

A S T R O F Í S I C A

C O M P U T A C I O N A L

E v e n c i o M e d i a v i l l a G r á d o l p h

L e n t e s G r a v i t a t o r i a s

Marzo 2013

1. Programa detallado

<p>9. Técnicas Computacionales</p> <p>9.1. Trazado inverso de rayos.</p> <p>9.1.1. Cálculo de imágenes con el trazado inverso de rayos.</p> <p>9.1.2. Soluciones numéricas a la ecuación de la lente</p> <p>9.1.3. Fuentes puntuales y extensas</p>	<p>En el apartado 9.1. se explica que la ecuación de la lente es multivaluada y en general de difícil solución pero que su inversa es unívoca y que puede aprovecharse para simular el efecto lente, introduciendo la técnica del trazado inverso de rayos.</p> <p>A continuación (9.1.1. y 9.1.2.) Los alumnos escribirán un programa (FORTRAN, IDL, etc.) que dispare un rayo desde el centro de cada uno de los píxeles del plano de la imagen al plano de la fuente (es decir, haga el transporte inverso de los centros de los píxeles del plano imagen al plano fuente), tome el valor del píxel en el plano de la fuente en el que impacta el rayo y lo asigne (transporte) al píxel del plano imagen.</p> <p>Este programa lo desarrollarán en primer lugar para una transformación identidad. De esta manera la matriz de la imagen deberá ser idéntica a la de la fuente. Se les sugerirá utilizar en primer lugar una matriz del plano fuente con todos los valores a cero excepto: (a) un píxel, (b) una región cuadrada y (c) finalmente una región circular. En esta etapa los alumnos depurarán los errores del programa y se familiarizarán con los aspectos técnicos del trazado inverso de rayos.</p> <p>En la siguiente actividad (9.1.3.) los alumnos deben cambiar la transformación identidad introduciendo un deflector que les permitirá considerar los casos de lente puntual, binaria, tres o más fuentes puntuales, lente puntual con distorsión (lente de Chang-Refsdal), SIS, SIS + distorsión.</p> <p>Los alumnos empezarán considerando una fuente circular y una lente puntual y desplazarán la fuente respecto a lente para comprobar como dependiendo del grado de alineamiento fuente/lente se forman imágenes dobles, como se deforman las imágenes y como aparece el anillo de Einstein cuando el alineamiento es perfecto. Repetirán este estudio añadiendo una distorsión ("shear") comprobando que la pérdida de simetría en la lente genera 4 imágenes cuando fuente y deflector están suficientemente alineados.</p> <p>Uno de los objetivos de esta sección es que los alumnos se den cuenta de que el trazado inverso de rayos es un procedimiento numérico, una simulación, que permite encontrar las soluciones a la ecuación de la lente. Para ello pueden utilizar la solución analítica derivada para el caso de lente y fuente puntuales (lente de Schwarzschild, 5.3.) y chequear las posiciones de las imágenes derivadas con el programa de trazado inverso. Los alumnos cambiarán los parámetros de la simulación (número de píxeles en el plano imagen y en el plano fuente y tamaño de la imagen) para estudiar el impacto que tienen estos parámetros en la determinación de las posiciones de las imágenes y en el tiempo de ejecución. Partiendo de la deformación de las imágenes como motivación, los alumnos deberán comprender la limitación que establece el tamaño finito de píxel en los resultados. Una consecuencia que deben saber explicar es la pérdida de imágenes debido a la curvatura de los lados de los píxeles bajo los efectos de la transformación de la lente.</p> <p>Utilizando IDL es bastante fácil realizar una película del plano imagen correspondiente al desplazamiento de una fuente circular extensa respecto a una lente cuádrupolar (puntual+distorsión o SIS+distorsión). En la secuencia de imágenes se aprecia como a medida que cambia el grado de alineamiento fuente/lente las dos imágenes iniciales se van deformando hasta que se transforman en cuatro imágenes y después en un anillo de Einstein. También puede tomarse como fuente el "Hubble Deep Field" y pasar por delante una lente gravitatoria que vaya deformando las galaxias en el campo.</p>
---	---

<p>9.1.4. Aplicaciones: imágenes múltiples de quásares y arcos gigantes en cúmulos</p>	<p>El programa de trazado de rayos que se ha desarrollado se utiliza en esta sección (9.1.4.) como herramienta para estudiar y reproducir la fenomenología de las lentes gravitatorias asociada a datos reales de imágenes múltiples de quásares y arcos gigantes en cúmulos.</p> <p>Los alumnos acceden a la página de la red de CASTLES, examinan las imágenes de lentes gravitatorias tomadas por el HST de los sistemas múltiples de imágenes de quásares conocidos e identifican la tipología usual: dobles, cuádruples (simétricos y asimétricos), arcos y anillos de Einstein.</p> <p>A continuación los alumnos usan el programa de trazado de rayos con la ecuación de la lente correspondiente a SIS+distorsión para intentar reproducir toda esta fenomenología en casos concretos variando la posición relativa entre la fuente y la lente (y la distorsión y/o el tamaño de la lente en los casos en que sea necesario).</p> <p>De la misma manera, los alumnos buscan en la página de la red del HST imágenes de arcos gigantes e intentan generar resultados similares a los observados disponiendo más de una fuente circular en el plano fuente. Alternativamente, pueden utilizar un campo de galaxias (el HDF, por ejemplo) como fuente (tal y como se describe en el último párrafo del apartado 9.1.3.).</p>
<p>9.2. Cálculo de mapas de magnificación con el trazado inverso de rayos.</p>	<p>El apartado 9.2. comienza con una introducción teórica básica sobre el cálculo de la magnificación. Se analizan las propiedades topológicas de la ecuación de la lente. Los alumnos deberán entender que puesto que la ecuación de la lente inversa es una aplicación (unívoca por tanto) las imágenes no pueden solaparse ya que a un punto en el espacio imagen corresponderían dos puntos diferentes en el espacio fuente. Es decir los difeomorfismos tienen que establecerse entre el espacio fuente y subespacios disjuntos (imágenes del espacio fuente). En cada uno de estos subespacios podemos invertir la ecuación de la lente y establecer una aplicación biunívoca y bidiferenciable con el espacio fuente. En las fronteras entre subespacios los difeomorfismos no pueden ser invertibles y su Jacobiano tiene que anularse (curvas críticas y cáusticas).</p> <p>Los alumnos comprenderán como se construyen mapas de magnificación a partir de descomponer el plano imagen en una partición de celdas congruentes que son transportadas al plano fuente. Se propone el "Inverse Ray Shooting" como una aproximación razonable en la que se adjudica el área de cada celda al pixel en el que cae el rayo correspondiente al centro de la celda.</p>
<p>9.2.1. Curvas críticas y cáusticas. Número de imágenes</p>	<p>El siguiente paso consistirá en modificar el programa de formación de imágenes para calcular mapas de magnificación. Con este programa (9.2.1) los alumnos obtendrán mapas de magnificación para diferentes fuentes y verán como aparecen las cáusticas. Representarán simultáneamente los planos de la fuente y de la imagen y verán como las posiciones relativas entre cáusticas y fuente dan lugar a la fenomenología habitual (dobles, cuádruples (simétricos y asimétricos), arcos y anillos de Einstein). Comprobarán de una manera práctica los teoremas sobre número y tipo de imágenes.</p>
<p>9.2.2. Simulaciones de curvas de luz a partir de mapas de magnificación. Aplicaciones: MACHOS, exoplanetas y "microlensing" en imágenes múltiples de quásares</p>	<p>En la siguiente actividad (9.2.2.) los alumnos obtendrán curvas de luz como cortes 1-D de los mapas de magnificación. Se les suministrarán los artículos clásicos de la colaboración MACHOS con las observaciones de los primeros eventos atribuibles a microlensing por una estrella. Se les instará a reproducirlos utilizando un mapa de magnificación para una fuente puntual.</p> <p>De igual manera, se les suministrarán los artículos de MACHOS sobre detección de eventos binarios. Utilizando los resultados de este artículo generarán mapas de magnificación correspondientes a las configuraciones de binarias determinadas en los artículos a partir de un procedimiento analítico-numérico y comprobarán que pueden reproducir las curvas de luz de los eventos. Los alumnos deben comprender que para ajustar directamente las configuraciones a partir de los mapas habría que llevar a cabo simulaciones muy costosas en tiempo. Los alumnos diferenciarán</p>

<p>9.3. Analisis Bayesiano de las simulaciones. Aplicaciones: discos de acreción en quásares.</p>	<p>entre determinaciones de los parámetros de las binarias basadas en soluciones analíticas, analítico-numéricas y simulaciones.</p> <p>Los alumnos seguirán estudiando el caso de un deflector binario e irán disminuyendo progresivamente la masa de una de las componentes de la binaria hasta llegar al caso estrella-planeta. Los alumnos reproducirán los ejemplos descritos en los artículos clásicos sobre la detección de planetas, estudiando la estructura de cáusticas y las posibilidades de detección. Para ello obtendrán algunas curvas de luz realistas y calcularán los tiempos y cambios de luminosidad implicados.</p> <p>Finalmente, los alumnos generarán mapas a partir de distribuciones de 10 o más microlentes obteniendo curvas de luz para objetos con perfil de luminosidad Gaussianos de diferentes tamaños efectivos con el objetivo de reproducir las curvas de luz experimentales de microlensing y discutir la posibilidad de estudiar el tamaño de la fuente del continuo en los quásares.</p> <p>Los alumnos convolucionarán con fuentes Gaussianas de diferentes tamaños un mapa de magnificación (ver sección anterior) correspondiente a una distribución de microlentes realista. Para cada uno de los mapas resultantes tras la convolución obtendrán el histograma de magnificaciones que interpretarán como la verosimilitud de las magnificaciones para una fuente de un tamaño dado. A partir de la medida realmente observada de la magnificación del quásar y de las funciones de verosimilitud y aplicando el teorema de Bayes obtendrán estimaciones para el valor esperado del tamaño del disco de acreción del quásar y su incertidumbre. Este cálculo lo harán para un prior lineal y para un prior logarítmico.</p>
---	--

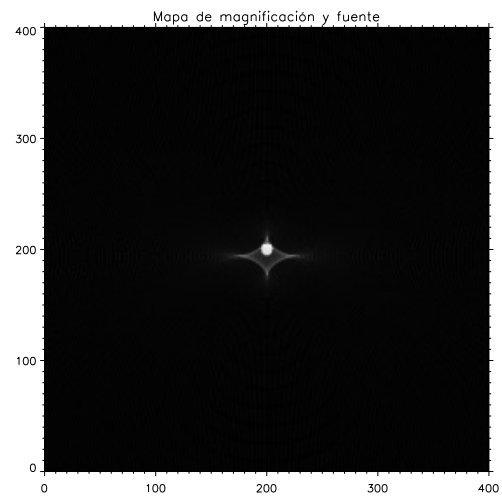
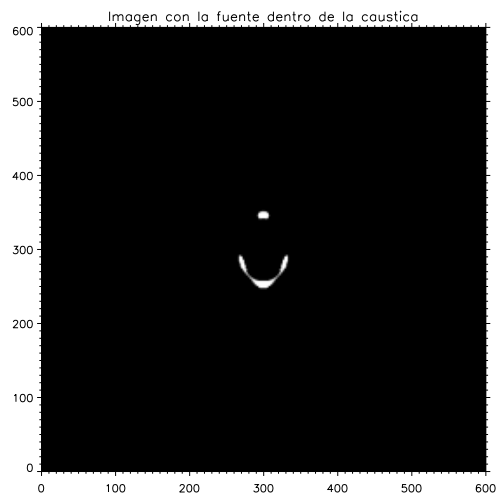
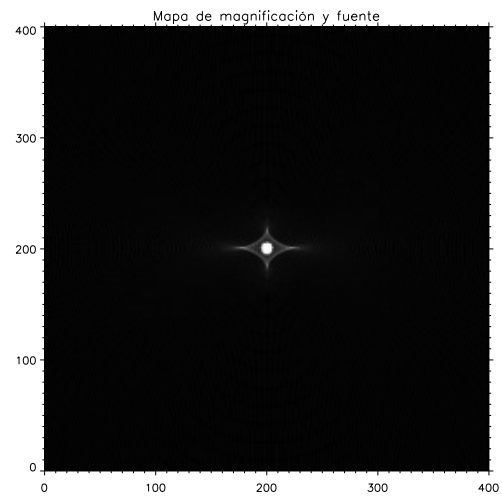
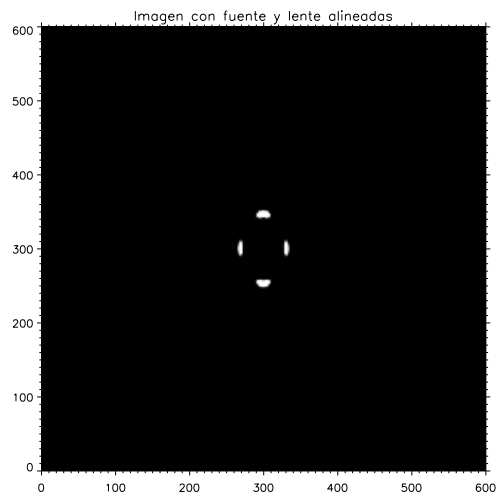
2. Código de trazado inverso de rayos

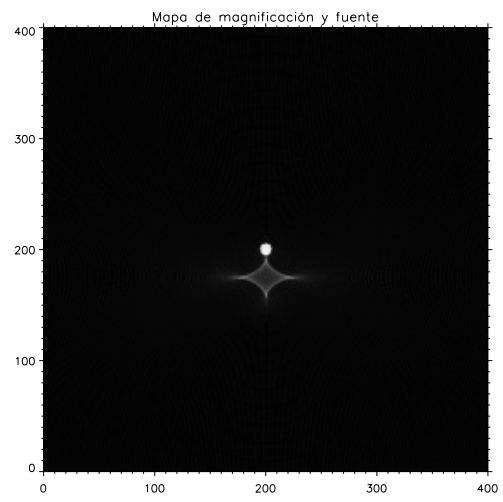
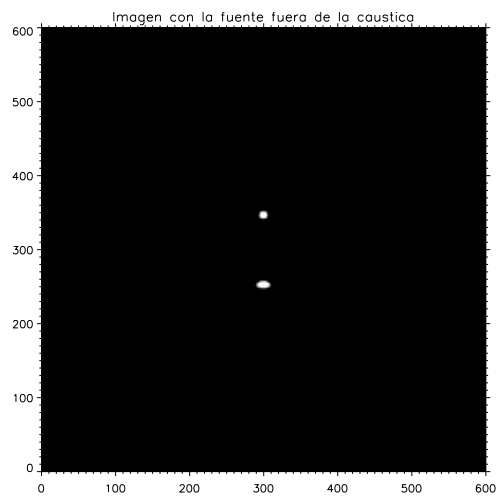
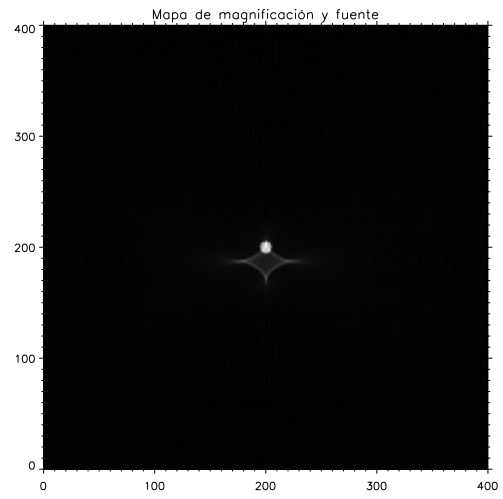
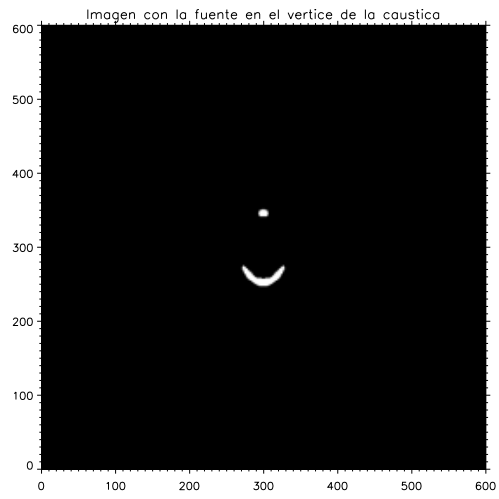
Título de la actividad	Simulación de la imagen de una fuente extensa utilizando el <i>trazado inverso de rayos</i>
Propósito	El objetivo de la simulación es explorar numéricamente utilizando el <i>trazado inverso de rayos</i> la deformación que una o varias lentes gravitatorias puntuales inducen en una imagen dependiendo de la posición relativa ente el observador la(s) lente(s) y la fuente.
Fundamentos	<p>La ecuación adimensional de la lente se escribe $\vec{y} = \vec{x} - \alpha(\vec{x})$. Donde $\vec{y} = (y_1, y_2)$ son las coordenadas de la fuente y $\vec{x} = (x_1, x_2)$ las de la(s) imagen(es). Dependiendo de la relación explícita entre el ángulo de deflexión α y \vec{x}, $\alpha(\vec{x})$, y de la posición de la fuente, \vec{y}, la ecuación de la lente tendrá una o varias soluciones, $\vec{x}(\vec{y})$, (imágenes). La ecuación de la lente no es, en general, invertible analíticamente y obtener las soluciones, $\vec{x}(\vec{y})$, puede ser un problema de cálculo numérico complicado.</p> <p>Sin embargo, el efecto de una lente gravitatoria se puede simular recurriendo al <i>trazado inverso de rayos</i>. Sea $I(x_1, x_2)$ la matriz de píxeles que define a la imagen. La ecuación de la lente nos permite obtener unívocamente las coordenadas del punto $(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2))$ en el plano de la imagen desde el que salió el rayo que llegó al punto (x_1, x_2) (<i>trazado inverso de rayos</i>). Para obtener el valor de la imagen en ese punto se hace: $I(x_1, x_2) = F(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2))$, donde $F(y_1, y_2)$ es la matriz que representa la fuente.</p> <p>En el caso de una lente puntual situada en el punto \vec{x}_0 el ángulo de deflexión viene dado, en unidades adimensionales, por $\alpha = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{ \vec{x} - \vec{x}_0 ^2}$ y la ecuación de la lente sería una ecuación de segundo grado fácilmente resoluble. Cuando hay N lentes puntuales de la misma masa situadas en posiciones \vec{x}_i el ángulo de deflexión en la aproximación de lente delgada viene dado por $\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{ \vec{x} - \vec{x}_i ^2}$. En este caso, la solución es mucho más difícil de obtener y es preferible recurrir al <i>trazado inverso de rayos</i>.</p>
Imagen de una fuente por una lente puntual (desarrollo del programa paso a paso)	<p>(i) Comenzaremos leyendo la imagen FITS de la fuente como una matriz $f(i1, i2)$ de dimensiones $n \times n$. A la imagen le haremos corresponder una matriz $i(j1, j2)$ de dimensiones $m \times m$. m debe ser mayor (3 veces por ejemplo) que n.</p> <p>(ii) Hay que definir las escalas relativas en el plano de la fuente y de la imagen. Estas escalas están relacionadas</p>

	<p>con la masa de la lente y la geometría del problema. Podemos elegir, por ejemplo, $x_l=8$ e $y_l=4$. Variando estas escalas podemos conseguir efectos diferentes.</p> <p>(iii) Utilizando estas escalas y el número de píxeles calculamos el tamaño de un píxel en los planos de la imagen y de la fuente: $x_s=2*x_l/(n_x-1)$; $y_s=2*y_l/(n_y-1)$.</p> <p>(iv) Recorremos las variables j_1, j_2 (do $j_1=1, n_x$; do $j_2=1, n_x$).</p> <p>(v) Obtenemos las coordenadas referidas a cada píxel: $x_1=-x_l+(j_1-1)*2*x_l/(n_x-1)$; $x_2=-x_l+(j_2-1)*2*x_l/(n_x-1)$.</p> <p>(vi) Aplicamos la ecuación de la lente para una partícula puntual obteniendo (y_1, y_2).</p> <p>(vii) Obtenemos los píxeles correspondientes en el plano de la fuente: $i_1=(y_1+y_l)/y_s+1$; $i_2=(y_2+y_l)/y_s+1$</p> <p>(viii) Si i_1 e i_2 están contenidos en el rango $1, n$ hacemos la asignación: $I(j_1, j_2)=F(i_1, i_2)$ en caso contrario hacemos $I(j_1, j_2)=cte$ arbitraria (el fondo de cielo...).</p> <p>(ix) Cuando hayamos recorrido todas las valores de j_1 y j_2 escribimos una imagen FITS a partir de $I(j_1, j_2)$.</p> <p>(x) Ejecutamos varias veces el programa variando la posición de la lente y las escalas relativas de los planos de la fuente y de la imagen para explorar la influencia de estos parámetros.</p>
Imagen de una fuente por un conjunto de lentes puntuales	Cambiamos en el programa anterior la ecuación de una lente puntual por la de un conjunto de lentes puntuales. Es conveniente comenzar por 2 lentes y luego probar con un número mayor.
Ejemplo de programa FORTRAN (comentado)	<pre> dimension a(1000,1000), b(2000,2000) open(1,file='fuente') open(2,file='imagen') c x10a=-1 !coordenada x de la lente a x10b=2 !coordenada x de la lente b nx=1001 !numero de pixeles de la imagen ny=388 !numero de pixeles de la fuente xl=8 !tamaño físico del lado de la imagen yl=4 !tamaño físico del lado de la fuente xs=2*xl/(nx-1) !tamaño de un pixel en la imagen ys=2*yl/(ny-1) !tamaño de un pixel en la fuente c !leemos la fuente c do i=1,ny do j=1,nx read (1,*) a(i,j) end do end do c !muestreamos la fuente pixel a pixel c do j1=1,nx do j2=1,nx c !transformamos los pixeles a coordenadas c x1=-xl+(j1-1)*2*xl/(nx-1) x2=-xl+(j2-1)*2*xl/(nx-1) c </pre>

	<pre> !calculamos y aplicamos la transformación inversa de la lente !cuando se consideren dos lentes hay que idescomentar "-x1/xm2b" y "-(x2-x10b)/xm2b" c xm2a=x1*x1+(x2-x10a)*(x2-x10a)+0.0001 xm2b=x1*x1+(x2-x10b)*(x2-x10b)+0.0001 y1=x1-x1/xm2a!-x1/xm2b y2=x2-(x2-x10a)/xm2a!-(x2-x10b)/xm2b c !transformamos las coordenadas "y" a pixeles c i1=(y1+y!)/ys+1 i2=(y2+y!)/ys+1 c !comprobamos que caen dentro de la fuente. si no les damos un valor arbitrario c if ((i1.ge.1).and.(i1.le.ny).and.(i2.ge.1).and.(i2.le.ny)) then b(j1,j2)=a(i1,i2) else b(j1,j2)=0 end if write (2,*) b(j1,j2) end do end do end </pre>
--	---

3. Figura (Ejemplo)





4. Apuntes sobre lentes gravitatorias

1.1. Espejismos gravitatorios

Aunque el término lente gravitatoria sea el más usado por los astrónomos para describir este tipo de fenómenos, la expresión espejismo gravitatorio se aproxima mejor a su naturaleza.

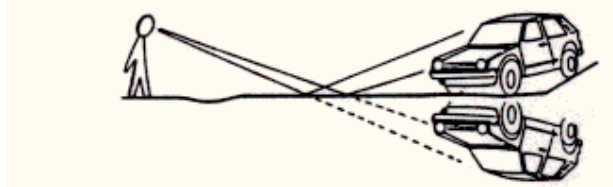


Figura 10.1: Propagación de rayos de luz sobre una carretera caliente entre un coche distante y un observador (tomado de <http://www.jb.man.ac.uk/merlin/press/PR9801/picture2.html>).

Los espejismos atmosféricos ocurren cuando hay una modificación del camino que sigue la luz debido a una variación del índice de refracción. Según el principio de Fermat la luz tiende a buscar el camino más rápido entre dos puntos, es decir, sigue una trayectoria que hace estacionario el tiempo que emplea en conectar los dos puntos (camino óptico). En casos normales, si hay una sola imagen, ésta corresponde a un mínimo. Pero el camino más rápido en la atmósfera terrestre no suele ser una línea recta. Como su velocidad es mayor en el aire frío, para ir más rápido la luz sigue una trayectoria curva buscando las capas más frías de la atmósfera.

Cuando miramos un coche al final de una carretera ardiente, observamos que la imagen parece no quedarse nunca quieta, que se deforma continuamente. Esto es debido a que el aire caliente cerca del suelo tiende a elevarse mezclándose turbulentamente con el más frío de las capas superiores, y cambiando sin parar los caminos ópticos entre el coche y nosotros. En determinadas circunstancias, cuando los cambios de temperatura son muy fuertes y el objeto y el observador están muy lejos, la luz puede encontrar más de un camino para conectar objeto y observador. En ese caso podemos ver más de una imagen de un objeto lejano, y tiene lugar ese espectacular fenómeno de la curvatura de los rayos de luz que es un espejismo terrestre (Figuras 10.1 y 10.2).

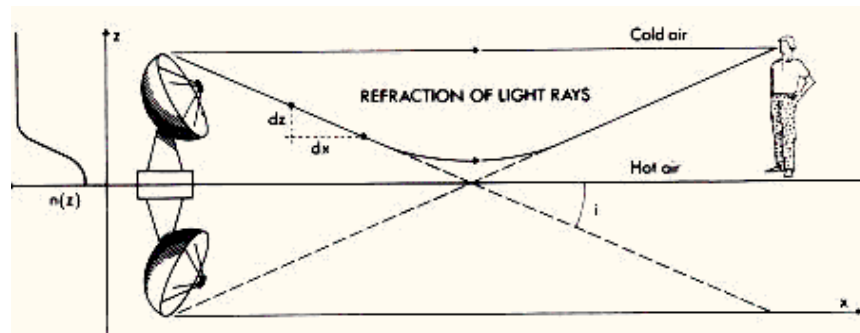


Figura 10.2: Formación de espejismos atmosféricos a través de una atmósfera caracterizada por una distribución índice de refracción $n(z)$. (Tomado de <http://www.jb.man.ac.uk/merlin/press/PR9801/picture2.html>).

Podemos decir que las variaciones en la posición aparente y en la forma de los objetos son efectos débiles de la curvatura de los rayos de luz cuando los comparamos con la aparición de imágenes múltiples en los espejismos (efectos fuertes de la curvatura de los rayos de luz).

La gravedad también puede actuar desviando los rayos de luz. De hecho, uno de los

resultados más sobresalientes de la Teoría General de la Relatividad de Einstein es la deflexión de la luz. Esta predicción de la teoría de Einstein se comprobó en uno de los experimentos más famosos del Siglo XX. Aprovechando el eclipse de Sol de 1919, se midió el desplazamiento de las posiciones aparentes de las estrellas inducido por el campo gravitatorio del Sol. A pesar de su gran importancia como prueba de la Teoría General de la Relatividad, la desviación de la luz de las estrellas por el Sol es un efecto débil de la curvatura de los rayos de luz, similar a la variación aparente de la altura de las montañas en la atmósfera terrestre.

Con el descubrimiento de las galaxias, los astrónomos se dieron cuenta de que el enorme campo gravitatorio de estos objetos (cientos de miles de millones de veces más masivos que el Sol) podría inducir efectos de curvatura fuertes análogos a los espejismos terrestres. Sin embargo, tuvieron que pasar más de sesenta años desde la famosa expedición al eclipse de Eddington para que los astrónomos descubrieran una imagen doble de un quásar muy lejano causada por el campo gravitatorio de una galaxia más cercana que actúa como lente gravitatoria. En la actualidad se conocen más de un centenar de espejismos gravitatorios de este tipo con 2, 4 y hasta 10 imágenes. En algunas ocasiones, cuando el quásar y la galaxia están muy bien alineados, no se observa un número discreto de imágenes, sino un anillo continuo o roto en varios arcos (anillo de Einstein).

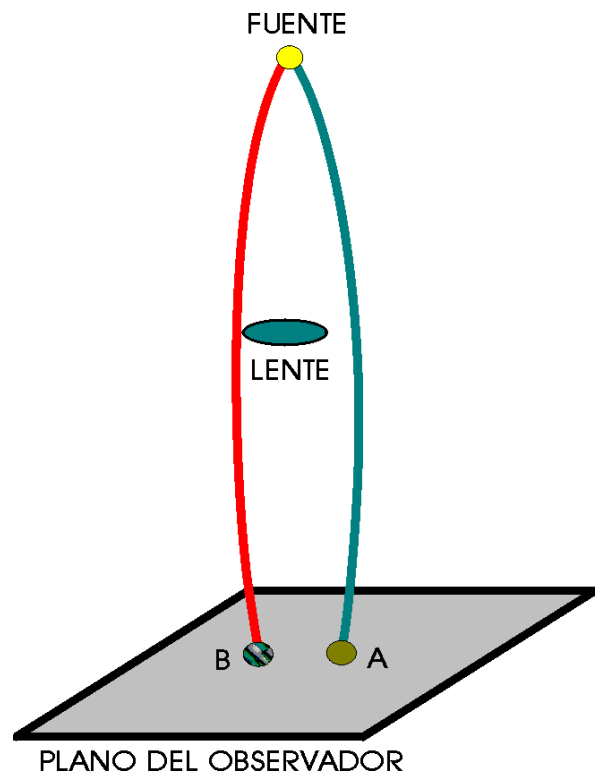


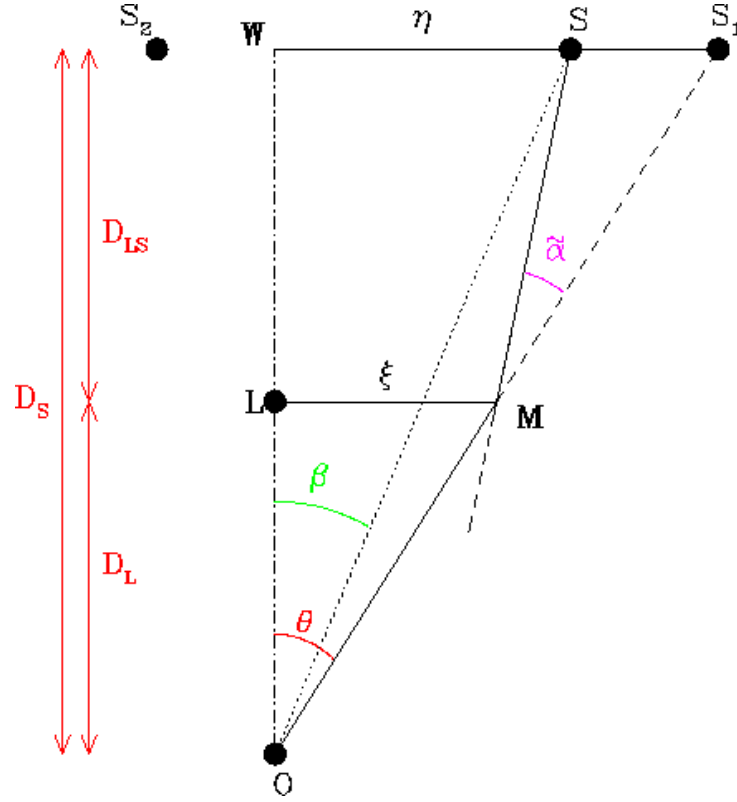
Figura 10.3: Espejismo gravitatorio.

En un espejismo gravitatorio la gravedad es la responsable de la curvatura de la luz. Como podemos ver en la Figura 10.3 una galaxia actúa como lente produciendo dos imágenes (invertidas, deformadas y magnificadas) de un objeto muy lejano (un quásar). El principal interés de estos espejismos es su uso como herramienta en Astrofísica y Cosmología ya que permiten medir la cantidad de masa en los objetos que actúan como lente (a mayor masa mayor curvatura), un asunto de crucial importancia cuando parece que casi toda la materia del universo es invisible y de naturaleza desconocida.

3. Ecuación de la lente*

Sea S una fuente lejana (un quásar, por ejemplo) y sea L un objeto (una galaxia por ejemplo) que crea un campo gravitatorio. O es el observador. Al plano que contiene la lente le llamamos plano de la lente o plano imagen y al que contiene a la fuente, plano de la fuente.

Si la galaxia no generara un campo gravitatorio, la luz iría de la fuente, S, hasta el observador, O, siguiendo la línea recta que une a estos dos puntos (línea discontinua SO).



Esta trayectoria formaría un ángulo β con el eje óptico o línea que une al observador con la lente (OL). Sin embargo, en presencia del campo gravitatorio de la galaxia (L) este rayo de luz se vería atraído por la galaxia y no seguiría la trayectoria recta SO sino que se curvaría acercándose a L y nunca alcanzaría al observador.

El rayo de luz que conectaría la fuente con el observador en presencia de la galaxia que actúa como lente gravitatoria seguiría una trayectoria curva que puede aproximarse suficientemente bien por dos rectas (líneas continuas SM y MO). El observador vería que la luz le llega en la dirección MO con un ángulo θ respecto al eje óptico OL y asignaría una posición S1 a la fuente. α es el ángulo de deflexión, que forman la trayectoria inicial del rayo, SM, con la final, MO.

En el plano de la fuente,

$$\eta = WS_1 - SS_1$$

teniendo en cuenta que por semejanza de triángulos,

$$\frac{WS_1}{D_S} = \frac{\xi}{D_L},$$

y que debido a que los ángulos implicados son muy pequeños en el triángulo MSS1 se cumple

$$\alpha = \frac{SS_1}{D_{LS}},$$

	<p>podemos escribir,</p> $\eta = \frac{D_S}{D_L} \xi - D_{LS} \alpha,$ <p>o,</p> $\eta \frac{D_L}{D_S} = \xi - \frac{D_{LS} D_L}{D_S} \alpha$
4. Propiedades de la ecuación de la lente*	
4.1. Ecuación de la lente re-escalada*	<p>La ecuación de la lente puede escribirse vectorialmente,</p> $\vec{\eta} \frac{D_L}{D_S} = \vec{\xi} - \frac{D_{LS} D_L}{D_S} \hat{\alpha}(\vec{\xi}).$ <p>Para obtener una ecuación adimensional dividiremos todos los términos de la ecuación por una escala de distancias característica en el plano imagen ξ_0, que será escogida convenientemente de acuerdo con el tipo de lente,</p> $\vec{\eta} \frac{D_L}{D_S} \frac{1}{\xi_0} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_0} - \frac{D_{LS} D_L}{D_S} \frac{1}{\xi_0} \hat{\alpha}(\vec{\xi}).$ <p>A la cantidad $\frac{D_S}{D_L} \xi_0$ que representa la escala característica ξ_0 proyectada en el plano de la fuente la llamamos $\eta_0 \equiv \frac{D_S}{D_L} \xi_0$. Con esta definición la ecuación de la lente se escribe</p> $\frac{\vec{\eta}}{\eta_0} = \frac{\vec{\xi}}{\xi_0} - \frac{D_{LS} D_L}{D_S} \frac{1}{\xi_0} \hat{\alpha}(\vec{\xi}),$ <p>e introduciendo las coordenadas adimensionales, $\vec{y} \equiv \frac{\vec{\eta}}{\eta_0}$ y $\vec{x} \equiv \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}$, se obtiene,</p> $\vec{y} = \vec{x} - \frac{D_{LS} D_L}{D_S} \frac{1}{\xi_0} \hat{\alpha}(\vec{\xi}).$ <p>Conviene definir también el ángulo de deflexión adimensional</p> $\vec{\alpha}(\vec{x}) = \frac{D_{LS} D_L}{D_S} \frac{1}{\xi_0} \hat{\alpha}(\vec{\xi} = \xi_0 \vec{x}),$ <p>con el que, finalmente, se escribe la ecuación adimensional de la lente,</p>

	$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}) .$ <p>En secciones posteriores introduciremos en esta ecuación el ángulo de deflexión, $\hat{\alpha}(\vec{\xi})$, para diferentes tipos de lente.</p>
<p>4.2. <i>Magnificación y curvas críticas*</i></p>	<p>La modificación que un campo gravitatorio induce en la trayectoria de los rayos de luz depende de la trayectoria de cada rayo. Esta deflexión diferencial de los rayos de luz produce cambios en los tamaños de las imágenes de una fuente.</p> <p>El flujo por unidad de frecuencia de un elemento diferencial de una imagen extensa, dF_ν, viene dado por,</p> $dF_\nu = I_\nu d\Omega ,$ <p>donde I_ν es la intensidad por unidad de frecuencia y $d\Omega$ es el ángulo sólido que subtiende un elemento diferencial de la imagen,</p> $d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{n}}{r^2} ,$ <p>donde $d\vec{S} \cdot \vec{n}$ es un elemento diferencial de superficie de la fuente proyectado en la dirección de visión del observador y r es la distancia del observador a la fuente.</p> <p>En ausencia de campo gravitatorio que altere la trayectoria de los rayos de luz, el elemento diferencial proyectado de la superficie de la imagen viene dado simplemente por,</p> $(d\vec{S} \cdot \vec{n})_0 = dy^1 dy^2$ <p>En presencia de un campo gravitatorio las trayectorias de la luz se modifican según la ecuación de la lente, $\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x})$, y el elemento diferencial de superficie proyectado se escribe</p> $d\vec{S} \cdot \vec{n} = dx^1 dx^2 .$ <p>La magnificación, μ, se define como el cociente entre el flujo recibido del elemento diferencial de la imagen en presencia del campo gravitatorio y el flujo que se recibiría en ausencia de campo gravitatorio,</p> $\mu = \frac{dF_\nu}{(dF_\nu)_0} = \frac{dx^1 dx^2}{dy^1 dy^2} ,$ <p>ya que I_ν / ν^3 es un invariante y el efecto lente gravitatoria no afecta a la frecuencia. Luego el factor de magnificación mide la variación de un elemento diferencial de área inducida por el efecto lente gravitatoria.</p> <p>Para una fuente extensa, la magnificación vendría dada por,</p> $\mu = \frac{dF_\nu}{(dF_\nu)_0} = \frac{\sum_i \int_{I_i} dx^1 dx^2}{\int_F dy^1 dy^2} ,$

	<p>donde la integral del denominador se extiende a la superficie de la fuente e i recorre todas las imágenes de la fuente.</p> <p>De acuerdo con el teorema del cambio de variables la transformación entre las diferenciales de superficie viene dada por el determinante,</p> $dy^1 dy^2 = dx^1 dx^2 \left \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right ,$ <p>y, la magnificación se escribe,</p> $\mu = \left \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right ^{-1} \equiv A^{ij} ^{-1}.$ <p>De acuerdo con la ecuación de la lente,</p> $A^{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \delta_j^i - \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^j}$ <p>Es habitual escribir las derivadas del ángulo de deflexión en función de dos parámetros, la convergencia, κ, y la distorsión ("shear"), γ,</p> $A^{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} = \delta_j^i - \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}.$ <p>Los puntos en los que $A = 0$ tienen teóricamente magnificación infinita. Estos puntos forman las curvas críticas en el plano de la lente. Las localizaciones correspondientes en el plano de la fuente son las cáusticas.</p>
5. Modelos de lente*	
5.3. La lente de Schwarzschild *	<p>El ángulo de deflexión, $\hat{\alpha}(\vec{\xi})$, para un deflector puntual situado en una posición $\vec{\xi}_1$, viene dado por</p> $\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4GM}{c^2} \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_1}{ \vec{\xi} - \vec{\xi}_1 ^2},$ <p>donde G es la constante de la gravitación universal, M la masa de la lente puntual y c la velocidad de la luz.</p> <p>Si insertamos este resultado en la ecuación de la lente obtenemos</p> $\vec{y} = \vec{x} - \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS} D_L}{D_S} \frac{1}{\xi_0} \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_1}{ \vec{\xi} - \vec{\xi}_1 ^2},$ <p>o, usando coordenadas adimensionales $\vec{x} \equiv \frac{\vec{\xi}}{\xi_0}$, $\vec{x}_1 \equiv \frac{\vec{\xi}_1}{\xi_0}$,</p>

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS} D_L}{D_S} \frac{1}{\xi_0^2} \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^2}.$$

Si, ahora, escogemos

$$\xi_0 \equiv \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS} D_L}{D_S}}, \text{ (radio de Einstein)}$$

obtenemos,

$$\vec{y} = \vec{x} - \frac{\vec{x} - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^2}.$$

Nótese que esta expresión se ha derivado tomando como escala característica en el plano de la imagen el radio de Einstein de una masa puntual de masa M .

Si escogemos $\vec{x}_1 = \vec{0}$ e $\vec{y} = (y, 0)$, las dos soluciones de esta ecuación de segundo grado son:

$$\vec{x}_{\pm} = \left(\frac{1}{2} [y \pm \sqrt{y^2 + 4}], 0 \right).$$

Cuando $y = 0$, la solución es el círculo $|\vec{x}|^2 = 1$, esto es, el anillo de Einstein.

Supongamos una distribución de lentes puntuales de masas M_i , situadas en posiciones \vec{x}_i . Cada una de las lentes contribuirá a la deflexión con

$$\hat{\alpha}_i(\vec{\xi}) = \frac{4GM_i}{c^2} \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_i}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_i|^2}$$

la suma de todas estas deflexiones será,

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4GM}{c^2} \sum_i \frac{M_i}{M} \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_i}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_i|^2}.$$

Si introducimos este valor del ángulo de deflexión en la ecuación de la lente, la escribimos en coordenadas adimensionales y elegimos,

$$\xi_0 \equiv \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS} D_L}{D_S}}, \text{ (radio de Einstein para una fuente puntual de una masa } M \text{ de}$$

referencia, típicamente la del Sol), se obtiene, finalmente,

$$\vec{y} = \vec{x} - \sum_i \frac{M_i}{M} \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^2}$$

<p>5.4. <i>La esfera isoterma singular*</i></p>	<p>El ángulo de deflexión para una esfera isoterma singular centrada en el origen viene dado por</p> $\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{\vec{\xi}}{ \vec{\xi} },$ <p>o en coordenadas adimensionales,</p> $\hat{\alpha}(\vec{x}) = \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{\vec{x}}{ \vec{x} }.$ <p>Substituyendo en la ecuación de la lente obtenemos,</p> $\vec{y} = \vec{x} - \frac{D_{LS}D_L}{D_S} \frac{1}{\xi_0} \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{\vec{x}}{ \vec{x} },$ <p>que si definimos</p> $\xi_0 \equiv \frac{4\pi\sigma_v^2}{c^2} \frac{D_{LS}D_L}{D_S},$ <p>se escribe simplemente,</p> $\vec{y} = \vec{x} - \frac{\vec{x}}{ \vec{x} }.$ <p>Si escogemos $\vec{y} = (y, 0)$ esta ecuación tiene dos soluciones $\vec{x}_1 = (1 + y, 0)$ y $\vec{x}_2 = (-1 + y, 0)$ para $y < 1$. Si $y > 1$ hay una única solución $\vec{x} = (1 + y, 0)$.</p>
<p>5.6. <i>La lente cuadrupolar*</i></p>	<p>El desarrollo en serie de Taylor del ángulo de deflexión se escribe</p> $\alpha^i(x^j) = \alpha^i(\vec{0}) + \sum_k \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^k} x^k + \dots,$ <p>y en notación matricial,</p> $\vec{\alpha}(\vec{x}) = \vec{\alpha}(\vec{0}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \alpha^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \alpha^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \alpha^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \vec{x} + \dots$ <p>Escogiendo convenientemente la orientación de los ejes coordenados es posible diagonalizar la matriz,</p>

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \vec{\alpha}(\vec{0}) + \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{pmatrix} \vec{x} + \dots$$

Es habitual re-escribir los dos términos no nulos de la matriz en función de la convergencia, κ , o densidad superficial local de masa, y de γ , parámetro que nos mide la separación de la simetría axial de la distribución de masa,

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \vec{\alpha}(\vec{0}) + \begin{pmatrix} \kappa + \gamma & 0 \\ 0 & \kappa - \gamma \end{pmatrix} \vec{x} + \dots$$

En muchos casos de interés la ecuación de la lente puede ser escrita como la suma de dos términos,

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}) - \vec{\alpha}_p(\vec{x}),$$

uno producido por una fuente axisimétrica, $\vec{\alpha}(\vec{x})$, y otro perturbativo, no axisimétrico que es descrito a partir del desarrollo en serie de Taylor como una perturbación cuadrupolar,

$$\vec{\alpha}_p(\vec{x}) = \vec{\alpha}_p(\vec{0}) + \begin{pmatrix} \kappa_p + \gamma_p & 0 \\ 0 & \kappa_p - \gamma_p \end{pmatrix} \vec{x},$$

por tanto,

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}) - \vec{\alpha}_p(\vec{0}) - \begin{pmatrix} \kappa_p + \gamma_p & 0 \\ 0 & \kappa_p - \gamma_p \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Esta ecuación puede reescribirse como,

$$\vec{y} + \vec{\alpha}_p(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa_p - \gamma_p & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_p + \gamma_p \end{pmatrix} \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}),$$

que si aceptamos un desplazamiento global de las coordenadas en el plano de la fuente,

$$\vec{y} \rightarrow \vec{y} + \vec{\alpha}_p(\vec{0}),$$

se escribe simplemente,

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa_p - \gamma_p & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_p + \gamma_p \end{pmatrix} \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x})$$

El primer ejemplo que podemos considerar para ilustrar la lente cuadrupolar es el de una lente puntual en un campo gravitatorio externo (lente de Chang-Refsdal).

Consideremos una partícula puntual inmersa en una galaxia. La deflexión de los rayos de luz en las inmediaciones de la partícula será la combinación de los efectos producidos por los campos gravitatorios de la partícula y de la galaxia. Si el campo gravitatorio de la galaxia varía muy lentamente, mucho más lentamente que el de la partícula puntual podemos tratarlo como una perturbación y utilizar el desarrollo de Taylor del ángulo de deflexión para estimar su influencia, tal y como se ha comentado en la sección anterior.

Para una partícula puntual centrada en el origen el ángulo de deflexión adimensional es,

	$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{ \vec{x} ^2},$ <p>y la ecuación de la lente con una perturbación cuadrupolar queda,</p> $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa_p - \gamma_p & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_p + \gamma_p \end{pmatrix} \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 - \kappa_p - \gamma_p & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_p + \gamma_p \end{pmatrix} \vec{x} - \frac{\vec{x}}{ \vec{x} ^2}.$ <p>El segundo ejemplo que podemos considerar es el de una esfera isoterma singular en un campo gravitatorio externo.</p> <p>En este caso,</p> $\vec{\alpha}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{ \vec{x} }$ <p>y la ecuación de la lente perturbada se escribe,</p> $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa_p - \gamma_p & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_p + \gamma_p \end{pmatrix} \vec{x} - \frac{\vec{x}}{ \vec{x} }$ <p>Finalmente, podemos estudiar una distribución de lentes puntuales en un campo gravitatorio externo.</p> <p>En este caso,</p> $\vec{\alpha}(\vec{x}) = \sum_i \frac{M_i}{M} \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{ \vec{x} - \vec{x}_i ^2}$ <p>y la ecuación de la lente perturbada se escribe,</p> $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa_p - \gamma_p & 0 \\ 0 & 1 - \kappa_p + \gamma_p \end{pmatrix} \vec{x} - \sum_i \frac{M_i}{M} \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{ \vec{x} - \vec{x}_i ^2}$
9.1. Trazado inverso de rayos.	
9.1.1. Cálculo de imágenes con el trazado inverso de rayos.	<p>La ecuación adimensional de la lente se escribe $\vec{y} = \vec{x} - \alpha(\vec{x})$. Donde $\vec{y} = (y_1, y_2)$ son las coordenadas de la fuente y $\vec{x} = (x_1, x_2)$ las de la(s) imagen(es). Dependiendo de la relación explícita entre el ángulo de deflexión α y \vec{x}, $\alpha(\vec{x})$, y de la posición de la fuente, \vec{y}, la ecuación de la lente tendrá una o varias soluciones, $\vec{x}(\vec{y})$, (imágenes). La ecuación de la lente no es, en general, invertible analíticamente y obtener las soluciones, $\vec{x}(\vec{y})$, puede ser un problema de cálculo numérico complicado.</p> <p>Sin embargo, el efecto de una lente gravitatoria se puede simular recurriendo al trazado</p>

	<p>inverso de rayos. Sea $I(x_1, x_2)$ la matriz de píxeles que define a la imagen. La ecuación de la lente nos permite obtener unívocamente las coordenadas del punto $(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2))$ en el plano de la fuente desde el que salió el rayo que llegó al punto (x_1, x_2) (trazado inverso de rayos). Para obtener el valor de la imagen en ese punto se hace: $I(x_1, x_2) = F(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2))$, donde $F(y_1, y_2)$ es la matriz que representa la fuente. Esta correspondencia es solo aproximada ya que la imagen inversa de un píxel del plano de la imagen no se corresponde exactamente con ningún píxel en el plano fuente. En particular, es posible, incluso, que un píxel en el plano imagen corresponda a dos o más regiones no conectadas en el plano de la fuente. Estos problemas se reducen disminuyendo el tamaño del píxel en el plano imagen.</p> <p>En el caso de una lente puntual situada en el punto \vec{x}_0 el ángulo de deflexión viene dado, en unidades adimensionales, por</p> $\alpha = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{ \vec{x} - \vec{x}_0 }$ <p>y la ecuación de la lente sería una ecuación de segundo grado fácilmente resoluble.</p> <p>Cuando hay N lentes puntuales de la misma masa situadas en posiciones \vec{x}_i el ángulo de deflexión en la aproximación de lente delgada viene dado por</p> $\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{ \vec{x} - \vec{x}_i ^2}$ <p>En este caso, la solución es mucho más difícil de obtener y es preferible recurrir al trazado inverso de rayos.</p>
<p>9.2. Cálculo de mapas de magnificación con el trazado inverso de rayos.</p>	<p>Según hemos visto anteriormente la magnificación mide la variación de un elemento diferencial de área inducida por el efecto lente gravitatoria. Para estimar la magnificación en un punto cualquiera del plano de la fuente utilizando el trazado inverso de rayos podemos dividir el plano imagen en elementos diferenciales (píxeles) de área $\Delta x^1 \Delta x^2(x^1, x^2)$. La ecuación de la lente nos permite obtener unívocamente las coordenadas del punto $(y^1(x^1, x^2), y^2(x^1, x^2))$ en el plano de la fuente desde el que salió el rayo que llegó al punto medio, (x^1, x^2), del píxel (trazado inverso de rayos). Si en el plano imagen consideramos píxeles de área $\Delta y^1 \Delta y^2(y^1, y^2)$ la magnificación del píxel m-ésimo en el plano fuente vendrá dada por</p> $\mu_m = \frac{\sum_{k=1}^N (\Delta x^1 \Delta x^2)_k}{(\Delta y^1 \Delta y^2)_m}$ <p>donde $(\Delta x^1 \Delta x^2)_k$ es el área del píxel k-ésimo en el plano imagen cuyo origen (según la ecuación de la lente) cae dentro del píxel m-ésimo en el plano fuente. El sumatorio se lleva a cabo sobre todos los píxeles que cumplen con esta condición.</p> <p>Esta fórmula es una aproximación válida cuando los píxeles en el plano imagen son lo suficientemente pequeños como para que la transformación inversa de la lente haga que cada píxel en el plano imagen caiga dentro de un único píxel en el plano de la fuente.</p> <p>Si se toman todos los píxeles del plano imagen con el mismo tamaño la formula anterior se escribe,</p>

$$\mu_m = \frac{\sum_{k=1}^N (\Delta x^1 \Delta x^2)_k}{(\Delta y^1 \Delta y^2)_m} = \frac{\sum_{k=1}^N k}{\frac{(\Delta y^1 \Delta y^2)_m}{\Delta x^1 \Delta x^2}} = \frac{N}{N_0}$$

Donde N_0 es el cociente de áreas entre el píxel en plano fuente y el píxel en el plano imagen. Desde la perspectiva del disparo de rayos coincidiría con el número de rayos que alcanzarían al píxel bajo la acción del trazado inverso.