

# Formelsammlung - ET/TI

Marc Ludwig

31. März 2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Mathematik</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Algebra</b>	<b>4</b>
1.1	Rechenregeln fuer Potenzen . . . . .	4
1.2	Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen . . . . .	4
1.3	Potenzen und Logarithmen . . . . .	5
1.3.1	Der natuerliche Logarithmus . . . . .	5
1.3.2	Rechnen mit Logarithmen . . . . .	5
1.4	Der Binomische Lehrsatz . . . . .	5
1.5	Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens . . . . .	6
1.5.1	Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens	6
1.5.2	Additionstheoreme . . . . .	6
1.5.3	Funktionen des doppelten und halben Winkels . . . . .	7
1.5.4	Umformungen . . . . .	7
1.6	Komplexe Zahlen . . . . .	8
1.6.1	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen . . . . .	8
1.6.2	Rechnen mit Komplexen Zahlen . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Lineare Algebra</b>	<b>10</b>
<b>II</b>	<b>Physik</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Kinematik</b>	<b>12</b>
3.1	Kinematik . . . . .	12
3.1.1	Analogietabelle . . . . .	12
3.1.2	Translation . . . . .	12
3.1.3	Rotation . . . . .	12
3.2	Dynamik . . . . .	14
3.2.1	Drehbewegung(Rotation) . . . . .	14
3.2.2	Geneigte Ebene . . . . .	15
3.2.3	Reibung . . . . .	15

3.2.4	Feder . . . . .	15
3.2.5	Elastischer Stoss . . . . .	16
3.2.6	Unelastischer Stoss . . . . .	16
3.2.7	Rotierendes Bezugssystem . . . . .	17
3.3	Schwerpunkt . . . . .	18
3.4	Trägheitsmoment . . . . .	19
3.5	Elastizitätslehre . . . . .	20
3.6	Schwingungen . . . . .	21
3.6.1	Ungedämpfte Schwingungen . . . . .	21
3.6.2	Gedämpfte Schwingungen . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Fluiddynamik</b>	<b>24</b>
4.1	Fluidmechanik . . . . .	24
4.1.1	Ohne Reibung . . . . .	24
4.1.2	Laminare Reibung . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Gravitation</b>	<b>26</b>
<b>6</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>27</b>
<b>III</b>	<b>Elektrotechnik</b>	<b>29</b>
<b>7</b>	<b>Gleichstromtechnik</b>	<b>30</b>
7.1	Grundgrößen . . . . .	30
7.2	Lineare Quellen . . . . .	31
7.3	Kirchhoffsche Gesetze . . . . .	31
<b>8</b>	<b>Wechselstromtechnik</b>	<b>32</b>
8.1	Definitionen . . . . .	32
8.1.1	periodische zeitabhängige Größen . . . . .	32
8.1.2	Wechselgrößen . . . . .	32
8.1.3	Mischgrößen . . . . .	32
8.2	Anteile und Formfaktoren . . . . .	33
8.2.1	Gleichanteil . . . . .	33
8.2.2	Gleichrichtwert . . . . .	33

Teil I

**Mathematik**

# Kapitel 1

## Algebra

### 1.1 Rechenregeln fuer Potenzen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(\text{fuer } a > 0) \ a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

### 1.2 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Potenzen und Wurzeln existieren.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

## 1.3 Potenzen und Logarithmen

Schreibweise:  $x = \log_a(b)$  mit  $a > 0, a \neq 1$  und  $b > 0$ .

Es gilt:  $\log_a(1) = 0$ ,  $\log_a(a) = 1$ .

### 1.3.1 Der natuerliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis  $e$  mit  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\dots$

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1; \text{ da } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Man beachte:  $x^a = e^{\ln(x) \cdot a}$

### 1.3.2 Rechnen mit Logarithmen

Es gilt:	Weitere Beziehungen:
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log_a(u)$
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$a^{\log_a(u)} = \log_a(a^u) = u$
$\log_a(u^p) = p \cdot \log_a(u)$	$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$

## 1.4 Der Binomische Lehrsatz

Die Potenzen eines Binoms  $a+b$  lassen sich nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln ( $n \in \mathbb{N}^*$ ):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 \cdot b^{n-1} + b^n$$

Die Koeffizienten  $\binom{n}{k}$  heißen Binominalkoeffizienten, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Einige Eigenschaften der Binominalkoeffizienten**

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ fuer } k > n & \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} & \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

**1.5 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens****1.5.1 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens**

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 & \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) &= 1 \\ \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ 1 + \tan^2(\alpha) &= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} & 1 + \cot^2(\alpha) &= \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

**1.5.2 Additionstheoreme**

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)} \end{aligned}$$

### 1.5.3 Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 - \cos(\alpha))$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\alpha))$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

### 1.5.4 Umformungen

#### Summe oder Differenz in ein Produkt

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

#### Produkt in eine Summe oder Differenz

$$2 \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$



# 1.6 Komplexe Zahlen

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man:

$$\mathbb{C} = \{z|z = a + bj, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

a-Realteil    b-Imaginaerteil    j-imaginaere Einheit

kartesische Form	trigonometrische Form	exponentialform
$z = a + bj$	$z =  z  (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$	$z =  z  \cdot e^{j\varphi}$
$z^* = (a + bj)^* = a - bj$	$z^* =  z  (\cos \varphi - j \cdot \sin \varphi)$	$z^* =  z  \cdot e^{-j\varphi}$

- $|z|$  = Betrag von z
- $\varphi$  = Argument (Winkel) von z
- $z^*$  = Konjugiert komplexe Zahl

## 1.6.1 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

### Polarform → Kartesische Form

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \underbrace{|z| \cdot \cos \varphi}_a + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin \varphi}_b = a + bj$$

### Kartesische Form → Polarform

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

## 1.6.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

### Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j \cdot (a_1b_2 + a_2b_1)$$

In der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [|z_1| (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [|z_2| (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)] \\ &= (|z_1| |z_2|) \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= (|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}) = (|z_1| |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

### Division

In kartesischer Form

In der Polarform

## Kapitel 2

# Lineare Algebra

# Teil II

# Physik

# Kapitel 3

## Kinematik

### 3.1 Kinematik

#### 3.1.1 Analogietabelle

Translation		Rotation
$\vec{s}$ $\downarrow \frac{ds}{dt}$ $\vec{v}$ $\downarrow \frac{dv}{dt}$ $\vec{a}$	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$  $a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_{Tan}} - \underbrace{\omega^2 r}_{a_R}$	$\vec{\varphi}$ $\downarrow \frac{d\varphi}{dt}$ $\vec{\omega}$ $\downarrow \frac{d\omega}{dt}$ $\vec{\alpha}$
$m$ $\downarrow \frac{dm}{dt}$ $\vec{F}$ $\downarrow \frac{dF}{dt}$ $\vec{p}$ $\frac{m}{2}v^2$	$E_{kin}$	$J$ $\downarrow \frac{dJ}{dt}$ $\vec{M}$ $\downarrow \frac{dM}{dt}$ $\vec{L}$ $\frac{J}{2}\omega^2$

#### 3.1.2 Translation

$$a(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

#### 3.1.3 Rotation

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

**Bahngroessen**

$$a_t(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

**Winkelgroessen**

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r \quad \alpha \perp r$$

$$\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{a}_t$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot r \quad \omega \perp r$$

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$s = \varphi \cdot r$$

**Kreisfrequenz**

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot n \\ &= 2 \cdot \pi \cdot f \end{aligned}$$

**Radialbeschleunigung**

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{v^2}{r} \\ &= v \cdot \omega \\ &= \omega^2 \cdot r \end{aligned}$$

**Umdrehungen**

$$\begin{aligned} N &= \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \\ &= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2 \end{aligned}$$

## 3.2 Dynamik

### Geradlinig (Translation)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{Tr}} = -m \cdot \vec{a}$$

#### Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

#### Kraftstoss

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} d\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

#### Arbeit

$$W = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\text{Tr}} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\vec{v} \circ d\vec{v} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

#### Hubarbeit

$$W_{\text{hub}} = mgh$$

#### Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

#### Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

### 3.2.1 Drehbewegung(Rotation)

#### Massentraegheitsmoment

$$J = \int r^2 dm$$

#### Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

#### Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= J \cdot \vec{\omega}$$

#### Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

**Arbeit**

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e}_{\omega} \, d\varphi \\
 &= \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} \, d\vec{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2)
 \end{aligned}$$

**3.2.2 Geneigte Ebene****Kräfte**

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_N &= \vec{F}_G \cos \alpha \\
 \vec{F}_H &= \vec{F}_G \sin \alpha
 \end{aligned}$$

**3.2.3 Reibung****Reibungskraft**

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

**3.2.4 Feder****HOOKsches Gesetz**

$$\begin{aligned}
 F &= -kx \\
 M &= D\varphi
 \end{aligned}$$

**Leistung**

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

**Zentripedalkraft**

$$\begin{aligned}
 F_{zp} &= -m \cdot \omega^2 \cdot r \\
 &= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r}
 \end{aligned}$$

**Rollreibung**

$$\begin{aligned}
 M &= f \cdot F_N \\
 F_R &= \frac{f}{r} \cdot F_N
 \end{aligned}$$

**Federspannarbeit**

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2)
 \end{aligned}$$



### 3.2.5 Elastischer Stoß

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

#### Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

#### Zentraler, Gerader, Elastischer Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 \\ v_1' &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \end{aligned}$$

### 3.2.6 Unelastischer Stoß

#### Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß + Arbeit

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

#### Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

**Total unelastischer Stoß**

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + \Delta W$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$$

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2$$

**Drehimpulserhaltungssatz**

Drehimpuls zur Zeit 1 = Drehimpuls zur Zeit 2

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

**Kopplung zweier Rotationskörper**

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0\vec{\omega}_0 + J_1\vec{\omega}_1}{J_1 + J_2}$$

$$W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0 + J_1)}(\omega_0 - \omega_1)^2$$

**3.2.7 Rotierendes Bezugssystem****Zentrifugalkraft****Corioliskraft**

$$\vec{F}_Z = F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= -m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$F_Z = -m \frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r$$

### 3.3 Schwerpunkt

Schwerpunkt mehrerer  
Punktmassen

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Allgemein

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

Schwerpunkt in  
Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} r_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho dr d\varphi dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho dr d\varphi dz} \\ \varphi_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho dr d\varphi dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho dr d\varphi dz} \\ z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho dr d\varphi dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho dr d\varphi dz} \\ x &= r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z \end{aligned}$$

Schwerpunkt in  
kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x x \rho dx dy dz}{\int_z \int_y \int_x \rho dx dy dz} \\ y_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x y \rho dx dy dz}{\int_z \int_y \int_x \rho dx dy dz} \\ z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x z \rho dx dy dz}{\int_z \int_y \int_x \rho dx dy dz} \end{aligned}$$

### 3.4 Trägheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$

$$J = \int_m r^2 \, dm$$

$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz$$

**STEINER'scher Satz**

$$J_x = mr^2 + J_s$$

**Traegheitsmoment Kreisring  
(Torus)**

$$J_{\text{Sp}} = mr^2$$

**Traegheitsmoment Kugel**

$$J_{\text{Sp}} = \frac{2}{5}mr^2$$

**Traegheitsmoment Stab**

**Traegheitsmoment Zylinder**

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{12}ml^2$$

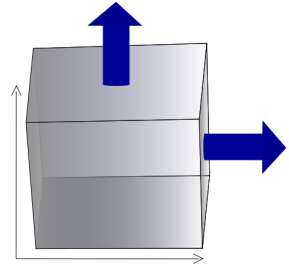
### 3.5 Elastizitaetslehre

#### Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_n}{dA}$$

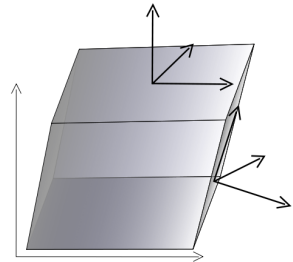
$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_t}{dA}$$



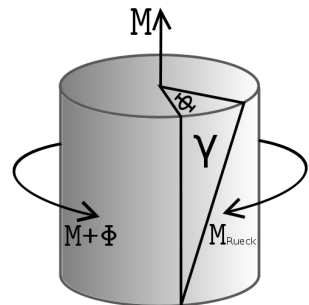
#### Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$



#### Drillung

$$\psi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{W_t}{G \cdot J_p} \tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$



#### Flaechenmoment

$$J_p = \int r^2 dA = \int_{\varphi} \int_r r^3 dr d\varphi$$

#### Verformungsarbeit

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

## 3.6 Schwingungen

### Harmonische Schwingungen

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

#### 3.6.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

#### Mathematisches Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

#### Physikalisches Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{lmg}{J_A}\varphi$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}}$$

**Torsionsschwingung**

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{D}{J_A} \varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}}
\end{aligned}$$

**Flüssigkeitsspendel**

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -\frac{2A\rho g}{m} y \\
\varphi(t) &= \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{y} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{y} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}
\end{aligned}$$

**Elektrischer Schwingkreis**

$$\begin{aligned}
0 &= L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \\
q(t) &= \hat{Q} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{q}(t) &= -\hat{Q} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{q}(t) &= -\hat{Q} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

**3.6.2 Gedaempfte Schwingungen****Schwingungsgleichung**

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

**COULOMB Reibung**

$$\begin{aligned}
F_R &= -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \\
0 &= m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N
\end{aligned}$$

**Gleitreibung**

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1) \cos(\omega t) - \hat{x}_1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\
 x(t) &= -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1) \cos(\omega t) + \hat{x}_1 & \frac{T}{2} \leq t \leq T \\
 \hat{x}_1 &= \frac{\mu F_N}{k}
 \end{aligned}$$

**Viskosereibung**

$$\begin{aligned}
 0 &= m\ddot{x} + b\dot{x} + kx & d &= 2D \\
 x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t} & Q &= \frac{1}{d} \\
 x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}t} \\
 \delta &= \frac{b}{2m} & x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi) \\
 D &= \frac{\delta}{\omega_0} \\
 D &= \frac{b}{2} \frac{1}{\sqrt{mk}} \\
 \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
 \Lambda &= \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) \\
 \Lambda &= \delta T \\
 \omega_D &= \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Aperiodischer Grenzfall  $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

Kriechfall  $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}$$



# Kapitel 4

## Fluiddynamik

### 4.1 Fluidmechanik

#### 4.1.1 Ohne Reibung

##### Statischer Druck

$$p = \frac{dF_N}{dA}$$

##### Dynamischer Druck

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

##### Schweredruck

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho V g}{A} \\ &= h \rho g \end{aligned}$$

##### Volumenstrom

$$\begin{aligned} \dot{V} &= vA \\ &= \iint_A \vec{v} d\vec{A} \\ &= \frac{dV}{dt} \\ &= Q \end{aligned}$$

##### Massenstrom

$$\begin{aligned} \dot{m} &= jA \\ &= \iint_A \vec{j} d\vec{A} \\ &= \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

##### Auftrieb

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= -\rho_V \vec{g} V \\ &= -\frac{\rho_V}{\rho_M} \vec{F}_G \end{aligned}$$

##### Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{m}|_1 &= \dot{m}|_2 \\ \dot{V}|_1 &= \dot{V}|_2 & \rho_1 &= \rho_2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 & \rho_1 &= \rho_2 \end{aligned}$$

**Kompressibilität**

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

**Volumenausdehnungskoeffizient**

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

**4.1.2 Laminare Reibung****Newtonsches Reibungsgesetz**

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

**Laminare Strömung (Rohr)**

$$v(r) = \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

$$p = \frac{4\eta l}{R^2} v(0)$$

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} p$$

**Umströmung (Kugel)**

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

**Barometrische Höhenformel**

$$p = p_0 e^{-Ch}$$

$$C = \frac{\rho_0 g}{p_0}$$

**Bernoulli Gleichung**

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const}$$

**Bernoulligleichung mit Reibung**

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1$$

$$= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + \Delta p$$

**Reynoldszahl**

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$

$$Re > Re_{krit}$$

Strömung wird Turbulent

# Kapitel 5

## Gravitation

### Gravitationskraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_{g,2} &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_r \\ \vec{F}_g &= \vec{E}_g \cdot m = \vec{g} m\end{aligned}$$

### Gravitationspotential

$$\begin{aligned}\phi &= -G \frac{M}{r} \\ \vec{E}_g &= \text{grad} \phi\end{aligned}$$

### Arbeit

$$\begin{aligned}W_{12} &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ d\vec{r} \\ &= GmM \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)\end{aligned}$$

### Planetenbahnen

$$\left( \frac{a}{a_E} \right)^3 = \left( \frac{T}{T_E} \right)^2$$

# Kapitel 6

## Elektrostatik

### Ladung

$$\begin{aligned}Q &= n \cdot e_0 \\&= CU \\&= \int i \, dt\end{aligned}$$

### Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \vec{r}_i$$

### COULOMB Gesetz

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_{12} \\&= \vec{E} Q \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \\&= -\text{grad} \varphi \\&= -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right)\end{aligned}$$

### Spannung

$$\begin{aligned}U_{AB} &= \frac{W_{AB}}{Q} \\&= \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \\&= \oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = 0 \\&= \varphi_A - \varphi_B \\&= - \int_{\infty}^A \vec{E} \circ d\vec{s} \\&\quad - \left( - \int_{\infty}^B \vec{E} \circ d\vec{s} \right)\end{aligned}$$

**El- / Verschiebungsfluß**

$$\psi = \int_A \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$\psi = \oint_A \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$$

**Flußdichte**

$$\vec{D} = \frac{dQ}{dA} \vec{e}_A$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$Q = \oint_A D dA$$

**Kapazität**

$$Q = CU$$

**OHMsches Gesetz**

$$I = \oint_A \vec{j} \circ d\vec{A}$$

$$= \oint_A \kappa \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$= \underbrace{\kappa E \cdot 4\pi r^2}_{\text{Kugel}}$$

**Arbeit im elektrischem Feld**

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{D}$$

$$W = \int_V w dV$$

$$= -Q \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_U Q dU$$

$$= \int_U CU dU$$

$$= \frac{1}{2} CU^2$$

# **Teil III**

# **Elektrotechnik**

# Kapitel 7

## Gleichstromtechnik

### 7.1 Grundgrößen

#### Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[Q] = 1C = 1As$$

$$Q = n \cdot e$$

#### Strom

$$[I] = 1A$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

#### Stromdichte

$$[J] = 1 \frac{A}{mm^2}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

#### Potential

$$[\varphi] = 1V = 1 \frac{Nm}{As} = 1 \frac{kgm^2}{As^3}$$

$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

#### Spannung

$$[U] = 1V$$

$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

#### Widerstand und Leitwert

$$[R] = 1\Omega = 1\frac{V}{A}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}$$

$$[G] = 1S = 1\frac{A}{V}$$

$$G = \frac{I}{U}$$

$$= \frac{1}{R}$$

$$= \kappa \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l}$$

### Temperaturabhängigkeit

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\right)$$

### Leistung

$$[P] = 1W = 1VA$$

$$P = u(t) \cdot i(t)$$

### Leistung im Mittel

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

## 7.2 Lineare Quellen

### Spannungsquelle

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

### Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$

$$U_l = I_q \cdot R_i$$

## 7.3 Kirchhoffsche Gesetze

### Knotenpunktsatz

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

### Maschensatz

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$



# Kapitel 8

## Wechselstromtechnik

### 8.1 Definitionen

#### 8.1.1 periodische zeitabhängige Größen

Allgemein  $x(t) \rightarrow$  speziell  $u(t); i(t); q(t); \dots$   
es gilt  $x(t) = x(t + n \cdot T); (n \in \mathbb{N}^*)$

#### 8.1.2 Wechselgrößen

Allgemein  $x_{\sim}(t)$ ; periodisch sich ändernde Größe, deren Gleichanteil bzw. zeitlich linearer Mittelwert gleich Null ist.

Nachweis:

$$\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x_{\sim}(t) dt = 0; (n \in \mathbb{N}^*); t_1 \text{ beliebiger Zeitwert}$$

#### 8.1.3 Mischgrößen

Sind periodisch, Ihr Gleichanteil  $\bar{x}$  bzw. zeitlich linearer Mittelwert jedoch ist ungleich Null.

Mischgröße = Wechselgröße + Gleichanteil

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\sim}(t) + \bar{x} \\ &= \text{gleichanteilbehaftete Wechselgröße} \end{aligned}$$

## 8.2 Anteile und Formfaktoren

### 8.2.1 Gleichanteil

$$\bar{x} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x(t) dt$$

### 8.2.2 Gleichrichtwert

$$|\bar{x}| = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} |x|(t) dt$$

$n \in \mathbb{N}^*$  ;  $t_1$  beliebiger Zeitwert ;  $[|\bar{x}|] = [x(t)]$