

Formelsammlung - ET/TI

Marc Ludwig

27. April 2012

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| I | Mathematik | 5 |
| 1 | Algebra | 6 |
| 1.1 | Rechenregeln fuer Potenzen | 6 |
| 1.2 | Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen | 6 |
| 1.3 | Potenzen und Logarithmen | 7 |
| 1.4 | Der Binomische Lehrsatz | 7 |
| 1.5 | Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens | 8 |
| 1.5.1 | Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens | 8 |
| 1.5.2 | Additionstheoreme | 8 |
| 1.6 | Komplexe Zahlen | 10 |
| 1.6.1 | Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen | 10 |
| 1.6.2 | Rechnen mit Komplexen Zahlen | 11 |
| 2 | Funktionen | 12 |
| 2.1 | Gleichungen | 12 |
| 2.1.1 | Gleichungen n -ten Grades | 12 |
| 2.1.2 | Lineare Gleichungen | 12 |
| 2.1.3 | Quadratische Gleichungen | 13 |
| 2.1.4 | Biquadratische Gleichungen | 13 |
| 2.1.5 | Gleichungen höheren Grades | 13 |
| 2.1.6 | Wurzelgleichung | 13 |
| 2.1.7 | Ungleichungen | 14 |
| 2.1.8 | Betragsgleichungen | 14 |
| 3 | Vektorrechnung | 15 |
| 3.1 | Vektorrechnung | 15 |
| 3.1.1 | Grundlagen | 15 |
| 3.1.2 | Vektoroperationen | 16 |
| 3.1.3 | Geraden | 17 |
| 3.1.4 | Ebenen | 17 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 4 | Differentialrechnung | 19 |
| 4.1 | Differentialrechnung | 19 |
| 4.1.1 | Erste Ableitungen der elementaren Funktionen | 19 |
| 4.1.2 | Rechenregeln | 20 |
| 4.1.3 | Fehlerrechnung | 21 |
| 4.1.4 | Linearisierung und Taylor-Polynom | 21 |
| 4.1.5 | Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital | 22 |
| 4.1.6 | Differentielle Kurvenuntersuchung | 22 |
| 4.2 | Differentialgleichungen | 24 |
| 4.2.1 | DG 1. Ordnung | 24 |
| 4.2.2 | Lineare DG 2. Ordnung | 24 |
| 4.3 | Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen | 26 |
| 4.3.1 | Differentialrechnung | 26 |
| 4.3.2 | Mehrfachintegral | 27 |
| 5 | Folgen und Reihen | 30 |
| 5.1 | Reihen | 30 |
| 5.1.1 | Geometrische Folge | 30 |
| 5.1.2 | Harmonische Reihe | 30 |
| 5.1.3 | Konvergenz | 31 |
| 5.1.4 | Bekannte konvergente Reihen | 31 |
| 5.2 | Funktionenreihen | 32 |
| 5.2.1 | Potenzreihen | 32 |
| 5.2.2 | Bekannte Potenzreihen | 32 |
| 5.2.3 | spezielle Reihen | 33 |
| 5.2.4 | Fourier Reihen | 33 |
| 6 | Interpolation | 35 |
| 6.1 | Interpolationspolynome | 35 |
| II | Physik | 37 |
| 7 | Kinematik | 38 |
| 7.1 | Analogietabelle | 38 |
| 7.1.1 | Translation | 39 |
| 7.1.2 | Rotation | 39 |
| 7.2 | Dynamik | 40 |
| 7.2.1 | Geradlinig (Translation) | 40 |
| 7.2.2 | Drehbewegung(Rotation) | 40 |
| 7.2.3 | Geneigte Ebene | 41 |
| 7.2.4 | Reibung | 41 |
| 7.2.5 | Feder | 42 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 7.2.6 | Elastischer Stoss | 42 |
| 7.2.7 | Unelastischer Stoss | 42 |
| 7.2.8 | Rotierendes Bezugssystem | 43 |
| 7.3 | Schwerpunkt | 44 |
| 7.4 | Trägheitsmoment | 45 |
| 7.5 | Elastizitätslehre | 46 |
| 7.6 | Schwingungen | 47 |
| 7.6.1 | Ungedämpfte Schwingungen | 47 |
| 7.6.2 | Gedämpfte Schwingungen | 49 |
| 8 | Fluiddynamik | 50 |
| 8.1 | Ohne Reibung | 50 |
| 8.2 | Laminare Reibung | 51 |
| 9 | Gravitation | 52 |
| 10 | Elektrostatik | 53 |
| 11 | Thermodynamik | 55 |
| 11.1 | Wärmedehnung | 55 |
| 11.2 | Wärme | 55 |
| 11.3 | Mischtemperatur | 55 |
| 11.4 | Wärmeleitung | 55 |
| 11.5 | Wärmekonvektion | 55 |
| 11.6 | Wärmewiderstand | 56 |
| 11.6.1 | Wärmeübertragung | 56 |
| 11.6.2 | Wärmestrahlung | 56 |
| 11.6.3 | Zustandsänderung des idealen Gases | 56 |
| 12 | Optik | 59 |
| 12.1 | Brechung | 59 |
| 12.2 | Totalreflexion | 59 |
| 12.3 | Hohlspiegel | 59 |
| 12.4 | Linse | 60 |
| 12.5 | Lichtwellenleiter | 61 |
| III | Elektrotechnik | 62 |
| 13 | Gleichstromtechnik | 63 |
| 13.1 | Grundgrößen | 63 |
| 13.2 | Lineare Quellen | 64 |
| 13.3 | Kirchhoffsche Gesetze | 64 |

| | |
|--|---------------|
| 14 Wechselstromtechnik | 66 |
| 14.1 Anteile und Formfaktoren | 67 |
| 14.2 Leistung und Leistungsfaktoren | 67 |
| 14.3 Sinusförmige Größen | 69 |
| 15 Signal- und Systemtheorie | 77 |
| 15.1 Einfache Impulse | 77 |
| 15.2 Elementare Operationen auf zeitliche Verläufe | 78 |
| 15.3 Signale | 82 |
| 15.4 Signalbeschreibung Leistungssignale | 84 |
| 15.5 Signalbeschreibung Energiesignale | 87 |
| 15.6 Systeme | 89 |
| IV Messtechnik | 91 |
| 16 Grundlagen | 92 |
| 16.1 Begriffe | 92 |
| 16.2 Messabweichung e | 92 |
| 16.2.1 relative Messabweichung | 92 |
| 16.2.2 Messabweichung e_y | 93 |
| 16.2.3 Fortpflanzung systematischer Messabweichungen | 93 |
| 16.3 Statistische Größen | 94 |
| 16.4 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung | 94 |
| 16.5 Verteilungsfunktionen | 95 |
| 16.6 Stichprobe | 96 |
| 16.7 Vertrauensbereich für den Erwartungswert | 96 |
| 16.8 Fortpflanzung zufälliger Abweichungen | 97 |
| 16.9 Fortpflanzung von Messunsicherheiten | 98 |
| Sachregister | 98 |
| V Anhang | 99 |

Teil I

Mathematik

Kapitel 1

Algebra

Why waste time learning
when ignorance is instantaneous?
- Hobbes

1.1 Rechenregeln fuer Potenzen

$$\begin{array}{lll} a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n & \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n & (\text{fuer } a > 0) \ a^b = e^{b \cdot \ln a} \end{array}$$

1.2 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Potenzen und Wurzeln existieren.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

1.3 Potenzen und Logarithmen

Schreibweise: $x = \log_a(b)$ mit $a > 0, a \neq 1$ und $b > 0$.

Es gilt: $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.

Der natuerliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e mit $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\dots$

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1; \text{ da } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Man beachte: $x^a = e^{\ln(x) \cdot a}$

Rechnen mit Logarithmen

| Es gilt: | Weitere Beziehungen: |
|--|---|
| $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$ | $\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log_a(u)$ |
| $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$ | $a^{\log_a(u)} = \log_a(a^u) = u$ |
| $\log_a(u^p) = p \cdot \log_a(u)$ | $\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$ |

1.4 Der Binomische Lehrsatz

Die Potenzen eines Binoms $a+b$ lassen sich nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln ($n \in \mathbb{N}^*$):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 \cdot b^{n-1} + b^n$$

Die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen Binominalkoeffizienten, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Einige Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ fuer } k > n & \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} & \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

1.5 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

1.5.1 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 & \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) &= 1 \\ \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ 1 + \tan^2(\alpha) &= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} & 1 + \cot^2(\alpha) &= \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

1.5.2 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)} \end{aligned}$$

Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\alpha))$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha))$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

Umformungen

Summe oder Differenz in ein Produkt

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Produkt in eine Summe oder Differenz

$$2 \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

1.6 Komplexe Zahlen

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man:

$$\mathbb{C} = \{z | z = a + bj, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

a-Realteil b-Imaginaerteil j-imaginaere Einheit

| kartesische Form | trigonometrische Form | exponentialform |
|-----------------------------|---|---------------------------------|
| $z = a + bj$ | $z = z (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$ | $z = z \cdot e^{j\varphi}$ |
| $z^* = (a + bj)^* = a - bj$ | $z^* = z (\cos \varphi - j \cdot \sin \varphi)$ | $z^* = z \cdot e^{-j\varphi}$ |

$|z|$ = Betrag von z

φ = Argument (Winkel) von z

z^* = Konjugiert komplexe Zahl

1.6.1 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

Polarform \rightarrow Kartesische Form

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \underbrace{|z| \cdot \cos \varphi}_a + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin \varphi}_b = a + bj$$

Kartesische Form \rightarrow Polarform

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

1.6.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j \cdot (a_1b_2 + a_2b_1)$$

In der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [|z_1| (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [|z_2| (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)] \\ &= (|z_1| |z_2|) \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= (|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}) = (|z_1| |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division

In kartesischer Form

In der Polarform

Kapitel 2

Funktionen

2.1 Gleichungen

2.1.1 Gleichungen n -ten Grades

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R})$$

Eigenschaften

- Die Gleichung besitzen maximal n reelle Lösungen.
- Es gibt genau n komplexe Lösungen.
- Für ungerades n gibt es mindestens eine reelle Lösung.
- Komplexe Lösungen treten immer Paarweise auf.
- Es existieren nur Lösungsformeln bis $n \leq 4$. Für $n > 4$ gibt es nur noch grafische oder numerische Lösungswege.
- Wenn eine Nullstelle bekannt ist kann man die Gleichung um einen Grad verringern, indem man den zugehörigen Linearfaktor $x - x_1$ abspaltet (Polynome Division).

2.1.2 Lineare Gleichungen

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

2.1.3 Quadratische Gleichungen

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Normalform mit Lösung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Überprüfung (Wurzelsatz von Vieta)

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

x_1, x_2 : Lösung der quadratischen Gleichung.

2.1.4 Biquadratische Gleichungen

Diese Gleichungen lassen sich mithilfe der Substitution lösen.

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$$

$$u = x^2$$

$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0$$

$$x = \pm \sqrt{u}$$

Das u kann mithilfe der Lösungsformel einer quadratischen Gleichung gelöst werden.

2.1.5 Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades kann man durch graphische oder numerische Ansätze lösen. Hilfreich ist das finden einer Lösung und das abspalten eines Linearfaktor, mithilfe der Polynomdivision oder dem Horner Schema, von der ursprünglichen Gleichung.

Polynomdivision

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{x - x_0} = b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 + r(x)$$

x_0 ist dabei die erste gefunden Nullstelle. $r(x)$ verschwindet wenn x_0 ein Nullstellen oder eine Lösung von $f(x)$ ist.

$$r(x) = \frac{a_3 \cdot x_0^3 + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x - x_0}$$

2.1.6 Wurzelgleichung

Wurzelgleichungen löst man durch quadrieren oder mit Hilfe von Substitution. Bei Wurzelgleichung ist zu beachten das quadrieren keine Äquivalente Umformung ist und das Ergebniss überprüft werden muss.

2.1.7 Ungleichungen

- Beidseitiges Subtrahieren oder Addieren ist möglich
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige positiven Zahl multipliziert oder dividiert werden
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige negativen Zahl multipliziert oder dividiert werden, wenn man gleichzeitig das Relationszeichen umdreht.

2.1.8 Betragsgleichungen

Betragsgleichungen löst man mithilfe der Fallunterscheidung. Dabei wird einmal davon ausgegangen das der Term innerhalb des Betrags einmal positiv und einmal negativen sein kann.

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Kapitel 3

Vektorrechnung

3.1 Vektorrechnung

3.1.1 Grundlagen

Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \\ &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2 Punkt Vektor

$$P_1 \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Betrag

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= a \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &= \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}\end{aligned}$$

Richtungswinkel

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} \\ 1 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma\end{aligned}$$

3.1.2 Vektoroperationen

Addition und Subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$a \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} ab_x \\ ab_y \\ ab_z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ Fläche des Parallelograms \vec{a}, \vec{b}
 $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Spatprodukt

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$$

Volumen des Parallelepiped $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\begin{aligned} [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] &= \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= a_x(b_y c_z - b_z c_y) \\ &\quad + a_y(b_z c_x - b_x c_z) \\ &\quad + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Schnittwinkel

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Projektion

$$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = (\vec{b} \circ \vec{e}_a) \vec{e}_a$$

3.1.3 Geraden

Geradengleichung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ d &= \frac{|\vec{a} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}\end{aligned}$$

Abstand zweier paralleler Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_1 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|}\end{aligned}$$

Abstand zweier windschiefen Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_2 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}\end{aligned}$$

3.1.4 Ebenen

Ebenengleichung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t, s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &\quad + s(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Parameterfreie Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t, s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ \vec{r} \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) &= \vec{r}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + t\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + s\vec{a}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ \vec{r} \circ \vec{n} &= \vec{r}_1 \circ \vec{n} + 0 + 0 \\ \vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_1) &= 0\end{aligned}$$

Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

Normierter Normalenvektor

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Hessesche Normalform

$$0 = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Abstand eines Geraden von einer Ebene**Abstand zweier paralleler Ebenen**

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}_1$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_G - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{Ar_{G1} + Br_{G2} + Cr_{G3} + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$$

$$\vec{g}(t, s) = \vec{r}_2 + t\vec{a}_3 + s\vec{a}_4$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}|}$$

Schnittwinkel zweier Ebenen**Durchstoßpunkt**

$$\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}$$

$$\vec{r}_s = \vec{r}_G + \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_1 - \vec{r}_G)}{\vec{n} \circ \vec{a}} \vec{a}$$

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} \right)$$

Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 Differentialrechnung

4.1.1 Erste Ableitungen der elementaren Funktionen

Potenzfunktion

$$x^n \quad \Longleftrightarrow \quad n \cdot x^{n-1}$$

Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned} e^x &\Longleftrightarrow e^x \\ a^x &\Longleftrightarrow \ln a \cdot a^x \end{aligned}$$

Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned} \ln x &\Longleftrightarrow \frac{1}{x} \\ \log_a x &\Longleftrightarrow \frac{1}{(\ln a) \cdot x} \end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \sin x &\Longleftrightarrow \cos x \\ \cos x &\Longleftrightarrow -\sin x \\ \tan x &\Longleftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \\ \tan x &\Longleftrightarrow 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

Arcusfunktionen**Hyperbolische Funktionen**

$$\arcsin x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sinh x \quad \Longleftrightarrow \quad \cosh x$$

$$\cosh x \quad \Longleftrightarrow \quad \sinh x$$

$$\tanh x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\tanh x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + \tanh^2 x$$

4.1.2 Rechenregeln**Faktorregel**

$$\frac{d}{dx} (C \cdot f(x)) = C \cdot f'(x)$$

Summenregel

$$\frac{d}{dx} (g(x) + f(x)) = g'(x) + f'(x)$$

Produktregel

$$\frac{d}{dx} (g(x) \cdot f(x)) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (h(x) \cdot g(x) \cdot f(x)) = h' \cdot g \cdot f + h \cdot g' \cdot f + h \cdot g \cdot f'$$

Quotientenregel

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f(x)^2}$$

Kettenregel

$$\frac{d}{dx} (g(f(x))) = g'(f) \cdot f'(x)$$

Logarithmische Ableitungen

$$\frac{d}{dx} y = f(x)$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{d}{dx} \ln f(x)$$

4.1.3 Fehlerrechnung

Absoluter Fehler

Δx Absoluter Fehler der Eingangsgröße

Δy Absoluter Fehler der Ausgangsgröße

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Relativer Fehler

δx Relativer Fehler der Eingangsgröße in %

δy Relativer Fehler der Ausgangsgröße in %

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y}$$

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\delta y = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \delta x$$

4.1.4 Linearisierung und Taylor-Polynom

Tangentengleichung

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$$y_T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Taylor Polynom

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

R_n Restglied

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + R_n(x)$$

Restglied

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$x_0 < c < x$, wenn $x_0 < x$

$x_0 > c > x$, wenn $x_0 > x$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

4.1.5 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital**de l'Hospital**

Gilt nur wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ gleich $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.1.6 Differentielle Kurvenuntersuchung**Normale der Kurve**

$$y_N(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x)} (x - x_0)$$

Monotonie-Verhalten

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Monoton wachsend} \\ < 0 \text{ Monoton fallend} \end{cases}$$

Krümmungs-Verhalten

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Linkskr. (konvex)} \\ < 0 \text{ Rechtskr. (konkav)} \end{cases}$$

Ableitung in Polarkordinaten

\dot{r} Ableitung nach φ

\ddot{r} Zweite Ableitung nach φ

$$y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3}$$

Ableitung in Parameterform

\dot{x} Ableitung nach t

\dot{y} Ableitung nach t

$$y = y(t)$$

$$x = x(t)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Bogendifferential

”Wegelement” einer Funktion

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

$$ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \cdot dt$$

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} \cdot d\varphi$$

Winkeländerung

$$\tau = \arctan y'$$

$$d\tau = \frac{y''}{1 + (y')^2} \cdot dx$$

Krümmungskreis

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|}$$

$$x_K = x_P - y' \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$

$$y_K = y_P + \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$

ρ : Radius

(x_K, y_K) : Kreismittelpunkt

(x_P, y_P) : Kurvenpunkt

Kurvenkrümmung

$$\kappa = \frac{d\tau}{ds}$$

$$= \frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}}$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}$$

$$= \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{\sqrt{(r^2 + (r')^2)^3}}$$

4.2 Differentialgleichungen

Anfangswertproblem: Werte nur an einer Stelle vorgegeben
 Randwertproblem: Werte an mehreren Stellen vorgegeben

Lineare DG

$$y_{all} = y_h + y_p$$

4.2.1 DG 1. Ordnung

Trennung der variablen

Lineare DG

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

$$y' + f(x) \cdot g(y) = g(x)g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

$$y_{all} = e^{-F(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right)$$

4.2.2 Lineare DG 2. Ordnung

Darstellung

Fundamental Lösungen

$$a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = g(x)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta \cdot j$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \\ + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

In Folgenden Aufzählungen gilt:

- $G(x)$ Ansatz

- $g(x)$ Störglied
- r Anzahl der Resonanzfälle

Partikuläre Lösungen(Polynom)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

$$G(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n \quad \lambda \neq 0$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) \cdot x^r \quad \lambda = 0$$

Partikuläre Lösungen(Polynom und e-Funktion)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) e^{mx}$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \quad \lambda \neq m$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot x^r \quad \lambda = m$$

Partikuläre Lösungen(sin- und cos Funktion)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx)$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad \lambda \neq \pm kj$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \cdot x^r \quad \lambda = \pm kj$$

Partikuläre Lösungen(e-, sin- und cos Funktion)

$$0 = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

$$g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) e^{mx} \cdot (c \cos(kx) + d \sin(kx))$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx))$$

$$\lambda \neq m \pm kj$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx)) \cdot x^r$$

$$\lambda = m \pm kj$$

4.3 Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen

4.3.1 Differentialrechnung

Ableitung

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = y_{x_1}$$

Alles bis auf x_1 ist konstant beim ableiten

$$\frac{\partial y}{\partial x_n} = y_{x_n}$$

Alles bis auf x_n ist konstant beim ableiten

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = y_{x_1 x_1}$$

Alles bis auf x_1 ist konstant beim ableiten

$$y_{x_1 x_2} = y_{x_2 x_1}$$

Tangentialebene

(x_0, y_0) Entwicklungspunkte der Ebene

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

Totales Differential

$$dz = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$$

Extrema

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$f_{xx}(x_0; y_0) < 0$$

Maximum

$$f_{xx}(x_0; y_0) > 0$$

Minimum

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} > 0$$

Sattelpunkt

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} < 0$$

Richtungsableitung

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \cdot (a_x z_x + a_y z_y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \vec{e}_a \cdot \text{grad}(z)$$

4.3.2 Mehrfachintegral**Polarkordinaten**

$$x = x_0 + r \cos \varphi$$

$$y = y_0 + r \sin \varphi$$

Volumen

$$\iiint_V dV = \int_x \int_y \int_z dz dy dx$$

$$\iiint_V dV = \int_r \int_\varphi \int_z r dz dr d\varphi$$

Fläche

$$A = \iint_{(A)} dA$$

Masse

$$\begin{aligned}
m &= \iint_{(A)} \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
&= \iiint_{(V)} \rho(x, y) \, dz \, dx \, dy \\
&= \iiint_{(V)} \rho(r, \varphi) r \, dz \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Statisches Moment (M_x, M_y) Achsmomente

$$\begin{aligned}
M_x : \\
&= \iint_{(A)} y \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} (y_0 + r \sin \varphi) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
M_y : \\
&= \iint_{(A)} x \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} (x_0 + r \cos \varphi) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Schwerpunkt

$$x_s = \frac{M_y}{m}$$

$$y_s = \frac{M_x}{m}$$

Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_{(A)} y^2 \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_x &= \iint_{(A)} (y_0 + r \sin \varphi)^2 \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
I_y &= \iint_{(A)} x^2 \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_y &= \iint_{(A)} (x_0 + r \cos \varphi)^2 \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Polares Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_{(A)} (y^2 + x^2) \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_x &= \iint_{(A)} \left((y_0 + r \sin \varphi)^2 + (x_0 + r \cos \varphi)^2 \right) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten

$$V = \int_r \int_{\vartheta} \int_{\varphi} r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr$$

Kapitel 5

Folgen und Reihen

5.1 Reihen

5.1.1 Geometrische Folge

Darstellung

$$a_n = a \cdot q^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$$

Konvergent für $|q| < 1$

5.1.2 Harmonische Reihe

Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Konvergent für $s > 1$

5.1.3 Konvergenz

Majorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

b_n bekannte konvergente Reihe

Minorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

b_n bekannte divergente Reihe

Wurzelkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \begin{cases} q > 1 \text{ ist die Reihe divergent} \\ q < 1 \text{ ist die Reihe konvergent} \\ q = 1 \text{ ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Quotientenkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \begin{cases} q > 1 \text{ ist die Reihe divergent} \\ q < 1 \text{ ist die Reihe konvergent} \\ q = 1 \text{ ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Leibnizkriterium

Nur bei alternierenden Reihen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q$$

$q = 0$ ist die Reihe divergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Absolut Konvergent

5.1.4 Bekannte konvergente Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

5.2 Funktionenreihen

Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

5.2.1 Potenzreihen

Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

x_0 : Verschiebung des
Entwicklungspunktes.

Konvergenz

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ränder müssen
untersucht werden.

5.2.2 Bekannte Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

$$x \in (0, 2]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$x \in (-1, 1]$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$x \in [-1, 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$x \in [-1, 1]$$

5.2.3 spezielle Reihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\operatorname{artanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

5.2.4 Fourier Reihen

Allgemein

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + a_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) \, dt$$

Symetrie

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t))$$

gerade Funktion $b_n = 0$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$

ungerade Funktion $a_n = 0$ **Komplex**

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(x) \cdot e^{-jn x} dx$$

Umrechnung

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n)$$

$$a_0 = 2c_0$$

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = j (c_n - c_{-n})$$

Kapitel 6

Interpolation

6.1 Interpolationspolynome

Entwicklung einer Polynomfunktion anhand von $n + 1$ Kurvenpunkten.

- 1. Möglichkeit: Aufstellen von $n + 1$ Gleichungen und ermitteln der Kurvenfunktion mithilfe des Gauß' Algorithmus.
- 2. Möglichkeit: Interpolationspolynome nach Newton.

Interpolationspolynome nach Newton

Gegeben sind die Punkte:

$P_0 = (x_0; y_0), P_1 = (x_1; y_1), P_2 = (x_2; y_2), \dots, P_n = (x_n; y_n)$,
damit lautet die Funktion wie folgt.

$$\begin{aligned} f(x) = & a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \\ & + a_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ & + \dots \\ & + a_n \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ lassen sich mithilfe des Differentschema berechnen. Dabei ist $y_0 = a_0, [x_0, x_1] = a_1, [x_0, x_1, x_2] = a_2$ usw. .

Differentenschema

| k | x_k | y_k | 1 | 2 | 3 | ... |
|----------|----------|----------|--------------|-------------------|------------------------|-----|
| 0 | x_0 | y_0 | | | | |
| | | | $[x_0, x_1]$ | | | |
| 1 | x_1 | y_1 | | $[x_0, x_1, x_2]$ | | |
| | | | $[x_1, x_2]$ | | $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ | |
| 2 | x_2 | y_2 | | $[x_1, x_2, x_3]$ | | ... |
| | | | $[x_2, x_3]$ | | $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ | |
| 3 | x_3 | y_3 | | $[x_2, x_3, x_4]$ | | ... |
| | | | ... | ... | ... | |
| \vdots | \vdots | \vdots | | | | |
| n | x_n | y_n | | | | |

Rechenregeln für dividierte Differenzen

$$[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

$$[x_1, x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$[x_0, \dots, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

$$[x_1, \dots, x_3] = \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$$

$$[x_0, \dots, x_3] = \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3} \quad [x_1, \dots, x_4] = \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_4}$$

Teil II

Physik

Kapitel 7

Kinematik

Perfection is achieved
only on the point of collapse.
- C. N. Parkinson

7.1 Analogietabelle

| Translation | | Rotation |
|---|---|--|
| \vec{s} $\downarrow \frac{ds}{dt}$ \vec{v} $\downarrow \frac{dv}{dt}$ \vec{a} | $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_{Tan}} - \underbrace{\omega^2 r}_{a_R}$ | $\vec{\varphi}$ $\downarrow \frac{d\varphi}{dt}$ $\vec{\omega}$ $\downarrow \frac{d\omega}{dt}$ $\vec{\alpha}$ |
| m $\downarrow \frac{dm}{dt}$ \vec{F} $\downarrow \frac{dF}{dt}$ \vec{p} $\frac{m}{2}v^2$ | E_{kin} | J $\downarrow \frac{dJ}{dt}$ \vec{M} $\downarrow \frac{dM}{dt}$ \vec{L} $\frac{J}{2}\omega^2$ |

7.1.1 Translation

$$\begin{aligned}a(t) &= a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \\v(t) &= a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\s(t) &= \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\end{aligned}$$

Bahngroessen

$$\begin{aligned}a_t(t) &= a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \\v(t) &= a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\s(t) &= \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\end{aligned}$$

Kreisfrequenz

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \\&= 2 \cdot \pi \cdot n \\&= 2 \cdot \pi \cdot f\end{aligned}$$

Umdrehungen

$$\begin{aligned}N &= \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \\&= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2\end{aligned}$$

7.1.2 Rotation

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_0 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \\\omega(t) &= \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \\\varphi(t) &= \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0\end{aligned}$$

Winkelgroessen

$$\begin{aligned}\vec{a}_t &= \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r & \alpha \perp r \\\vec{\alpha} &= \vec{r} \times \vec{a}_t \\\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot r & \omega \perp r \\\vec{\omega} &= \vec{r} \times \vec{v} \\s &= \varphi \cdot r\end{aligned}$$

Radialbeschleunigung

$$\begin{aligned}a_r &= \frac{v^2}{r} \\&= v \cdot \omega \\&= \omega^2 \cdot r\end{aligned}$$

7.2 Dynamik

7.2.1 Geradlinig (Translation)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{Tr}} = -m \cdot \vec{a}$$

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Kraftstoss

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} dp = \int_0^t \vec{F} dt$$

Arbeit

$$W = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\text{Tr}} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\vec{v} \circ d\vec{v} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

Hubarbeit

$$W_{\text{hub}} = mgh$$

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

7.2.2 Drehbewegung(Rotation)

Massentraegheitsmoment

$$J = \int r^2 dm$$

Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpuls

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= J \cdot \vec{\omega}\end{aligned}$$

Arbeit

$$\begin{aligned}W &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e}_{\omega} \, d\varphi \\ &= \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} \, d\vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2)\end{aligned}$$

7.2.3 Geneigte Ebene**Kräfte**

$$\begin{aligned}\vec{F}_N &= \vec{F}_G \cos \alpha \\ \vec{F}_H &= \vec{F}_G \sin \alpha\end{aligned}$$

7.2.4 Reibung**Reibungskraft**

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Leistung

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Zentripedalkraft

$$\begin{aligned}F_{zp} &= -m \cdot \omega^2 \cdot r \\ &= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r}\end{aligned}$$

Rollreibung

$$\begin{aligned}M &= f \cdot F_N \\ F_R &= \frac{f}{r} \cdot F_N\end{aligned}$$

7.2.5 Feder

HOOKsches Gesetz

$$F = -kx$$

$$M = D\varphi$$

Federspannarbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2) \end{aligned}$$

7.2.6 Elastischer Stoß

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Zentraler, Gerader, Elastischer Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \end{aligned}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2$$

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1$$

7.2.7 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß + Arbeit

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Total unelastischer Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + \Delta W \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= (m_1 + m_2)v' \end{aligned}$$

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

Drehimpulserhaltungssatz

Drehimpuls zur Zeit 1 = Drehimpuls zur Zeit 2

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

Kopplung zweier Rotationskörper

$$\begin{aligned} \vec{\omega}' &= \frac{J_0\vec{\omega}_0 + J_1\vec{\omega}_1}{J_1 + J_2} \\ W &= \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0 + J_1)} (\omega_0 - \omega_1)^2 \end{aligned}$$

7.2.8 Rotierendes Bezugssystem

Zentrifugalkraft

$$\begin{aligned}
\vec{F}_Z &= F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= -m\vec{\omega} \times \vec{v} \\
F_Z &= -m \frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r
\end{aligned}$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

7.3 Schwerpunkt**mehrere Punktmassen**

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Allgemein

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\int dm}$$

**Schwerpunkt in
Zylinderkoordinaten**

$$\begin{aligned}
r_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\
\varphi_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\
z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\
x &= r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z
\end{aligned}$$

**Schwerpunkt in
kartesischen Koordinaten**

$$\begin{aligned}
x_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x x \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \\
y_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x y \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \\
z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x z \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz}
\end{aligned}$$

7.4 Trägheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$

$$J = \int_m r^2 \, dm$$

$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz$$

STEINER'scher Satz

$$J_x = mr^2 + J_s$$

Traegheitsmoment Kugel

$$J_{\text{Sp}} = \frac{2}{5}mr^2$$

Traegheitsmoment Zylinder

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{2}mr^2$$

**Traegheitsmoment Kreisring
(Torus)**

$$J_{\text{Sp}} = mr^2$$

Traegheitsmoment Stab

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{12}ml^2$$

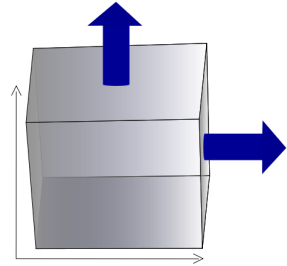
7.5 Elastizitaetslehre

Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_n}{dA}$$

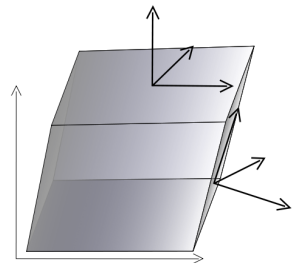
$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_t}{dA}$$



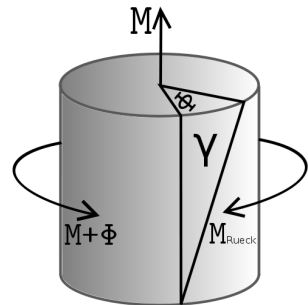
Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$



Drillung

$$\psi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{W_t}{G \cdot J_p} \tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$



Flaechenmoment

$$J_p = \int r^2 dA = \int_{\varphi} \int_r r^3 dr d\varphi$$

Verformungsarbeit

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) \, d\varepsilon$$

7.6 Schwingungen**Harmonische Schwingungen**

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

7.6.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Mathematisches Pendel

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}
\end{aligned}$$

Physikalisches Pendel

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{lmg}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}}
\end{aligned}$$

Torsionsschwingung

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{D}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}}
\end{aligned}$$

Flüssigkeitspendel

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -\frac{2A\rho g}{m}y \\
\varphi(t) &= \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}
\end{aligned}$$

Elektrischer Schwingkreis

$$\begin{aligned}
0 &= L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \\
q(t) &= \hat{Q} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

7.6.2 Gedaempfte Schwingungen

Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

COULOMB Reibung

$$F_R = -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N$$

$$0 = m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N$$

Gleitreibung

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1) \cos(\omega t) - \hat{x}_1 \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1) \cos(\omega t) + \hat{x}_1 \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T$$

$$\hat{x}_1 = \frac{\mu F_N}{k}$$

Viskosereibung

$$0 = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}t}$$

$$\delta = \frac{b}{2m}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

$$D = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Lambda = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$$

$$\Lambda = \delta T$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$d = 2D$$

$$Q = \frac{1}{d}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi)$$

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

Kriechfall $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}$$

Kapitel 8

Fluiddynamik

Premature optimization
is the root of all evil.
- D. Knuth

On the other hand,
we cannot ignore efficiency.
- Jon Bentley

8.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

Dynamischer Druck

Schweredruck

$$p = \frac{dF_N}{dA}$$

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho V g}{A} \\ &= h \rho g \end{aligned}$$

Volumenstrom

Massenstrom

$$\begin{aligned} \dot{V} &= vA \\ &= \iint_A \vec{v} d\vec{A} \\ &= \frac{dV}{dt} \\ &= Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{m} &= jA \\ &= \iint_A \vec{j} d\vec{A} \\ &= \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

Auftrieb

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= -\rho_V \vec{g}V \\ &= -\frac{\rho_V}{\rho_M} \vec{F}_G\end{aligned}$$

Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

Volumenausdehnungskoeffizient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

8.2 Laminare Reibung**Newtonsches Reibungsgesetz**

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

Laminare Strömung (Rohr)

$$\begin{aligned}v(r) &= \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \\ p &= \frac{4\eta l}{R^2} v(0) \\ \dot{V} &= \frac{\pi R^4}{8\eta l} p\end{aligned}$$

Umströmung (Kugel)

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned}\dot{m}|_1 &= \dot{m}|_2 & \dot{V}|_1 &= \dot{V}|_2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 & \rho_1 &= \rho_2\end{aligned}$$

Barometrische Höhenformel

$$\begin{aligned}p &= p_0 e^{-C h} \\ C &= \frac{\rho_0 g}{p_0}\end{aligned}$$

Bernoulli Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const}$$

Bernoulligleichung mit Reibung

$$\begin{aligned}p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 \\ = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p\end{aligned}$$

Reynoldszahl

$$Re = \frac{L \rho v}{\eta}$$

$$Re > Re_{krit}$$

Strömung wird Turbulent

Kapitel 9

Gravitation

The year is 787!
A.D.?
- Monty Python

Gravitationskraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_{g,2} &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_r \\ \vec{F}_g &= \vec{E}_g \cdot m = \vec{g} m\end{aligned}$$

Gravitationspotential

$$\begin{aligned}\phi &= -G \frac{M}{r} \\ \vec{E}_g &= \text{grad} \phi\end{aligned}$$

Arbeit

$$\begin{aligned}W_{12} &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ d\vec{r} \\ &= GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)\end{aligned}$$

Planetenbahnen

$$\left(\frac{a}{a_E} \right)^3 = \left(\frac{T}{T_E} \right)^2$$

Kapitel 10

Elektrostatik

Don't interrupt me
while I'm interrupting.
- Winston S. Churchill

Ladung

$$\begin{aligned}Q &= n \cdot e_0 \\&= CU \\&= \int i \, dt\end{aligned}$$

Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \vec{r}_i$$

COULOMB Gesetz

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} r_1 \vec{2} \\&= \vec{E} Q \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \\&= -\text{grad} \varphi \\&= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right)\end{aligned}$$

Spannung

$$\begin{aligned}U_{AB} &= \frac{W_{AB}}{Q} \\&= \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \\&= \oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = 0 \\&= \varphi_A - \varphi_B \\&= - \int_{\infty}^A \vec{E} \circ d\vec{s} \\&\quad - \left(- \int_{\infty}^B \vec{E} \circ d\vec{s} \right)\end{aligned}$$

El- / Verschiebungsfluß

$$\psi = \int_A \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$\psi = \oint_A \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Flußdichte

$$\vec{D} = \frac{dQ}{dA} \vec{e}_A$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$Q = \oint_A D dA$$

Kapazität

$$Q = CU$$

OHMsches Gesetz

$$\begin{aligned} I &= \oint_A \vec{j} \circ d\vec{A} \\ &= \oint_A \kappa \vec{E} \circ d\vec{A} \\ &= \underbrace{\kappa E \cdot 4\pi r^2}_{\text{Kugel}} \end{aligned}$$

Arbeit im elektrischem Feld

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{D}$$

$$W = \int_V w dV$$

$$= -Q \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_U Q dU$$

$$= \int_U CU dU$$

$$= \frac{1}{2} CU^2$$

Kapitel 11

Thermodynamik

11.1 Wärmedehnung

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \\ V(T) &= V_0(1 + \gamma(T - T_0)) \\ l(T) &= l_0(1 + \alpha(T - T_0)) \\ \gamma &\approx 3 \cdot \alpha \\ \gamma &\approx \beta\end{aligned}$$

11.2 Wärme

$$\begin{aligned}\Delta Q &= c \cdot m(T - T_0) \\ \Delta Q &= C(T - T_0) \\ \Delta Q &= \int_{T_0}^T c \cdot m \, dT \\ \Delta Q &= c_{mol} \cdot n(T - T_0)\end{aligned}$$

11.3 Mischtemperatur

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^n T_i m_i c_i}{\sum_{i=1}^n m_i c_i}$$

\dot{Q} Ist durch einen mehrschichtiges
stationäres System Konstant

11.4 Wärmeleitung

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{dQ}{dt} = \Phi = P \\ \vec{q} &= \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \vec{e}_A \\ \vec{q} &= -\lambda \operatorname{grad} T \\ \vec{q} &= \frac{\lambda}{s} (T_A - T_B) \cdot \vec{e}_s \\ \dot{q} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i}} \cdot (T_A - T_B)\end{aligned}$$

11.5 Wärmekonvektion

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \alpha (T_A - T_B) \\ \dot{q} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}} \cdot (T_A - T_B)\end{aligned}$$

11.6 Wärmewiderstand

$$R_{th} = \frac{T_A - T_B}{\dot{q} \cdot A} = \frac{s}{\lambda A} = \frac{1}{\alpha A} = \sum_{i=1}^n R_i$$

11.6.1 Wärmeübertragung

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n R_i}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n R_i} \cdot (T_A - T_B)$$

$$\dot{q} = k \cdot (T_A - T_B)$$

11.6.2 Wärmestrahlung

$$\alpha = \varepsilon$$

$$1 = \alpha + \tau + \vartheta$$

$$\dot{Q} = \varepsilon A \sigma T^4$$

$$\dot{Q}_{AB} = C_{AB} A_A (T_A^4 - T_B^4)$$

$$C_{AB} = \varepsilon_{AB} \sigma = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_A} + \frac{1}{\sigma_B} - \frac{1}{\sigma}} \quad \text{Parallel}$$

$$C_{AB} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{A_A}{A_B} \left(\frac{1}{\varepsilon_B} - 1 \right)} \quad A_A \text{ von } A_B \text{ umschlossen}$$

$$C_{AB} \approx \varepsilon_A \sigma \quad \text{parallel } (A_A \ll A_B)$$

11.6.3 Zustandsänderung des idealen Gases

Teilchen stehen nicht in Wechselwirkung, besitzen kein Volumen und es kommt zu keinem Phasenübergang

Energie

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

Nur Isobar:

$$dH = c_p m dT = U + p dV$$

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Isotherm

$$pV = \text{const}$$

$$T = \text{const}$$

$$U_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$Q_{12} = -W_{12}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1} + mc_V \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Isobar

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$

$$p = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_p (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = -p (V_2 - V_1)$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Zustandsgleichung

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

$$pV = NkT = mR_s T = nRT$$

$$R_s = \frac{nR}{m}$$

$$R_s = c_p - c_v$$

Isochor

$$\frac{p}{T} = \text{const}$$

$$V = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_v (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12}$$

$$S_{12} = mc_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Adiabat

$$pV^\kappa = \text{const}$$

$$Q = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$Q_{12} = 0$$

$$W_{12} = mc_v (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left(\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} - 1 \right)$$

$$U_{12} = W_{12}$$

$$S_{12} = 0;$$

Kreisprozess

$$\oint dU = 0$$

$$\oint dU = \oint dQ + \oint dW$$

$$\text{Revesiebel: } \oint dS = 0$$

$$\text{Irrevesiebel } \oint dS > 0$$

Carnot-Prozeß

$$\eta_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{Q_{zu} - Q_{AB}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{T_h - T_n}{T_n}$$

Kapitel 12

Optik

The path taken between two points by a ray of light is the path that can be traversed in the least time.
- Pierre de Fermat

12.1 Brechung

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

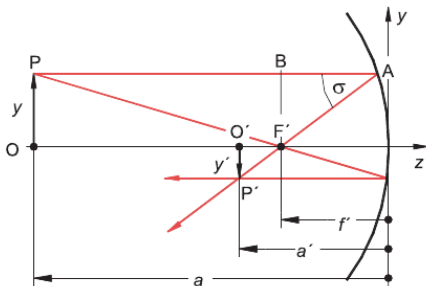
$$\varepsilon_2 = \arcsin \frac{\sin \varepsilon_1 \cdot n_1}{n_2}$$

12.2 Totalreflexion

$$\sin \varepsilon_g = \frac{n_2}{n_1}$$

Totalreflexion tritt nur auf, wenn der Lichtstrahl von einem dichteren in ein optisch dünneren Stoff übergeht.

12.3 Hohlspiegel



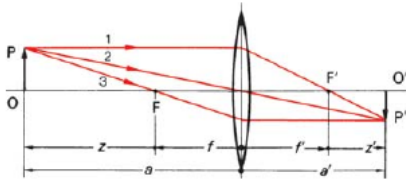
$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$f' = \frac{r}{2}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

$$\beta' = -\frac{a'}{a}$$

12.4 Linse



$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{a}$$

$$f = \frac{a \cdot a'}{a + a'} = -f'$$

$$a' = \frac{a f'}{a + f'}$$

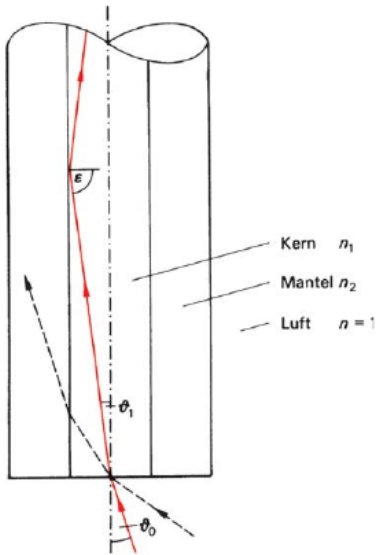
$$\beta' = \frac{f'}{a + f'}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

$$D' = \frac{1}{f'} = (n_L - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

| | | | | | | |
|---------------------------------------|------------------------|-----------------------------|-----------------|------------------------|-----------------------------|-----------------|
| Linsenform | | | | | | |
| Bezeichnung | bi-konvex | plan-konvex | konkav-konvex | bi-konkav | plan-konkav | konvex-konkav |
| Radien | $r_1 > 0$ $r_2 < 0$ | $r_1 = \infty$ $r_2 < 0$ | $r_1 < r_2 < 0$ | $r_1 < 0$ $r_2 > 0$ | $r_1 = \infty$ $r_2 > 0$ | $r_2 < r_1 < 0$ |
| Brennweite im optisch dünneren Medium | $f' > 0$ | $f' > 0$ | $f' > 0$ | $f' < 0$ | $f' < 0$ | $f' < 0$ |

12.5 Lichtwellenleiter



Totalreflexion (Grenzwinkel)

$$n_1 \sin(90^\circ - \vartheta_1) = n_2 \implies \cos \vartheta_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

numerische Apertur

$$\begin{aligned} A_{WL} &= n_0 \sin \vartheta_0 = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_1} \\ &= n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \\ &= \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \\ &= \sqrt{n_{Kern}^2 - n_{Mantel}^2} \end{aligned}$$

Teil III

Elektrotechnik

Kapitel 13

Gleichstromtechnik

13.1 Grundgrößen

Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[Q] = 1C = 1As$$

$$Q = n \cdot e$$

Strom

Stromdichte

$$[I] = 1A$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$[J] = 1 \frac{A}{mm^2}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

Potential

Spannung

$$[\varphi] = 1V = 1 \frac{Nm}{As} = 1 \frac{kgm^2}{As^3}$$

$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

$$[U] = 1V$$

$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

Widerstand und Leitwert

$$[R] = 1\Omega = 1\frac{V}{A}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}$$

$$[G] = 1S = 1\frac{A}{V}$$

$$G = \frac{I}{U}$$

$$= \frac{1}{R}$$

$$= \kappa \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l}$$

Temperaturabhängigkeit

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\right)$$

Leistung

$$[P] = 1W = 1VA$$

$$P = u(t) \cdot i(t)$$

Leistung im Mittel

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

13.2 Lineare Quellen**Spannungsquelle**

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$

$$U_l = I_q \cdot R_i$$

13.3 Kirchhoffsche Gesetze**Knotenpunktsatz**

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

Kapitel 14

Wechselstromtechnik

No rule is so general,
which admits not some exception.
- Robert Burton

Periodische zeitabhängige Größen

Allgemein $x(t) \rightarrow$ speziell $u(t); i(t); q(t); \dots$
es gilt $x(t) = x(t + n \cdot T); (n \in \mathbb{N}^*)$

Wechselgrößen

Allgemein $x_{\sim}(t)$; periodisch sich ändernde Größe, deren Gleichanteil bzw. zeitlich linearer Mittelwert gleich Null ist.

Nachweis:

$$\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x_{\sim}(t) dt = 0; (n \in \mathbb{N}^*); t_1 \text{ beliebiger Zeitwert}$$

Mischgrößen

Sind periodisch, Ihr Gleichanteil \bar{x} bzw. zeitlich linearer Mittelwert jedoch ist ungleich Null.

$$\begin{aligned} \text{Mischgröße} &= \text{Wechselgröße} + \text{Gleichanteil} \\ x(t) &= x_{\sim}(t) + \bar{x} \\ &= \text{gleichanteilbehaftete Wechselgröße} \end{aligned}$$

14.1 Anteile und Formfaktoren

Gleichanteil

Formfaktor

$$\bar{x} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x(t) dt$$

$$F = \frac{x_{eff}}{|\bar{x}|} \quad x_{eff} = |\bar{x}| \cdot F$$

Gleichrichtwert

$$|\bar{x}| = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} |x|(t) dt$$

crest - Faktor

Effektivwert

$$x_{eff} = X = \sqrt{\frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x^2(t) dt}$$

$$\sigma = \frac{\hat{x}}{x_{eff}}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \rightarrow t_1 \text{ beliebiger Zeitwert} \rightarrow [|\bar{x}|] = [x(t)]$$

14.2 Leistung und Leistungsfaktoren

Wirkleistung

Mittlere Leistung

$$P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt$$

$$\bar{p}(t) = P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt$$

$$= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt$$

Scheinleistung

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I$$

Leistungsfaktor

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{P}{S} \\ &= \frac{\frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} p(t) dt}{u_{eff} \cdot i_{eff}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u^2(t) dt} \cdot \sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} i^2(t) dt}}$$

14.3 Sinusförmige Größen

Sinusschwingung

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{x} \sin(2\pi f + \varphi_x) \\x(\omega t) &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)\end{aligned}$$

- \hat{x} : Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Linksverschiebung der Kurve

Kosinusschwingung

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{x} \cos(2\pi f + \varphi_x) \\x(\omega t) &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)\end{aligned}$$

- \hat{x} : Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Rechtsverschiebung der Kurve

Nullphasenzeit

$$t_x = -\frac{\varphi_x}{\omega} = -\varphi_x \cdot \frac{T}{2\pi}$$

Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz

$$\text{mit: } a = \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) \wedge b = \hat{b} \sin(\omega t + \beta)$$

Resultierende Funktion:

$$\begin{aligned}x &= a + b \\&= \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) + \hat{b} \sin(\omega t + \beta) \\&= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

- \hat{x} : resultierende Amplitude
- φ : Nullphasenwinkel

$$\text{Wobei: } \hat{x} = +\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\alpha - \beta)}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{a} \sin \alpha + \hat{b} \sin \beta}{\hat{a} \cos \alpha + \hat{b} \cos \beta}$$

Vierquadrantenarkustangens

$$\varphi = \arctan \frac{ZP}{NP}$$

| | |
|------------------------------|------------------------------|
| 2. Quadrant $ZP > 0, NP < 0$ | 1. Quadrant $ZP > 0, NP > 0$ |
| 3. Quadrant $ZP < 0, NP < 0$ | 4. Quadrant $ZP < 0, NP > 0$ |

Der rotierende Zeiger als rotierender Vektor

$$\begin{aligned} \text{Allgemein gilt: } \sin(\omega t + \varphi_x) &= \frac{GK}{HT} = \frac{b}{\hat{x}} \\ \cos(\omega t + \varphi_x) &= \frac{AK}{HT} = \frac{a}{\hat{x}} \\ b &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \\ a &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \end{aligned}$$

$$\text{Als Einheitsvektor: } \vec{x} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$$

Zeigerspitzenendpunkt

\underline{x} = Zeigerspitzenendpunkt

$$\underline{x} = \underbrace{\hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)}_{Re \rightarrow Abszisse} + j \cdot \underbrace{\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)}_{Im \rightarrow Ordinate}$$

$$\underline{x} = \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$

\underline{x}_{eff} = rotierender Effektivwertzeiger

$$\underline{x}_{eff} = \hat{x}_{eff} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$

Wechsel zwischen Sinus und Kosinus

$$\hat{x}(t) \cos(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t) \sin\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{x}(t) \sin(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t) \cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right)$$

| | | |
|---|--|--|
| Zeitbereich | | komplexer Zeitbereich |
| $x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$ | $\xrightarrow{\text{Hintransformation1}}$ | $\underline{x} = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) + j\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$ |
| $x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)$ | $\xrightarrow{\text{Hintransformation2}}$ | $\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$ |
| | | Berechnungen im komplexen Bereich |
| $y = \text{Im}\{y\} = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$ | $\xleftarrow{\text{Ruecktransformation1}}$ | $\underline{y} = \hat{y} e^{j(\omega t + \varphi_y)}$ |
| $y = \text{Re}\{y\} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y)$ | $\xleftarrow{\text{Ruecktransformation2}}$ | $\underline{y} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y) + j\hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$ |

HT1 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen reellen Kosinusterns mit dem ursprünglichen Sinustern als Imaginärteil

HT2 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen imaginären Sinusterns mit dem ursprünglichen Kosinustern als Realteil

RT1 entnahme des Imaginärteils

RT2 entnahme des Realteils

Merke: $\frac{1}{j} = -j \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

Differentiation und Integration von Sinusgrößen

| Zeitbereich | Zeigerbereich |
|--|---|
| $x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$ | $\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$ |
| $x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$ | |
| $\xrightarrow{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{HT_{1/2}}}$ | $\frac{d^n \underline{x}(t)}{dt^n} = (j\omega)^n \underline{x}$ |

| Zeitbereich | Zeigerbereich |
|--|---|
| $x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$ | $\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$ |
| $x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$ | |
| $\xrightarrow{\int \dots \int x(t) dt^n \xrightarrow{HT_{1/2}}}$ | $\int \dots \int \underline{x}(t) dt = \frac{1}{(j\omega)^n} \underline{x}$ |

R, L und C im kompl. Zeigerbereich

| | |
|---------------------|---|
| Ohmscher Widerstand | $\hat{U} = R \hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$ |
| Induktivität | $\hat{U} = \omega L \hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega L}$ |
| Kapazität | $\hat{U} = \frac{\hat{I}}{\omega C} \quad \hat{I} = \omega C \hat{U}$ |

Widerstands und Leitwertoperator

| \underline{Z} komplexer Widerstand / Impedanz | \underline{Y} komplexer Leitwert / Admitanz |
|--|--|
| $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$ | $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \cdot e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$ |
| $ \underline{Z} = Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I}$ | $ \underline{Y} = Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U}$ |
| mit $\varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z$ | mit $\varphi_i - \varphi_u = -\varphi_Z = \gamma_Y$ |

Widerstand

$$\underline{Z} = R \wedge \underline{Y} = 1/R$$

Kapazität

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Induktivität

$$\underline{Z} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Resultierende Operatoren

Reihenschaltung

$$\underline{Z}_{ges} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i$$

Parallelschaltung

$$\underline{Y}_{ges} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i$$

Spannungsteiler

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}$$

Stromteiler

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}$$

Anteile am komplexen Widerstand (Impedanz)

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = R + jX = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi}$$

mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ Phasenwinkel; R = Wirkwiderstand;

X = Blindwiderstand; $|\underline{Z}|$ = Scheinwiderstand

$$R = R \quad L = \frac{X}{\omega} \text{ mit } X > 0 \quad C = -\frac{1}{\omega X} \text{ mit } X < 0$$

Anteile am komplexen Leiwert (Admitanz)

$$\underline{Y} = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = G + jB = |\underline{Y}| \cdot e^{j\gamma}$$

mit $\gamma = \varphi_i - \varphi_u$ Phasenwinkel; G = Wirkleitwert;

B = Blindleitwert; $|\underline{Y}|$ = Scheinleitwert

$$R = \frac{1}{G} \quad C = \frac{B}{\omega} \text{ mit } B > 0 \quad L = -\frac{1}{\omega B} \text{ mit } B < 0$$

komplexer Widerstand / komplexer Leitwert

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{X}{R}} \\
&= \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \underbrace{\frac{R}{R^2 + X^2}}_G \underbrace{-j \frac{X}{R^2 + X^2}}_B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z} = R + jX &= \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{Y} \cdot e^{-j\gamma} \\
&= \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{B}{G}} \\
&= \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} = \underbrace{\frac{G}{G^2 + B^2}}_R \underbrace{-j \frac{B}{G^2 + B^2}}_X
\end{aligned}$$

Momentanleistung / Augenblicksleistung

$$\begin{aligned}
P(t) &= \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{zeitlich konstant}} - \underbrace{UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{mit doppelter Frequenz schwingend}} \\
&= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi)
\end{aligned}$$

$$\text{mit } \varphi = \varphi_u - \varphi_i \rightarrow \varphi_i = \varphi_u - \varphi$$

Blindleistung

Ermittlung des Blindleistungsanteils aus der Momentanleistung

$$\begin{aligned}
P(t) &= \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{Wirkleistung}} - \underbrace{UI \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Blindleistung}} \\
P_{ges}(t) &= P_{wirk}(t) + P_{blind}(t)
\end{aligned}$$

$$u(t) \cdot i(t) \begin{cases} > 0 \text{ Energie zum Verbraucher} \\ < 0 \text{ Energie zum Erzeuger} \end{cases}$$

Mittlere Leistung / Wirkleistung

$$P = \overline{P}(t) = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1 + n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt = UI \cos \varphi$$

Definition von Blind- und Scheinleistung

$$Q = UI \sin \varphi \quad [Q] = \text{var} \quad \text{mit} \begin{cases} Q > 0 \text{ induktive Blindleistung } Q_{ind} \\ Q < 0 \text{ kapazitive Blindleistung } Q_{kap} \end{cases}$$

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I \quad [S] = VA$$

Beziehungen zwischen Wirk- Blind- und Scheinleistung

| |
|--|
| $P = UI \cdot \cos \varphi \quad Q = UI \cdot \sin \varphi \quad S = UI$ |
|--|

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{S^2 - Q^2} \\ &= S \cdot \cos \varphi \\ &= \frac{Q}{\tan \varphi} \end{aligned}$$

$$Q = \begin{cases} > 0 \rightarrow Q_{ind} = \sqrt{S^2 - P^2} \\ < 0 \rightarrow Q_{kap} = -\sqrt{S^2 - P^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ &= \frac{Q}{\sin \varphi} \\ &= \frac{P}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi = P \cdot \tan \varphi$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{Q}{P} \\ &= \arcsin \frac{Q}{S} \\ &= \arccos \frac{P}{S} \end{aligned}$$

$$P^2 + Q^2 = U^2 \cdot I^2 = S^2$$

Die komplexe Leistung

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* \\ &= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= S \cdot e^{j\varphi} \\ &= \underbrace{S \cdot \cos \varphi}_P + j \cdot \underbrace{S \cdot \sin \varphi}_Q \end{aligned}$$

* - konjugiert Komplex

$$= P + jQ$$

$$[\underline{S}] = VA \quad [P] = W \quad [Q] = var$$

Zusammenhang mit dem komplexen Leitwert / Widerstand

$$\underline{S} = I^2 \cdot \underline{Z} \quad P = I^2 \cdot R = U^2 \cdot G \quad Q = I^2 \cdot X = -U^2 \cdot B$$

Kapitel 15

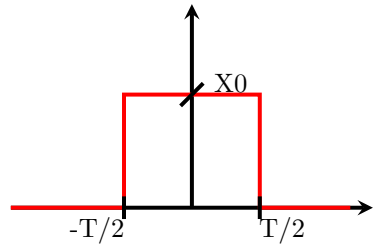
Signal- und Systemtheorie

15.1 Einfache Impulse

Rechteckimpuls/ -funktion $rect_T(t)$

$$x(t) = X_0 \cdot rect_T(t)$$

- T: Rechteckimpulsbreite > 0
- an den Sprungstellen nimmt der Impuls die Hälfte des max. Wertes an

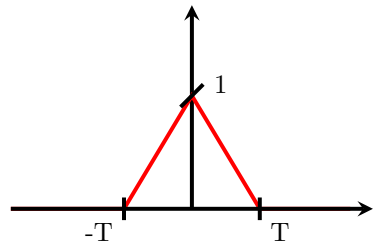


Dreiecksimpuls/ -funktion $\Lambda_T(t)$

$$x(t) = X_0 \cdot \Lambda_T(t)$$

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - |t/T| & \text{für } |t| < T \\ 0 & \text{für } |t| > T \end{cases}$$

- T: Dauer einer ansteigenden / abfallenden Flanke

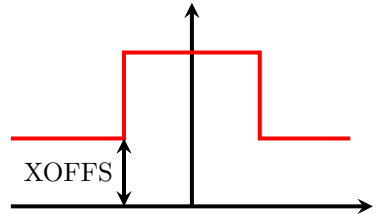


15.2 Elementare Operationen auf zeitliche Verläufe

Beeinflußung der Ordinate

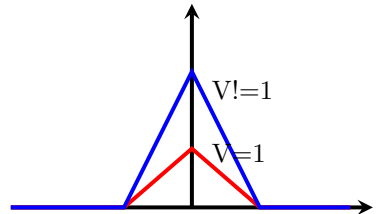
Signaloffset X_{OFFS}

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t) + X_{OFFS}$$



Skalierungsfaktor V ($V \neq 0$)

$$x_{neu}(t) = V \cdot x_{alt}(t)$$

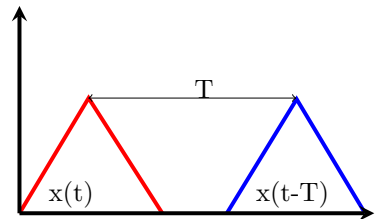


Beeinflußung der Abszisse

zeitliche Verschiebung t_0

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t - t_0) \text{ mit } t_0 = \text{const.}$$

- Zusammenfassung der Offsetbehafteten Zeit $t - t_0$ zu einer neuen Zeitbasis $\tau = t - t_0$
- $x_{neu}(\tau + t_0) = x_{alt}(\tau)$
 $t > 0$ Verschiebung nach rechts
 $t < 0$ Verschiebung nach links

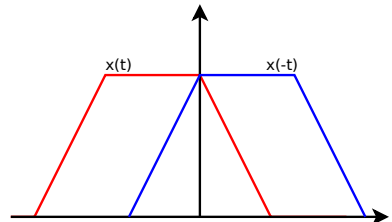


Negation des Arguments t

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(-t) \text{ mit } \tau = -t$$

$$x_{neu}(-\tau) = x_{alt}(\tau)$$

- gleiche Funktionswerte mit negierter Zeitbasis, somit Spiegelung an der Ordinate



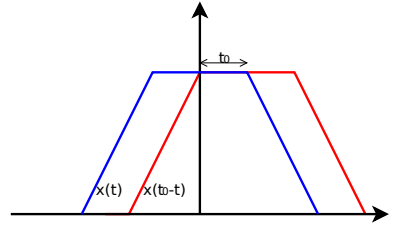
Nagation des Arguments t sowie eine Verschiebung um t_0

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t_0 - t)$$

$$\text{mit } t_0 = \text{const.}$$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(\tau + 1/2t_0)$$

$$x_{neu}(1/2t_0 - \tau) = x_{alt}(\tau + 1/2t_0)$$



- neue Zeitbasis $\tau + 1/2t_0$
- gleiche Funktionswerte, gespiegelt an der Senkrechten von $1/2t_0$

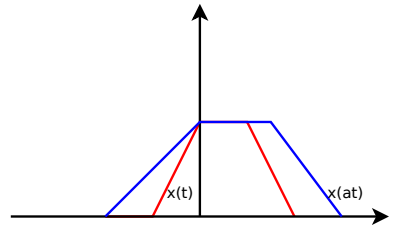
Skalierungsfaktor $a \neq 0$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(a \cdot t)$$

$$\text{mit } a = \text{const.}$$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(\tau)$$

$$x_{neu}(\tau/a) = x_{alt}(\tau)$$

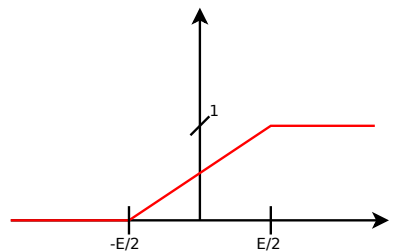


- neue Zeitbasis $\tau = a \cdot t$
- gleiche Funktionswerte, wenn die Zeitbasis durch a geteilt wird
- $a > 1$ Funktion wird gestaucht
 $0 < a < 1$ Funktion wird gestreckt

Einheitssprungfunktion / Deltaimpuls

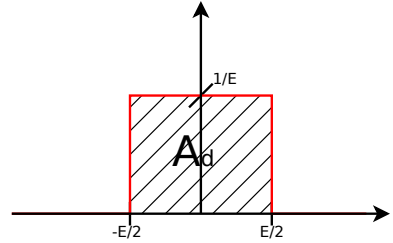
angenäherte Einheitssprungfunktion $\tilde{\sigma}(t, \epsilon)$

- endlicher Geradenanstieg
- Endwert von 1



Einheitsimpuls / Deltaimpuls $\tilde{\delta}(t, \epsilon)$

- Fläche des Impulses ist 1
- Impulshöhe und Breite variabel

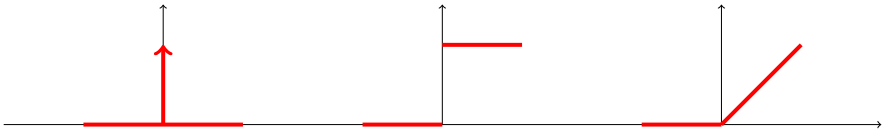


Mathematischer Zusammenhang:

$$\tilde{\delta}(t, \epsilon) = \frac{d\tilde{\sigma}(t, \epsilon)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\sigma}(t, \epsilon) = \int_{-\infty}^t \tilde{\delta}(t, \epsilon) dt$$

Beim Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ ergibt die Einheitssprungfunktion $\sigma(t)$ bzw. deren Ableitung den Deltaimpuls $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \begin{cases} +\infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Zusammenhang zwischen Deltaimpuls, Einheitssprungfunktion und Einheitsanstiegsfunktion

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

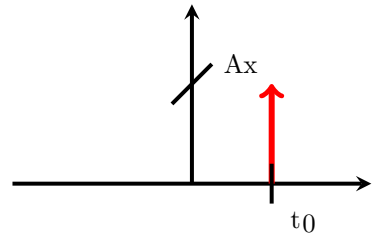
$$\alpha(t) = \begin{cases} t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t \sigma(t) dt = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

zeitliche Verschiebung und Wichtung

Deltaimpuls

$$x(t) = A_x \cdot \delta(t - t_0)$$

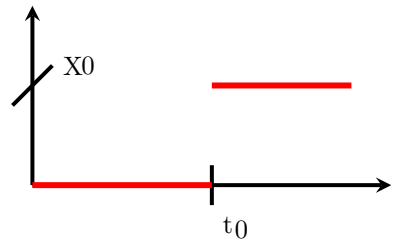
$$[x(t)] = [A_x] \cdot [\delta(t)]$$



Einheitssprung

$$x(t) = X_0 \cdot \sigma(t - t_0)$$

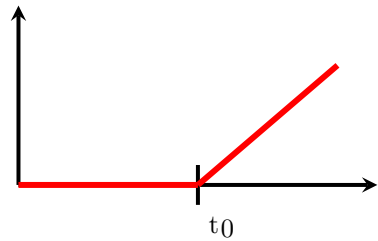
$$[x(t)] = [X_0]$$



Einheitsanstiegsfunktion

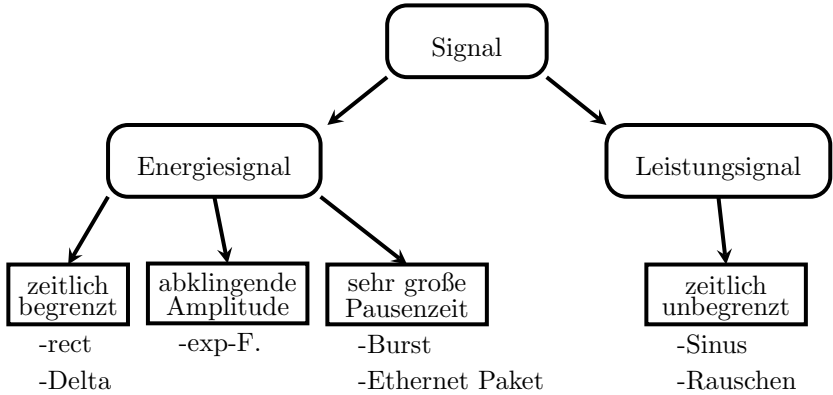
$$x(t) = m \cdot \alpha(t - t_0)$$

$$[x(t)] = [m] \cdot [\alpha(t)]$$



15.3 Signale

Definition: Ein Signal ist eine zeitlich und / oder örtlich veränderliche Größe (physikalisch). Die Veränderung dieser physikalischen Größe, sagt nichts über Ihren Informationsgehalt aus.



Energiewandlung

$$E_R = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot i(t) dt \quad [E_R] = V \cdot A \cdot s = Ws$$

mit $i(t) = \frac{u(t)}{R}$ folgt

$$E_R = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt$$

Momentanleistung $P_r(t_1)$

$$P_R(t_1) = u(t_1) \cdot i(t_1) \quad [P_R(t_1)] = W$$

$$P_R = U_0 \cdot I_0 = \frac{U_0^2}{R} \quad \text{bei Gleichleistung}$$

Mittlere Leistung P_R

$$\begin{aligned}
 P_R &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t) \cdot i(t) dt & [P_R] &= W \\
 &= \frac{1}{R} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t) dt
 \end{aligned}$$

Spezialfall: Periodische Signalverläufe

$$= \frac{1}{n \cdot t_P} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot t_P} u_P(t) \cdot i_P(t) dt = \frac{1}{R \cdot n \cdot t_P} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot t_P} u_P^2(t) dt$$

T : Betrachtungszeit, Meßdauer t_1 : Startzeitpunkt t_P : Periodendauer $R = \text{const.}$

Signalenergie / Impulsenergie / Impulsmoment 2. Ordnung E_U

Nur für Energiesignale sinnvoll.

$$E_U = m_{i2} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt \quad [E_U] = V^2 s$$

Zeitdiskrete Signalverläufe:

$$E_X = m_{i2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_q^2(k) \quad [E_X] = 1$$

Entnormierung über einem realen Widerstand:

$$E_R = E_U \cdot \frac{1}{R} \quad [E_R] = W s$$

Signalleistung P_u / Gesamtsignalleistung P_i / quadratischer Mittelwert $\overline{u^2}$ / gewöhnliches Moment 2. Ordnung m_2

Nur für Leistungssignale sinnvoll.

$$P_u = \overline{u^2} = m_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t) dt \quad [P_u] = V^2$$

Spezialfall: Periodische Signalverläufe

$$P_u = \overline{u^2} = m_2 = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} u_p^2(t) dt$$

Spezialfall: zeitdiskrete Signalverläufe

beliebiges nichtperiodisches Signal:

$$P_X = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2(k)$$

periodisches Signal:

$$P_X = \frac{1}{N_P} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2(k)_P$$

Spezialfall: konstante Werte

$$P_X = X_q^2(k_1)_k$$

Entnormierung über einem realen Widerstand:

$$P_R = P_U \cdot \frac{1}{R} \quad [P_R] = W$$

Signalenergie ↔ Signalleistung

| | Energiesignal | Leistungssignal |
|----------------|----------------|-----------------|
| Signalenergie | endlicher Wert | $+\infty$ |
| Signalleistung | 0 | endlicher Wert |

15.4 Signalbeschreibung Leistungssignale

Effektivwert

Energiesignale haben einen Effektivwert von Null.

$$u_{eff} = \sqrt{P_u} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t) dt}$$

Spezialfall: zeitdiskrete Signalverläufe

$$X_{eff} = \sqrt{P_X} = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2(k)}$$

Gleichanteil / linearer Mittelwert / gewöhnliches Moment 1. Ordnung m_1

Energiesignale haben einen Gleichanteil von Null.

beliebige Signalverläufe

$$\bar{x} = m_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) dt \quad [\bar{x}] = [x]$$

periodische Signalverläufe

$$\bar{x} = m_1 = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} x(t) dt \quad [\bar{x}] = [x]$$

zeitdiskrete Signalverläufe

$$\bar{x}_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x_q(k)$$

periodische zeitdiskrete Signalverläufe

$$\bar{x}_k = \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x_q(k)_p$$

Signalgleichleistung / quadrierter linearer Mittelwert \bar{u}^2 / quadriertes gewöhnliches Moment 1. Ordnung m_1^2

Energiesignale haben eine Signalgleichleistung von Null.

beliebige Signalverläufe

$$P_{u_{=}} = [\bar{u}]^2 = m_1^2 = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t) dt \right]^2 \quad [P_{u_{=}}] = V^2$$

zeitdiskrete Signalverläufe

$$P_{X_{=}} = [\bar{x}]^2 = m_1^2 = \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q(k) \right]^2 \quad [P_{X_{=}}] = 1$$

Entnormierung

$$P_{R_{=}} = \frac{P_{u_{=}}}{R} \quad [P_{R_{=}}] = W$$

Signalwechselleistung $P_{u\sim}$ / Varianz σ^2 / zentrales Moment 2. Ordnung μ_2

Energiesignale haben eine Signalwechselleistung von Null.

$$P_{u\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} [u(t) - \bar{u}]^2 dt$$

periodischer Spannungsverlauf

$$P_{p\sim} = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} [u(t) - \bar{u}]^2 dt$$

zeitdiskrete Signale

$$P_{X\sim} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} [X_q(k) - \bar{X}]^2$$

periodische zeitdiskrete Signale

$$P_{X\sim} = \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} [X_q(k)_p - \bar{X}]^2$$

Entnormierung

$$P_{R\sim} = \frac{P_{u\sim}}{R} \qquad [P_{R\sim}] = W$$

Leistungsbilanz

$$P_u = P_{u=} + P_{u\sim} = m_2 = m_1^2 + \mu_2 = [\bar{u}]^2 + \sigma^2$$

15.5 Signalbeschreibung Energiesignale

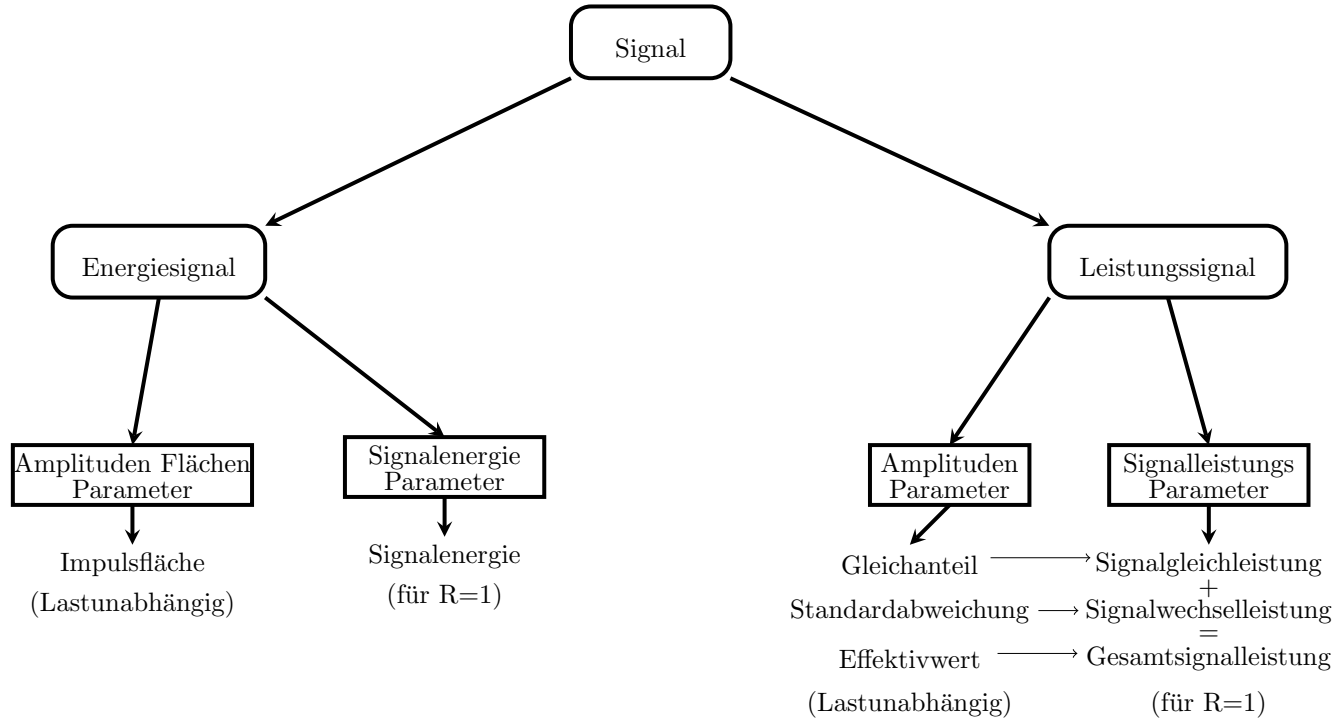
Impulsfläche A_u / Impulsmoment 1. Ordnung m_{i1}

Leistungssignale besitzen Flächen von $\pm\infty$ bzw. Null.

$$A_u = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \, dt \qquad [A_u] = Vs$$

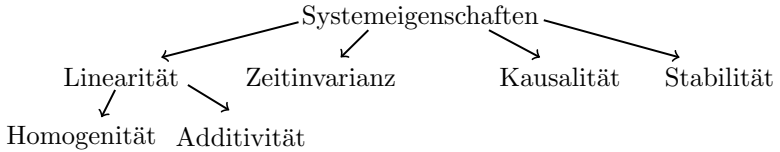
zeitdiskrete Signale

$$A_X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_q(k) \qquad [A_X] = 1$$



15.6 Systeme

Definition: Ein System ist ein physikalisches oder auch technisches Gebilde, welches ein Signal (Eingangssignal, Systemerregung / -anregung) in ein im Allgemeinen andersartiges Signal umformt. Dieses wird Ausgangssignal bzw. Systemantwort / -reaktion genannt.



Übersicht:

| | |
|---------------|--|
| Linearität | Ist nur vorhanden, wenn Homogenität und Additivität vorliegen. Die Multiplikation eines konstanten Faktors mit dem Eingang, führt zu Multiplikation des gleichen Faktors mit dem Ausgang. |
| Additivität | $x(t)$ ist additiv zerlegbar, diese Anteile können getrennt verarbeitet sowie die Systemreaktionen addiert werden. |
| Zeitinvarianz | Zeitinvarianz ist vorhanden, wenn sich die Systemeigenschaften zeitlich nicht ändern. Eine Zeitverzögerung des Eingangssignals überträgt sich somit um eine gleiche Verzögerung ins Ausgangssignal. |
| Kausalität | Kausalität ist Vorhanden, wenn die Systemreaktion nicht schon vor Beginn der Systemerregung einsetzt. Somit ist jedes realisierbare System zwingend kausal. |
| Stabilität | Stabilität Ist vorhanden, wenn bei einem betragsmäßig beschränktem, beliebigem breitbandigen Eingangssignal auch ein betragsmäßig beschränktes Ausgangssignal vorliegt. Grenzstabilität Bedingungen der Stabilität werden nicht erfüllt, jedoch ist die Signalleistung ab einem bestimmten Zeitpunkt konstant. Instabilität Ausgangssignal wächst selbst beim Verschwinden von $x(t)$ unbegrenzt an. |

Impulsantwort / Gewichtsfunktion $g(t)$

mit $x(t) = \delta(t)$ folgt $y(t) = g(t)$

$$[g(t)] = [\delta(t)] = s^{-1}$$

Sprungantwort / Übergangsfunktion $h(t)$

Zusammenhang:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt \Leftrightarrow \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

$$FT\{\sigma(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) - j\frac{1}{2\pi f}$$

Zusammenhang zwischen Übergangs- und Gewichtsfunktion

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad h(t) = \int_{-\infty}^t g(t) dt$$

$$= \underbrace{\int_0^t g(t) dt}_{\text{Kausales System}}$$

Faltungsoperation

- setzt LTI-Systeme voraus
- Gewichtsfunktion wird nur bei LTI-Systemen angegeben

$$y(t) = T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = x(t) * g(t)$$

zeitdiskrete Systeme:

$$y(k) = T\{x(k)\} = \sum_{L=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot g(k - L) = x(k) * g(k)$$

Teil IV

Messtechnik

Kapitel 16

Grundlagen

16.1 Begriffe

- Messwert x_i : gemessener Wert der Messgröße
- Wahrer Wert x_w : existierender Wert der Messgröße
- Richtiger Wert x_r : bekannter Wert mit vernachlässigbarer Differenz zum wahren Wert
- Messabweichung e : Differenz zwischen gemessenem und wahren Wert
- Systematische Messabweichung e_{sys} : Bekannte systematische Messabweichung (korrigierbar)
- Messunsicherheit u : Intervall um den Messwert in dem der wahre Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu finden ist

16.2 Messabweichung e

$$e = x - x_w$$

16.2.1 relative Messabweichung

$$e_{rel} = \frac{e}{x_w} = \frac{x - x_w}{x_w} = \frac{x}{x_w} - 1$$

Korrekturfaktor K **Korrigierter Messwert x_{kor}**

Bei bekannter systematischer Messabweichung.

$$K = -e_{\text{sys}}$$

$$x_{\text{kor}} = x + K$$

16.2.2 Messabweichung e_y

$$e_y = y - y_w = f(x_1 + e_{x_1}, x_2 + e_{x_2}, \dots, x_n + e_{x_n})$$

$$e_y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_{x_i}$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

16.2.3 Fortpflanzung systematischer Messabweichungen**Addition / Subtraktion**

$$y = x_1 \pm x_2$$

 \longrightarrow

$$e_y = e_{x_1} \pm e_{x_2}$$

Multiplikation

$$y = x_1 \cdot x_2$$

 \longrightarrow

$$e_y = x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}$$

$$e_{\text{rel}} = \frac{e_y}{y} = \frac{x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}}{x_1 \cdot x_2} = e_{\text{rel}, x_1} + e_{\text{rel}, x_2}$$

Division

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

 \longrightarrow

$$e_y = \frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2}$$

$$e_{\text{rel}} = \frac{e_y}{y} = \frac{\frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2}}{x_1 \cdot x_2^{-1}} = e_{\text{rel}, x_1} - e_{\text{rel}, x_2}$$

16.3 Statistische Größen

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \text{prob}(X \leq x)$$

Es gilt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x \rightarrow \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

$$\text{prob}(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Verteilungsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

16.4 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert μ

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

nur für stetige Zufallsgrößen

wahrer Wert X

$$x_w = \mu$$

nach Korrektur

der systematischen Abweichung

Varianz σ^2

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

16.5 Verteilungsfunktionen

Normalverteilung

- Normal oder Gaußverteilung
- gute Näherung bei unbekannter statistischer Verteilung
- Werteverteilung:
 - 68,3% aller Werte liegen in $\mu \pm \sigma$
 - 95,5% aller Werte liegen in $\mu \pm 2\sigma$
 - 99,7% aller Werte liegen in $\mu \pm 3\sigma$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

Gleichverteilung

- auch Rechteckverteilung
- alle vorkommenden Werte besitzen gleiche Wahrscheinlichkeit im Intervall

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \mu - a < x < \mu + a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}a^2$$

16.6 Stichprobe

Mittelwert \bar{x}

Der Mittelwert ist ein Schätzwert für den Erwartungswert μ und damit für den wahren Wert.

empirische Varianz s^2

Die empirische Varianz ist ein Schätzwert für die eigentliche Varianz der Messreihe.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

16.7 Vertrauensbereich für den Erwartungswert

Endlich große Stichprobe liefert zufällige Differenz zwischem Schätzwert \bar{x} und wahren Wert $\mu = x_w$.

$$\overline{x_g} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \overline{x_i} s_g^2 = \frac{1}{m} s_i^2 s_g = \frac{1}{\sqrt{m}} s_i$$

Vertrauensbereich:

$$\bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} s < \mu < \bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} \quad \text{mit} \quad t = t(n, \alpha)$$

Studentverteilung

Gibt den t Faktor für Normalverteilungen an

α Überschreitungswahrscheinlichkeit

$1 - \alpha$ Vertrauensniveau

| $1 - \alpha$ | 68,3% | 95% | 99,73% |
|------------------------|-------|-------|--------|
| $n = 2$ | 1,84 | 12,70 | 235,80 |
| $n = 3$ | 1,32 | 4,30 | 19,21 |
| $n = 4$ | 1,20 | 3,18 | 9,22 |
| $n = 5$ | 1,15 | 2,78 | 6,62 |
| $n = 6$ | 1,11 | 2,57 | 5,51 |
| $n = 10$ | 1,06 | 2,26 | 4,09 |
| $n = 20$ | 1,03 | 2,09 | 3,45 |
| $n = 50$ | 1,01 | 2,01 | 3,16 |
| $n \rightarrow \infty$ | 1,00 | 2,00 | 3,00 |

16.8 Fortpflanzung zufälliger Abweichungen

Bedingung: Messergebnis setzt sich aus mehreren Messgrößen x_i zusammen

Erwartungswerte

Varianzen

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{n_i}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{n_i} - \mu_n)^2$$

Worst-Case-Kombination

Maximale Abweichung des Ergebnisses vom Mittelwert.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$|\Delta y| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

statistische Kombination der Varianzen

Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz...

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)} \right)^2 \sigma_k^2$$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{\mu_1}^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{\mu_2}^2 \sigma_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_{\mu_3}^2 \sigma_3^2 + \dots$$

... kann auf empirische Varianz übertragen werden.

$$y = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$$

$$s_y^2 = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)} \right)^2 s_k^2$$

16.9 Fortpflanzung von Messunsicherheiten

Worst Case Abschätzung und Gaußsches Fortpflanzungsgesetz lassen sich auf die Messunsicherheiten übertragen.

Worst Case Abschätzung der Unsicherheit

Statistische Fortpflanzung der Unsicherheit

$$u_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| u_{x_i}$$

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2$$

Teil V

Anhang

Sachregister

| | |
|---------------------------------|--------|
| Additionstheoreme | 8 |
| Binomische Lehrsatz | 7 |
| Differentialgleichungen | 24 |
| 1.Ordnung | 24 |
| 2.Ordnung | 24 |
| Linear | 24 |
| Partikuläre Lösungen | |
| e-, sin- und cos Funktion | 25 |
| Polynom | 25 |
| Polynom und e-Funktion | 25 |
| sin- und cos Funktion | 25 |
| Ebenen | 17 |
| Geraden | 17 |
| Gleichungen | 12 |
| Komplexe Zahlen | 10, 11 |
| Kosinus | 8 |
| Kotangens | 8 |
| Kreuzprodukt | 16 |
| Logarithmus | 7 |
| Polynomdivision | 13 |
| Potenzen | 6, 7 |
| Sinus | 8 |
| Spatprodukt | 16 |
| Tangens | 8 |
| Vektorrechnung | 15 |
| Wurzelsatz von Vieta | 13 |