

Formelsammlung - ET/TI

Marc Ludwig

14. Mai 2012

Inhaltsverzeichnis

I	Mathematik	5
1	Algebra	6
1.1	Rechenregeln fuer Potenzen	6
1.2	Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen	6
1.3	Potenzen und Logarithmen	7
1.4	Der Binomische Lehrsatz	7
1.5	Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens	8
1.5.1	Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens	8
1.5.2	Additionstheoreme	8
1.6	Komplexe Zahlen	10
1.6.1	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	10
1.6.2	Rechnen mit Komplexen Zahlen	11
2	Funktionen	12
2.1	Gleichungen	12
2.1.1	Gleichungen n -ten Grades	12
2.1.2	Lineare Gleichungen	12
2.1.3	Quadratische Gleichungen	13
2.1.4	Biquadratische Gleichungen	13
2.1.5	Gleichungen höheren Grades	13
2.1.6	Wurzelgleichung	13
2.1.7	Ungleichungen	14
2.1.8	Betragsgleichungen	14
3	Vektorrechnung	15
3.1	Vektorrechnung	15
3.1.1	Grundlagen	15
3.1.2	Vektoroperationen	16
3.1.3	Geraden	17
3.1.4	Ebenen	17

4	Differentialrechnung	19
4.1	Differentialrechnung	19
4.1.1	Erste Ableitungen der elementaren Funktionen	19
4.1.2	Rechenregeln	20
4.1.3	Fehlerrechnung	21
4.1.4	Linearisierung und Taylor-Polynom	21
4.1.5	Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital	22
4.1.6	Differentielle Kurvenuntersuchung	22
4.2	Differentialgleichungen	24
4.2.1	DG 1. Ordnung	24
4.2.2	Lineare DG 2. Ordnung	24
4.3	Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen	26
4.3.1	Differentialrechnung	26
4.3.2	Mehrfachintegral	27
5	Folgen und Reihen	30
5.1	Reihen	30
5.1.1	Geometrische Folge	30
5.1.2	Harmonische Reihe	30
5.1.3	Konvergenz	31
5.1.4	Bekannte konvergente Reihen	31
5.2	Funktionenreihen	32
5.2.1	Potenzreihen	32
5.2.2	Bekannte Potenzreihen	32
5.2.3	spezielle Reihen	33
5.2.4	Fourier Reihen	33
6	Interpolation	35
6.1	Interpolationspolynome	35
II	Physik	37
7	Kinematik	38
7.1	Analogietabelle	38
7.1.1	Translation	39
7.1.2	Rotation	39
7.2	Dynamik	40
7.2.1	Geradlinig (Translation)	40
7.2.2	Drehbewegung(Rotation)	40
7.2.3	Geneigte Ebene	41
7.2.4	Reibung	41
7.2.5	Feder	42

7.2.6	Elastischer Stoß	42
7.2.7	Unelastischer Stoß	42
7.2.8	Rotierendes Bezugssystem	43
7.3	Schwerpunkt	44
7.4	Trägheitsmoment	45
7.5	Elastizitätslehre	46
7.6	Schwingungen	47
7.6.1	Ungedämpfte Schwingungen	47
7.6.2	Gedämpfte Schwingungen	49
8	Fluiddynamik	50
8.1	Ohne Reibung	50
8.2	Laminare Reibung	51
9	Gravitation	52
10	Elektrostatik	53
11	Thermodynamik	55
11.1	Wärmedehnung	55
11.2	Wärme	55
11.3	Mischtemperatur	55
11.4	Wärmeleitung	55
11.5	Wärmekonvektion	55
11.6	Wärmewiderstand	56
11.6.1	Wärmeübertragung	56
11.6.2	Wärmestrahlung	56
11.6.3	Zustandsänderung des idealen Gases	56
12	Optik	59
12.1	Brechung	59
12.2	Totalreflexion	59
12.3	Hohlspiegel	59
12.4	Linse	60
12.5	Lichtwellenleiter	61
III	Elektrotechnik	62
13	Gleichstromtechnik	63
13.1	Grundgrößen	63
13.2	Lineare Quellen	64
13.3	Kirchhoffsche Gesetze	64

14 Wechselstromtechnik	66
14.1	66
14.2 Anteile und Formfaktoren	67
14.3 Leistung und Leistungsfaktoren	67
14.4 Sinusförmige Größen	69
15 Signal- und Systemtheorie	77
15.1 Einfache Impulse	77
15.2 Elementare Operationen auf zeitliche Verläufe	78
15.3 Signale	82
15.4 Signalbeschreibung Leistungssignale	84
15.5 Signalbeschreibung Energiesignale	87
15.6 Systeme	89
IV Analoge Schaltungstechnik	91
16 Grundsaltungen	92
V Messtechnik	96
17 Grundlagen	97
17.1 Begriffe	97
17.2 Messabweichung e	97
17.2.1 relative Messabweichung	97
17.2.2 Messabweichung e_y	98
17.2.3 Fortpflanzung systematischer Messabweichungen	98
17.3 Statistische Größen	99
17.4 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	99
17.5 Verteilungsfunktionen	100
17.6 Stichprobe	101
17.7 Vertrauensbereich für den Erwartungswert	101
17.8 Fortpflanzung zufälliger Abweichungen	102
17.9 Fortpflanzung von Messunsicherheiten	103
Sachregister	103
VI Anhang	104

Teil I

Mathematik

Kapitel 1

Algebra

Why waste time learning
when ignorance is instantaneous?
- Hobbes

1.1 Rechenregeln fuer Potenzen

$$\begin{array}{lll} a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n & \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n & (\text{fuer } a > 0) \ a^b = e^{b \cdot \ln a} \end{array}$$

1.2 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Potenzen und Wurzeln existieren.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

1.3 Potenzen und Logarithmen

Schreibweise: $x = \log_a(b)$ mit $a > 0, a \neq 1$ und $b > 0$.

Es gilt: $\log_a(1) = 0, \log_a(a) = 1$.

Der natuerliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e mit $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\dots$

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1; \text{ da } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Man beachte: $x^a = e^{\ln(x) \cdot a}$

Rechnen mit Logarithmen

Es gilt:	Weitere Beziehungen:
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log_a(u)$
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$a^{\log_a(u)} = \log_a(a^u) = u$
$\log_a(u^p) = p \cdot \log_a(u)$	$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$

1.4 Der Binomische Lehrsatz

Die Potenzen eines Binoms $a+b$ lassen sich nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln ($n \in \mathbb{N}^*$):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 \cdot b^{n-1} + b^n$$

Die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen Binominalkoeffizienten, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Einige Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ fuer } k > n & \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} & \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

1.5 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

1.5.1 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 & \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) &= 1 \\ \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ 1 + \tan^2(\alpha) &= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} & 1 + \cot^2(\alpha) &= \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

1.5.2 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)} \end{aligned}$$

Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\alpha))$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha))$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

Umformungen

Summe oder Differenz in ein Produkt

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Produkt in eine Summe oder Differenz

$$2 \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

1.6 Komplexe Zahlen

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man:

$$\mathbb{C} = \{z | z = a + bj, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

a-Realteil b-Imaginaerteil j-imaginaere Einheit

kartesische Form	trigonometrische Form	exponentialform
$z = a + bj$	$z = z (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$	$z = z \cdot e^{j\varphi}$
$z^* = (a + bj)^* = a - bj$	$z^* = z (\cos \varphi - j \cdot \sin \varphi)$	$z^* = z \cdot e^{-j\varphi}$

$|z|$ = Betrag von z

φ = Argument (Winkel) von z

z^* = Konjugiert komplexe Zahl

1.6.1 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

Polarform \rightarrow Kartesische Form

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \underbrace{|z| \cdot \cos \varphi}_a + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin \varphi}_b = a + bj$$

Kartesische Form \rightarrow Polarform

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

1.6.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j \cdot (a_1b_2 + a_2b_1)$$

In der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [|z_1| (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [|z_2| (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)] \\ &= (|z_1| |z_2|) \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= (|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}) = (|z_1| |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division

In kartesischer Form

In der Polarform

Kapitel 2

Funktionen

2.1 Gleichungen

2.1.1 Gleichungen n -ten Grades

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R})$$

Eigenschaften

- Die Gleichung besitzen maximal n reelle Lösungen.
- Es gibt genau n komplexe Lösungen.
- Für ungerades n gibt es mindestens eine reelle Lösung.
- Komplexe Lösungen treten immer Paarweise auf.
- Es existieren nur Lösungsformeln bis $n \leq 4$. Für $n > 4$ gibt es nur noch grafische oder numerische Lösungswege.
- Wenn eine Nullstelle bekannt ist kann man die Gleichung um einen Grad verringern, indem man den zugehörigen Linearfaktor $x - x_1$ abspaltet (Polynome Division).

2.1.2 Lineare Gleichungen

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

2.1.3 Quadratische Gleichungen

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Normalform mit Lösung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Überprüfung (Wurzelsatz von Vieta)

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

x_1, x_2 : Lösung der quadratischen Gleichung.

2.1.4 Biquadratische Gleichungen

Diese Gleichungen lassen sich mithilfe der Substitution lösen.

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$$

$$u = x^2$$

$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0$$

$$x = \pm\sqrt{u}$$

Das u kann mithilfe der Lösungsformel einer quadratischen Gleichung gelöst werden.

2.1.5 Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades kann man durch graphische oder numerische Ansätze lösen. Hilfreich ist das finden einer Lösung und das abspalten eines Linearfaktor, mithilfe der Polynomdivision oder dem Horner Schema, von der ursprünglichen Gleichung.

Polynomdivision

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{x - x_0} = b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 + r(x)$$

x_0 ist dabei die erste gefundene Nullstelle. $r(x)$ verschwindet wenn x_0 eine Nullstelle oder eine Lösung von $f(x)$ ist.

$$r(x) = \frac{a_3 \cdot x_0^3 + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x - x_0}$$

2.1.6 Wurzelgleichung

Wurzelgleichungen löst man durch quadrieren oder mit Hilfe von Substitution. Bei Wurzelgleichung ist zu beachten das quadrieren keine Äquivalente Umformung ist und das Ergebnis überprüft werden muss.

2.1.7 Ungleichungen

- Beidseitiges Subtrahieren oder Addieren ist möglich
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige positiven Zahl multipliziert oder dividiert werden
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige negativen Zahl multipliziert oder dividiert werden, wenn man gleichzeitig das Relationszeichen umdreht.

2.1.8 Betragsgleichungen

Betragsgleichungen löst man mithilfe der Fallunterscheidung. Dabei wird einmal davon ausgegangen das der Term innerhalb des Betrags einmal positiv und einmal negativen sein kann.

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Kapitel 3

Vektorrechnung

3.1 Vektorrechnung

3.1.1 Grundlagen

Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \\ &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2 Punkt Vektor

$$P_1 \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Betrag

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= a \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &= \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}\end{aligned}$$

Richtungswinkel

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} \\ 1 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma\end{aligned}$$

3.1.2 Vektoroperationen

Addition und Subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$a \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} ab_x \\ ab_y \\ ab_z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ Fläche des Parallelograms \vec{a}, \vec{b}
 $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Spatprodukt

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$$

Volumen des Parallelepiped $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\begin{aligned} [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] &= \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= a_x(b_y c_z - b_z c_y) \\ &\quad + a_y(b_z c_x - b_x c_z) \\ &\quad + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Schnittwinkel

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Projektion

$$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = (\vec{b} \circ \vec{e}_a) \vec{e}_a$$

3.1.3 Geraden

Geradengleichung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ d &= \frac{|\vec{a} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}\end{aligned}$$

Abstand zweier paralleler Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_1 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|}\end{aligned}$$

Abstand zweier windschiefen Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_2 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}\end{aligned}$$

3.1.4 Ebenen

Ebenengleichung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t, s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &\quad + s(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Parameterfreie Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t, s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ \vec{r} \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) &= \vec{r}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + t\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + s\vec{a}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ \vec{r} \circ \vec{n} &= \vec{r}_1 \circ \vec{n} + 0 + 0 \\ \vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_1) &= 0\end{aligned}$$

Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

Normierter Normalenvektor

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Hessesche Normalform

$$0 = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Abstand einer Geraden von einer Ebene Abstand zweier paralleler Ebenen

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}_1$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_G - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{Ar_{G1} + Br_{G2} + Cr_{G3} + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$$

$$\vec{g}(t, s) = \vec{r}_2 + t\vec{a}_3 + s\vec{a}_4$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}|}$$

Schnittwinkel zweier Ebenen

$$\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Durchstoßpunkt

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}$$

$$\vec{r}_s = \vec{r}_G + \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_1 - \vec{r}_G)}{\vec{n} \circ \vec{a}} \vec{a}$$

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} \right)$$

Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 Differentialrechnung

4.1.1 Erste Ableitungen der elementaren Funktionen

Potenzfunktion

$$x^n \quad \Longleftrightarrow \quad n \cdot x^{n-1}$$

Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned} e^x &\Longleftrightarrow e^x \\ a^x &\Longleftrightarrow \ln a \cdot a^x \end{aligned}$$

Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned} \ln x &\Longleftrightarrow \frac{1}{x} \\ \log_a x &\Longleftrightarrow \frac{1}{(\ln a) \cdot x} \end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \sin x &\Longleftrightarrow \cos x \\ \cos x &\Longleftrightarrow -\sin x \\ \tan x &\Longleftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \\ \tan x &\Longleftrightarrow 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

Arcusfunktionen

$$\begin{aligned}\arcsin x &\iff \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos x &\iff \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arctan x &\iff \frac{1}{1-x^2}\end{aligned}$$

Hyperbolische Funktionen

$$\begin{aligned}\sinh x &\iff \cosh x \\ \cosh x &\iff \sinh x \\ \tanh x &\iff \frac{1}{\cosh^2 x} \\ \tanh x &\iff 1 + \tanh^2 x\end{aligned}$$

4.1.2 Rechenregeln**Faktorregel**

$$\frac{d}{dx} (C \cdot f(x)) = C \cdot f'(x)$$

Summenregel

$$\frac{d}{dx} (g(x) + f(x)) = g'(x) + f'(x)$$

Produktregel

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (g(x) \cdot f(x)) &= g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x) \\ \frac{d}{dx} (h(x) \cdot g(x) \cdot f(x)) &= h' \cdot g \cdot f + h \cdot g' \cdot f + h \cdot g \cdot f'\end{aligned}$$

Quotientenregel

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f(x)^2}$$

Kettenregel

$$\frac{d}{dx} (g(f(x))) = g'(f) \cdot f'(x)$$

Logarithmische Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} y &= f(x) \\ \frac{1}{y} y' &= \frac{d}{dx} \ln f(x)\end{aligned}$$

4.1.3 Fehlerrechnung

Absoluter Fehler

Δx Absoluter Fehler der Eingangsgröße

Δy Absoluter Fehler der Ausgangsgröße

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Relativer Fehler

δx Relativer Fehler der Eingangsgröße in %

δy Relativer Fehler der Ausgangsgröße in %

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y}$$

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\delta y = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \delta x$$

4.1.4 Linearisierung und Taylor-Polynom

Tangentengleichung

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$$y_T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Taylor Polynom

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

R_n Restglied

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}}{i!}(x - x_0)^i + R_n(x)$$

Restglied

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$x_0 < c < x$, wenn $x_0 < x$

$x_0 > c > x$, wenn $x_0 > x$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

4.1.5 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital**de l'Hospital**

Gilt nur wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ gleich $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.1.6 Differentielle Kurvenuntersuchung**Normale der Kurve**

$$y_N(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x)} (x - x_0)$$

Monotonie-Verhalten

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Monoton wachsend} \\ < 0 \text{ Monoton fallend} \end{cases}$$

Krümmungs-Verhalten

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Linkskr. (konvex)} \\ < 0 \text{ Rechtskr. (konkav)} \end{cases}$$

Ableitung in Polarkordinaten

\dot{r} Ableitung nach φ

\ddot{r} Zweite Ableitung nach φ

$$y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3}$$

Ableitung in Parameterform

\dot{x} Ableitung nach t

\dot{y} Ableitung nach t

$$y = y(t)$$

$$x = x(t)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Bogendifferential

”Wegelement” einer Funktion

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

$$ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \cdot dt$$

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} \cdot d\varphi$$

Winkeländerung

$$\tau = \arctan y'$$

$$d\tau = \frac{y''}{1 + (y')^2} \cdot dx$$

Krümmungskreis

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|}$$

$$x_K = x_P - y' \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$

$$y_K = y_P + \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$

ρ : Radius

(x_K, y_K) : Kreismittelpunkt

(x_P, y_P) : Kurvenpunkt

Kurvenkrümmung

$$\kappa = \frac{d\tau}{ds}$$

$$= \frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}}$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}$$

$$= \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{\sqrt{(r^2 + (r')^2)^3}}$$

4.2 Differentialgleichungen

Anfangswertproblem: Werte nur an einer Stelle vorgegeben
 Randwertproblem: Werte an mehreren Stellen vorgegeben

Lineare DG

$$y_{all} = y_h + y_p$$

4.2.1 DG 1. Ordnung

Trennung der variablen

Lineare DG

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

$$y' + f(x) \cdot g(y) = g(x)g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

$$y_{all} = e^{-F(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right)$$

4.2.2 Lineare DG 2. Ordnung

Darstellung

Fundamental Lösungen

$$a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = g(x)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta \cdot j$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \\ + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

In Folgenden Aufzählungen gilt:

- $G(x)$ Ansatz

- $g(x)$ Störglied
- r Anzahl der Resonanzfälle

Partikuläre Lösungen(Polynom)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

$$G(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n \quad \lambda \neq 0$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) \cdot x^r \quad \lambda = 0$$

Partikuläre Lösungen(Polynom und e-Funktion)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) e^{mx}$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \quad \lambda \neq m$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot x^r \quad \lambda = m$$

Partikuläre Lösungen(sin- und cos Funktion)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx)$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad \lambda \neq \pm kj$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \cdot x^r \quad \lambda = \pm kj$$

Partikuläre Lösungen(e-, sin- und cos Funktion)

$$0 = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

$$g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) e^{mx} \cdot (c \cos(kx) + d \sin(kx))$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx))$$

$$\lambda \neq m \pm kj$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx)) \cdot x^r$$

$$\lambda = m \pm kj$$

4.3 Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen

4.3.1 Differentialrechnung

Ableitung

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = y_{x_1}$$

Alles bis auf x_1 ist konstant beim ableiten

$$\frac{\partial y}{\partial x_n} = y_{x_n}$$

Alles bis auf x_n ist konstant beim ableiten

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = y_{x_1 x_1}$$

Alles bis auf x_1 ist konstant beim ableiten

$$y_{x_1 x_2} = y_{x_2 x_1}$$

Tangentialebene

(x_0, y_0) Entwicklungspunkte der Ebene

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

Totales Differential

$$dz = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$$

Extrema

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$f_{xx}(x_0; y_0) < 0$$

Maximum

$$f_{xx}(x_0; y_0) > 0$$

Minimum

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} > 0$$

Sattelpunkt

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} < 0$$

Richtungsableitung

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \cdot (a_x z_x + a_y z_y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \vec{e}_a \cdot \text{grad}(z)$$

4.3.2 Mehrfachintegral**Polarkordinaten**

$$x = x_0 + r \cos \varphi$$

$$y = y_0 + r \sin \varphi$$

Volumen

$$\iiint_V dV = \int_x \int_y \int_z dz dy dx$$

$$\iiint_V dV = \int_r \int_\varphi \int_z r dz dr d\varphi$$

Fläche

$$A = \iint_{(A)} dA$$

Masse

$$\begin{aligned}
m &= \iint_{(A)} \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
&= \iiint_{(V)} \rho(x, y) \, dz \, dx \, dy \\
&= \iiint_{(V)} \rho(r, \varphi) r \, dz \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Statisches Moment (M_x, M_y) Achsmomente

$$\begin{aligned}
M_x : \\
&= \iint_{(A)} y \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} (y_0 + r \sin \varphi) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
M_y : \\
&= \iint_{(A)} x \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} (x_0 + r \cos \varphi) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Schwerpunkt

$$x_s = \frac{M_y}{m}$$

$$y_s = \frac{M_x}{m}$$

Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_{(A)} y^2 \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_x &= \iint_{(A)} (y_0 + r \sin \varphi)^2 \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
I_y &= \iint_{(A)} x^2 \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_y &= \iint_{(A)} (x_0 + r \cos \varphi)^2 \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Polares Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_{(A)} (y^2 + x^2) \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_x &= \iint_{(A)} \left((y_0 + r \sin \varphi)^2 + (x_0 + r \cos \varphi)^2 \right) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten

$$V = \int_r \int_{\vartheta} \int_{\varphi} r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr$$

Kapitel 5

Folgen und Reihen

5.1 Reihen

5.1.1 Geometrische Folge

Darstellung

$$a_n = a \cdot q^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$$

Konvergent für $|q| < 1$

5.1.2 Harmonische Reihe

Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Konvergent für $s > 1$

5.1.3 Konvergenz

Majorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

b_n bekannte konvergente Reihe

Minorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

b_n bekannte divergente Reihe

Wurzelkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \begin{cases} q > 1 \text{ ist die Reihe divergent} \\ q < 1 \text{ ist die Reihe konvergent} \\ q = 1 \text{ ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Quotientenkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \begin{cases} q > 1 \text{ ist die Reihe divergent} \\ q < 1 \text{ ist die Reihe konvergent} \\ q = 1 \text{ ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Leibnizkriterium

Nur bei alternierenden Reihen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q$$

$q = 0$ ist die Reihe divergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Absolut Konvergent

5.1.4 Bekannte konvergente Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

5.2 Funktionenreihen

Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

5.2.1 Potenzreihen

Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

x_0 : Verschiebung des
Entwicklungspunktes.

Konvergenz

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ränder müssen
untersucht werden.

5.2.2 Bekannte Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

$$x \in (0, 2]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$x \in (-1, 1]$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$x \in [-1, 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$x \in [-1, 1]$$

5.2.3 spezielle Reihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\operatorname{artanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

5.2.4 Fourier Reihen

Allgemein

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + a_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) \, dt$$

Symetrie

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t))$$

gerade Funktion $b_n = 0$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$

ungerade Funktion $a_n = 0$ **Komplex**

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(x) \cdot e^{-jn x} dx$$

Umrechnung

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n)$$

$$a_0 = 2c_0$$

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = j (c_n - c_{-n})$$

Kapitel 6

Interpolation

6.1 Interpolationspolynome

Entwicklung einer Polynomfunktion anhand von $n + 1$ Kurvenpunkten.

- 1. Möglichkeit: Aufstellen von $n + 1$ Gleichungen und ermitteln der Kurvenfunktion mithilfe des Gauß' Algorithmus.
- 2. Möglichkeit: Interpolationspolynome nach Newton.

Interpolationspolynome nach Newton

Gegeben sind die Punkte:

$P_0 = (x_0; y_0), P_1 = (x_1; y_1), P_2 = (x_2; y_2), \dots, P_n = (x_n; y_n)$,
damit lautet die Funktion wie folgt.

$$\begin{aligned} f(x) = & a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \\ & + a_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ & + \dots \\ & + a_n \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ lassen sich mithilfe des Differentschema berechnen. Dabei ist $y_0 = a_0, [x_0, x_1] = a_1, [x_0, x_1, x_2] = a_2$ usw. .

Differentenschema

k	x_k	y_k	1	2	3	...
0	x_0	y_0				
			$[x_0, x_1]$			
1	x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]$		
			$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
2	x_2	y_2		$[x_1, x_2, x_3]$...
			$[x_2, x_3]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
3	x_3	y_3		$[x_2, x_3, x_4]$...
			
\vdots	\vdots	\vdots				
n	x_n	y_n				

Rechenregeln für dividierte Differenzen

$$[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

$$[x_1, x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$[x_0, \dots, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

$$[x_1, \dots, x_3] = \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$$

$$[x_0, \dots, x_3] = \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_2} \quad [x_1, \dots, x_4] = \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_3}$$

Teil II

Physik

Kapitel 7

Kinematik

Perfection is achieved
only on the point of collapse.
- C. N. Parkinson

7.1 Analogietabelle

Translation		Rotation
\vec{s} $\downarrow \frac{ds}{dt}$ \vec{v} $\downarrow \frac{dv}{dt}$ \vec{a}	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_{Tan}} - \underbrace{\omega^2 r}_{a_R}$	$\vec{\varphi}$ $\downarrow \frac{d\varphi}{dt}$ $\vec{\omega}$ $\downarrow \frac{d\omega}{dt}$ $\vec{\alpha}$
m $\downarrow \frac{dm}{dt}$ \vec{F} $\downarrow \frac{dF}{dt}$ \vec{p} $\frac{m}{2}v^2$	E_{kin}	J $\downarrow \frac{dJ}{dt}$ \vec{M} $\downarrow \frac{dM}{dt}$ \vec{L} $\frac{J}{2}\omega^2$

7.1.1 Translation

$$\begin{aligned}a(t) &= a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \\v(t) &= a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\s(t) &= \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\end{aligned}$$

Bahngroessen

$$\begin{aligned}a_t(t) &= a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \\v(t) &= a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\s(t) &= \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\end{aligned}$$

Kreisfrequenz

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \\&= 2 \cdot \pi \cdot n \\&= 2 \cdot \pi \cdot f\end{aligned}$$

Umdrehungen

$$\begin{aligned}N &= \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \\&= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2\end{aligned}$$

7.1.2 Rotation

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_0 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \\\omega(t) &= \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \\\varphi(t) &= \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0\end{aligned}$$

Winkelgroessen

$$\begin{aligned}\vec{a}_t &= \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r & \alpha \perp r \\\vec{\alpha} &= \vec{r} \times \vec{a}_t \\\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot r & \omega \perp r \\\vec{\omega} &= \vec{r} \times \vec{v} \\s &= \varphi \cdot r\end{aligned}$$

Radialbeschleunigung

$$\begin{aligned}a_r &= \frac{v^2}{r} \\&= v \cdot \omega \\&= \omega^2 \cdot r\end{aligned}$$

7.2 Dynamik

7.2.1 Geradlinig (Translation)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{Tr}} = -m \cdot \vec{a}$$

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Kraftstoss

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} dp = \int_0^t \vec{F} dt$$

Arbeit

$$W = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\text{Tr}} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\vec{v} \circ d\vec{v} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

Hubarbeit

$$W_{\text{hub}} = mgh$$

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

7.2.2 Drehbewegung(Rotation)

Massentraegheitsmoment

$$J = \int r^2 dm$$

Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpuls

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= J \cdot \vec{\omega}\end{aligned}$$

Arbeit

$$\begin{aligned}W &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e}_{\omega} \, d\varphi \\ &= \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} \, d\vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2)\end{aligned}$$

7.2.3 Geneigte Ebene**Kräfte**

$$\begin{aligned}\vec{F}_N &= \vec{F}_G \cos \alpha \\ \vec{F}_H &= \vec{F}_G \sin \alpha\end{aligned}$$

7.2.4 Reibung**Reibungskraft**

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Leistung

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Zentripedalkraft

$$\begin{aligned}F_{zp} &= -m \cdot \omega^2 \cdot r \\ &= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r}\end{aligned}$$

Rollreibung

$$\begin{aligned}M &= f \cdot F_N \\ F_R &= \frac{f}{r} \cdot F_N\end{aligned}$$

7.2.5 Feder

HOOKsches Gesetz

$$F = -kx$$

$$M = D\varphi$$

Federspannarbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2) \end{aligned}$$

7.2.6 Elastischer Stoß

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Zentraler, Gerader, Elastischer Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \end{aligned}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2$$

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1$$

7.2.7 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß + Arbeit

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Total unelastischer Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + \Delta W \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= (m_1 + m_2)v' \end{aligned}$$

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

Drehimpulserhaltungssatz

Drehimpuls zur Zeit 1 = Drehimpuls zur Zeit 2

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

Kopplung zweier Rotationskörper

$$\begin{aligned} \vec{\omega}' &= \frac{J_0\vec{\omega}_0 + J_1\vec{\omega}_1}{J_1 + J_2} \\ W &= \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0 + J_1)} (\omega_0 - \omega_1)^2 \end{aligned}$$

7.2.8 Rotierendes Bezugssystem

Zentrifugalkraft

$$\begin{aligned}
\vec{F}_Z &= F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= -m\vec{\omega} \times \vec{v} \\
F_Z &= -m \frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r
\end{aligned}$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

7.3 Schwerpunkt**mehrere Punktmassen**

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Allgemein

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

**Schwerpunkt in
Zylinderkoordinaten**

$$\begin{aligned}
r_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho dr d\varphi dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho dr d\varphi dz} \\
\varphi_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho dr d\varphi dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho dr d\varphi dz} \\
z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho dr d\varphi dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho dr d\varphi dz} \\
x &= r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z
\end{aligned}$$

**Schwerpunkt in
kartesischen Koordinaten**

$$\begin{aligned}
x_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x x \rho dx dy dz}{\int_z \int_y \int_x \rho dx dy dz} \\
y_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x y \rho dx dy dz}{\int_z \int_y \int_x \rho dx dy dz} \\
z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x z \rho dx dy dz}{\int_z \int_y \int_x \rho dx dy dz}
\end{aligned}$$

7.4 Trägheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$

$$J = \int_m r^2 \, dm$$

$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz$$

STEINER'scher Satz

$$J_x = mr^2 + J_s$$

**Trägheitsmoment Kreisring
(Torus)**

$$J_{\text{Sp}} = mr^2$$

Trägheitsmoment Kugel

$$J_{\text{Sp}} = \frac{2}{5}mr^2$$

Trägheitsmoment Stab

Trägheitsmoment Zylinder

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{12}ml^2$$

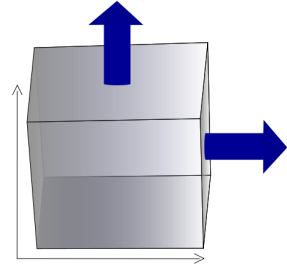
7.5 Elastizitätslehre

Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_n}{dA}$$

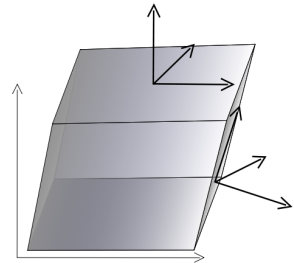
$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_t}{dA}$$



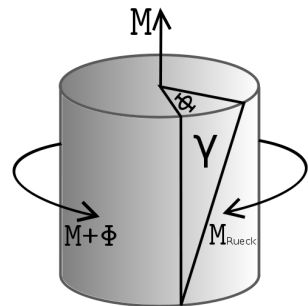
Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$



Drillung

$$\psi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{W_t}{G \cdot J_p} \tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$



Flächenmoment**Verformungsarbeit**

$$J_p = \int r^2 \, dA = \int_{\varphi} \int_r r^3 \, dr \, d\varphi$$

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) \, d\varepsilon$$

7.6 Schwingungen

Harmonische Schwingungen

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

7.6.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Mathematisches Pendel

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}
\end{aligned}$$

Physikalisches Pendel

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{lmg}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}}
\end{aligned}$$

Torsionsschwingung

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{D}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}}
\end{aligned}$$

Flüssigkeitspendel

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -\frac{2A\rho g}{m}y \\
\varphi(t) &= \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}
\end{aligned}$$

Elektrischer Schwingkreis

$$\begin{aligned}
0 &= L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \\
q(t) &= \hat{Q} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

7.6.2 Gedämpfte Schwingungen

Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

COULOMB Reibung

$$F_R = -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N$$

$$0 = m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N$$

Gleitreibung

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1) \cos(\omega t) - \hat{x}_1 \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1) \cos(\omega t) + \hat{x}_1 \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T$$

$$\hat{x}_1 = \frac{\mu F_N}{k}$$

Viskosereibung

$$0 = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}t}$$

$$\delta = \frac{b}{2m}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

$$D = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Lambda = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right)$$

$$\Lambda = \delta T$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m} \right)^2}$$

$$d = 2D$$

$$Q = \frac{1}{d}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi)$$

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

Kriechfall $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}$$

Kapitel 8

Fluiddynamik

Premature optimization
is the root of all evil.
- D. Knuth

On the other hand,
we cannot ignore efficiency.
- Jon Bentley

8.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

$$p = \frac{dF_N}{dA}$$

Dynamischer Druck

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Schweredruck

$$p = \frac{\rho V g}{A} \\ = h \rho g$$

Volumenstrom

$$\dot{V} = vA \\ = \iint_A \vec{v} d\vec{A} \\ = \frac{dV}{dt} \\ = Q$$

Massenstrom

$$\dot{m} = jA \\ = \iint_A \vec{j} d\vec{A} \\ = \frac{dm}{dt}$$

Auftrieb

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= -\rho_V \vec{g} V \\ &= -\frac{\rho_V}{\rho_M} \vec{F}_G\end{aligned}$$

Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

Volumenausdehnungskoeffizient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

8.2 Laminare Reibung**Newtonsches Reibungsgesetz**

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

Laminare Strömung (Rohr)

$$\begin{aligned}v(r) &= \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \\ p &= \frac{4\eta l}{R^2} v(0) \\ \dot{V} &= \frac{\pi R^4}{8\eta l} p\end{aligned}$$

Umströmung (Kugel)

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned}\dot{m}|_1 &= \dot{m}|_2 & \dot{V}|_1 &= \dot{V}|_2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 & \rho_1 &= \rho_2\end{aligned}$$

Barometrische Höhenformel

$$\begin{aligned}p &= p_0 e^{-Ch} \\ C &= \frac{\rho_0 g}{p_0}\end{aligned}$$

Bernoulli Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const}$$

Bernoulligleichung mit Reibung

$$\begin{aligned}p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 \\ = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + \Delta p\end{aligned}$$

Reynoldszahl

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$

$$Re > Re_{krit}$$

Strömung wird Turbulent

Kapitel 9

Gravitation

The year is 787!
A.D.?
- Monty Python

Gravitationskraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_{g,2} &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_r \\ \vec{F}_g &= \vec{E}_g \cdot m = \vec{g} m\end{aligned}$$

Gravitationspotential

$$\begin{aligned}\phi &= -G \frac{M}{r} \\ \vec{E}_g &= \text{grad} \phi\end{aligned}$$

Arbeit

$$\begin{aligned}W_{12} &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ d\vec{r} \\ &= GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)\end{aligned}$$

Planetenbahnen

$$\left(\frac{a}{a_E} \right)^3 = \left(\frac{T}{T_E} \right)^2$$

Kapitel 10

Elektrostatik

Don't interrupt me
while I'm interrupting.
- Winston S. Churchill

Ladung

$$\begin{aligned}Q &= n \cdot e_0 \\&= CU \\&= \int i \, dt\end{aligned}$$

Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \vec{r}_i$$

COULOMB Gesetz

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} r_1 \vec{2} \\&= \vec{E} Q \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \\&= -\text{grad} \varphi \\&= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right)\end{aligned}$$

Spannung

$$\begin{aligned}U_{AB} &= \frac{W_{AB}}{Q} \\&= \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \\&= \oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = 0 \\&= \varphi_A - \varphi_B \\&= - \int_{\infty}^A \vec{E} \circ d\vec{s} \\&\quad - \left(- \int_{\infty}^B \vec{E} \circ d\vec{s} \right)\end{aligned}$$

El- / Verschiebungsfluß

$$\psi = \int_A \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$\psi = \oint_A \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Flußdichte

$$\vec{D} = \frac{dQ}{dA} \vec{e}_A$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$Q = \oint_A D dA$$

Kapazität

$$Q = CU$$

OHMsches Gesetz

$$\begin{aligned} I &= \oint_A \vec{j} \circ d\vec{A} \\ &= \oint_A \kappa \vec{E} \circ d\vec{A} \\ &= \underbrace{\kappa E \cdot 4\pi r^2}_{\text{Kugel}} \end{aligned}$$

Arbeit im elektrischen Feld

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{D}$$

$$W = \int_V w dV$$

$$= -Q \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_U Q dU$$

$$= \int_U CU dU$$

$$= \frac{1}{2} CU^2$$

Kapitel 11

Thermodynamik

11.1 Wärmedehnung

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \\ V(T) &= V_0(1 + \gamma(T - T_0)) \\ l(T) &= l_0(1 + \alpha(T - T_0)) \\ \gamma &\approx 3 \cdot \alpha \\ \gamma &\approx \beta\end{aligned}$$

11.2 Wärme

$$\begin{aligned}\Delta Q &= c \cdot m(T - T_0) \\ \Delta Q &= C(T - T_0) \\ \Delta Q &= \int_{T_0}^T c \cdot m \, dT \\ \Delta Q &= c_{mol} \cdot n(T - T_0)\end{aligned}$$

11.3 Mischtemperatur

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^n T_i m_i c_i}{\sum_{i=1}^n m_i c_i}$$

\dot{Q} Ist durch einen mehrschichtiges
stationäres System Konstant

11.4 Wärmeleitung

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{dQ}{dt} = \Phi = P \\ \vec{q} &= \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \vec{e}_A \\ \vec{q} &= -\lambda \operatorname{grad} T \\ \vec{q} &= \frac{\lambda}{s} (T_A - T_B) \cdot \vec{e}_s \\ \dot{q} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i}} \cdot (T_A - T_B)\end{aligned}$$

11.5 Wärmekonvektion

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \alpha (T_A - T_B) \\ \dot{q} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}} \cdot (T_A - T_B)\end{aligned}$$

11.6 Wärmewiderstand

$$R_{th} = \frac{T_A - T_B}{\dot{q} \cdot A} = \frac{s}{\lambda A} = \frac{1}{\alpha A} = \sum_{i=1}^n R_i$$

11.6.1 Wärmeübertragung

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n R_i}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n R_i} \cdot (T_A - T_B)$$

$$\dot{q} = k \cdot (T_A - T_B)$$

11.6.2 Wärmestrahlung

$$\alpha = \varepsilon$$

$$1 = \alpha + \tau + \vartheta$$

$$\dot{Q} = \varepsilon A \sigma T^4$$

$$\dot{Q}_{AB} = C_{AB} A_A (T_A^4 - T_B^4)$$

$$C_{AB} = \varepsilon_{AB} \sigma = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_A} + \frac{1}{\sigma_B} - \frac{1}{\sigma}} \quad \text{Parallel}$$

$$C_{AB} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{A_A}{A_B} \left(\frac{1}{\varepsilon_B} - 1 \right)} \quad A_A \text{ von } A_B \text{ umschlossen}$$

$$C_{AB} \approx \varepsilon_A \sigma \quad \text{parallel } (A_A \ll A_B)$$

11.6.3 Zustandsänderung des idealen Gases

Teilchen stehen nicht in Wechselwirkung, besitzen kein Volumen und es kommt zu keinem Phasenübergang

Energie

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

Nur Isobar:

$$dH = c_p m dT = U + p dV$$

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Isotherm

$$pV = \text{const}$$

$$T = \text{const}$$

$$U_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$Q_{12} = -W_{12}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1} + mc_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Isobar

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$

$$p = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_p (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = -p (V_2 - V_1)$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Zustandsgleichung

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

$$pV = NkT = mR_s T = nRT$$

$$R_s = \frac{nR}{m}$$

$$R_s = c_p - c_v$$

Isochor

$$\frac{p}{T} = \text{const}$$

$$V = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_v (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12}$$

$$S_{12} = mc_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Adiabat

$$pV^\kappa = \text{const}$$

$$Q = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$Q_{12} = 0$$

$$W_{12} = mc_v (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left(\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} - 1 \right)$$

$$U_{12} = W_{12}$$

$$S_{12} = 0;$$

Kreisprozeß

$$\oint dU = 0$$

$$\oint dU = \oint dQ + \oint dW$$

$$\text{Revesiebel: } \oint dS = 0$$

$$\text{Irrevesiebel } \oint dS > 0$$

Carnot-Prozeß

$$\eta_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{Q_{zu} - Q_{AB}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{T_h - T_n}{T_n}$$

Optik

The path taken between two points by a ray of light is the path that can be traversed in the least time.
- Pierre de Fermat

12.1 Brechung

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

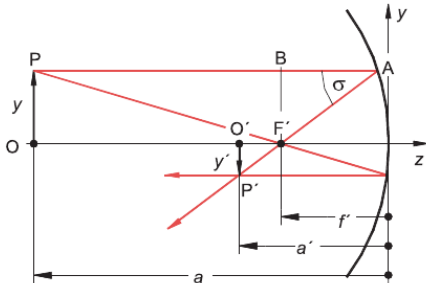
$$\varepsilon_2 = \arcsin \frac{\sin \varepsilon_1 \cdot n_1}{n_2}$$

12.2 Totalreflexion

$$\sin \varepsilon_g = \frac{n_2}{n_1}$$

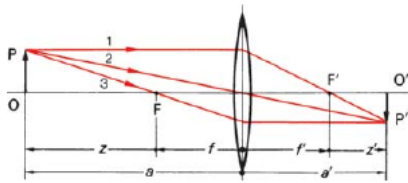
Totalreflexion tritt nur auf, wenn der Lichtstrahl von einem dichteren in ein optisch dünneren Stoff übergeht.

12.3 Hohlspiegel



$$\begin{aligned}\frac{1}{f'} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \\ f' &= \frac{r}{2} \\ \beta' &= \frac{y'}{y} \\ \beta' &= -\frac{a'}{a}\end{aligned}$$

12.4 Linse



$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{a}$$

$$f = \frac{a \cdot a'}{a + a'} = -f'$$

$$a' = \frac{af'}{a + f'}$$

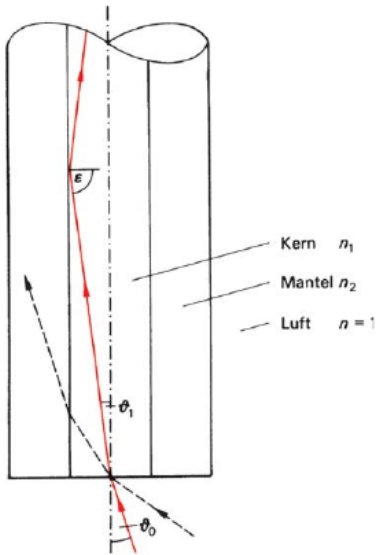
$$\beta' = \frac{f'}{a + f'}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

$$D' = \frac{1}{f'} = (n_L - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Linsenform						
Bezeichnung	bi-konvex	plan-konvex	konkav-konvex	bi-konkav	plan-konkav	konvex-konkav
Radien	$r_1 > 0$ $r_2 < 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 < 0$	$r_1 < r_2 < 0$	$r_1 < 0$ $r_2 > 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 > 0$	$r_2 < r_1 < 0$
Brennweite im optisch dünneren Medium	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' < 0$

12.5 Lichtwellenleiter



Totalreflexion (Grenzwinkel)

$$n_1 \sin(90^\circ - \vartheta_1) = n_2 \implies \cos \vartheta_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

numerische Apertur

$$\begin{aligned} A_{WL} &= n_0 \sin \vartheta_0 = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_1} \\ &= n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \\ &= \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \\ &= \sqrt{n_{Kern}^2 - n_{Mantel}^2} \end{aligned}$$

Teil III

Elektrotechnik

Kapitel 13

Gleichstromtechnik

13.1 Grundgrößen

Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[Q] = 1C = 1As$$

$$Q = n \cdot e$$

Strom

Stromdichte

$$[I] = 1A$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$[J] = 1 \frac{A}{mm^2}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

Potential

Spannung

$$[\varphi] = 1V = 1 \frac{Nm}{As} = 1 \frac{kgm^2}{As^3}$$

$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

$$[U] = 1V$$

$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

Widerstand und Leitwert

$$\begin{aligned}
 [R] &= 1\Omega = 1\frac{V}{A} \\
 R &= \frac{U}{I} \\
 &= \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [G] &= 1S = 1\frac{A}{V} \\
 G &= \frac{I}{U} \\
 &= \frac{1}{R} \\
 &= \kappa \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l}
 \end{aligned}$$

Temperaturabhängigkeit

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\right)$$

Leistung**Leistung im Mittel**

$$\begin{aligned}
 [P] &= 1W = 1VA \\
 P &= u(t) \cdot i(t)
 \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

13.2 Lineare Quellen**Spannungsquelle****Stromquelle**

$$\begin{aligned}
 U &= U_q - R_i \cdot I \\
 I_K &= \frac{U_q}{R_i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= I_q - \frac{U}{R_i} \\
 U_l &= I_q \cdot R_i
 \end{aligned}$$

13.3 Kirchhoffsche Gesetze**Knotenpunktsatz**

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

Kapitel 14

Wechselstromtechnik

No rule is so general,
which admits not some exception.
- Robert Burton

14.1

Periodische zeitabhängige Größen

Allgemein $x(t) \rightarrow$ speziell $u(t); i(t); q(t); \dots$
es gilt $x(t) = x(t + n \cdot T); (n \in \mathbb{N}^*)$

Wechselgrößen

Allgemein $x_{\sim}(t)$; periodisch sich ändernde Größe, deren Gleichanteil bzw. zeitlich linearer Mittelwert gleich Null ist.

Nachweis:

$$\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x_{\sim}(t) dt = 0 ; (n \in \mathbb{N}^*) ; t_1 \text{ beliebiger Zeitwert}$$

Mischgrößen

Sind periodisch, Ihr Gleichanteil \bar{x} bzw. zeitlich linearer Mittelwert jedoch ist ungleich Null.

Mischgröße = Wechselgröße + Gleichanteil

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_{\sim}(t) + \bar{x} \\
 &= \text{gleichanteilbehaftete Wechselgröße}
 \end{aligned}$$

14.2 Anteile und Formfaktoren

Gleichanteil

Formfaktor

$$\bar{x} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x(t) dt$$

$$F = \frac{x_{eff}}{|\bar{x}|} \quad x_{eff} = |\bar{x}| \cdot F$$

Gleichrichtwert

$$|\bar{x}| = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} |x|(t) dt$$

crest - Faktor

Effektivwert

$$x_{eff} = X = \sqrt{\frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x^2(t) dt}$$

$$\sigma = \frac{\hat{x}}{x_{eff}}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \rightarrow t_1 \text{ beliebiger Zeitwert} \rightarrow [|\bar{x}|] = [x(t)]$$

14.3 Leistung und Leistungsfaktoren

Wirkleistung

Mittlere Leistung

$$P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt$$

$$\bar{p}(t) = P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt$$

$$= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt$$

Scheinleistung

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I$$

Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} p(t) dt}{u_{eff} \cdot i_{eff}} \\
&= \frac{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u^2(t) dt} \cdot \sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} i^2(t) dt}}
\end{aligned}$$

14.4 Sinusförmige Größen

Sinusschwingung

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{x} \sin(2\pi f + \varphi_x) \\x(\omega t) &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)\end{aligned}$$

- \hat{x} : Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Linksverschiebung der Kurve

Kosinusschwingung

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{x} \cos(2\pi f + \varphi_x) \\x(\omega t) &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)\end{aligned}$$

- \hat{x} : Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Rechtsverschiebung der Kurve

Nullphasenzeit

$$t_x = -\frac{\varphi_x}{\omega} = -\varphi_x \cdot \frac{T}{2\pi}$$

Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz

$$\text{mit: } a = \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) \wedge b = \hat{b} \sin(\omega t + \beta)$$

Resultierende Funktion:

$$\begin{aligned}x &= a + b \\&= \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) + \hat{b} \sin(\omega t + \beta) \\&= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

- \hat{x} : resultierende Amplitude
- φ : Nullphasenwinkel

$$\text{Wobei: } \hat{x} = +\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\alpha - \beta)}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{a} \sin \alpha + \hat{b} \sin \beta}{\hat{a} \cos \alpha + \hat{b} \cos \beta}$$

Vierquadrantenarkustangens

$$\varphi = \arctan \frac{ZP}{NP}$$

2. Quadrant $ZP > 0, NP < 0$	1. Quadrant $ZP > 0, NP > 0$
3. Quadrant $ZP < 0, NP < 0$	4. Quadrant $ZP < 0, NP > 0$

Der rotierende Zeiger als rotierender Vektor

$$\begin{aligned} \text{Allgemein gilt: } \sin(\omega t + \varphi_x) &= \frac{GK}{HT} = \frac{b}{\hat{x}} \\ \cos(\omega t + \varphi_x) &= \frac{AK}{HT} = \frac{a}{\hat{x}} \\ b &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \\ a &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \end{aligned}$$

$$\text{Als Einheitsvektor: } \vec{x} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$$

Zeigerspitzenendpunkt

\underline{x} = Zeigerspitzenendpunkt

$$\underline{x} = \underbrace{\hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)}_{Re \rightarrow Abszisse} + j \cdot \underbrace{\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)}_{Im \rightarrow Ordinate}$$

$$\underline{x} = \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$

\underline{x}_{eff} = rotierender Effektivwertzeiger

$$\underline{x}_{eff} = \hat{x}_{eff} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$

Wechsel zwischen Sinus und Kosinus

$$\hat{x}(t) \cos(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t) \sin\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{x}(t) \sin(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t) \cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Zeitbereich		komplexer Zeitbereich
$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{\text{Hintransformation1}}$	$\underline{x} = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) + j\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$
$x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{\text{Hintransformation2}}$	$\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
		Berechnungen im komplexen Bereich
$y = \text{Im}\{y\} = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{\text{Ruecktransformation1}}$	$\underline{y} = \hat{y} e^{j(\omega t + \varphi_y)}$
$y = \text{Re}\{y\} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{\text{Ruecktransformation2}}$	$\underline{y} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y) + j\hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$

HT1 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen reellen Kosinusters mit dem ursprünglichen Sinusterm als Imaginärteil

HT2 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen imaginären Sinusters mit dem ursprünglichen Kosinusterm als Realteil

RT1 entnahme des Imaginärteils

RT2 entnahme des Realteils

Merke: $\frac{1}{j} = -j \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

Differentiation und Integration von Sinusgrößen

Zeitbereich	Zeigerbereich
$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$	$\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$	
$\xrightarrow{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{HT_{1/2}}}$	$\frac{d^n \underline{x}(t)}{dt^n} = (j\omega)^n \underline{x}$

Zeitbereich	Zeigerbereich
$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$	$\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$	
$\xrightarrow{\int \dots \int x(t) dt^n \xrightarrow{HT_{1/2}}}$	$\int \dots \int \underline{x}(t) dt = \frac{1}{(j\omega)^n} \underline{x}$

R, L und C im kompl. Zeigerbereich

Ohmscher Widerstand	$\hat{U} = R \hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$
Induktivität	$\hat{U} = \omega L \hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega L}$
Kapazität	$\hat{U} = \frac{\hat{I}}{\omega C} \quad \hat{I} = \omega C \hat{U}$

Widerstands und Leitwertoperator

\underline{Z} komplexer Widerstand / Impedanz	\underline{Y} komplexer Leitwert / Admitanz
$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$	$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \cdot e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$
$ \underline{Z} = Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I}$	$ \underline{Y} = Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U}$
mit $\varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z$	mit $\varphi_i - \varphi_u = -\varphi_Z = \gamma_Y$

Widerstand

$$\underline{Z} = R \wedge \underline{Y} = 1/R$$

Kapazität

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Induktivität

$$\underline{Z} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Resultierende Operatoren

Reihenschaltung

$$\underline{Z}_{ges} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i$$

Parallelschaltung

$$\underline{Y}_{ges} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i$$

Spannungsteiler

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}$$

Stromteiler

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}$$

Anteile am komplexen Widerstand (Impedanz)

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = R + jX = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi}$$

mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ Phasenwinkel; R = Wirkwiderstand;

X = Blindwiderstand; $|\underline{Z}|$ = Scheinwiderstand

$$R = R \quad L = \frac{X}{\omega} \text{ mit } X > 0 \quad C = -\frac{1}{\omega X} \text{ mit } X < 0$$

Anteile am komplexen Leiwert (Admitanz)

$$\underline{Y} = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = G + jB = |\underline{Y}| \cdot e^{j\gamma}$$

mit $\gamma = \varphi_i - \varphi_u$ Phasenwinkel; G = Wirkleitwert;

B = Blindleitwert; $|\underline{Y}|$ = Scheinleitwert

$$R = \frac{1}{G} \quad C = \frac{B}{\omega} \text{ mit } B > 0 \quad L = -\frac{1}{\omega B} \text{ mit } B < 0$$

komplexer Widerstand / komplexer Leitwert

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{X}{R}} \\
&= \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \underbrace{\frac{R}{R^2 + X^2}}_G \underbrace{-j \frac{X}{R^2 + X^2}}_B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z} = R + jX &= \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{Y} \cdot e^{-j\gamma} \\
&= \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{B}{G}} \\
&= \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} = \underbrace{\frac{G}{G^2 + B^2}}_R \underbrace{-j \frac{B}{G^2 + B^2}}_X
\end{aligned}$$

Momentanleistung / Augenblicksleistung

$$\begin{aligned}
P(t) &= \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{zeitlich konstant}} - \underbrace{UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{mit doppelter Frequenz schwingend}} \\
&= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi)
\end{aligned}$$

$$\text{mit } \varphi = \varphi_u - \varphi_i \rightarrow \varphi_i = \varphi_u - \varphi$$

Blindleistung

Ermittlung des Blindleistungsanteils aus der Momentanleistung

$$\begin{aligned}
P(t) &= \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{Wirkleistung}} - \underbrace{UI \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Blindleistung}} \\
P_{ges}(t) &= P_{wirk}(t) + P_{blind}(t)
\end{aligned}$$

$$u(t) \cdot i(t) \begin{cases} > 0 \text{ Energie zum Verbraucher} \\ < 0 \text{ Energie zum Erzeuger} \end{cases}$$

Mittlere Leistung / Wirkleistung

$$P = \overline{P}(t) = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1 + n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt = UI \cos \varphi$$

Definition von Blind- und Scheinleistung

$$Q = UI \sin \varphi \quad [Q] = \text{var} \quad \text{mit} \begin{cases} Q > 0 \text{ induktive Blindleistung } Q_{ind} \\ Q < 0 \text{ kapazitive Blindleistung } Q_{kap} \end{cases}$$

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I \quad [S] = VA$$

Beziehungen zwischen Wirk- Blind- und Scheinleistung

$P = UI \cdot \cos \varphi \quad Q = UI \cdot \sin \varphi \quad S = UI$
--

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{S^2 - Q^2} \\ &= S \cdot \cos \varphi \\ &= \frac{Q}{\tan \varphi} \end{aligned}$$

$$Q = \begin{cases} > 0 \rightarrow Q_{ind} = \sqrt{S^2 - P^2} \\ < 0 \rightarrow Q_{kap} = -\sqrt{S^2 - P^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ &= \frac{Q}{\sin \varphi} \\ &= \frac{P}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi = P \cdot \tan \varphi$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{Q}{P} \\ &= \arcsin \frac{Q}{S} \\ &= \arccos \frac{P}{S} \end{aligned}$$

$$P^2 + Q^2 = U^2 \cdot I^2 = S^2$$

Die komplexe Leistung

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* \\ &= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= S \cdot e^{j\varphi} \\ &= \underbrace{S \cdot \cos \varphi}_P + j \cdot \underbrace{S \cdot \sin \varphi}_Q \end{aligned}$$

* - konjugiert Komplex

$$= P + jQ$$

$$[\underline{S}] = VA \quad [P] = W \quad [Q] = var$$

Zusammenhang mit dem komplexen Leitwert / Widerstand

$$\underline{S} = I^2 \cdot \underline{Z} \quad P = I^2 \cdot R = U^2 \cdot G \quad Q = I^2 \cdot X = -U^2 \cdot B$$

Kapitel 15

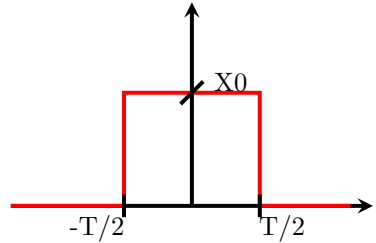
Signal- und Systemtheorie

15.1 Einfache Impulse

Rechteckimpuls/ -funktion $rect_T(t)$

$$x(t) = X_0 \cdot rect_T(t)$$

- T: Rechteckimpulsbreite > 0
- an den Sprungstellen nimmt der Impuls die Hälfte des max. Wertes an

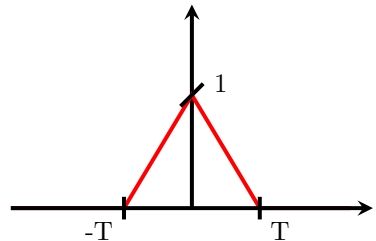


Dreiecksimpuls/ -funktion $\Lambda_T(t)$

$$x(t) = X_0 \cdot \Lambda_T(t)$$

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - |t|/T & \text{für } |t| < T \\ 0 & \text{für } |t| > T \end{cases}$$

- T: Dauer einer ansteigenden / abfallenden Flanke

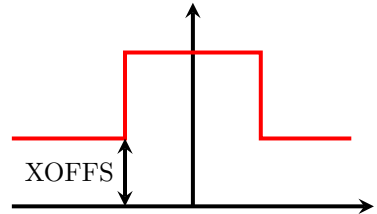


15.2 Elementare Operationen auf zeitliche Verläufe

Beeinflußung der Ordinate

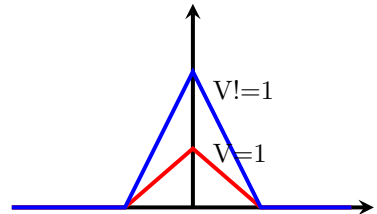
Signaloffset X_{OFFS}

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t) + X_{OFFS}$$



Skalierungsfaktor V ($V \neq 0$)

$$x_{neu}(t) = V \cdot x_{alt}(t)$$

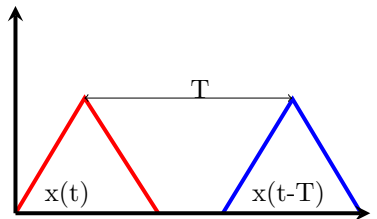


Beeinflußung der Abszisse

zeitliche Verschiebung t_0

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t - t_0) \text{ mit } t_0 = \text{const.}$$

- Zusammenfassung der Offsetbehafteten Zeit $t - t_0$ zu einer neuen Zeitbasis $\tau = t - t_0$
- $x_{neu}(\tau + t_0) = x_{alt}(\tau)$
 $t > 0$ Verschiebung nach rechts
 $t < 0$ Verschiebung nach links

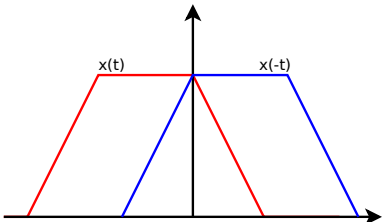


Negation des Arguments t

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(-t) \text{ mit } \tau = -t$$

$$x_{neu}(-\tau) = x_{alt}(\tau)$$

- gleiche Funktionswerte mit negierter Zeitbasis, somit Spiegelung an der Ordinate



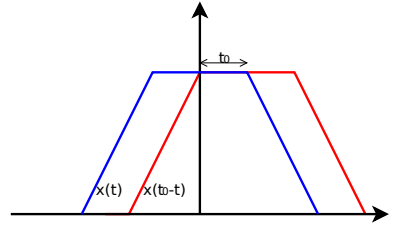
Nagation des Arguments t sowie eine Verschiebung um t_0

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t_0 - t)$$

$$\text{mit } t_0 = \text{const.}$$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(\tau + 1/2t_0)$$

$$x_{neu}(1/2t_0 - \tau) = x_{alt}(\tau + 1/2t_0)$$



- neue Zeitbasis $\tau + 1/2t_0$
- gleiche Funktionswerte, gespiegelt an der Senkrechten von $1/2t_0$

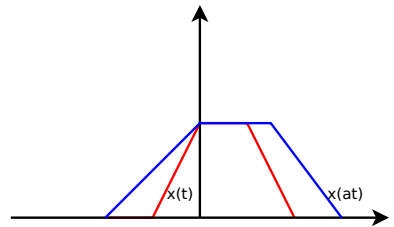
Skalierungsfaktor $a \neq 0$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(a \cdot t)$$

$$\text{mit } a = \text{const.}$$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(\tau)$$

$$x_{neu}(\tau/a) = x_{alt}(\tau)$$

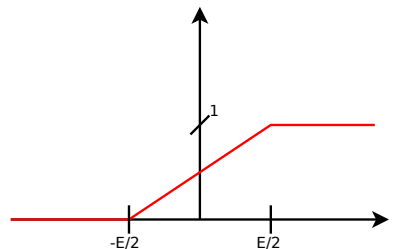


- neue Zeitbasis $\tau = a \cdot t$
- gleiche Funktionswerte, wenn die Zeitbasis durch a geteilt wird
- $a > 1$ Funktion wird gestaucht
 $0 < a < 1$ Funktion wird gestreckt

Einheitssprungfunktion

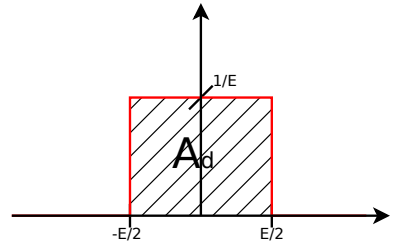
angenäherte Einheitssprungfunktion $\tilde{s}(t, \epsilon)$

- endlicher Geradenanstieg
- Endwert von 1



Einheitsimpuls / Deltaimpuls $\tilde{\delta}(t, \epsilon)$

- Fläche des Impulses ist 1
- Impulshöhe und Breite variabel

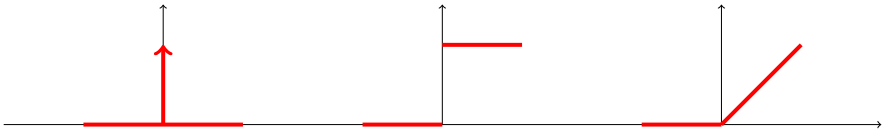


Mathematischer Zusammenhang:

$$\tilde{\delta}(t, \epsilon) = \frac{d\tilde{\sigma}(t, \epsilon)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\sigma}(t, \epsilon) = \int_{-\infty}^t \tilde{\delta}(t, \epsilon) dt$$

Beim Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ ergibt die Einheitssprungfunktion $\sigma(t)$ bzw. deren Ableitung den Deltaimpuls $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \begin{cases} +\infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Zusammenhang zwischen Deltaimpuls, Einheitssprungfunktion und Einheitsanstiegsfunktion

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

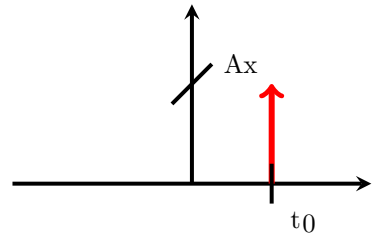
$$\alpha(t) = \begin{cases} t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t \sigma(t) dt = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

zeitliche Verschiebung und Wichtung

Deltaimpuls

$$x(t) = A_x \cdot \delta(t - t_0)$$

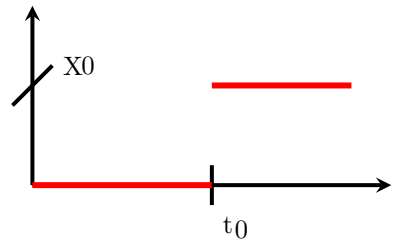
$$[x(t)] = [A_x] \cdot [\delta(t)]$$



Einheitssprung

$$x(t) = X_0 \cdot \sigma(t - t_0)$$

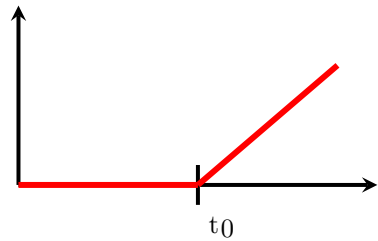
$$[x(t)] = [X_0]$$



Einheitsanstiegsfunktion

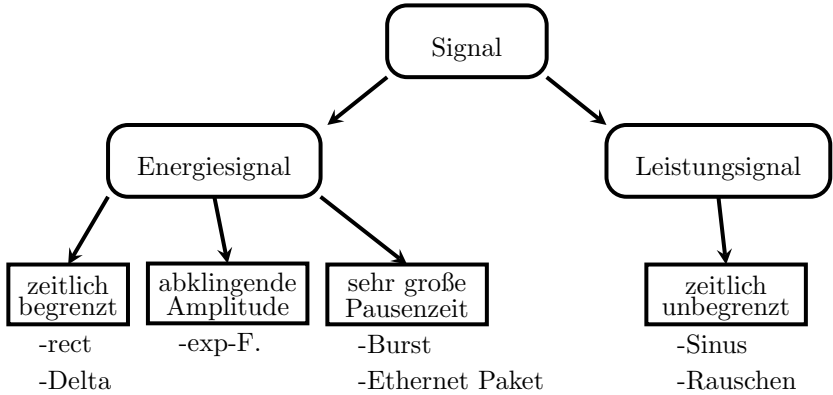
$$x(t) = m \cdot \alpha(t - t_0)$$

$$[x(t)] = [m] \cdot [\alpha(t)]$$



15.3 Signale

Definition: Ein Signal ist eine zeitlich und / oder örtlich veränderliche Größe (physikalisch). Die Veränderung dieser physikalischen Größe, sagt nichts über Ihren Informationsgehalt aus.



Energiewandlung

$$E_R = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot i(t) dt \quad [E_R] = V \cdot A \cdot s = Ws$$

mit $i(t) = \frac{u(t)}{R}$ folgt

$$E_R = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt$$

Momentanleistung $P_r(t_1)$

$$P_R(t_1) = u(t_1) \cdot i(t_1) \quad [P_R(t_1)] = W$$

$$P_R = U_0 \cdot I_0 = \frac{U_0^2}{R} \quad \text{bei Gleichleistung}$$

Mittlere Leistung P_R

$$\begin{aligned}
 P_R &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t) \cdot i(t) dt & [P_R] &= W \\
 &= \frac{1}{R} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t) dt
 \end{aligned}$$

Spezialfall: Periodische Signalverläufe

$$= \frac{1}{n \cdot t_P} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot t_P} u_P(t) \cdot i_P(t) dt = \frac{1}{R \cdot n \cdot t_P} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot t_P} u_P^2(t) dt$$

T : Betrachtungszeit, Meßdauer t_1 : Startzeitpunkt t_P : Periodendauer $R = \text{const.}$

Signalenergie / Impulsenergie / Impulsmoment 2. Ordnung E_U

Nur für Energiesignale sinnvoll.

$$E_U = m_{i2} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt \quad [E_U] = V^2 s$$

Zeitdiskrete Signalverläufe:

$$E_X = m_{i2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_q^2(k) \quad [E_X] = 1$$

Entnormierung über einem realen Widerstand:

$$E_R = E_U \cdot \frac{1}{R} \quad [E_R] = W s$$

Mittlere Signalleistung P_u / Gesamtsignalleistung P_i / quadratischer Mittelwert $\overline{u^2}$ / gewöhnliches Moment 2. Ordnung m_2

Nur für Leistungssignale sinnvoll.

$$P_u = \overline{u^2} = m_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t) dt \quad [P_u] = V^2$$

Spezialfall: Periodische Signalverläufe

$$P_u = \overline{u^2} = m_2 = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} u_p^2(t) dt$$

Spezialfall: zeitdiskrete Signalverläufe

beliebiges nichtperiodisches Signal:

$$P_X = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2(k)$$

periodisches Signal:

$$P_X = \frac{1}{N_P} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2(k)_P$$

Spezialfall: konstante Werte

$$P_X = X_q^2(k_1)_k$$

Entnormierung über einem realen Widerstand:

$$P_R = P_U \cdot \frac{1}{R} \qquad [P_R] = W$$

Signalenergie ↔ Signalleistung

	Energiesignal	Leistungssignal
Signalenergie	endlicher Wert	$+\infty$
Signalleistung	0	endlicher Wert

15.4 Signalbeschreibung Leistungssignale

Effektivwert

Energiesignale haben einen Effektivwert von Null.

$$u_{eff} = \sqrt{P_u} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t) dt}$$

Spezialfall: zeitdiskrete Signalverläufe

$$X_{eff} = \sqrt{P_X} = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2(k)}$$

gerader-/ungerader Anteil**gerader Anteil:**

$$u_g(t) = \frac{u(t) + u(-t)}{2}$$

ungerader Anteil:

$$u_u(t) = \frac{u(t) - u(-t)}{2}$$

Gleichanteil / linearer Mittelwert / gewöhnliches Moment 1. Ordnung m_1

Energiesignale haben einen Gleichanteil von Null.

beliebige Signalverläufe

$$\bar{x} = m_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) dt \quad [\bar{x}] = [x]$$

periodische Signalverläufe

$$\bar{x} = m_1 = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} x(t) dt \quad [\bar{x}] = [x]$$

zeitdiskrete Signalverläufe

$$\bar{x}_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x_q(k)$$

periodische zeitdiskrete Signalverläufe

$$\bar{x}_k = \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x_q(k)_p$$

Signalgleichleistung / quadrierter linearer Mittelwert \bar{u}^2 / quadriertes gewöhnliches Moment 1. Ordnung m_1^2

Energiesignale haben eine Signalgleichleistung von Null.

beliebige Signalverläufe

$$P_{u=} = [\bar{u}]^2 = m_1^2 = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t) dt \right]^2 \quad [P_{u=}] = V^2$$

zeitdiskrete Signalverläufe

$$P_{X_{\sim}} = [\bar{x}]^2 = m_1^2 = \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q(k) \right]^2 \quad [P_{X_{\sim}}] = 1$$

Entnormierung

$$P_{R_{\sim}} = \frac{P_{u_{\sim}}}{R} \quad [P_{R_{\sim}}] = W$$

Signalwechselleistung $P_{u_{\sim}}$ / Varianz σ^2 / zentrales Moment 2. Ordnung μ_2

Energiesignale haben eine Signalwechselleistung von Null.

$$P_{u_{\sim}} = \sigma^2 = \mu_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} [u(t) - \bar{u}]^2 dt$$

periodischer Spannungsverlauf

$$P_{p_{\sim}} = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} [u(t) - \bar{u}]^2 dt$$

zeitdiskrete Signale

$$P_{X_{\sim}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} [X_q(k) - \bar{X}]^2$$

periodische zeitdiskrete Signale

$$P_{X_{\sim}} = \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} [X_q(k)_p - \bar{X}]^2$$

Entnormierung

$$P_{R_{\sim}} = \frac{P_{u_{\sim}}}{R} \quad [P_{R_{\sim}}] = W$$

Leistungsbilanz

$$P_u = P_{u_{\sim}} + P_{u_{\sim}} = m_2 = m_1^2 + \mu_2 = [\bar{u}]^2 + \sigma^2$$

15.5 Signalbeschreibung Energiesignale

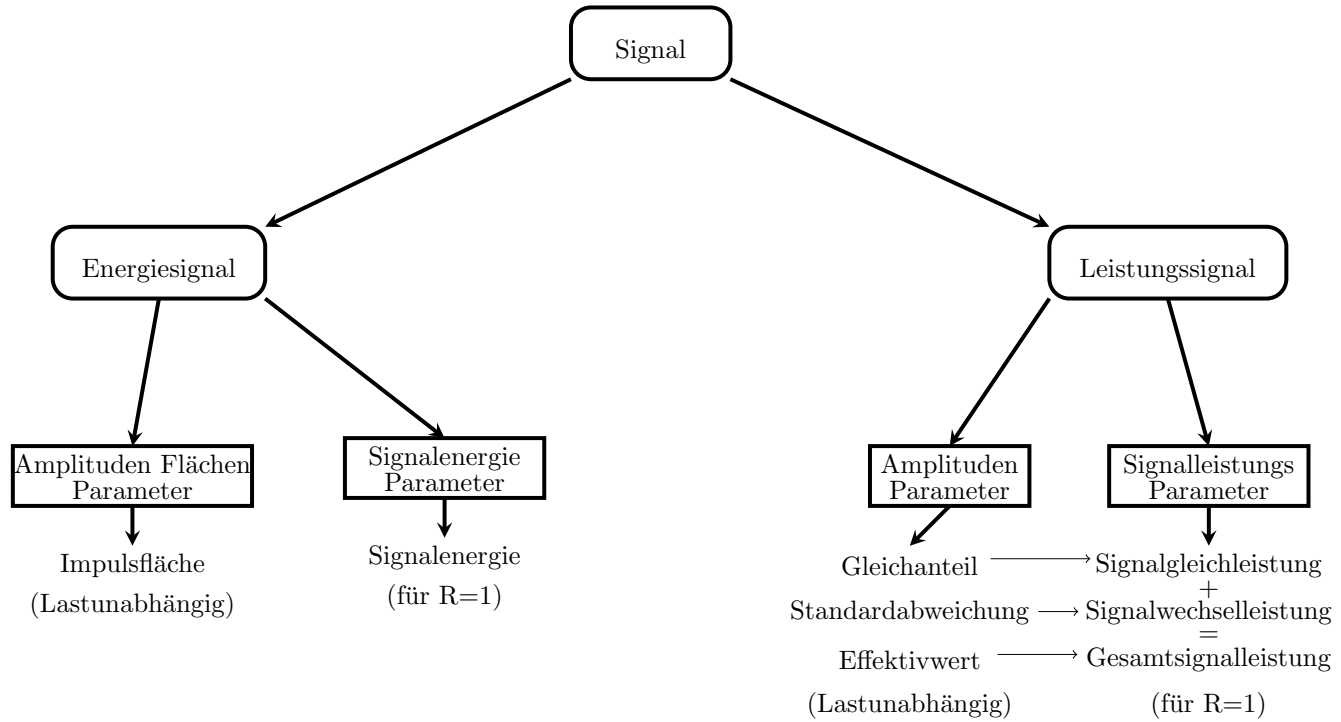
Impulsfläche A_u / Impulsmoment 1. Ordnung m_{i1}

Leistungssignale besitzen Flächen von $\pm\infty$ bzw. Null.

$$A_u = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \, dt \qquad [A_u] = Vs$$

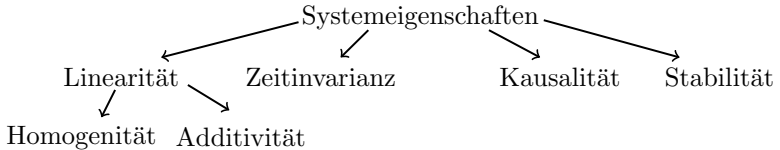
zeitdiskrete Signale

$$A_X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_q(k) \qquad [A_X] = 1$$



15.6 Systeme

Definition: Ein System ist ein physikalisches oder auch technisches Gebilde, welches ein Signal (Eingangssignal, Systemerregung / -anregung) in ein im Allgemeinen andersartiges Signal umformt. Dieses wird Ausgangssignal bzw. Systemantwort / -reaktion genannt.



Übersicht:

Linearität	Ist nur vorhanden, wenn Homogenität und Additivität vorliegen. Die Multiplikation eines konstanten Faktors mit dem Eingang, führt zu Multiplikation des gleichen Faktors mit dem Ausgang.
Additivität	$x(t)$ ist additiv zerlegbar, diese Anteile können getrennt verarbeitet sowie die Systemreaktionen addiert werden.
Zeitinvarianz	Zeitinvarianz ist vorhanden, wenn sich die Systemeigenschaften zeitlich nicht ändern. Eine Zeitverzögerung des Eingangssignals überträgt sich somit um eine gleiche Verzögerung ins Ausgangssignal.
Kausalität	Kausalität ist Vorhanden, wenn die Systemreaktion nicht schon vor Beginn der Systemerregung einsetzt. Somit ist jedes realisierbare System zwingend kausal.
Stabilität	Stabilität Ist vorhanden, wenn bei einem betragsmäßig beschränktem, beliebigem breitbandigen Eingangssignal auch ein betragsmäßig beschränktes Ausgangssignal vorliegt. Grenzstabilität Bedingungen der Stabilität werden nicht erfüllt, jedoch ist die Signalleistung ab einem bestimmten Zeitpunkt konstant. Instabilität Ausgangssignal wächst selbst beim Verschwinden von $x(t)$ unbegrenzt an.

Impulsantwort / Gewichtsfunktion $g(t)$

mit $x(t) = \delta(t)$ folgt $y(t) = g(t)$
 $[g(t)] = [\delta(t)] = s^{-1}$

Sprungantwort / Übergangsfunktion $h(t)$

Zusammenhang:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt \Leftrightarrow \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

$$FT\{\sigma(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) - j\frac{1}{2\pi f}$$

Zusammenhang zwischen Übergangs- und Gewichtsfunktion

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad h(t) = \int_{-\infty}^t g(t) dt$$

$$= \underbrace{\int_0^t g(t) dt}_{\text{Kausales System}}$$

Faltungsoperation

Polynommultiplikation

- setzt LTI-Systeme voraus
- Gewichtsfunktion wird nur bei LTI-Systemen angegeben

$$y(t) = T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = x(t) * g(t)$$

zeitdiskrete Systeme:

$$y(k) = T\{x(k)\} = \sum_{L=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot g(k - L) = x(k) * g(k)$$

Polynommultiplikation:

$$p_p = \sum \text{Ordinatenwert} \cdot r^{\text{Abszissenwert}}$$

$$y_p(k) = x_p \cdot g_p$$

Teil IV

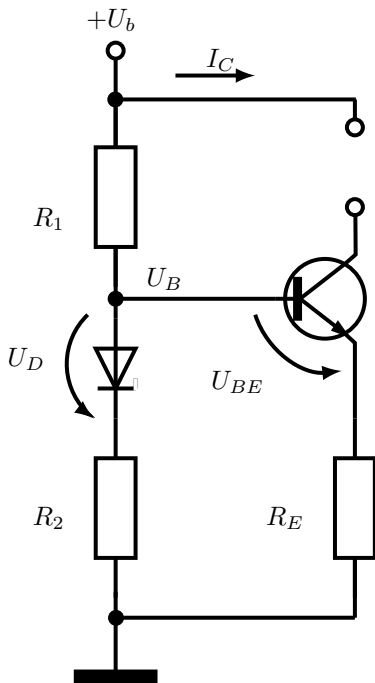
Analoge Schaltungstechnik

Kapitel 16

Grundsaltungen

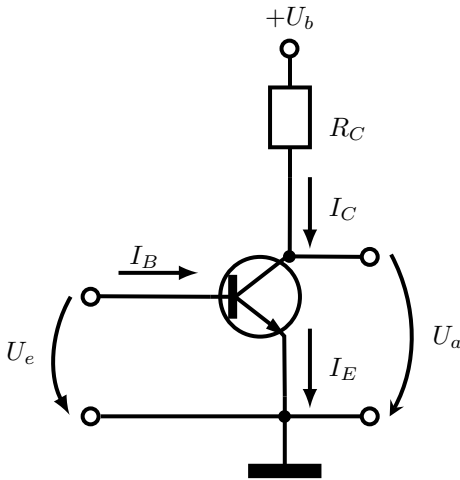
Konstantstromquelle

mit Bipolartransistoren



$$I_E \approx I_C = \frac{U_B - U_{BE}}{R_E} = \text{const.}$$
$$\rightsquigarrow I_C = \underbrace{\frac{R_2}{R_E} \cdot I_1}_{\text{Stromspiegel}}$$

Emitterschaltung



Verstärkung

$$A \text{ bzw. } V = \frac{dU_a}{dU_e} \\ = -S (R_C \parallel r_{CE})$$

Eingangswiderstand

$$r_e = r_{BE} = \frac{dU_e}{dI_e} = \frac{1}{Y_{11}}$$

Ausgangswiderstand

$$r_a = -\frac{dU_a}{dI_a} = R_C \parallel r_{CE}$$

Parameter

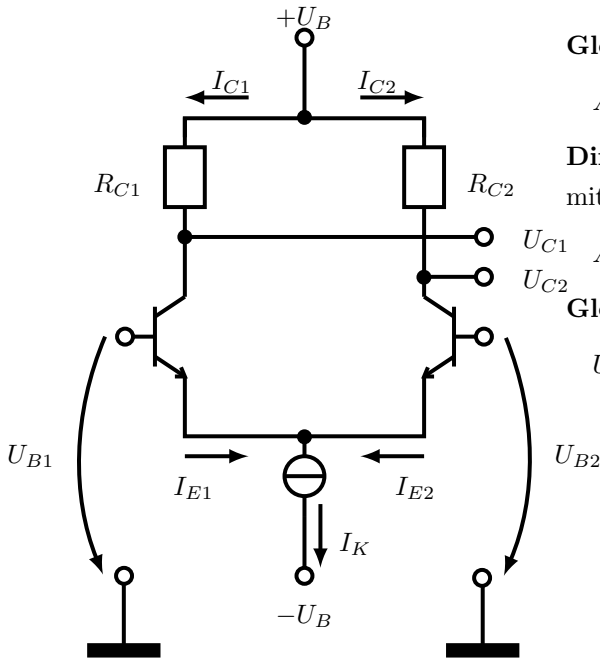
$$dI_B = \underbrace{\frac{\partial I_B}{\partial U_{BE}}}_{Y_{11} = \frac{1}{r_{BE}}} \cdot dU_{BE}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial I_B}{\partial U_{CE}}}_{Y_{12} = S_r} \cdot dU_{CE}$$

$$dI_C = \underbrace{\frac{\partial I_C}{\partial U_{BE}}}_{Y_{21} = S} \cdot dU_{BE}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial I_C}{\partial U_{CE}}}_{Y_{22} = \frac{1}{r_{CE}}} \cdot dU_{CE}$$

Differenzverstärker



Gleichtaktaussteuerung

$$A_{GL} = \frac{dU_a}{dU_{GL}} \stackrel{!}{=} 0$$

Differenzverstärkung

mit $U_D = U_{B1} - U_{B2}$ folgt

$$A_D = \frac{\Delta U_{C2}}{\Delta U_D}$$

Gleichtakteingangsspannung

$$U_{GL} = \frac{U_{B1} + U_{B2}}{2}$$

reine Differenzaussteuerung

$$\Delta U_{B1} = -\Delta U_{B2} \rightsquigarrow dU_{B1} = -dU_{B2} = \frac{dU_D}{2}$$

mit $U_E = \text{const.}$ folgt:

$$\frac{dU_{C1}}{dU_D} = \frac{dU_{C1}}{2dU_{B1}} = -\frac{1}{2}S(R_C \parallel r_{CE}) = -A_D$$

$$\frac{dU_{C2}}{dU_D} = \frac{dU_{C2}}{2dU_{B2}} = \frac{1}{2}S(R_C \parallel r_{CE}) = A_D$$

Gleichtaktaussteuerung

$$dU_E = dU_{GL} \quad \rightsquigarrow \quad dI_K = \frac{dU_{GL}}{r_K} \neq \text{const.}$$

mit $dU_C = -dI_C \cdot R_C$ folgt:

$$dU_{C1} = dU_{C2} = -\frac{R_C}{2r_K} \cdot dU_{Gl} \quad \rightsquigarrow \quad A_{Gl} = \frac{dU_a}{dU_{Gl}} = -\frac{R_C}{2r_K}$$

Teil V

Messtechnik

Kapitel 17

Grundlagen

17.1 Begriffe

- Messwert x_i : gemessener Wert der Messgröße
- Wahrer Wert x_w : existierender Wert der Messgröße
- Richtiger Wert x_r : bekannter Wert mit vernachlässigbarer Differenz zum wahren Wert
- Messabweichung e : Differenz zwischen gemessenem und wahren Wert
- Systematische Messabweichung e_{sys} : Bekannte systematische Messabweichung (korrigierbar)
- Messunsicherheit u : Intervall um den Messwert in dem der wahre Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu finden ist

17.2 Messabweichung e

$$e = x - x_w$$

17.2.1 relative Messabweichung

$$e_{rel} = \frac{e}{x_w} = \frac{x - x_w}{x_w} = \frac{x}{x_w} - 1$$

Korrekturfaktor K **Korrigierter Messwert x_{kor}**

Bei bekannter systematischer Messabweichung.

$$K = -e_{\text{sys}}$$

$$x_{\text{kor}} = x + K$$

17.2.2 Messabweichung e_y

$$e_y = y - y_w = f(x_1 + e_{x_1}, x_2 + e_{x_2}, \dots, x_n + e_{x_n})$$

$$e_y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_{x_i}$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

17.2.3 Fortpflanzung systematischer Messabweichungen**Addition / Subtraktion**

$$y = x_1 \pm x_2$$

 \longrightarrow

$$e_y = e_{x_1} \pm e_{x_2}$$

Multiplikation

$$y = x_1 \cdot x_2$$

 \longrightarrow

$$e_y = x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}$$

$$e_{\text{rel}} = \frac{e_y}{y} = \frac{x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}}{x_1 \cdot x_2} = e_{\text{rel}, x_1} + e_{\text{rel}, x_2}$$

Division

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

 \longrightarrow

$$e_y = \frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2}$$

$$e_{\text{rel}} = \frac{e_y}{y} = \frac{\frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2}}{x_1 \cdot x_2^{-1}} = e_{\text{rel}, x_1} - e_{\text{rel}, x_2}$$

17.3 Statistische Größen

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \text{prob}(X \leq x)$$

Es gilt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x \rightarrow \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

$$\text{prob}(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Verteilungsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

17.4 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert μ

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

nur für stetige Zufallsgrößen

wahrer Wert X

$$x_w = \mu$$

nach Korrektur

der systematischen Abweichung

Varianz σ^2

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

17.5 Verteilungsfunktionen

Normalverteilung

- Normal oder Gaußverteilung
- gute Näherung bei unbekannter statistischer Verteilung
- Werteverteilung:
 - 68,3% aller Werte liegen in $\mu \pm \sigma$
 - 95,5% aller Werte liegen in $\mu \pm 2\sigma$
 - 99,7% aller Werte liegen in $\mu \pm 3\sigma$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

Gleichverteilung

- auch Rechteckverteilung
- alle vorkommenden Werte besitzen gleiche Wahrscheinlichkeit im Intervall

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \mu - a < x < \mu + a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$
$$\sigma^2 = \frac{1}{3}a^2$$

17.6 Stichprobe

Mittelwert \bar{x}

Der Mittelwert ist ein Schätzwert für den Erwartungswert μ und damit für den wahren Wert.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

empirische Varianz s^2

Die empirische Varianz ist ein Schätzwert für die eigentliche Varianz der Messreihe.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

17.7 Vertrauensbereich für den Erwartungswert

Endlich große Stichprobe liefert zufällige Differenz zwischem Schätzwert \bar{x} und wahren Wert $\mu = x_w$.

$$\overline{x_g} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \overline{x_i} s_g^2 = \frac{1}{m} s_i^2 s_g = \frac{1}{\sqrt{m}} s_i$$

Vertrauensbereich:

$$\bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} s < \mu < \bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} \quad \text{mit} \quad t = t(n, \alpha)$$

Studentverteilung

Gibt den t Faktor für Normalverteilungen an

α Überschreitungswahrscheinlichkeit

$1 - \alpha$ Vertrauensniveau

$1 - \alpha$	68,3%	95%	99,73%
$n = 2$	1,84	12,70	235,80
$n = 3$	1,32	4,30	19,21
$n = 4$	1,20	3,18	9,22
$n = 5$	1,15	2,78	6,62
$n = 6$	1,11	2,57	5,51
$n = 10$	1,06	2,26	4,09
$n = 20$	1,03	2,09	3,45
$n = 50$	1,01	2,01	3,16
$n \rightarrow \infty$	1,00	2,00	3,00

17.8 Fortpflanzung zufälliger Abweichungen

Bedingung: Messergebnis setzt sich aus mehreren Messgrößen x_i zusammen

Erwartungswerte

Varianzen

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{n_i}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{n_i} - \mu_n)^2$$

Worst-Case-Kombination

Maximale Abweichung des Ergebnisses vom Mittelwert.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$|\Delta y| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

statistische Kombination der Varianzen

Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz...

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)} \right)^2 \sigma_k^2$$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{\mu_1}^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{\mu_2}^2 \sigma_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_{\mu_3}^2 \sigma_3^2 + \dots$$

... kann auf empirische Varianz übertragen werden.

$$y = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$$

$$s_y^2 = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)} \right)^2 s_k^2$$

17.9 Fortpflanzung von Messunsicherheiten

Worst Case Abschätzung und Gaußsches Fortpflanzungsgesetz lassen sich auf die Messunsicherheiten übertragen.

Worst Case Abschätzung der Unsicherheit

Statistische Fortpflanzung der Unsicherheit

$$u_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| u_{x_i}$$

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2$$

Teil VI

Anhang

Sachregister

A	Gleichtaktaussteuerung 95
Additionstheoreme 8	E
Anteil	Ebenen 17
gerade 85	Abstand Geraden - Ebene 18
ungerade 85	Hessesche Normalform 18
Anteile	Schnittwinkel zweier Ebenen 18
crest - Faktor 67	Einheitsanstiegsfunktion 80
Effektivwert 67	Einheitssprungfunktion 79 f.
Formfaktor 67	Elastischer Stoß
Gleichanteil 67	Impulserhaltung 42
Gleichrichtwert 67	Zentral und Gerade 42
B	Elastizitätslehre
Binomischer Lehrsatz 7	Drill 46
C	Flächenmoment 47
Carnot'prozeß 58	Schub 46
D	Spannung 46
Deltaimpuls 80	Verformungsarbeit 47
Differentialgleichungen 24	Elektrostatik
1.Ordnung 24	Arbeit im elektrischen Feld 54
2.Ordnung 24	Coulomb Gesetz 53
Linear 24	Fluß 54
Partikuläre Lösungen	Flußdichte 54
e-, sin- und cos Funktion 25	Kapazität 54
Polynom 25	Ladung 53
Polynom und e-Funktion 25	Ohm'sches Gesetz 54
sin- und cos Funktion 25	Punktladungen 53
Differenzverstärker 94	Spannung 53
Differenzaussteuerung 94	Elementarladung 63
	Emitterschaltung 93
	Energiesignale
	Impulsfläche 87
	Impulsmoment 1. Ordnung 87

Erwartungswert	99
F	
Faltung	90
Polynommultiplikation	90
zeitdiskret	90
Fluiddynamik	
Laminare Reibung	51
Ohne Reibung	50
Formfaktoren	
crest - Faktor	67
Effektivwert	67
Formfaktoren	67
Gleichanteil	67
Gleichrichtwert	67
Fortpflanzung	
Fehlerfortpflanzungsgesetz <i>Gauß</i>	102
Messunsicherheiten	103
zufällige Abweichungen	
Erwartungswerte	102
Varianzen	102
Fourier Reihen	33
Funktionenreihen	32
G	
Geneigte Ebene	41
Geraden	17
Abstand eines Puktes	17
Abstand paralleler Geraden	17
Abstand windschiefer Geraden	17
Gesamtsignalleistung	83
gewöhnliches Moment 2. Ordnung	83
Gewichtsfunktion	89 f.
Gleichungen	12
Gravitation	52
Arbeit	52
Planetenbahnen	52
H	
Hook'sches Gesetz	42

I	
Ideales Gas	
Adiabat	57
Energie	57
Isobar	57
Isochor	57
Isotherm	57
Zustandsgleichung	57
Impulsantwort	89 f.
Impulse	
Dreieck	77
Rechteck	77
Impulsenergie	83
Impulsmoment 2. Ordnung	83
Interpolation	35
Differentenschema	36
nach Newton	35
Rechenregeln	36
K	
Kinematik	
Analogietabelle Translation - Rotation	38
Bahngrößen	39
Rotation	39
Translation	39
Winkelgrößen	39
Knotenpunktsatz	64
Komplexe Zahlen	10 f.
Konstantstromquelle	
Bipolar	92
Konvergenz	31
Bekannte konvergente Reihen	31
Leibnizkriterium	31
Majorantenkriterium	31
Minorantenkriterium	31
Quotientenkriterium	31
Wurzelkriterium	31
Korrekturfaktor	98
Kosinus	8
Differentiation	72

Schwingung	69
zu Sinus	70
Kotangens	8
Kreisprozeß	58
Kreuzprodukt	16

L

Leistung	
Blindleistung	74
Definition	75
komplexe L.	75
Leistungsfaktor	67
Mittlere Leistung	67
Momentanleistung	74
Scheinleistung	67
Definition	75
Wirkleistung	67, 74
Leistungssignale	
Effektivwert	84
gewöhnliches Moment 1. Ordnung	85
Gleichanteil	85
linearer Mittelwert	85
quadriertes gewöhnliches Moment 1.	
Ordnung	85
Signalgleichleistung	85
Signalwechselleistung	86
Varianz	86
zentrales Moment 2. Ordnung	86
Leitwert	64
Logarithmus	7

M

Maschensatz	65
Messabweichung	97 f.
Fortpflanzung	98
relativ	97
Messtechnik	
Begriffe	97
Mischgrößen	66

N

Nullphasenzeit	69
----------------------	----

O

Operatoren

Leitwertsop.	72
Parallelschaltung	73
Reihenschaltung	73
Spannungsteiler	73
Stromteiler	73
Widerstandsop.	72

Optik

Brechung	59
Hohlspiegel	59
Lichtwellenleiter	61
Linse	60
numerische Apertur	61
Totalreflexion	59

P

Polynomdivision	13
Potential	63
Potenzen	6 f.
Potenzreihen	32
Bekannte Potenzreihen	32
spezielle Reihen	33

R

Reihen

Geometrische Folge	30
Harmonische Reihe	30

Rotation

Drehimpuls	41
Drehmoment	40
Massenträgheitsmoment	40
Zentripedalkraft	41
rotierender Zeiger	70
Rotierendes Bezugssystem	
Corioliskraft	44
Zentrifugalkraft	43

S

Schwerpunkt

Allgemein	44	Eigenschaften.....	89
Kartesischekoordinaten	44	T	
Punktmasse	44	Tangens.....	8
Zylinderkoordinaten	44	Thermodynamik	
Schwingungen		Mischtemperatur	55
Flüssigkeitspendel	48	Wärme	55
gedämpft		-übertragung	56
COULOMB Reibung	49	-konvektion	55
Gleitreibung.....	49	-leitung	55
Schwingungsgleichung	49	-strahlung	56
Viskosereibung	49	-widerstand	56
Mathematisches Pendel.....	48	Wärmedehnung.....	55
Physikalisches Pendel.....	48	Trägheitsmoment	45
Torsionsschwingung	48	Transformation	
Signale		Bildbereich	71
Definition	82	Zeitbereich	71
Energiewandlung	82	Translation	
Mittlere Leistung.....	83	Arbeit.....	40
Momentanleistung	82	Impuls	40
Signalenergie	83 f.	U	
Signalleistung	84	Übergangsfunktion.....	90
Mittlere	83	Unelastischer Stoß	
Sinus.....	8	Energieerhaltung	42
Addition	69	Impulserhaltung	43
Differentiation.....	72	V	
Schwingung.....	69	Varianz	99
zu Kosinus	70	Vektorrechnung	15
Skalierungsfaktor	78 f.	Verteilungsdichtefunktion	99
Spannung.....	63	Verteilungsfunktion	99
Spannungsquelle	64	Gleichverteilung.....	100
Spatprodukt	16	Normalverteilung.....	100
Sprungantwort	90	Vertrauensbereich	101
Standardabweichung	99	W	
Stichprobe		wahrer Wert	99
empirische Varianz	101	Wechselgrößen	66
Mittelwert.....	101	Widerstand	64
Strom.....	63		
-dichte.....	63		
Stromquelle	64		
Studentverteilung	101		
Systeme			
Übersicht.....	89		

Temperaturabhängigkeit	64
Worst Case	<i>siehe</i> Wurst Käse
Wurst Käse	102
Wurzelsatz von Vieta.....	13

Z

Zeigerbereich

C.....	72
L.....	72
R.....	72