

Formelsammlung - ET/TI

Marc Ludwig

4. Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

I	Mathematik	6
1	Algebra	7
1.1	Rechenregeln fuer Potenzen	7
1.2	Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen	7
1.3	Potenzen und Logarithmen	8
1.4	Der Binomische Lehrsatz	8
1.5	Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens	9
1.5.1	Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens	9
1.5.2	Additionstheoreme	9
1.6	Komplexe Zahlen	11
1.6.1	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	11
1.6.2	Rechnen mit Komplexen Zahlen	12
2	Funktionen	13
2.1	Gleichungen	13
2.1.1	Gleichungen n -ten Grades	13
2.1.2	Lineare Gleichungen	13
2.1.3	Quadratische Gleichungen	14
2.1.4	Biquadratische Gleichungen	14
2.1.5	Gleichungen höheren Grades	14
2.1.6	Wurzelgleichung	14
2.1.7	Ungleichungen	15
2.1.8	Betragsgleichungen	15
3	Vektorrechnung	16
3.1	Vektorrechnung	16
3.1.1	Grundlagen	16
3.1.2	Vektoroperationen	17
3.1.3	Geraden	18
3.1.4	Ebenen	18

4	Differentialrechnung	20
4.1	Differentialrechnung	20
4.1.1	Erste Ableitungen der elementaren Funktionen	20
4.1.2	Rechenregeln	21
4.1.3	Fehlerrechnung	22
4.1.4	Linearisierung und Taylor-Polynom	22
4.1.5	Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital	23
4.1.6	Differentielle Kurvenuntersuchung	23
4.2	Differentialgleichungen	25
4.2.1	DG 1. Ordnung	25
4.2.2	Lineare DG 2. Ordnung	25
4.3	Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen	27
4.3.1	Differentialrechnung	27
4.3.2	Mehrfachintegral	28
5	Folgen und Reihen	31
5.1	Reihen	31
5.1.1	Geometrische Folge	31
5.1.2	Harmonische Reihe	31
5.1.3	Konvergenz	32
5.1.4	Bekannte konvergente Reihen	32
5.2	Funktionenreihen	33
5.2.1	Potenzreihen	33
5.2.2	Bekannte Potenzreihen	33
5.2.3	spezielle Reihen	34
5.2.4	Fourier Reihen	34
6	Interpolation	36
6.1	Interpolationspolynome	36
II	Physik	38
7	Kinematik	39
7.1	Analogietabelle	39
7.1.1	Translation	40
7.1.2	Rotation	40
7.2	Dynamik	41
7.2.1	Geradlinig (Translation)	41
7.2.2	Drehbewegung(Rotation)	41
7.2.3	Geneigte Ebene	42
7.2.4	Reibung	42
7.2.5	Feder	43

7.2.6	Elastischer Stoß	43
7.2.7	Unelastischer Stoß	44
7.2.8	Rotierendes Bezugssystem	45
7.3	Schwerpunkt	45
7.4	Trägheitsmoment	46
7.5	Elastizitätslehre	47
7.6	Schwingungen	48
7.6.1	Ungedämpfte Schwingungen	48
7.6.2	Gedämpfte Schwingungen	50
8	Fluiddynamik	51
8.1	Ohne Reibung	51
8.2	Laminare Reibung	52
9	Gravitation	53
10	Elektrostatik	54
11	Thermodynamik	56
11.1	Wärmedehnung	56
11.2	Wärme	56
11.3	Mischtemperatur	56
11.4	Wärmeleitung	56
11.5	Wärmekonvektion	56
11.6	Wärmewiderstand	57
11.6.1	Wärmeübertragung	57
11.6.2	Wärmestrahlung	57
11.6.3	Zustandsänderung des idealen Gases	57
12	Optik	60
12.1	Brechung	60
12.2	Totalreflexion	60
12.3	Hohlspiegel	60
12.4	Linse	61
12.5	Lichtwellenleiter	62
III	Elektrotechnik	63
13	Gleichstromtechnik	64
13.1	Grundgrößen	64
13.2	Lineare Quellen	65
13.3	Kirchhoffsche Gesetze	65

14 Wechselstromtechnik	66
14.1 Definitionen	66
14.1.1 Periodische zeitabhängige Größen	66
14.1.2 Wechselgrößen	66
14.1.3 Mischgrößen	66
14.2 Anteile und Formfaktoren	67
14.3 Leistung und Leistungsfaktoren	67
14.4 Sinusförmige Größen	68
15 Signal- und Systemtheorie	75
15.1 Einfache Impulse	75
15.2 Elementare Operationen auf zeitliche Verläufe	76
15.3 Signale	80
15.4 Signalbeschreibung Leistungssignale	82
15.5 Signalbeschreibung Energiesignale	85
15.6 Systeme	86
16 Signalverarbeitung	90
16.1 Laplace / Fourier-Transformation	90
16.2 Spektrum	95
16.3 Korrelation	95
17 Binäre Rechenoperationen	96
17.1 Zahlensysteme	96
17.1.1 Dualsystem	96
17.1.2 Ternärsystem	96
17.1.3 Oktalsystem	96
17.1.4 Hexadezimalsystem	96
17.1.5 Dezimalsystem	96
17.1.6 Stellenberechnung	97
17.1.7 Wertebereich und Quantisierungsfehler(Dualsystem)	97
17.1.8 Umwandlung Negativer Dualzahlen	97
17.2 Addition	97
17.2.1 Zwei Operanden	97
17.2.2 Mehrere Operanden	98
17.2.3 Überlauf	98
17.2.4 Überlaufserkennung	99
17.2.5 Sättigung	99
17.2.6 Umwandlung Ternärcode	100

IV	Analoge Schaltungstechnik	101
18	Grundsaltungen	102
V	Messtechnik	106
19	Grundlagen	107
19.1	Begriffe	107
19.2	Messabweichung e	107
19.2.1	relative Messabweichung	107
19.2.2	Messabweichung e_y	108
19.2.3	Fortpflanzung systematischer Messabweichungen	108
19.3	Statistische Größen	109
19.4	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung	109
19.5	Verteilungsfunktionen	110
19.6	Stichprobe	111
19.7	Vertrauensbereich für den Erwartungswert	111
19.8	Fortpflanzung zufälliger Abweichungen	112
19.9	Fortpflanzung von Messunsicherheiten	113
	Sachregister	113
VI	Anhang	114

Teil I

Mathematik

Kapitel 1

Algebra

Why waste time learning
when ignorance is instantaneous?
- Hobbes

1.1 Rechenregeln fuer Potenzen

$$\begin{array}{lll} a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n & \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n & (\text{fuer } a > 0) \ a^b = e^{b \cdot \ln a} \end{array}$$

1.2 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Potenzen und Wurzeln existieren.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

1.3 Potenzen und Logarithmen

Schreibweise: $x = \log_a(b)$ mit $a > 0, a \neq 1$ und $b > 0$.

Es gilt: $\log_a(1) = 0, \log_a(a) = 1$.

Der natuerliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e mit $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\dots$

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1; \text{ da } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Man beachte: $x^a = e^{\ln(x) \cdot a}$

Rechnen mit Logarithmen

Es gilt:	Weitere Beziehungen:
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log_a(u)$
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$a^{\log_a(u)} = \log_a(a^u) = u$
$\log_a(u^p) = p \cdot \log_a(u)$	$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$

1.4 Der Binomische Lehrsatz

Die Potenzen eines Binoms $a+b$ lassen sich nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln ($n \in \mathbb{N}^*$):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 \cdot b^{n-1} + b^n$$

Die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen Binominalkoeffizienten, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Einige Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ fuer } k > n \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

1.5 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

1.5.1 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 & \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) &= 1 \\ \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ 1 + \tan^2(\alpha) &= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} & 1 + \cot^2(\alpha) &= \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

1.5.2 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)} \end{aligned}$$

Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\alpha))$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha))$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

Umformungen

Summe oder Differenz in ein Produkt

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Produkt in eine Summe oder Differenz

$$2 \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

1.6 Komplexe Zahlen

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man:

$$\mathbb{C} = \{z | z = a + bj, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

a-Realteil b-Imaginaerteil j-imaginaere Einheit

kartesische Form	trigonometrische Form	exponentialform
$z = a + bj$	$z = z (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$	$z = z \cdot e^{j\varphi}$
$z^* = (a + bj)^* = a - bj$	$z^* = z (\cos \varphi - j \cdot \sin \varphi)$	$z^* = z \cdot e^{-j\varphi}$

$|z|$ = Betrag von z

φ = Argument (Winkel) von z

z^* = Konjugiert komplexe Zahl

1.6.1 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

Polarform \rightarrow Kartesische Form

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \underbrace{|z| \cdot \cos \varphi}_a + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin \varphi}_b = a + bj$$

Kartesische Form \rightarrow Polarform

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

1.6.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j \cdot (a_1b_2 + a_2b_1)$$

In der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [|z_1| (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [|z_2| (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)] \\ &= (|z_1| |z_2|) \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= (|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}) = (|z_1| |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division

In kartesischer Form

In der Polarform

Kapitel 2

Funktionen

2.1 Gleichungen

2.1.1 Gleichungen n -ten Grades

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R})$$

Eigenschaften

- Die Gleichung besitzen maximal n reelle Lösungen.
- Es gibt genau n komplexe Lösungen.
- Für ungerades n gibt es mindestens eine reelle Lösung.
- Komplexe Lösungen treten immer Paarweise auf.
- Es existieren nur Lösungsformeln bis $n \leq 4$. Für $n > 4$ gibt es nur noch grafische oder numerische Lösungswege.
- Wenn eine Nullstelle bekannt ist kann man die Gleichung um einen Grad verringern, indem man den zugehörigen Linearfaktor $x - x_1$ abspaltet (Polynome Division).

2.1.2 Lineare Gleichungen

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

2.1.3 Quadratische Gleichungen

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Normalform mit Lösung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Überprüfung (Wurzelsatz von Vieta)

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

x_1, x_2 : Lösung der quadratischen Gleichung.

2.1.4 Biquadratische Gleichungen

Diese Gleichungen lassen sich mithilfe der Substitution lösen.

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$$

$$u = x^2$$

$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0$$

$$x = \pm\sqrt{u}$$

Das u kann mithilfe der Lösungsformel einer quadratischen Gleichung gelöst werden.

2.1.5 Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades kann man durch graphische oder numerische Ansätze lösen. Hilfreich ist das finden einer Lösung und das abspalten eines Linearfaktor, mithilfe der Polynomdivision oder dem Horner Schema, von der ursprünglichen Gleichung.

Polynomdivision

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{x - x_0} = b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 + r(x)$$

x_0 ist dabei die erste gefunden Nullstelle. $r(x)$ verschwindet wenn x_0 ein Nullstellen oder eine Lösung von $f(x)$ ist.

$$r(x) = \frac{a_3 \cdot x_0^3 + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x - x_0}$$

2.1.6 Wurzelgleichung

Wurzelgleichungen löst man durch quadrieren oder mit Hilfe von Substitution. Bei Wurzelgleichung ist zu beachten das quadrieren keine Äquivalente Umformung ist und das Ergebniss überprüft werden muss.

2.1.7 Ungleichungen

- Beidseitiges Subtrahieren oder Addieren ist möglich
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige positiven Zahl multipliziert oder dividiert werden
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige negativen Zahl multipliziert oder dividiert werden, wenn man gleichzeitig das Relationszeichen umdreht.

2.1.8 Betragsgleichungen

Betragsgleichungen löst man mithilfe der Fallunterscheidung. Dabei wird einmal davon ausgegangen das der Term innerhalb des Betrags einmal positiv und einmal negativen sein kann.

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Kapitel 3

Vektorrechnung

3.1 Vektorrechnung

3.1.1 Grundlagen

Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \\ &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2 Punkt Vektor

$$P_1 \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Betrag

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= a \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &= \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}\end{aligned}$$

Richtungswinkel

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} \\ 1 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma\end{aligned}$$

3.1.2 Vektoroperationen

Addition und Subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$a \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} ab_x \\ ab_y \\ ab_z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ Fläche des Parallelograms \vec{a}, \vec{b}
 $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Spatprodukt

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$$

Volumen des Parallelepiped $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\begin{aligned} [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] &= \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= a_x(b_y c_z - b_z c_y) \\ &\quad + a_y(b_z c_x - b_x c_z) \\ &\quad + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Schnittwinkel

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Projektion

$$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = (\vec{b} \circ \vec{e}_a) \vec{e}_a$$

3.1.3 Geraden

Geradengleichung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ d &= \frac{|\vec{a} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}\end{aligned}$$

Abstand zweier paralleler Geraden

Abstand zweier windschiefen Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_1 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_2 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}\end{aligned}$$

3.1.4 Ebenen

Ebenengleichung

Parameterfreie Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t, s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &\quad + s(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}(t, s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ \vec{r} \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) &= \vec{r}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + t\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + s\vec{a}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ \vec{r} \circ \vec{n} &= \vec{r}_1 \circ \vec{n} + 0 + 0 \\ \vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_1) &= 0\end{aligned}$$

Normalenvektor

Normierter Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Hessesche Normalform

$$0 = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Abstand einer Geraden von einer Ebene Abstand zweier paralleler Ebenen

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}_1$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_G - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{Ar_{G1} + Br_{G2} + Cr_{G3} + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$$

$$\vec{g}(t, s) = \vec{r}_2 + t\vec{a}_3 + s\vec{a}_4$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}|}$$

Schnittwinkel zweier Ebenen

$$\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Durchstoßpunkt

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}$$

$$\vec{r}_s = \vec{r}_G + \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_1 - \vec{r}_G)}{|\vec{n} \circ \vec{a}|} \vec{a}$$

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} \right)$$

Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 Differntialrechnung

4.1.1 Erste Ableitungen der elementaren Funktionen

Potenzfunktion

$$x^n \quad \Longleftrightarrow \quad n \cdot x^{n-1}$$

Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned} e^x &\Longleftrightarrow e^x \\ a^x &\Longleftrightarrow \ln a \cdot a^x \end{aligned}$$

Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned} \ln x &\Longleftrightarrow \frac{1}{x} \\ \log_a x &\Longleftrightarrow \frac{1}{(\ln a) \cdot x} \end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \sin x &\Longleftrightarrow \cos x \\ \cos x &\Longleftrightarrow -\sin x \\ \tan x &\Longleftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \\ \tan x &\Longleftrightarrow 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

Arcusfunktionen**Hyperbolische Funktionen**

$$\arcsin x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sinh x \quad \Longleftrightarrow \quad \cosh x$$

$$\cosh x \quad \Longleftrightarrow \quad \sinh x$$

$$\tanh x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\tanh x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + \tanh^2 x$$

4.1.2 Rechenregeln**Faktorregel****Summenregel**

$$\frac{d}{dx} (C \cdot f(x)) = C \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (g(x) + f(x)) = g'(x) + f'(x)$$

Produktregel

$$\frac{d}{dx} (g(x) \cdot f(x)) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (h(x) \cdot g(x) \cdot f(x)) = h' \cdot g \cdot f + h \cdot g' \cdot f + h \cdot g \cdot f'$$

Quotientenregel

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f(x)^2}$$

Kettenregel**Logarithmische Ableitungen**

$$\frac{d}{dx} (g(f(x))) = g'(f) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} y = f(x)$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{d}{dx} \ln f(x)$$

4.1.3 Fehlerrechnung

Absoluter Fehler

Δx Absoluter Fehler der Eingangsgröße

Δy Absoluter Fehler der Ausgangsgröße

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Relativer Fehler

δx Relativer Fehler der Eingangsgröße in %

δy Relativer Fehler der Ausgangsgröße in %

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y}$$

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\delta y = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \delta x$$

4.1.4 Linearisierung und Taylor-Polynom

Tangentengleichung

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$$y_T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Taylor Polynom

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

R_n Restglied

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + R_n(x)$$

Restglied

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$x_0 < c < x$, wenn $x_0 < x$

$x_0 > c > x$, wenn $x_0 > x$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

4.1.5 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

de l'Hospital

Gilt nur wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ gleich $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.1.6 Differentielle Kurvenuntersuchung**Normale der Kurve**

$$y_N(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x)} (x - x_0)$$

Monotonie-Verhalten

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Monoton wachsend} \\ < 0 \text{ Monoton fallend} \end{cases}$$

Krümmungs-Verhalten

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Linkskr. (konvex)} \\ < 0 \text{ Rechtskr. (konkav)} \end{cases}$$

Ableitung in Polarkordinaten

\dot{r} Ableitung nach φ

\ddot{r} Zweite Ableitung nach φ

$$y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3}$$

Ableitung in Parameterform

\dot{x} Ableitung nach t

\dot{y} Ableitung nach t

$$y = y(t)$$

$$x = x(t)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Bogendifferential

”Wegelement” einer Funktion

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

$$ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \cdot dt$$

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} \cdot d\varphi$$

Winkeländerung

$$\tau = \arctan y'$$

$$d\tau = \frac{y''}{1 + (y')^2} \cdot dx$$

Krümmungskreis

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|}$$

$$x_K = x_P - y' \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$

$$y_K = y_P + \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$

ρ : Radius

(x_K, y_K) : Kreismittelpunkt

(x_P, y_P) : Kurvenpunkt

Kurvenkrümmung

$$\kappa = \frac{d\tau}{ds}$$

$$= \frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}}$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}$$

$$= \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{\sqrt{(r^2 + (r')^2)^3}}$$

4.2 Differentialgleichungen

Anfangswertproblem: Werte nur an einer Stelle vorgegeben
 Randwertproblem: Werte an mehreren Stellen vorgegeben

Lineare DG

$$y_{all} = y_h + y_p$$

4.2.1 DG 1. Ordnung

Trennung der variablen

Lineare DG

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

$$y' + f(x) \cdot g(y) = g(x)g(y) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

$$y_{all} = e^{-F(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right)$$

4.2.2 Lineare DG 2. Ordnung

Darstellung

Fundamental Lösungen

$$a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = g(x)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta \cdot j$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \\ + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

In Folgenden Aufzählungen gilt:

- $G(x)$ Ansatz
- $g(x)$ Störglied
- r Anzahl der Resonanzfälle

Partikuläre Lösungen(Polynom)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

$$G(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n \quad \lambda \neq 0$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) \cdot x^r \quad \lambda = 0$$

Partikuläre Lösungen(Polynom und e-Funktion)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) e^{mx}$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \quad \lambda \neq m$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot x^r \quad \lambda = m$$

Partikuläre Lösungen(sin- und cos Funktion)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx)$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad \lambda \neq \pm kj$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \cdot x^r \quad \lambda = \pm kj$$

Partikuläre Lösungen(e-, sin- und cos Funktion)

$$0 = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

$$g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) e^{mx} \cdot (c \cos(kx) + d \sin(kx))$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx))$$

$$\begin{aligned}\lambda &\neq m \pm kj \\ G(x) &= (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx)) \cdot x^r \\ \lambda &= m \pm kj\end{aligned}$$

4.3 Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen

4.3.1 Differentialrechnung

Ableitung

$$\begin{aligned}y &= f(x_1, x_2, \dots, x_3) \\ \frac{\partial y}{\partial x_1} &= y_{x_1} && \text{Alles bis auf } x_1 \text{ ist konstant beim ableiten} \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} &= y_{x_n} && \text{Alles bis auf } x_n \text{ ist konstant beim ableiten} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} &= y_{x_1 x_1} && \text{Alles bis auf } x_1 \text{ ist konstant beim ableiten} \\ y_{x_1 x_2} &= y_{x_2 x_1}\end{aligned}$$

Tangentialebene

(x_0, y_0) Entwicklungspunkte der Ebene

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

Totales Differential

$$dz = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$$

Extrema

$$\begin{array}{ll} f_x(x_0, y_0) = 0 & f_y(x_0, y_0) = 0 \\ f_{xx}(x_0; y_0) < 0 & \text{Maximum} \\ f_{xx}(x_0; y_0) > 0 & \text{Minimum} \\ \left| \begin{array}{cc} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{array} \right| > 0 & \end{array}$$

Sattelpunkt

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} < 0$$

Richtungsableitung

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \cdot (a_x z_x + a_y z_y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \vec{e}_a \cdot \text{grad}(z)$$

4.3.2 Mehrfachintegral**Polarkordinaten**

$$x = x_0 + r \cos \varphi$$

$$y = y_0 + r \sin \varphi$$

Volumen

$$\iiint_V dV = \int_x \int_y \int_z dz dy dx$$

$$\iiint_V dV = \int_r \int_\varphi \int_z r dz dr d\varphi$$

Fläche

$$A = \iint_{(A)} dA$$

Masse

$$\begin{aligned}
m &= \iint_{(A)} \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
&= \iiint_{(V)} \rho(x, y) \, dz \, dx \, dy \\
&= \iiint_{(V)} \rho(r, \varphi) r \, dz \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Statisches Moment (M_x, M_y) Achsmomente

$$\begin{aligned}
M_x &: \\
&= \iint_{(A)} y \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} (y_0 + r \sin \varphi) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
M_y &: \\
&= \iint_{(A)} x \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} (x_0 + r \cos \varphi) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Schwerpunkt

$$x_s = \frac{M_y}{m}$$

$$y_s = \frac{M_x}{m}$$

Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_{(A)} y^2 \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_x &= \iint_{(A)} (y_0 + r \sin \varphi)^2 \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
I_y &= \iint_{(A)} x^2 \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_y &= \iint_{(A)} (x_0 + r \cos \varphi)^2 \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Polares Trägheitsmoment

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_{(A)} (y^2 + x^2) \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_x &= \iint_{(A)} \left((y_0 + r \sin \varphi)^2 + (x_0 + r \cos \varphi)^2 \right) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten

$$V = \int_r \int_{\vartheta} \int_{\varphi} r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr$$

Kapitel 5

Folgen und Reihen

5.1 Reihen

5.1.1 Geometrische Folge

Darstellung

$$a_n = a \cdot q^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$$

Konvergent für $|q| < 1$

5.1.2 Harmonische Reihe

Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Konvergent für $s > 1$

5.1.3 Konvergenz

Majorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

b_n bekannte konvergente Reihe

Minorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

b_n bekannte divergente Reihe

Wurzelkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \begin{cases} q > 1 \text{ ist die Reihe divergent} \\ q < 1 \text{ ist die Reihe konvergent} \\ q = 1 \text{ ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Quotientenkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \begin{cases} q > 1 \text{ ist die Reihe divergent} \\ q < 1 \text{ ist die Reihe konvergent} \\ q = 1 \text{ ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Leibnizkriterium

Nur bei alternierenden Reihen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q$$

$q = 0$ ist die Reihe divergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Absolut Konvergent

5.1.4 Bekannte konvergente Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

5.2 Funktionenreihen

Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

5.2.1 Potenzreihen

Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

x_0 : Verschiebung des
Entwicklungspunktes.

Konvergenz

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ränder müssen
untersucht werden.

5.2.2 Bekannte Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

$$x \in (0, 2]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$x \in (-1, 1]$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$x \in [-1, 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$x \in [-1, 1]$$

5.2.3 spezielle Reihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\operatorname{artanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

5.2.4 Fourier Reihen

Allgemein

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + b_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) \, dt$$

Symetrie

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t))$$

gerade Funktion $b_n = 0$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$

ungerade Funktion $a_n = 0$ **Komplex**

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(x) \cdot e^{-jn x} dx$$

Umrechnung

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n)$$

$$a_0 = 2c_0$$

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = j (c_n - c_{-n})$$

Kapitel 6

Interpolation

6.1 Interpolationspolynome

Entwicklung einer Polynomfunktion anhand von $n + 1$ Kurvenpunkten.

- 1. Möglichkeit: Aufstellen von $n + 1$ Gleichungen und ermitteln der Kurvenfunktion mithilfe des Gauß' Algorithmus.
- 2. Möglichkeit: Interpolationspolynome nach Newton.

Interpolationspolynome nach Newton

Gegeben sind die Punkte:

$P_0 = (x_0; y_0), P_1 = (x_1; y_1), P_2 = (x_2; y_2), \dots, P_n = (x_n; y_n)$,
damit lautet die Funktion wie folgt.

$$\begin{aligned} f(x) = & a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \\ & + a_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ & + \dots \\ & + a_n \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ lassen sich mithilfe des Differenzschema berechnen. Dabei ist $y_0 = a_0, [x_0, x_1] = a_1, [x_0, x_1, x_2] = a_2$ usw. .

Differenzenschema

k	x_k	y_k	1	2	3	...
0	x_0	y_0				
			$[x_0, x_1]$			
1	x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]$		
			$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
2	x_2	y_2		$[x_1, x_2, x_3]$...
			$[x_2, x_3]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
3	x_3	y_3		$[x_2, x_3, x_4]$...
			
\vdots	\vdots	\vdots				
n	x_n	y_n				

Rechenregeln für dividierte Differenzen

$$\begin{aligned}
 [x_0, x_1] &= \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} & [x_1, x_2] &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\
 [x_0, \dots, x_2] &= \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} & [x_1, \dots, x_3] &= \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3} \\
 [x_0, \dots, x_3] &= \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3} & [x_1, \dots, x_4] &= \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_4}
 \end{aligned}$$

Teil II

Physik

Kapitel 7

Kinematik

Perfection is achieved
only on the point of collapse.
- C. N. Parkinson

7.1 Analogietabelle

Translation		Rotation
\vec{s} $\downarrow \frac{ds}{dt}$ \vec{v} $\downarrow \frac{dv}{dt}$ \vec{a}	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_{Tan}} - \underbrace{\omega^2 r}_{a_R}$	$\vec{\varphi}$ $\downarrow \frac{d\varphi}{dt}$ $\vec{\omega}$ $\downarrow \frac{d\omega}{dt}$ $\vec{\alpha}$
m $\downarrow \frac{dm}{dt}$ \vec{F} $\downarrow \frac{dF}{dt}$ \vec{p} $\frac{m}{2}v^2$	E_{kin}	J $\downarrow \frac{dJ}{dt}$ \vec{M} $\downarrow \frac{dM}{dt}$ \vec{L} $\frac{J}{2}\omega^2$

7.1.1 Translation

$$\begin{aligned}a(t) &= a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \\v(t) &= a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\s(t) &= \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\end{aligned}$$

Bahngroessen

$$\begin{aligned}a_t(t) &= a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \\v(t) &= a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\s(t) &= \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\end{aligned}$$

Kreisfrequenz

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \\&= 2 \cdot \pi \cdot n \\&= 2 \cdot \pi \cdot f\end{aligned}$$

Umdrehungen

$$\begin{aligned}N &= \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \\&= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2\end{aligned}$$

7.1.2 Rotation

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_0 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \\\omega(t) &= \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \\\varphi(t) &= \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0\end{aligned}$$

Winkelgroessen

$$\begin{aligned}\vec{a}_t &= \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r & \alpha \perp r \\\vec{\alpha} &= \vec{r} \times \vec{a}_t \\\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot r & \omega \perp r \\\vec{\omega} &= \vec{r} \times \vec{v} \\s &= \varphi \cdot r\end{aligned}$$

Radialbeschleunigung

$$\begin{aligned}a_r &= \frac{v^2}{r} \\&= v \cdot \omega \\&= \omega^2 \cdot r\end{aligned}$$

7.2 Dynamik

7.2.1 Geradlinig (Translation)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{Tr}} = -m \cdot \vec{a}$$

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Kraftstoss

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Arbeit

$$W = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\text{Tr}} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\vec{v} \circ d\vec{v} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

Hubarbeit

$$W_{\text{hub}} = mgh$$

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

7.2.2 Drehbewegung(Rotation)

Massentraegheitsmoment

$$J = \int r^2 dm$$

Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpuls

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= J \cdot \vec{\omega}\end{aligned}$$

Arbeit

$$\begin{aligned}W &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e}_{\omega} \, d\varphi \\ &= \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} \, d\vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2)\end{aligned}$$

7.2.3 Geneigte Ebene**Kräfte**

$$\begin{aligned}\vec{F}_N &= \vec{F}_G \cos \alpha \\ \vec{F}_H &= \vec{F}_G \sin \alpha\end{aligned}$$

7.2.4 Reibung**Reibungskraft**

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Leistung

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Zentripedalkraft

$$\begin{aligned}F_{zp} &= -m \cdot \omega^2 \cdot r \\ &= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r}\end{aligned}$$

Rollreibung

$$\begin{aligned}M &= f \cdot F_N \\ F_R &= \frac{f}{r} \cdot F_N\end{aligned}$$

7.2.5 Feder

HOOKsches Gesetz

Federspannarbeit

$$F = -kx$$

$$M = D\varphi$$

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2) \end{aligned}$$

7.2.6 Elastischer Stoß

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Zentraler, Gerader, Elastischer Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 \\ v_1' &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \end{aligned}$$

7.2.7 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß + Arbeit

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Total unelastischer Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + \Delta W \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= (m_1 + m_2)v' \end{aligned}$$

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

Drehimpulserhaltungssatz

Drehimpuls zur Zeit 1 = Drehimpuls zur Zeit 2

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

Kopplung zweier Rotationskörper

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0\vec{\omega}_0 + J_1\vec{\omega}_1}{J_1 + J_2}$$

$$W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0 + J_1)} (\omega_0 - \omega_1)^2$$

7.2.8 Rotierendes Bezugssystem

Zentrifugalkraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_Z &= F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= -m\vec{\omega} \times \vec{v} \\ F_Z &= -m \frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r\end{aligned}$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

7.3 Schwerpunkt

mehrere Punktmassen

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Allgemein

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\int dm}$$

**Schwerpunkt in
Zylinderkoordinaten**

$$\begin{aligned}r_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\ \varphi_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\ z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\ x &= r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z\end{aligned}$$

**Schwerpunkt in
kartesischen Koordinaten**

$$\begin{aligned}x_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x x \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \\ y_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x y \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \\ z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x z \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz}\end{aligned}$$

7.4 Trägheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$

$$J = \int_m r^2 \, dm$$

$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz$$

STEINER'scher Satz

$$J_x = mr^2 + J_s$$

**Trägheitsmoment Kreisring
(Torus)**

Trägheitsmoment Kugel

$$J_{\text{Sp}} = mr^2$$

$$J_{\text{Sp}} = \frac{2}{5}mr^2$$

Trägheitsmoment Stab

Trägheitsmoment Zylinder

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{12}ml^2$$

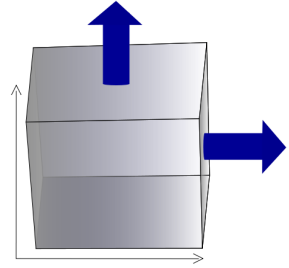
7.5 Elastizitätslehre

Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_n}{dA}$$

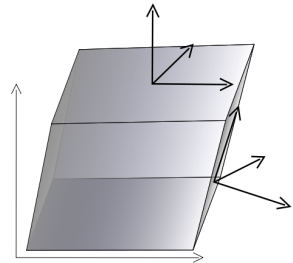
$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_t}{dA}$$



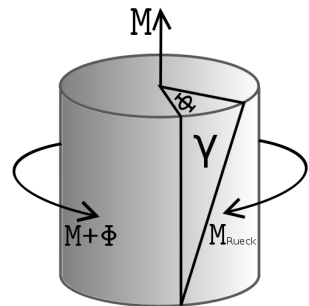
Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$



Drillung

$$\psi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{W_t}{G \cdot J_p} \tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$



Flächenmoment**Verformungsarbeit**

$$J_p = \int r^2 \, dA = \int_{\varphi} \int_r r^3 \, dr \, d\varphi$$

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) \, d\varepsilon$$

7.6 Schwingungen

Harmonische Schwingungen

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

7.6.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Mathematisches Pendel

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}
\end{aligned}$$

Physikalisches Pendel

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{lmg}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}}
\end{aligned}$$

Torsionsschwingung

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{D}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}}
\end{aligned}$$

Flüssigkeitspendel

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -\frac{2A\rho g}{m}y \\
\varphi(t) &= \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}
\end{aligned}$$

Elektrischer Schwingkreis

$$\begin{aligned}
0 &= L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \\
q(t) &= \hat{Q} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

7.6.2 Gedämpfte Schwingungen

Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

COULOMB Reibung

$$\begin{aligned} F_R &= -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \\ 0 &= m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \end{aligned}$$

Gleitreibung

$$\begin{aligned} x(t) &= -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1) \cos(\omega t) - \hat{x}_1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ x(t) &= -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1) \cos(\omega t) + \hat{x}_1 & \frac{T}{2} \leq t \leq T \\ \hat{x}_1 &= \frac{\mu F_N}{k} \end{aligned}$$

Viskosereibung

$$\begin{aligned} 0 &= m\ddot{x} + b\dot{x} + kx \\ x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t} \\ x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}t} \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{b}{2m}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

$$D = \frac{b}{2} \frac{1}{\sqrt{mk}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Lambda = \ln \left(\frac{x(t)}{x(t+T)} \right)$$

$$\Lambda = \delta T$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m} \right)^2}$$

$$d = 2D$$

$$Q = \frac{1}{d}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi)$$

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

Kriechfall $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}$$

Kapitel 8

Fluiddynamik

Premature optimization
is the root of all evil.
- D. Knuth

On the other hand,
we cannot ignore efficiency.
- Jon Bentley

8.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

$$p = \frac{dF_N}{dA}$$

Dynamischer Druck

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Schweredruck

$$p = \frac{\rho V g}{A} \\ = h \rho g$$

Volumenstrom

$$\dot{V} = vA \\ = \iint_A \vec{v} d\vec{A} \\ = \frac{dV}{dt} \\ = Q$$

Massenstrom

$$\dot{m} = jA \\ = \iint_A \vec{j} d\vec{A} \\ = \frac{dm}{dt}$$

Auftrieb

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= -\rho_V \vec{g} V \\ &= -\frac{\rho_V}{\rho_M} \vec{F}_G\end{aligned}$$

Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

Volumenausdehnungskoeffizient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

8.2 Laminare Reibung**Newtonsches Reibungsgesetz**

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

Laminare Strömung (Rohr)

$$\begin{aligned}v(r) &= \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \\ p &= \frac{4\eta l}{R^2} v(0) \\ \dot{V} &= \frac{\pi R^4}{8\eta l} p\end{aligned}$$

Umströmung (Kugel)

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned}\dot{m}|_1 &= \dot{m}|_2 & \dot{V}|_1 &= \dot{V}|_2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 & \rho_1 &= \rho_2\end{aligned}$$

Barometrische Höhenformel

$$\begin{aligned}p &= p_0 e^{-Ch} \\ C &= \frac{\rho_0 g}{p_0}\end{aligned}$$

Bernoulli Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const}$$

Bernoulligleichung mit Reibung

$$\begin{aligned}p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1 \\ = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + \Delta p\end{aligned}$$

Reynoldszahl

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$

$$Re > Re_{krit}$$

Strömung wird Turbulent

Kapitel 9

Gravitation

The year is 787!
A.D.?
- Monty Python

Gravitationskraft

$$\vec{F}_{g,2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_r$$
$$\vec{F}_g = \vec{E}_g \cdot m = \vec{g} m$$

Gravitationspotential

$$\phi = -G \frac{M}{r}$$
$$\vec{E}_g = \text{grad} \phi$$

Arbeit

$$W_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ d\vec{r}$$
$$= GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Planetenbahnen

$$\left(\frac{a}{a_E} \right)^3 = \left(\frac{T}{T_E} \right)^2$$

Kapitel 10

Elektrostatik

Don't interrupt me
while I'm interrupting.
- Winston S. Churchill

Ladung

$$\begin{aligned}Q &= n \cdot e_0 \\&= CU \\&= \int i \, dt\end{aligned}$$

Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \vec{r}_i$$

COULOMB Gesetz

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} r_1 \vec{2} \\&= \vec{E} Q \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \\&= -\text{grad} \varphi \\&= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right)\end{aligned}$$

Spannung

$$\begin{aligned}U_{AB} &= \frac{W_{AB}}{Q} \\&= \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \\&= \oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = 0 \\&= \varphi_A - \varphi_B \\&= - \int_{\infty}^A \vec{E} \circ d\vec{s} \\&\quad - \left(- \int_{\infty}^B \vec{E} \circ d\vec{s} \right)\end{aligned}$$

El- / Verschiebungsfluß

$$\psi = \int_A \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$\psi = \oint_A \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Flußdichte

$$\vec{D} = \frac{dQ}{dA} \vec{e}_A$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$Q = \oint_A D dA$$

Kapazität

$$Q = CU$$

OHMsches Gesetz

$$I = \oint_A \vec{j} \circ d\vec{A}$$

$$= \oint_A \kappa \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$= \underbrace{\kappa E \cdot 4\pi r^2}_{\text{Kugel}}$$

Arbeit im elektrischen Feld

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{D}$$

$$W = \int_V w dV$$

$$= -Q \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_U Q dU$$

$$= \int_U CU dU$$

$$= \frac{1}{2} CU^2$$

Kapitel 11

Thermodynamik

11.1 Wärmedehnung

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$$

$$V(T) = V_0(1 + \gamma(T - T_0))$$

$$l(T) = l_0(1 + \alpha(T - T_0))$$

$$\gamma \approx 3 \cdot \alpha$$

$$\gamma \approx \beta$$

11.2 Wärme

$$\Delta Q = c \cdot m(T - T_0)$$

$$\Delta Q = C(T - T_0)$$

$$\Delta Q = \int_{T_0}^T c \cdot m \, dT$$

$$\Delta Q = c_{mol} \cdot n(T - T_0)$$

11.3 Mischtemperatur

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^n T_i m_i c_i}{\sum_{i=1}^n m_i c_i}$$

\dot{Q} Ist durch einen mehrschichtiges stationäres System Konstant

11.4 Wärmeleitung

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \Phi = P$$

$$\vec{\dot{q}} = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \vec{e}_A$$

$$\vec{\dot{q}} = -\lambda \operatorname{grad} T$$

$$\vec{\dot{q}} = \frac{\lambda}{s} (T_A - T_B) \cdot \vec{e}_s$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i}} \cdot (T_A - T_B)$$

11.5 Wärmekonvektion

$$\dot{q} = \alpha (T_A - T_B)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}} \cdot (T_A - T_B)$$

11.6 Wärmewiderstand

$$R_{th} = \frac{T_A - T_B}{\dot{q} \cdot A} = \frac{s}{\lambda A} = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha A} = \sum_{i=1}^n R_i$$

11.6.1 Wärmeübertragung

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n R_i}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n R_i} \cdot (T_A - T_B)$$

$$\dot{q} = k \cdot (T_A - T_B)$$

11.6.2 Wärmestrahlung

$$\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \quad \text{BoltzmannKonstante}$$

$$\sigma_A = c_A$$

$$\alpha = \varepsilon$$

$$1 = \alpha + \tau + \vartheta$$

$$\dot{Q} = \varepsilon A \sigma T^4$$

$$\dot{Q}_{AB} = C_{AB} A_A (T_A^4 - T_B^4)$$

$$C_{AB} = \varepsilon_{AB} \sigma = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_A} + \frac{1}{\sigma_B} - \frac{1}{\sigma}}$$

Parallel

$$C_{AB} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{A_A}{A_B} \left(\frac{1}{\varepsilon_B} - 1 \right)}$$

 A_A von A_B umschlossen

$$C_{AB} \approx \varepsilon_A \sigma$$

parallel ($A_A \ll A_B$)

11.6.3 Zustandsänderung des idealen Gases

Teilchen stehen nicht in Wechselwirkung, besitzen kein Volumen und es kommt zu keinem Phasenübergang

Energie

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

Nur Isobar:

$$dH = c_p m dT = U + p dV$$

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Isotherm

$$pV = \text{const}$$

$$T = \text{const}$$

$$U_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$Q_{12} = -W_{12}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1} + mc_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Isobar

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$

$$p = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_p (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = -p (V_2 - V_1)$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Zustandsgleichung

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

$$pV = NkT = mR_s T = nRT$$

$$R_s = \frac{nR}{m}$$

$$R_s = c_p - c_v$$

Isochor

$$\frac{p}{T} = \text{const}$$

$$V = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_v (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12}$$

$$S_{12} = mc_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Adiabat

$$pV^\kappa = \text{const}$$

$$Q = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$Q_{12} = 0$$

$$W_{12} = mc_v (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left(\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} - 1 \right)$$

$$U_{12} = W_{12}$$

$$S_{12} = 0;$$

Kreisprozeß

$$\oint dU = 0$$

$$\oint dU = \oint dQ + \oint dW$$

$$\text{Revesiebel: } \oint dS = 0$$

$$\text{Irrevesiebel } \oint dS > 0$$

Carnot-Prozeß

$$\eta_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{Q_{zu} - Q_{AB}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{T_h - T_n}{T_n}$$

Kapitel 12

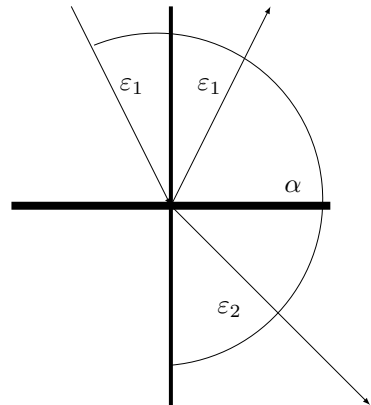
Optik

The path taken between two points by a ray of light is the path that can be traversed in the least time.

- Pierre de Fermat

12.1 Brechung

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$$
$$\varepsilon_2 = \arcsin \frac{\sin \varepsilon_1 \cdot n_1}{n_2}$$

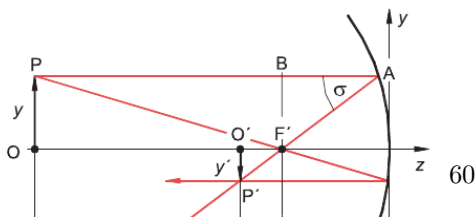


12.2 Totalreflexion

$$\sin \varepsilon_g = \frac{n_2}{n_1}$$

Totalreflexion tritt nur auf, wenn der Lichtstrahl von einem dichteren in einen optisch dünneren Stoff übergeht.

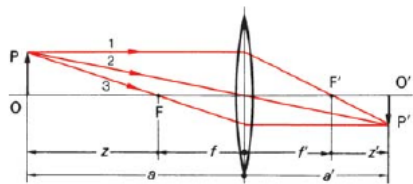
12.3 Hohlspiegel



$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$
$$f' = \frac{r}{2}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$
$$\beta' = -\frac{a'}{a}$$

12.4 Linse

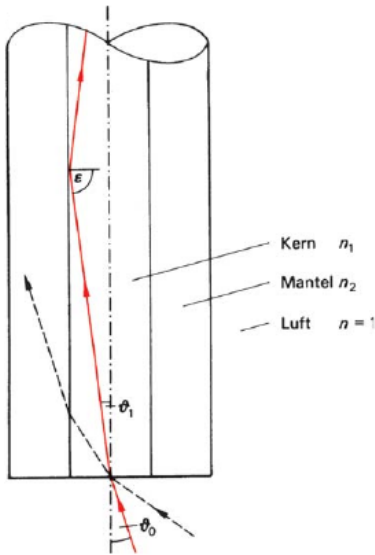


$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}$$
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{a}$$

$$f = \frac{a \cdot a'}{a + a'} = -f'$$
$$a' = \frac{a f'}{a + f'}$$
$$\beta' = \frac{f'}{a + f'}$$
$$\beta' = \frac{y'}{y}$$
$$D' = \frac{1}{f'} = (n_L - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Linsenform						
Bezeichnung	bi-konvex	plan-konvex	konkav-konvex	bi-konkav	plan-konkav	konvex-konkav
Radien	$r_1 > 0$ $r_2 < 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 < 0$	$r_1 < r_2 < 0$	$r_1 < 0$ $r_2 > 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 > 0$	$r_2 < r_1 < 0$
Brennweite im optisch d�nneren Medium	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' < 0$

12.5 Lichtwellenleiter



Totalreflexion (Grenzwinkel)

$$n_1 \sin(90^\circ - \vartheta_1) = n_2 \implies \cos \vartheta_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

numerische Apertur

$$\begin{aligned} A_{WL} &= n_0 \sin \vartheta_0 = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_1} \\ &= n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \\ &= \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \\ &= \sqrt{n_{Kern}^2 - n_{Mantel}^2} \end{aligned}$$

Teil III

Elektrotechnik

Kapitel 13

Gleichstromtechnik

13.1 Grundgrößen

Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[Q] = 1C = 1As$$

$$Q = n \cdot e$$

Strom

$$[I] = 1A$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Stromdichte

$$[J] = 1 \frac{A}{mm^2}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

Potential

$$[\varphi] = 1V = 1 \frac{Nm}{As} = 1 \frac{kgm^2}{As^3}$$

$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

Spannung

$$[U] = 1V$$

$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

Widerstand und Leitwert

$$[R] = 1\Omega = 1\frac{V}{A}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}$$

$$[G] = 1S = 1\frac{A}{V}$$

$$G = \frac{I}{U}$$

$$= \frac{1}{R}$$

$$= \kappa \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l}$$

Temperaturabhängigkeit

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\right)$$

Leistung

$$[P] = 1W = 1VA$$

$$P = u(t) \cdot i(t)$$

Leistung im Mittel

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

13.2 Lineare Quellen**Spannungsquelle**

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$

$$U_l = I_q \cdot R_i$$

13.3 Kirchhoffsche Gesetze**Knotenpunktsatz**

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

Kapitel 14

Wechselstromtechnik

No rule is so general,
which admits not some exception.
- Robert Burton

14.1 Definitionen

14.1.1 Periodische zeitabhängige Größen

Allgemein $x(t) \rightarrow$ speziell $u(t); i(t); q(t); \dots$
es gilt $x(t) = x(t + n \cdot T); (n \in \mathbb{N}^*)$

14.1.2 Wechselgrößen

Allgemein $x_{\sim}(t)$; periodisch sich ändernde Größe, deren Gleichanteil bzw. zeitlich linearer Mittelwert gleich Null ist.

Nachweis:

$$\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x_{\sim}(t) dt = 0 ; (n \in \mathbb{N}^*) ; t_1 \text{ beliebiger Zeitwert}$$

14.1.3 Mischgrößen

Sind periodisch, Ihr Gleichanteil \bar{x} bzw. zeitlich linearer Mittelwert jedoch ist ungleich Null.

Mischgröße = Wechselgröße + Gleichanteil

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_{\sim}(t) + \bar{x} \\
 &= \text{gleichanteilbehaftete Wechselgröße}
 \end{aligned}$$

14.2 Anteile und Formfaktoren

Gleichanteil

$$\bar{x} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x(t) dt$$

Formfaktor

$$F = \frac{x_{eff}}{|\bar{x}|} \quad x_{eff} = |\bar{x}| \cdot F$$

Gleichrichtwert

$$|\bar{x}| = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} |x|(t) dt$$

crest - Faktor

$$\sigma = \frac{\hat{x}}{x_{eff}}$$

Effektivwert

$$x_{eff} = X = \sqrt{\frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x^2(t) dt}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \rightarrow t_1 \text{ beliebiger Zeitwert} \rightarrow [|\bar{x}|] = [x(t)]$$

14.3 Leistung und Leistungsfaktoren

Wirkleistung

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt \\
 &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt
 \end{aligned}$$

Mittlere Leistung

$$\bar{p}(t) = P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt$$

Scheinleistung

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I$$

Leistungsfaktor

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{P}{S} \\
 &= \frac{\frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} p(t) dt}{u_{eff} \cdot i_{eff}} \\
 &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u^2(t) dt} \cdot \sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} i^2(t) dt}}
 \end{aligned}$$

14.4 Sinusförmige Größen

Sinusschwingung

$$x(t) = \hat{x} \sin(2\pi f + \varphi_x)$$

$$x(\omega t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$$

- \hat{x} : Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Linksverschiebung der Kurve

Kosinusschwingung

$$x(t) = \hat{x} \cos(2\pi f + \varphi_x)$$

$$x(\omega t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)$$

- \hat{x} : Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Rechtssverschiebung der Kurve

Nullphasenzeit

$$t_x = -\frac{\varphi_x}{\omega} = -\varphi_x \cdot \frac{T}{2\pi}$$

Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz

$$\text{mit: } a = \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) \wedge b = \hat{b} \sin(\omega t + \beta)$$

Resultierende Funktion:

$$x = a + b$$

$$= \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) + \hat{b} \sin(\omega t + \beta)$$

$$= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$$

- \hat{x} : resultierende Amplitude
- φ : Nullphasenwinkel

$$\text{Wobei: } \hat{x} = +\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\alpha - \beta)}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{a} \sin \alpha + \hat{b} \sin \beta}{\hat{a} \cos \alpha + \hat{b} \cos \beta}$$

Vierquadrantenarkustangens

$$\varphi = \arctan \frac{ZP}{NP}$$

2. Quadrant $ZP > 0, NP < 0$	1. Quadrant $ZP > 0, NP > 0$
3. Quadrant $ZP < 0, NP < 0$	4. Quadrant $ZP < 0, NP > 0$

Der rotierende Zeiger als rotierender Vektor

$$\begin{aligned}
\text{Allgemein gilt: } \sin(\omega t + \varphi_x) &= \frac{GK}{HT} = \frac{b}{\hat{x}} \\
\cos(\omega t + \varphi_x) &= \frac{AK}{HT} = \frac{a}{\hat{x}} \\
b &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \\
a &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \\
\text{Als Einheitsvektor: } \vec{x} &= a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}
\end{aligned}$$

Zeigerspitzenendpunkt

$$\begin{aligned}
\underline{x} &= \text{Zeigerspitzenendpunkt} \\
\underline{x} &= \underbrace{\hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)}_{Re \rightarrow Abszisse} + j \cdot \underbrace{\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)}_{Im \rightarrow Ordinate} \\
\underline{x} &= \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)} \\
\underline{x}_{eff} &= \text{rotierender Effektivwertzeiger} \\
\underline{x}_{eff} &= \hat{x}_{eff} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}
\end{aligned}$$

Wechsel zwischen Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) \cos(\omega t + \varphi_x) &\equiv \hat{x}(t) \sin\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) \\
\hat{x}(t) \sin(\omega t + \varphi_x) &\equiv \hat{x}(t) \cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Merke: $\frac{1}{j} = -j \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

Differentiation und Integration von Sinusgrößen

Zeitbereich	Zeigerbereich
$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$	$\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$	
$\xrightarrow{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{HT_{1/2}}}$	$\frac{d^n \underline{x}(t)}{dt^n} = (j\omega)^n \underline{x}$

Zeitbereich	Zeigerbereich
$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$	$\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$	
$\int \dots \int x(t) dt^n \xrightarrow{HT_{1/2}}$	$\int \dots \int \underline{x}(t) dt = \frac{1}{(j\omega)^n} \underline{x}$

R, L und C im kompl. Zeigerbereich

Ohmscher Widerstand	$\hat{U} = R \hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$
Induktivität	$\hat{U} = \omega L \hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega L}$
Kapazität	$\hat{U} = \frac{\hat{I}}{\omega C} \quad \hat{I} = \omega C \hat{U}$

Widerstands und Leitwertoperator

\underline{Z} komplexer Widerstand / Impedanz	\underline{Y} komplexer Leitwert / Admitanz
$\underline{Z} = \frac{u}{i} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$	$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \cdot e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$
$ \underline{Z} = Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I}$	$ \underline{Y} = Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U}$
mit $\varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z$	mit $\varphi_i - \varphi_u = -\varphi_Z = \gamma_Y$

Widerstand

$$\underline{Z} = R \wedge \underline{Y} = 1/R$$

Kapazität

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Induktivität

$$\underline{Z} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Zeitbereich		komplexer Zeitbereich
$x = \hat{x} \sin (\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{\text{Hintransformation1}}$	$\underline{x} = \hat{x} \cos (\omega t + \varphi_x) + j \hat{x} \sin (\omega t + \varphi_x)$
$x = \hat{x} \cos (\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{\text{Hintransformation2}}$	$\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
		Berechnungen im komplexen Bereich
$y = \operatorname{Im}\{y\} = \hat{y} \sin (\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{\text{Ruecktransformation1}}$	$\underline{y} = \hat{y} e^{j(\omega t + \varphi_y)}$
$y = \operatorname{Re}\{y\} = \hat{y} \cos (\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{\text{Ruecktransformation2}}$	$\underline{y} = \hat{y} \cos (\omega t + \varphi_y) + j \hat{y} \sin (\omega t + \varphi_y)$

HT1 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen reellen Kosinusterns mit dem ursprünglichen Sinustern als Imaginärteil

HT2 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen imaginären Sinusterns mit dem ursprünglichen Kosinustern als Realteil

RT1 entnahme des Imaginärteils

RT2 entnahme des Realteils

Resultierende Operatoren**Reihenschaltung**

$$\underline{Z}_{ges} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i$$

Parallelschaltung

$$\underline{Y}_{ges} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i$$

Spannungsteiler

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}$$

Stromteiler

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}$$

Anteile am komplexen Widerstand (Impedanz)

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = R + jX = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi}$$

mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ Phasenwinkel; R = Wirkwiderstand;

X = Blindwiderstand; $|\underline{Z}|$ = Scheinwiderstand

$$R = R \quad L = \frac{X}{\omega} \text{ mit } X > 0 \quad C = -\frac{1}{\omega X} \text{ mit } X < 0$$

Anteile am komplexen Leiwert (Admitanz)

$$\underline{Y} = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = G + jB = |\underline{Y}| \cdot e^{j\gamma}$$

mit $\gamma = \varphi_i - \varphi_u$ Phasenwinkel; G = Wirkleitwert;

B = Blindleitwert; $|\underline{Y}|$ = Scheinleitwert

$$R = \frac{1}{G} \quad C = \frac{B}{\omega} \text{ mit } B > 0 \quad L = -\frac{1}{\omega B} \text{ mit } B < 0$$

komplexer Widerstand / komplexer Leitwert

$$\begin{aligned} \underline{Y} = G + jB &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{X}{R}} \\ &= \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \underbrace{\frac{R}{R^2 + X^2}}_G - j \underbrace{\frac{X}{R^2 + X^2}}_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} = R + jX &= \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{Y} \cdot e^{-j\gamma} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{B}{G}} \\
 &= \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} = \underbrace{\frac{G}{G^2 + B^2}}_R - j \underbrace{\frac{B}{G^2 + B^2}}_X
 \end{aligned}$$

Momentanleistung / Augenblicksleistung

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{zeitlich konstant}} - \underbrace{UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{mit doppelter Frequenz schwingend}} \\
 &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi)
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \varphi = \varphi_u - \varphi_i \rightarrow \varphi_i = \varphi_u - \varphi$$

Blindleistung *Ermittlung des Blindleistungsanteils aus der Momentanleistung*

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{Wirkleistung}} - \underbrace{UI \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Blindleistung}} \\
 P_{ges}(t) &= P_{wirk}(t) + P_{blind}(t)
 \end{aligned}$$

$$u(t) \cdot i(t) \begin{cases} > 0 \text{ Energie zum Verbraucher} \\ < 0 \text{ Energie zum Erzeuger} \end{cases}$$

Mittlere Leistung / Wirkleistung

$$P = \overline{P}(t) = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1 + n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt = UI \cos \varphi$$

Definition von Blind- und Scheinleistung

$$Q = UI \sin \varphi \quad [Q] = \text{var} \quad \text{mit} \begin{cases} Q > 0 \text{ induktive Blindleistung } Q_{ind} \\ Q < 0 \text{ kapazitive Blindleistung } Q_{kap} \end{cases}$$

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I \quad [S] = VA$$

Beziehungen zwischen Wirk- Blind- und Scheinleistung

$P = UI \cdot \cos \varphi \quad Q = UI \cdot \sin \varphi \quad S = UI$
--

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{S^2 - Q^2} \\ &= S \cdot \cos \varphi \\ &= \frac{Q}{\tan \varphi} \end{aligned}$$

$$Q = \begin{cases} > 0 \rightarrow Q_{ind} = \sqrt{S^2 - P^2} \\ < 0 \rightarrow Q_{kap} = -\sqrt{S^2 - P^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ &= \frac{Q}{\sin \varphi} \\ &= \frac{P}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi = P \cdot \tan \varphi$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{Q}{P} \\ &= \arcsin \frac{Q}{S} \\ &= \arccos \frac{P}{S} \end{aligned}$$

$$P^2 + Q^2 = U^2 \cdot I^2 = S^2$$

Die komplexe Leistung

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* \\ &= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= S \cdot e^{j\varphi} \\ &= \underbrace{S \cdot \cos \varphi}_P + j \cdot \underbrace{S \cdot \sin \varphi}_Q \\ &= P + jQ \end{aligned}$$

* - konjugiert Komplex

$$[\underline{S}] = VA \quad [P] = W \quad [Q] = var$$

Zusammenhang mit dem komplexen Leitwert / Widerstand

$$\underline{S} = I^2 \cdot \underline{Z} \quad P = I^2 \cdot R = U^2 \cdot G \quad Q = I^2 \cdot X = -U^2 \cdot B$$

Kapitel 15

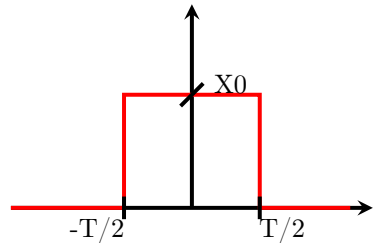
Signal- und Systemtheorie

15.1 Einfache Impulse

Rechteckimpuls/ -funktion $rect_T(t)$

$$x(t) = X_0 \cdot rect_T(t)$$

- T : Rechteckimpulsbreite > 0
- an den Sprungstellen nimmt der Impuls die Hälfte des max. Wertes an

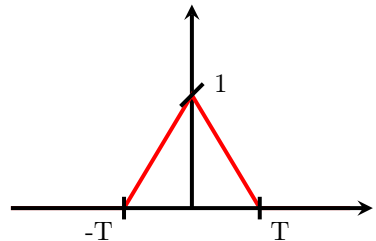


Dreiecksimpuls/ -funktion $\Lambda_T(t)$

$$x(t) = X_0 \cdot \Lambda_T(t)$$

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - |t/T| & \text{für } |t| < T \\ 0 & \text{für } |t| > T \end{cases}$$

- T : Dauer einer ansteigenden / abfallenden Flanke

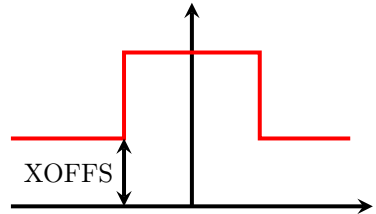


15.2 Elementare Operationen auf zeitliche Verläufe

Beeinflußung der Ordinate

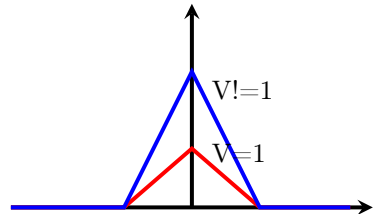
Signaloffset X_{OFFS}

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t) + X_{OFFS}$$



Skalierungsfaktor V ($V \neq 0$)

$$x_{neu}(t) = V \cdot x_{alt}(t)$$

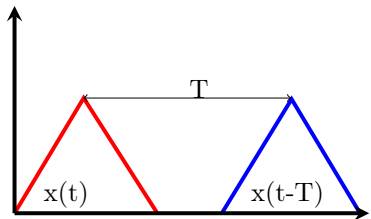


Beeinflußung der Abszisse

zeitliche Verschiebung t_0

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t - t_0) \text{ mit } t_0 = \text{const.}$$

- Zusammenfassung der Offsetbehafteten Zeit $t - t_0$ zu einer neuen Zeitbasis $\tau = t - t_0$
- $x_{neu}(\tau + t_0) = x_{alt}(\tau)$
 $t > 0$ Verschiebung nach rechts
 $t < 0$ Verschiebung nach links

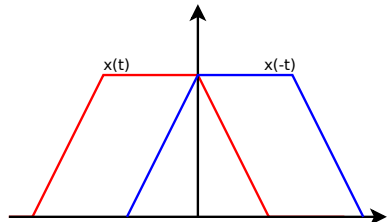


Negation des Arguments t

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(-t) \text{ mit } \tau = -t$$

$$x_{neu}(-\tau) = x_{alt}(\tau)$$

- gleiche Funktionswerte mit negierter Zeitbasis, somit Spiegelung an der Ordinate



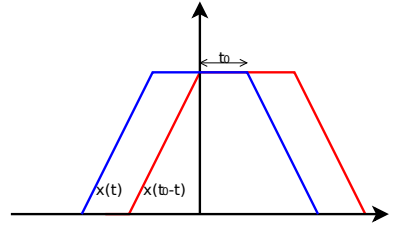
Nagation des Arguments t sowie eine Verschiebung um t_0

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t_0 - t)$$

mit $t_0 = \text{const.}$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(\tau + 1/2t_0)$$

$$x_{neu}(1/2t_0 - \tau) = x_{alt}(\tau + 1/2t_0)$$



- neue Zeitbasis $\tau + 1/2t_0$
- gleiche Funktionswerte, gespiegelt an der Senkrechten von $1/2t_0$

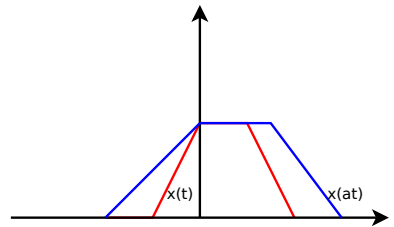
Skalierungsfaktor $a \neq 0$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(a \cdot t)$$

mit $a = \text{const.}$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(\tau)$$

$$x_{neu}(\tau/a) = x_{alt}(\tau)$$

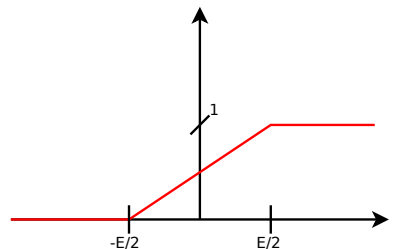


- neue Zeitbasis $\tau = a \cdot t$
- gleiche Funktionswerte, wenn die Zeitbasis durch a geteilt wird
- $a > 1$ Funktion wird gestaucht
 $0 < a < 1$ Funktion wird gestreckt

Einheitssprungfunktion

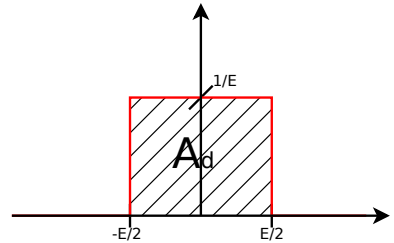
angenäherte Einheitssprungfunktion $\tilde{\sigma}(t, \epsilon)$

- endlicher Geradenanstieg
- Endwert von 1



Einheitsimpuls / Deltaimpuls $\tilde{\delta}(t, \epsilon)$

- Fläche des Impulses ist 1
- Impulshöhe und Breite variabel

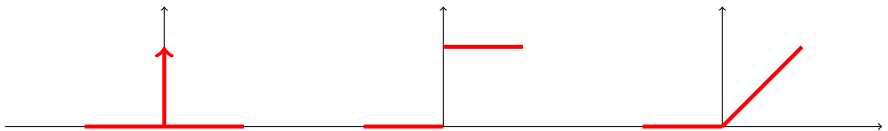


Mathematischer Zusammenhang:

$$\tilde{\delta}(t, \epsilon) = \frac{d\tilde{\sigma}(t, \epsilon)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\sigma}(t, \epsilon) = \int_{-\infty}^t \tilde{\delta}(t, \epsilon) dt$$

Beim Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ ergibt die Einheitssprungfunktion $\sigma(t)$ bzw. deren Ableitung den Deltaimpuls $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \begin{cases} +\infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Zusammenhang zwischen Deltaimpuls, Einheitssprungfunktion und Einheitsanstiegsfunktion

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

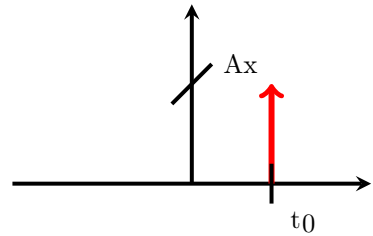
$$\alpha(t) = \begin{cases} t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t \sigma(t) dt = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

zeitliche Verschiebung und Wichtung

Deltaimpuls

$$x(t) = A_x \cdot \delta(t - t_0)$$

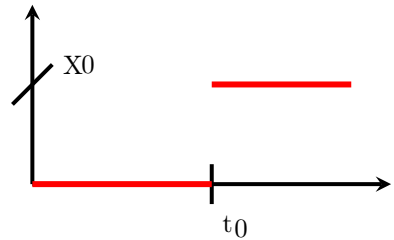
$$[x(t)] = [A_x] \cdot [\delta(t)]$$



Einheitssprung

$$x(t) = X_0 \cdot \sigma(t - t_0)$$

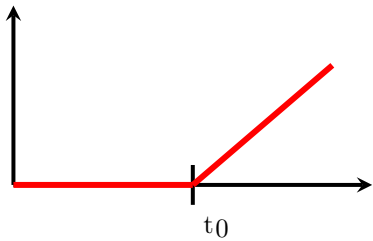
$$[x(t)] = [X_0]$$



Einheitsanstiegsfunktion

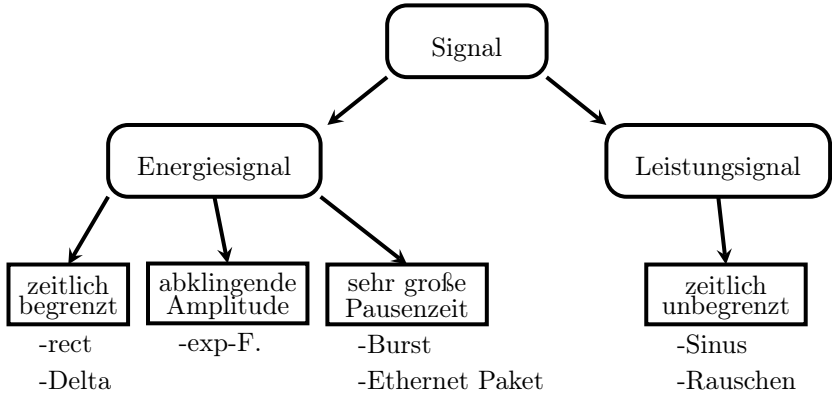
$$x(t) = m \cdot \alpha(t - t_0)$$

$$[x(t)] = [m] \cdot [\alpha(t)]$$



15.3 Signale

Definition: Ein Signal ist eine zeitlich und / oder örtlich veränderliche Größe (physikalisch). Die Veränderung dieser physikalischen Größe, sagt nichts über Ihren Informationsgehalt aus.



Energiewandlung

$$E_R = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot i(t) dt$$

$$[E_R] = V \cdot A \cdot s = Ws$$

mit $i(t) = \frac{u(t)}{R}$ folgt

$$E_R = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt$$

Momentanleistung $P_r(t_1)$

$$P_R(t_1) = u(t_1) \cdot i(t_1)$$

$$[P_R(t_1)] = W$$

$$P_R = U_0 \cdot I_0 = \frac{U_0^2}{R}$$

bei Gleichleistung

Mittlere Leistung P_R

$$\begin{aligned}
 P_R &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t) \cdot i(t) dt & [P_R] &= W \\
 &= \frac{1}{R} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t) dt
 \end{aligned}$$

Spezialfall: Periodische Signalverläufe

$$= \frac{1}{n \cdot t_P} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot t_P} u_P(t) \cdot i_P(t) dt = \frac{1}{R \cdot n \cdot t_P} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot t_P} u_P^2(t) dt$$

T : Betrachtungszeit, Meßdauer t_1 : Startzeitpunkt t_P : Periodendauer $R = \text{const.}$

Signalenergie / Impulsenergie / Impulsmoment 2. Ordnung E_U

Nur für Energiesignale sinnvoll.

$$E_U = m_{i2} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt \quad [E_U] = V^2 s$$

Zeitdiskrete Signalverläufe:

$$E_X = m_{i2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_q^2(k) \quad [E_X] = 1$$

Entnormierung über einem realen Widerstand:

$$E_R = E_U \cdot \frac{1}{R} \quad [E_R] = W s$$

Mittlere Signalleistung P_u / Gesamtsignalleistung P_i / quadratischer Mittelwert $\overline{u^2}$ / gewöhnliches Moment 2. Ordnung m_2

Nur für Leistungssignale sinnvoll.

$$P_u = \overline{u^2} = m_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t) dt \quad [P_u] = V^2$$

Spezialfall: Periodische Signalverläufe

$$P_u = \overline{u^2} = m_2 = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} u_p^2(t) dt$$

Spezialfall: zeitdiskrete Signalverläufe

beliebiges nichtperiodisches Signal:

$$P_X = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2(k)$$

periodisches Signal:

$$P_X = \frac{1}{N_P} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2(k)_P$$

Spezialfall: konstante Werte

$$P_X = X_q^2(k_1)_k$$

Entnormierung über einem realen Widerstand:

$$P_R = P_U \cdot \frac{1}{R} \quad [P_R] = W$$

Signalenergie ↔ Signalleistung

	Energiesignal	Leistungssignal
Signalenergie	endlicher Wert	$+\infty$
Signalleistung	0	endlicher Wert

15.4 Signalbeschreibung Leistungssignale

Effektivwert

Energiesignale haben einen Effektivwert von Null.

$$u_{eff} = \sqrt{P_u} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t) dt}$$

Spezialfall: zeitdiskrete Signalverläufe

$$X_{eff} = \sqrt{P_X} = \sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2(k)}$$

gerader-/ungerader Anteil**gerader Anteil:**

$$u_g(t) = \frac{u(t) + u(-t)}{2}$$

ungerader Anteil:

$$u_u(t) = \frac{u(t) - u(-t)}{2}$$

Gleichanteil / linearer Mittelwert / gewöhnliches Moment 1. Ordnung m_1

Energiesignale haben einen Gleichanteil von Null.

beliebige Signalverläufe

$$\bar{x} = m_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) dt \quad [\bar{x}] = [x]$$

periodische Signalverläufe

$$\bar{x} = m_1 = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} x(t) dt \quad [\bar{x}] = [x]$$

zeitdiskrete Signalverläufe

$$\bar{x}_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x_q(k)$$

periodische zeitdiskrete Signalverläufe

$$\bar{x}_k = \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x_q(k)_p$$

Signalgleichleistung / quadrierter linearer Mittelwert \bar{u}^2 / quadriertes gewöhnliches Moment 1. Ordnung m_1^2

Energiesignale haben eine Signalgleichleistung von Null.

beliebige Signalverläufe

$$P_{u=} = [\bar{u}]^2 = m_1^2 = \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t) dt \right]^2 \quad [P_{u=}] = V^2$$

zeitdiskrete Signalverläufe

$$P_{X_{\sim}} = [\bar{x}]^2 = m_1^2 = \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q(k) \right]^2 \quad [P_{X_{\sim}}] = 1$$

Entnormierung

$$P_{R_{\sim}} = \frac{P_{u_{\sim}}}{R} \quad [P_{R_{\sim}}] = W$$

Signalwechselleistung $P_{u_{\sim}}$ / Varianz σ^2 / zentrales Moment 2. Ordnung μ_2

Energiesignale haben eine Signalwechselleistung von Null.

$$P_{u_{\sim}} = \sigma^2 = \mu_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} [u(t) - \bar{u}]^2 dt$$

periodischer Spannungsverlauf

$$P_{p_{\sim}} = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} [u(t) - \bar{u}]^2 dt$$

zeitdiskrete Signale

$$P_{X_{\sim}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} [X_q(k) - \bar{X}]^2$$

periodische zeitdiskrete Signale

$$P_{X_{\sim}} = \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} [X_q(k)_p - \bar{X}]^2$$

Entnormierung

$$P_{R_{\sim}} = \frac{P_{u_{\sim}}}{R} \quad [P_{R_{\sim}}] = W$$

Leistungsbilanz

$$P_u = P_{u_{\sim}} + P_{u_{\sim}} = m_2 = m_1^2 + \mu_2 = [\bar{u}]^2 + \sigma^2$$

15.5 Signalbeschreibung Energiesignale

Impulsfläche A_u / Impulsmoment 1. Ordnung m_{i1}

Leistungssignale besitzen Flächen von $\pm\infty$ bzw. Null.

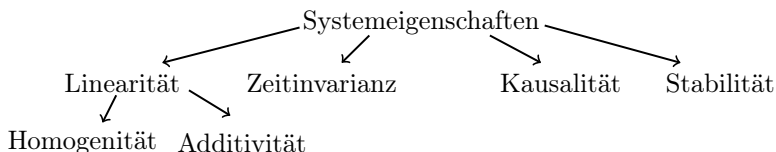
$$A_u = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \, dt \qquad [A_u] = Vs$$

zeitdiskrete Signale

$$A_X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_q(k) \qquad [A_X] = 1$$

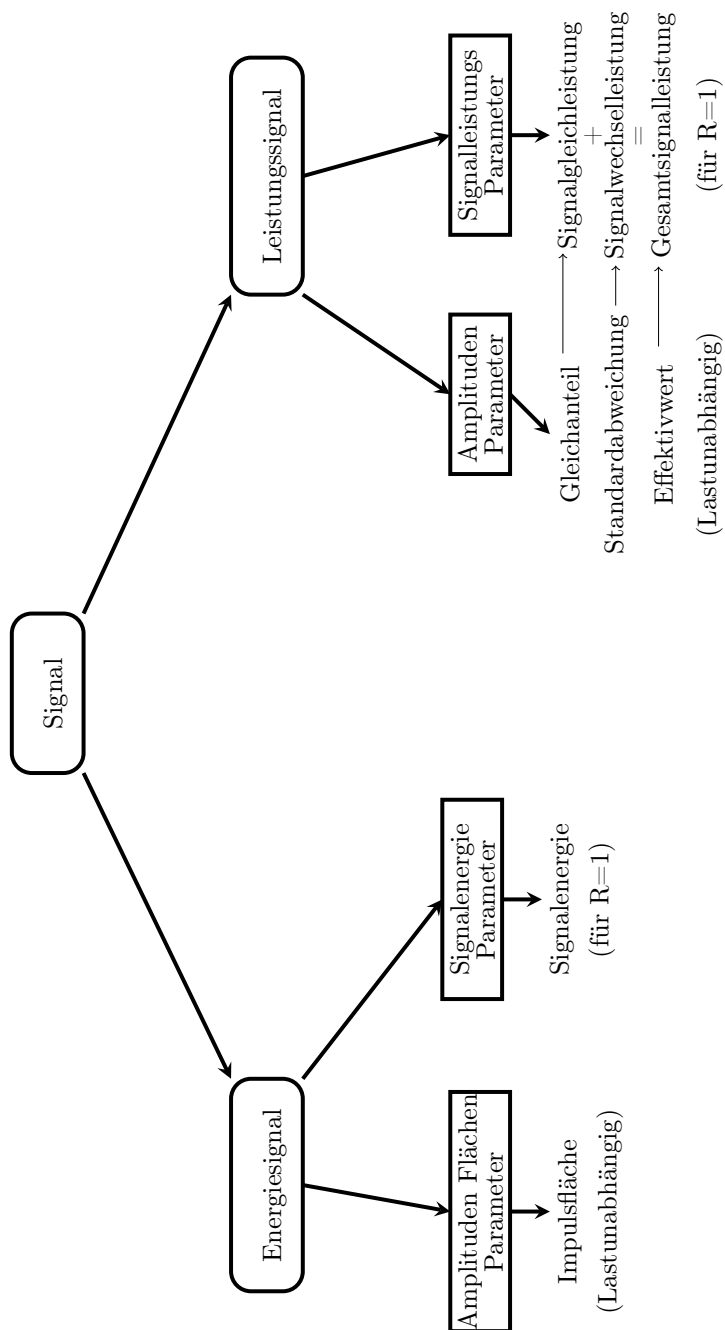
15.6 Systeme

Definition: Ein System ist ein physikalisches oder auch technisches Gebilde, welches ein Signal (Eingangssignal, Systemerregung / -anregung) in ein im Allgemeinen andersartiges Signal umformt. Dieses wird Ausgangssignal bzw. Systemantwort / -reaktion genannt.



Übersicht:

Linearität	Ist nur vorhanden, wenn Homogenität und Additivität vorliegen. Die Multiplikation eines konstanten Faktors mit dem Eingang, führt zu Multiplikation des gleichen Faktors mit dem Ausgang.
Additivität	$x(t)$ ist additiv zerlegbar, diese Anteile können getrennt verarbeitet sowie die Systemreaktionen addiert werden.
Zeitinvarianz	Zeitinvarianz ist vorhanden, wenn sich die Systemeigenschaften zeitlich nicht ändern. Eine Zeitverzögerung des Eingangssignals überträgt sich somit um eine gleiche Verzögerung ins Ausgangssignal.
Kausalität	Kausalität ist Vorhanden, wenn die Systemreaktion nicht schon vor Beginn der Systemerregung einsetzt. Somit ist jedes realisierbare System zwingend kausal.
Stabilität	Stabilität Ist vorhanden, wenn bei einem betragsmäßig beschränktem, beliebigem breitbandigen Eingangssignal auch ein betragsmäßig beschränktes Ausgangssignal vorliegt. Grenzstabilität Bedingungen der Stabilität werden nicht erfüllt, jedoch ist die Signalleistung ab einem bestimmten Zeitpunkt konstant. Instabilität Ausgangssignal wächst selbst beim Verschwinden von $x(t)$ unbegrenzt an.



Impulsantwort / Gewichtsfunktion $g(t)$

mit $x(t) = \delta(t)$ folgt $y(t) = g(t)$

$$[g(t)] = [\delta(t)] = s^{-1}$$

$$y(t) = T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = x(t) \star g(t)$$

Zeitdiskret:

$$y(k) = \sum_{L=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot g(k - L) = x(k) \star g(k)$$

Sprungantwort / Übergangsfunktion $h(t)$

Zusammenhang:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt \Leftrightarrow \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

$$FT\{\sigma(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) - j\frac{1}{2\pi f}$$

Zusammenhang zwischen Übergangs- und Gewichtsfunktion

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad h(t) = \int_{-\infty}^t g(t) dt$$

$$= \underbrace{\int_0^t g(t) dt}_{\text{KausalesSystem}}$$

Faltungsoperation

- setzt LTI-Systeme voraus
- Gewichtsfunktion wird nur bei LTI-Systemen angegeben

$$y(t) = T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = x(t) * g(t)$$

zeitdiskrete Systeme:

$$y(k) = T\{x(k)\} = \sum_{L=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot g(k - L) = x(k) * g(k)$$

Polynommultiplikation:

$$p_p = \sum \text{Ordinatenwert} \cdot r^{\text{Abszissenwert}}$$

$$y_p(k) = x_p \cdot g_p$$

Kapitel 16

Signalverarbeitung

16.1 Laplace / Fourier-Transformation

Laplaceintegral

$$X(p) \quad \bullet \text{---} \circ \quad x(t)$$

$$X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-p \cdot t} dt$$

Fourierintegral

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad x(t)$$

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_{re} + jx_{im}) \cdot (\cos(2\pi ft) - j \cdot \sin(2\pi ft)) dt$$

$$X(f) \quad \bullet \text{---} \circ \quad x(t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} d\omega$$

Diskrete Fourier Transformation

1. Variante

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

2. Variante

$$X(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

$$x(k) = \sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

3. Variante

$$X(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

DFT als Matrizen-Multiplikation

$$[X(l)] = \frac{1}{\alpha} \cdot [F_{l,k}^N] \cdot [x(k)] \quad t \Rightarrow f$$

$$[x(k)] = \frac{1}{\alpha} \cdot [f_{k,l}^N] \cdot [X(l)] \quad f \Rightarrow t$$

$$[f_{k,l}^N] = \frac{1}{\alpha} \cdot [F_{l,k}^N]^*$$

α ist je nach Art der Transformationsvariante 1, N oder \sqrt{N} und eigentlich schon in der Transformationsvorschrift enthalten.

$$F_{l,k}^N = e^{-j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}} = \cos\left(2\pi l \frac{k}{N}\right) - j \sin\left(2\pi l \frac{k}{N}\right)$$

Additionssatz

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(f) = X_1(f) + X_2(f) + \dots$$

Linearität

$$x(t) = C \cdot x_1(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(f) = C \cdot X_1(f)$$

Verschiebungssatz

$$x(t) = x_1(t - t_0) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(f) = X_1(f) \cdot e^{-j2\pi f \cdot t_0}$$

Ähnlichkeitssatz

$$x(t) = x_1(a \cdot t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(f) = \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{|b|} x_1\left(\frac{t}{b}\right) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(f) = X_1(b \cdot f)$$

Differentiationssatz

$$x(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(f) = j2\pi f \cdot X(f)$$

$$x(t) = \frac{d^K x_1(t)}{dt^K} \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(f) = j^K (2\pi f)^K \cdot X(f)$$

$$x(t) = \frac{d^K x_1(t)}{dt^K} \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(\omega) = j^K (\omega)^K \cdot X(\omega)$$

Integrationssatz

$$x(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(f) = \frac{1}{j2\pi f} \cdot X_1(f) + \frac{1}{2} X_1(f=0) \delta(f)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot X_1(\omega) + \pi \cdot X_1(\omega=0) \delta(\omega)$$

Integrationssatz im Frequenzbereich

$$x(t) = \frac{1}{-j2\pi t} \cdot x_1(t) + \frac{1}{2} x_1(t=0) \delta(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(f) = \int_{-\infty}^f X_1(\varphi) d\varphi$$

$$x(t) = \frac{1}{-jt} \cdot x_1(t) + \pi \cdot x_1(t=0) \delta(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} X_1(\varphi) d\varphi$$

Vertauschungssatz

$$x(t) = x_1(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(f) = X_1(f)$$

$$x(t) = X_1(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(f) = x_1(-f)$$

$$x(t) = x_1(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(\omega) = X_1(\omega)$$

$$x(t) = X_1(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad X(\omega) = 2\pi \cdot x_1(-\omega)$$

Faltung

$$x(t) = x_1(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\varphi) \cdot X_2(f - \varphi) \, d\varphi$$

$$x(t) = x_1(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\varphi) \cdot X_2(\omega - \varphi) \, d\varphi$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \, d\tau \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(f) = x_1(f) \cdot x_2(f)$$

Delta-Impulsfläche

$$\text{III}_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt_p) s^{-1} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \text{III}_A(f) = f_a \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_a) Hz^{-1}$$

$$f_a = \frac{1}{t_p}$$

$$\text{III}_a(t) = t_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kt_a) s^{-1} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \text{III}_P(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_p) Hz^{-1}$$

$$f_p = \frac{1}{t_a}$$

Periodifizierung

$$x(t) = x_T(t) * \text{III}_p(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(f) = X_T(f) \cdot \text{III}_A(f)$$

Abgetastete Funktionen

$$x_\delta(t) = x(t) \cdot \text{III}_a(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X_\delta(f) = X(f) * \text{III}_p(f)$$

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kt_a) \cdot t_a \cdot \delta(t - kt_a) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X_\delta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_p)$$

Abgetastete und Periodifizierte Funktionen

$$x_{\delta p}(t) = (x_T(t) * \text{III}_p(t)) \cdot \text{III}_a(t)$$

$$x_{\delta p}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_T(kt_a - mt_p) \cdot t_a \cdot \delta(t - kt_a)$$

$$X_{\delta p}(f) = (X_T(f) \cdot \text{III}_a(f)) * \text{III}_p(f)$$

$$X_{\delta p}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_T(mf_a - kf_p) \cdot f_a \cdot \delta(f - mf_a)$$

$$f_a = \frac{1}{t_p}$$

$$f_p = \frac{1}{t_a}$$

Korrespondenz

$$x(t) = \hat{X} \text{rect}_T(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(j\omega) = \hat{X} T \cdot \text{si} \left(\omega \cdot \frac{T}{2} \right)$$

$$x(t) = \hat{X} \Lambda_T(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(j\omega) = \hat{X} T \cdot \text{si}^2 \left(\omega \cdot \frac{T}{2} \right)$$

$$x(t) = \hat{X} \sin(2\pi f_0 t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(f) = \frac{j\hat{X}}{2} (\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))$$

$$x(t) = \hat{X} \cos(2\pi f_0 t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad X(f) = \frac{\hat{X}}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

16.2 Spektrum

Betragsspektrum

$$|X(f)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\{X(f)\})^2 + (\operatorname{Im}\{X(f)\})^2}$$

Betragsquadratspektrum

$$|X(f)|^2 = (\operatorname{Re}\{X(f)\})^2 + (\operatorname{Im}\{X(f)\})^2$$

Theorem von Parseval

$$E = m_{i2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

16.3 Korrelation

Kreuzkorrelationsfunktion

$$E_{x_1 x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t + \tau) \cdot x_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(t) dt$$

$$E_{x_1 x_2}(l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k + l) \cdot x_1(k) dt$$

Normierte Kreuzkorrelationsfunktion

$$\hat{x} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

$$\hat{E}_{x_1 x_2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2(t) dt}$$

$$r_{x_1 x_2}(\tau) = \frac{E_{x_1 x_2}(\tau)}{\hat{E}_{x_1 x_2}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t + \tau) \cdot x_1(t) dt}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2^2(t) dt}}$$

$$|r_{x_1 x_2}(\tau)| \leq 1$$

Kapitel 17

Binäre Rechenoperationen

17.1 Zahlensysteme

17.1.1 Dualsystem

Basis : 2 $z \in (1; 0)$

Format : $2^{n-1} \dots 2^0, 2^{-1} \dots 2^{-m}$

Zahlenwert : $\sum_{l=-m}^{n-1} z_l \cdot 2^l$

17.1.2 Ternärsystem

Basis : 2 $z \in (1; 0; -1)$

17.1.3 Oktalsystem

Basis : 8 $z \in (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7)$

17.1.4 Hexadezimalsystem

Basis : 16 $z \in (0; 1; 2; 3 \dots d; e; f)$

17.1.5 Dezimalsystem

Basis : 10 $z \in (0; 1; 2; 3 \dots 8; 9)$

17.1.6 Stellenberechnung

k : Zahlenwert

l : Anzahl Nachkommastellen im Dezimalsystem

n : Anzahl Vorkommanstellen im Dualsystem

m : Anzahl Nachkommastellen im Dualsystem

$$n \geq \text{ceil} \left(\frac{\lg(k+1)}{\lg(2)} \right)$$

$$m \geq \text{ceil} \left(\frac{l}{\lg(2)} \right)$$

17.1.7 Wertebereich und Quantisierungsfehler(Dualsystem)

n : Anzahl Vorkommanstellen im Dualsystem

m : Anzahl Nachkommastellen im Dualsystem

$$\text{Wertebereich} = 0 \dots 2^n - 2^{-m}$$

$$\text{Quantisierungsfehler} = \pm \frac{1}{2} \text{LSB} = \pm 2^{-m-1}$$

$$\text{Quantisierungsstufen} = 2^{-m}$$

17.1.8 Umwandlung Negativer Dualzahlen

$$n = \text{ceil} \left(1 + \frac{\lg(|\text{Wert}|)}{\lg(2)} \right)$$

$$\Delta = 2^{n-1} - |\text{Wert}|$$

Umwandlung von Δ bis MSB Stelle -1, danach setzten der richtigen MSB-Stelle.

17.2 Addition

17.2.1 Zwei Operanden

Carry-Look-Ahead

s_i : Summe der Stelle i

p_{i+1} : Propagate Übertrag an der Stelle i

g_{i+1} : Generate Übertrag kompensation

$$p_{i+1} = a_i \cdot b_i$$

$$g_{i+1} = a_i \cdot b_i$$

$$c_{i+1} = p_{i+1} \cdot c_i + g_{i+1}$$

$$s_i = a_i \approx b_i \approx c_i$$

Halbaddierer s_i : Summe der Stelle i c_{i+1} : Übertrag der Stelle $i+1$

$$s_i = a_i \approx b_i$$

$$c_{i+1} = a_i \cdot b_i$$

Volladdierer s_i : Summe der Stelle i c_{i+1} : Übertrag der Stelle $i+1$ c_i : Übertrag der Stelle i

$$s_i = a_i \approx b_i \approx c_i$$

$$c_{i+1} = a_i \cdot b_i + (a_i \approx b_i) \cdot c_i$$

17.2.2 Mehrere Operanden**Ripple-Carry:** Jede Stufe addiert jeweils einen Operanden hinzu.**Baumstruktur:** Die einzelnen Operanden werden Baumförmig addiert.**Carry-Save:** Nur der letzte Addierer ist Sequentiell aufgebaut. Daher wird der Übertrag des Vorgängers beim nächsten aufaddiert.**17.2.3 Überlauf****Vermeidung** r : Zusätzliche Summenstellen p : Operandenanzahl

$$r = \text{ceil} \left(\frac{\lg(p)}{\lg(2)} \right)$$

Positive Operanden s : Summe n : Vorkommanstellen im Dualsystem

$$s = (a + b) \bmod 2^n$$

Negative Operanden s : Entstehender Summenwert n : Vorkommanstellen im Dualsystem p : Operandenanzahl

$$s = \left(a + b + 2^n \text{ceil} \left(\frac{p-1}{2} \right) + 2^{n-1} \right) \bmod 2^n - 2^{n-1}$$

17.2.4 Überlaufserkennung

Vergleich der MSB Stellen

$$a_{MSB} \neq b_{MSB} \Rightarrow \text{Kein Überlauf möglich}$$

$$a_{MSB} = b_{MSB} = s_{MSB} \Rightarrow \text{Kein Überlauf möglich}$$

$$a_{MSB} = b_{MSB} = 0 \quad \& \quad s_{MSB} = 1 \Rightarrow \text{Positiver Überlauf}$$

$$a_{MSB} = b_{MSB} = 1 \quad \& \quad s_{MSB} = 0 \Rightarrow \text{Negativer Überlauf}$$

$$MIN = a_{MSB}$$

$$OVF = \bar{a}_{MSB} \cdot s_{MSB} (\overline{b_{MSB} \approx s_{MSB}}) + a_{MSB} \cdot \bar{s}_{MSB} (b_{MSB} \approx s_{MSB})$$

Vergleich des Carry

$$c_{I;MSB} = c_{O;MSB} \Rightarrow \text{Kein Überlauf möglich}$$

$$c_{I;MSB} = 1 \quad \& \quad c_{O;MSB} = 0 \Rightarrow \text{Positiver Überlauf}$$

$$c_{I;MSB} = 0 \quad \& \quad c_{O;MSB} = 1 \Rightarrow \text{Negativer Überlauf}$$

$$MIN = c_{O;MSB}$$

$$OVF = c_{I;MSB} \approx c_{O;MSB}$$

Erweiterung der MSB Stelle

$$s_{MSB} = s_{MSB+1} \Rightarrow \text{Kein Überlauf möglich}$$

$$s_{MSB} = 1 \quad \& \quad s_{MSB+1} = 0 \Rightarrow \text{Positiver Überlauf}$$

$$s_{MSB} = 0 \quad \& \quad s_{MSB+1} = 1 \Rightarrow \text{Negativer Überlauf}$$

$$MIN = s_{MSB}$$

$$OVF = s_{MSB} \approx s_{MSB+1}$$

17.2.5 Sättigung

s_{MSB} : Behandlung der höchsten Stelle

s_{LSB} : Behandlung der restlichen Stellen

$$s'_{MSB} = s_{MSB} \cdot \overline{OVF} + OVF \cdot MIN$$

$$s'_{LSB} = s_{LSB} \cdot \overline{OVF} + OVF \cdot \overline{MIN}$$

17.2.6 Umwandlung Ternärcode

h_i	b_{i+1}	b_i	c_i	h_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	1	-1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	-1	1
1	1	1	0	1

Teil IV

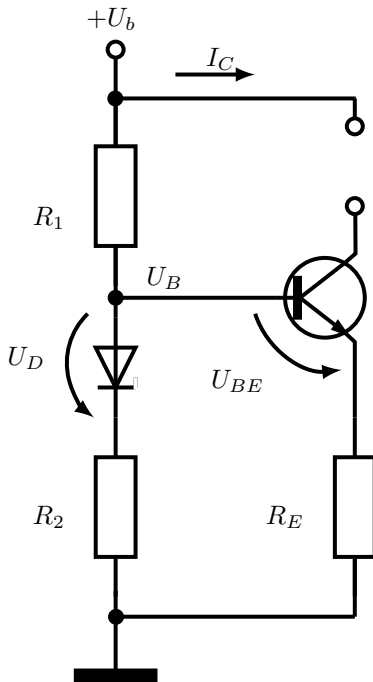
Analoge Schaltungstechnik

Kapitel 18

Grundsaltungen

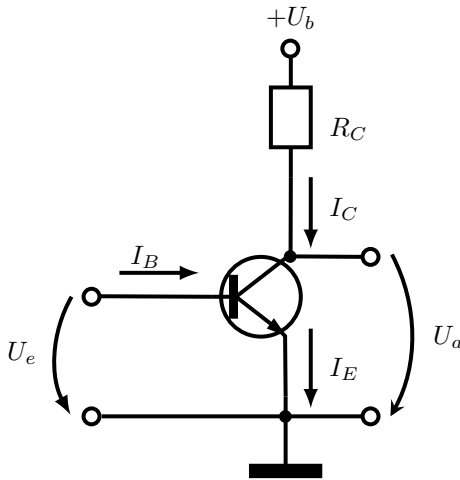
Konstantstromquelle

mit Bipolartransistoren



$$I_E \approx I_C = \frac{U_B - U_{BE}}{R_E} = \text{const.}$$
$$\rightsquigarrow I_C = \underbrace{\frac{R_2}{R_E} \cdot I_1}_{\text{Stromspiegel}}$$

Emitterschaltung



Verstärkung

$$\begin{aligned}
 A \text{ bzw. } V &= \frac{dU_a}{dU_e} \\
 &= -S (R_C \parallel r_{CE})
 \end{aligned}$$

Eingangswiderstand

$$r_e = r_{BE} = \frac{dU_e}{dI_e} = \frac{1}{Y_{11}}$$

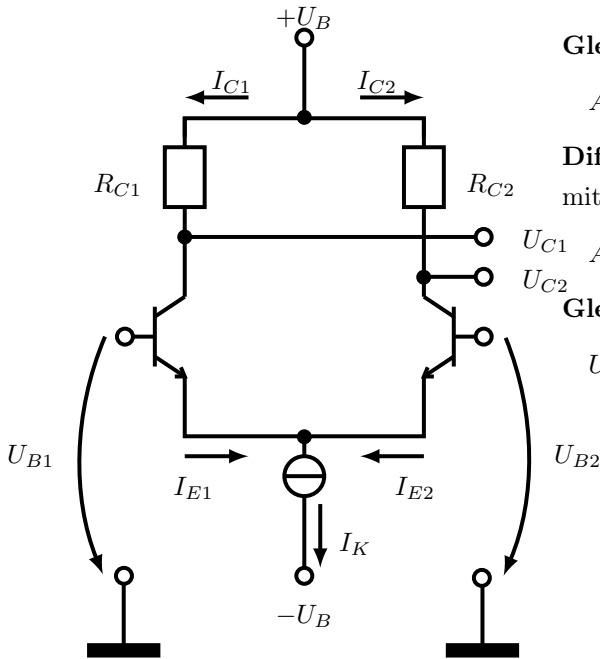
Ausgangswiderstand

$$r_a = -\frac{dU_a}{dI_a} = R_C \parallel r_{CE}$$

Parameter

$$\begin{aligned}
 dI_B &= \underbrace{\frac{\partial I_B}{\partial U_{BE}}}_{Y_{11} = \frac{1}{r_{BE}}} \cdot dU_{BE} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{\partial I_B}{\partial U_{CE}}}_{Y_{12} = S_r} \cdot dU_{CE} \\
 dI_C &= \underbrace{\frac{\partial I_C}{\partial U_{BE}}}_{Y_{21} = S} \cdot dU_{BE} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{\partial I_C}{\partial U_{CE}}}_{Y_{22} = \frac{1}{r_{CE}}} \cdot dU_{CE}
 \end{aligned}$$

Differenzverstärker



Gleichtaktaussteuerung

$$A_{GL} = \frac{dU_a}{dU_{GL}} \stackrel{!}{=} 0$$

Differenzverstärkung

mit $U_D = U_{B1} - U_{B2}$ folgt

$$A_D = \frac{\Delta U_{C2}}{\Delta U_D}$$

Gleichtakteingangsspannung

$$U_{GL} = \frac{U_{B1} + U_{B2}}{2}$$

reine Differenzaussteuerung

$$\Delta U_{B1} = -\Delta U_{B2} \quad \rightsquigarrow \quad dU_{B1} = -dU_{B2} = \frac{dU_D}{2}$$

mit $U_E = \text{const.}$ folgt:

$$\frac{dU_{C1}}{dU_D} = \frac{dU_{C1}}{2dU_{B1}} = -\frac{1}{2}S(R_C \parallel r_{CE}) = -A_D$$

$$\frac{dU_{C2}}{dU_D} = \frac{dU_{C2}}{2dU_{B2}} = \frac{1}{2}S(R_C \parallel r_{CE}) = A_D$$

Gleichtaktaussteuerung

$$dU_E = dU_{GL} \rightsquigarrow dI_K = \frac{dU_{GL}}{r_K} \neq \text{const.}$$

mit $dU_C = -dI_C \cdot R_C$ folgt:

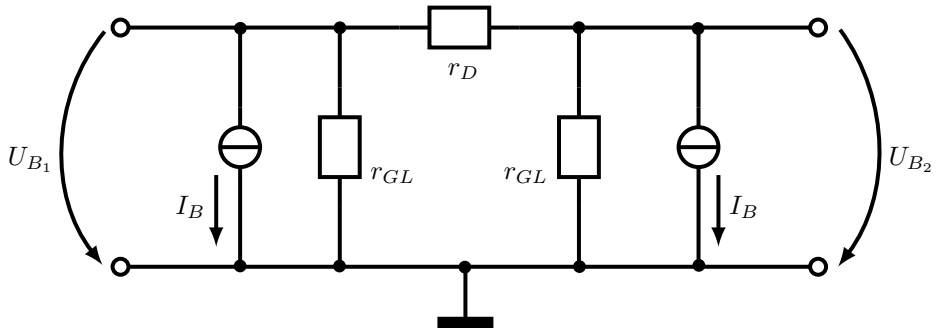
$$dU_{C1} = dU_{C2} = -\frac{R_C}{2r_K} \cdot dU_{Gl} \rightsquigarrow A_{Gl} = \frac{dU_a}{dU_{Gl}} = -\frac{R_C}{2r_K}$$

Mischaussteuerung (lineare Überlagerung)

$$dU_{C1} = -\frac{1}{2} S(R_C \parallel r_{CE}) \cdot dU_D - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_C}{r_K} \cdot dU_{Gl}$$

$$dU_{C2} = +\frac{1}{2} S(R_C \parallel r_{CE}) \cdot dU_D - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_C}{r_K} \cdot dU_{Gl}$$

Eingangswiderstand



Teil V

Messtechnik

Kapitel 19

Grundlagen

19.1 Begriffe

- Messwert x_i : gemessener Wert der Messgröße
- Wahrer Wert x_w : existierender Wert der Messgröße
- Richtiger Wert x_r : bekannter Wert mit vernachlässigbarer Differenz zum wahren Wert
- Messabweichung e : Differenz zwischen gemessenem und wahren Wert
- Systematische Messabweichung e_{sys} : Bekannte systematische Messabweichung (korrigierbar)
- Messunsicherheit u : Intervall um den Messwert in dem der wahre Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu finden ist

19.2 Messabweichung e

$$e = x - x_w$$

19.2.1 relative Messabweichung

$$e_{rel} = \frac{e}{x_w} = \frac{x - x_w}{x_w} = \frac{x}{x_w} - 1$$

Korrekturfaktor K **Korrigierter Messwert x_{kor}**

Bei bekannter systematischer Messabweichung.

$$K = -e_{sys}$$

$$x_{kor} = x + K$$

19.2.2 Messabweichung e_y

$$e_y = y - y_w = f(x_1 + e_{x_1}, x_2 + e_{x_2}, \dots, x_n + e_{x_n})$$

$$e_y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_{x_i}$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

19.2.3 Fortpflanzung systematischer Messabweichungen**Addition / Subtraktion**

$$y = x_1 \pm x_2$$

$$\longrightarrow$$

$$e_y = e_{x_1} \pm e_{x_2}$$

Multiplikation

$$y = x_1 \cdot x_2$$

$$\longrightarrow$$

$$e_y = x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}$$

$$e_{rel} = \frac{e_y}{y} = \frac{x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}}{x_1 \cdot x_2} = e_{rel,x_1} + e_{rel,x_2}$$

Division

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

$$\longrightarrow$$

$$e_y = \frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2}$$

$$e_{rel} = \frac{e_y}{y} = \frac{\frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2}}{x_1 \cdot x_2^{-1}} = e_{rel,x_1} - e_{rel,x_2}$$

19.3 Statistische Größen

Verteilungsfunktion

$$F(x) = \text{prob}(X \leq x)$$

Es gilt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x \rightarrow \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

$$\text{prob}(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Verteilungsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

19.4 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert μ

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

nur für stetige Zufallsgrößen

wahrer Wert X

$$x_w = \mu$$

nach Korrektur

der systematischen Abweichung

Varianz σ^2

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

19.5 Verteilungsfunktionen

Normalverteilung

- Normal oder Gaußverteilung
- gute Näherung bei unbekannter statistischer Verteilung
- Werteverteilung:
 - 68,3% aller Werte liegen in $\mu \pm \sigma$
 - 95,5% aller Werte liegen in $\mu \pm 2\sigma$
 - 99,7% aller Werte liegen in $\mu \pm 3\sigma$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

Gleichverteilung

- auch Rechteckverteilung
- alle vorkommenden Werte besitzen gleiche Wahrscheinlichkeit im Intervall

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \mu - a < x < \mu + a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}a^2$$

19.6 Stichprobe

Mittelwert \bar{x}

Der Mittelwert ist ein Schätzwert für den Erwartungswert μ und damit für den wahren Wert.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

empirische Varianz s^2

Die empirische Varianz ist ein Schätzwert für die eigentliche Varianz der Messreihe.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

19.7 Vertrauensbereich für den Erwartungswert

Endlich große Stichprobe liefert zufällige Differenz zwischem Schätzwert \bar{x} und wahren Wert $\mu = x_w$.

$$\overline{x_g} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \overline{x_i} s_g^2 = \frac{1}{m} s_i^2 s_g = \frac{1}{\sqrt{m}} s_i$$

Vertrauensbereich:

$$\bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} s < \mu < \bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} \quad \text{mit} \quad t = t(n, \alpha)$$

Studentverteilung

Gibt den t Faktor für Normalverteilungen an

α Überschreitungswahrscheinlichkeit

$1 - \alpha$ Vertrauensniveau

$1 - \alpha$	68,3%	95%	99,73%
$n = 2$	1,84	12,70	235,80
$n = 3$	1,32	4,30	19,21
$n = 4$	1,20	3,18	9,22
$n = 5$	1,15	2,78	6,62
$n = 6$	1,11	2,57	5,51
$n = 10$	1,06	2,26	4,09
$n = 20$	1,03	2,09	3,45
$n = 50$	1,01	2,01	3,16
$n \rightarrow \infty$	1,00	2,00	3,00

19.8 Fortpflanzung zufälliger Abweichungen

Bedingung: Messergebnis setzt sich aus mehreren Messgrößen x_i zusammen

Erwartungswerte

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{n_i}$$

Varianzen

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{n_i} - \mu_n)^2$$

Worst-Case-Kombination

Maximale Abweichung des Ergebnisses vom Mittelwert.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$|\Delta y| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

statistische Kombination der Varianzen

Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz...

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)} \right)^2 \sigma_k^2$$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{\mu_1}^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{\mu_2}^2 \sigma_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_{\mu_3}^2 \sigma_3^2 + \dots$$

...kann auf empirische Varianz übertragen werden.

$$y = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$$

$$s_y^2 = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{x_k}} \right)_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)} \right)^2 s_k^2$$

19.9 Fortpflanzung von Messunsicherheiten

Worst Case Abschätzung und Gaußsches Fortpflanzungsgesetz lassen sich auf die Messunsicherheiten übertragen.

Worst Case Abschätzung der Unsicherheit

Statistische Fortpflanzung der Unsicherheit

$$u_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| u_{x_i}$$

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2$$

Teil VI

Anhang

Sachregister

A

Additionssatz	92
Additionstheoreme	9
Aehnlichkeitssatz	92
Anteil	
gerade	83
ungerade	83
Anteile	
crest - Faktor	67
Effektivwert	67
Formfaktor	67
Gleichanteil	67
Gleichrichtwert	67

B

Betragsquadratspektrum	95
Betragspektrum	95
Binäre Rechenoperationen	
Addition	
Überlauf	98
CLA	97
Halbaddierer	97
mehrere Operanden	98
Sättigungsverhalten	99
Volladdierer	97
Quantisierungsfehler	97
Stellenberechnung	97
Umwandlung Negativer Dualzahlen	
97	
Wertebereich	97
Zahlensysteme	96
Binomischer Lehrsatz	8

C

Carnot'prozeß	59
---------------------	----

D

Delta Impulsfläche	93
Deltaimpuls	78
Differentialgleichungen	25
1.Ordnung	25
2.Ordnung	25
Linear	25
Partikuläre Lösungen	
e-, sin- und cos Funktion	26
Polynom	26
Polynom und e-Funktion	26
sin- und cos Funktion	26
Differentiationssatz	92
Differenzverstärker	104
Differenzaussteuerung	104
Eingangswiderstand	105
Gleichtaktaussteuerung	105
Mischaussteuerung	105
Diskrete Fourier Transformation	91
Matrizen-Multiplikation	91

E

Ebenen	18
Abstand Geraden - Ebene	19
Hessesche Normalform	19
Schnittwinkel zweier Ebenen	19
Einheitsanstiegsfunktion	78
Einheitssprungfunktion	77 f.

Elastischer Stoß		zufällige Abweichungen	
Impulserhaltung.....	43	Erwartungswerte.....	112
Zentral und Gerade	43	Varianzen.....	112
Elastizitätslehre		Fourier Reihen.....	34
Drill	47	Fourierintegral.....	90
Flächenmoment	48	Funktionenreihen	33
Schub.....	47		
Spannung	47	G	
Verformungsarbeit.....	48	Geneigte Ebene.....	42
Elektrostatik		Geraden	18
Arbeit im elektrischen Feld.....	55	Abstand eines Puktes	18
Coulomb Gesetz.....	54	Abstand paralleler Geraden	18
Fluß	55	Abstand windschiefer Geraden...18	
Flußdichte	55	Gesamtsignalleistung.....	81
Kapazität	55	gewöhnliches Moment 2. Ordnung....	81
Ladung	54	Gewichtsfunktion	88
Ohm'sches Gesetz	55	Gleichungen	13
Punktladungen.....	54	Gravitation	53
Spannung	54	Arbeit	53
Elementarladung.....	64	Planetenbahnen	53
Emitterschaltung	103		
Energiesignale		H	
Impulsfläche.....	85	Hook'sches Gesetz	43
Impulsmoment 1. Ordnung	85		
Erwartungswert.....	109	I	
F		Ideales Gas	
Faltung.....	88 f., 93	Adiabat	58
Polynommultiplikation	89	Energie	58
zeitdiskret.....	89	Isobar	58
Fluiddynamik		Isochor	58
Laminare Reibung.....	52	Isotherm	58
Ohne Reibung.....	51	Zustandsgleichung.....	58
Formfaktoren		Impulsantwort	88
crest - Faktor	67	Impulse	
Effektivwert	67	Dreieck.....	75
Formfaktoren.....	67	Rechteck	75
Gleichanteil	67	Impulsenergie.....	81
Gleichrichtwert	67	Impulsmoment 2. Ordnung.....	81
Fortpflanzung		Integrationssatz.....	92
Fehlerfortpflanzungsgesetz <i>Gauß</i>	112	Interpolation.....	36
Messunsicherheiten.....	113	Differentenschema	37

nach Newton	36	Mittlere Leistung	67
Rechenregeln	37	Momentanleistung	73
K		Scheinleistung	67
Kinematik		Definition	73
Analogietabelle Translation - Rotation	39	Wirkleistung	67, 73
Bahngrößen	40	Leistungssignale	
Rotation	40	Effektivwert	82
Translation	40	gewöhnliches Moment 1. Ordnung	83
Winkelgrößen	40	Gleichanteil	83
Knotenpunktsatz	65	linearer Mittelwert	83
Komplexe Zahlen	11 f.	quadrirtes gewöhnliches Moment 1. Ordnung	83
Konstantstromquelle		Signalgleichleistung	83
Bipolar	102	Signalwechselleistung	84
Konvergenz	32	Varianz	84
Bekannte konvergente Reihen	32	zentrales Moment 2. Ordnung	84
Leibnizkriterium	32	Leitwert	65
Majorantenkriterium	32	Linearität	92
Minorantenkriterium	32	Logarithmus	8
Quotientenkriterium	32	M	
Wurzelkriterium	32	Maschensatz	65
Korrekturfaktor	108	Messabweichung	107 f.
Korrelation	95	Fortpflanzung	108
Kosinus	9	relativ	107
Differentiation	70	Messtechnik	
Schwingung	68	Begriffe	107
zu Sinus	69	Mischgrößen	66
Kotangens	9	N	
Kreisprozeß	59	Nullphasenzeit	68
Kreuzkorrelationsfunktion	95	O	
-normierte	95	Operatoren	
Kreuzprodukt	17	Leitwertsop.	70
L		Parallelschaltung	72
Laplaceintegral	90	Reihenschaltung	72
Leistung		Spannungsteiler	72
Blindleistung	73	Stromteiler	72
Definition	73	Widerstandsop.	70
komplexe L.	74	Optik	
Leistungsfaktor	67		

Brechung.....	60	Viskosereibung.....	50
Hohlspiegel.....	60	Mathematisches Pendel.....	49
Lichtwellenleiter.....	62	Physikalisches Pendel.....	49
Linse.....	61	Torsionsschwingung.....	49
numerische Apertur.....	62	Signale	
Totalreflexion.....	60	Abtastung.....	94
P		Abtastung + Periodifizierung....	94
Polynomdivision.....	14	Definition.....	80
Potential.....	64	Energiewandlung.....	80
Potenzen.....	7 f.	Mittlere Leistung.....	81
Potenzreihen.....	33	Momentanleistung.....	80
Bekannte Potenzreihen.....	33	Periodifizierung.....	94
spezielle Reihen.....	34	Signalenergie.....	81 f.
R		Signalleistung.....	82
Reihen		Mittlere.....	81
Geometrische Folge.....	31	Sinus.....	9
Harmonische Reihe.....	31	Addition.....	68
Rotation		Differentiation.....	70
Drehimpuls.....	42	Schwingung.....	68
Drehmoment.....	41	zu Kosinus.....	69
Massenträgheitsmoment.....	41	Skalierungsfaktor.....	76 f.
Zentripedalkraft.....	42	Spannung.....	64
rotierender Zeiger.....	69	Spannungsquelle.....	65
Rotierendes Bezugssystem		Spatprodukt.....	17
Corioliskraft.....	45	Spektrum.....	95
Zentrifugalkraft.....	45	Sprungantwort.....	88
S		Standardabweichung.....	109
Schwerpunkt		Stichprobe	
Allgemein.....	45	empirische Varianz.....	111
Kartesischekoordinaten.....	45	Mittelwert.....	111
Punktmasse.....	45	Strom.....	64
Zylinderkoordinaten.....	45	-dichte.....	64
Schwingungen		Stromquelle.....	65
Flüssigkeitspendel.....	49	Studentverteilung.....	111
gedämpft		Systeme	
COULOMB Reibung.....	50	Übersicht.....	86
Gleitreibung.....	50	Eigenschaften.....	86
Schwingungsgleichung.....	50	T	
		Tangens.....	9
		Theorem von Parseval.....	95
		Thermodynamik	

Mischtemperatur	56	Wurst Käse	112
Wärme	56	Wurzelsatz von Vieta	14
-übertragung	57		
-konvektion	56	Z	
-leitung	56	Zeigerbereich	
-strahlung	57	C	70
-widerstand	57	L	70
Wärmedehnung	56	R	70
Trägheitsmoment	46		
Transformation			
Bildbereich	71		
Zeitbereich	71		
Transformationen			
Korrespondenz	94		
Translation			
Arbeit	41		
Impuls	41		
U			
Übergangsfunktion	88		
Unelastischer Stoß			
Energieerhaltung	44		
Impulserhaltung	44		
V			
Varianz	109		
Vektorrechnung	16		
Verschiebungssatz	92		
Vertauschungssatz	92		
Verteilungsdichtefunktion	109		
Verteilungsfunktion	109		
Gleichverteilung	110		
Normalverteilung	110		
Vertrauensbereich	111		
W			
wahrer Wert	109		
Wechselgrößen	66		
Widerstand	65		
Temperaturabhängigkeit	65		
Worst Case	<i>siehe</i> Wurst Käse		