarrow{x_2} = \left(+\frac{a}{2}, 0\right)$$	
2.7. Microlensing de planetas	Leer el artículo de Nature en el que se discute la posible detección de un planeta de 5.5 masas solares a partir del estudio de un evento de microlensing. En la Tabla 1 de este artículo pueden encontrarse la separación entre la estrella y el planeta y el cociente de masas. Se recomienda empezar trazando mapas con un cociente de masas mucho mayor e ir disminuyendo poco a poco el cociente hasta llegar al valor requerido. De esta manera se podrá ver que se necesita re-centrar el mapa y aumentar la resolución. Obtener la curva de luz. Buscar en la bibliografía otras detecciones de planetas a partir de eventos de microlensing e intentar reproducir los mapas de magnificación y las curvas de luz.	Nature 439, 437-440 (26 January 2006)
2.8. Simulación de microlensing en quásares		