

# Formelsammlung - ET/TI

Marc Ludwig

15. Februar 2012

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>I</b> | <b>Mathematik</b>  | <b>6</b>  |
| <b>1</b> | <b>Algebra</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1      | Rechenregeln fuer Potenzen . . . . .                       | 7         |
| 1.2      | Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen . . . . .       | 7         |
| 1.3      | Potenzen und Logarithmen . . . . .                         | 8         |
| 1.3.1    | Der natuerliche Logarithmus . . . . .                      | 8         |
| 1.3.2    | Rechnen mit Logarithmen . . . . .                          | 8         |
| 1.4      | Der Binomische Lehrsatz . . . . .                          | 8         |
| 1.5      | Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens . . . . .            | 9         |
| 1.5.1    | Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens | 9         |
| 1.5.2    | Additionstheoreme . . . . .                                | 9         |
| 1.5.3    | Funktionen des doppelten und halben Winkels . . . . .      | 10        |
| 1.5.4    | Umformungen . . . . .                                      | 10        |
| 1.6      | Komplexe Zahlen . . . . .                                  | 11        |
| 1.6.1    | Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen . . . . .     | 11        |
| 1.6.2    | Rechnen mit Komplexen Zahlen . . . . .                     | 12        |
| <b>2</b> | <b>Funktionen</b>  | <b>13</b> |
| 2.1      | Gleichungen . . . . .                                      | 13        |
| 2.1.1    | Gleichungen $n$ -ten Grades . . . . .                      | 13        |
| 2.1.2    | Lineare Gleichungen . . . . .                              | 13        |
| 2.1.3    | Quadratische Gleichungen . . . . .                         | 14        |
| 2.1.4    | Biquadratische Gleichungen . . . . .                       | 14        |
| 2.1.5    | Gleichungen hoeheren Grades . . . . .                      | 14        |
| 2.1.6    | Wurzelgleichung . . . . .                                  | 14        |
| 2.1.7    | Ungleichungen . . . . .                                    | 15        |
| 2.1.8    | Betragsgleichungen . . . . .                               | 15        |
| <b>3</b> | <b>Vektorrechnung</b>                                      | <b>16</b> |
| 3.1      | Vektorrechnung . . . . .                                   | 16        |
| 3.1.1    | Grundlagen . . . . .                                       | 16        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 3.1.2     | Vektoroperationen . . . . .   | 17        |
| 3.1.3     | Geraden . . . . .   | 18        |
| 3.1.4     | Ebenen . . . . .  | 18        |
| <b>4</b>  | <b>Differentialrechnung</b>   | <b>20</b> |
| 4.1       | Differntialrechnung . . . . .                                       | 20        |
| 4.1.1     | Erste Ableitungen der elementaren Funktionen . . . . .              | 20        |
| 4.1.2     | Rechenregeln . . . . .  | 21        |
| 4.1.3     | Fehlerrechnung . . . . .  | 22        |
| 4.1.4     | Linearisierung und Taylor-Polynom . . . . .                         | 22        |
| 4.1.5     | Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital . . . . .            | 23        |
| 4.1.6     | Differentielle Kurvenuntersuchung . . . . .                         | 23        |
| 4.2       | Differentialgleichungen . . . . .                                   | 25        |
| 4.2.1     | DG 1. Ordnung . . . . .   | 25        |
| 4.2.2     | Lineare DG 2. Ordnung . . . . .                                     | 25        |
| 4.3       | Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen . . . . . | 27        |
| 4.3.1     | Differentialrechnung . . . . .                                      | 27        |
| 4.3.2     | Mehrfachintegral . . . . .  | 28        |
| <b>5</b>  | <b>Folgen und Reihen</b>  | <b>31</b> |
| 5.1       | Reihen . . . . .  | 31        |
| 5.1.1     | Geometrische Folge . . . . .  | 31        |
| 5.1.2     | Harmonische Reihe . . . . .   | 31        |
| 5.1.3     | Konvergenz . . . . .  | 32        |
| 5.1.4     | Bekannte konvergente Reihen . . . . .                               | 32        |
| 5.2       | Funktionenreihen . . . . .  | 33        |
| 5.2.1     | Potenzreihen . . . . .  | 33        |
| 5.2.2     | Bekannte Potenzreihen . . . . .                                     | 33        |
| 5.2.3     | spezielle Reihen . . . . .  | 34        |
| 5.2.4     | Fourier Reihen . . . . .  | 34        |
| <b>6</b>  | <b>Interpolation</b>  | <b>36</b> |
| 6.1       | Interpolationspolynome . . . . .                                    | 36        |
| <b>II</b> | <b>Physik</b>   | <b>38</b> |
| <b>7</b>  | <b>Kinematik</b>  | <b>39</b> |
| 7.1       | Analogietabelle . . . . .   | 39        |
| 7.1.1     | Translation . . . . .   | 40        |
| 7.1.2     | Rotation . . . . .  | 40        |
| 7.2       | Dynamik . . . . .   | 41        |
| 7.2.1     | Geradlinig (Translation) . . . . .                                  | 41        |

|           |                                    |           |
|-----------|------------------------------------|-----------|
| 7.2.2     | Drehbewegung(Rotation)             | 41        |
| 7.2.3     | Geneigte Ebene                     | 42        |
| 7.2.4     | Reibung                            | 42        |
| 7.2.5     | Feder                              | 43        |
| 7.2.6     | Elastischer Stoss                  | 43        |
| 7.2.7     | Unelastischer Stoss                | 43        |
| 7.2.8     | Rotierendes Bezugssystem           | 44        |
| 7.3       | Schwerpunkt                        | 45        |
| 7.4       | Trägheitsmoment                    | 46        |
| 7.5       | Elastizitaetslehre                 | 47        |
| 7.6       | Schwingungen                       | 48        |
| 7.6.1     | Ungedämpfte Schwingungen           | 48        |
| 7.6.2     | Gedaempfte Schwingungen            | 50        |
| <b>8</b>  | <b>Fluiddynamik</b>                | <b>51</b> |
| 8.1       | Ohne Reibung                       | 51        |
| 8.2       | Laminare Reibung                   | 52        |
| <b>9</b>  | <b>Gravitation</b>                 | <b>53</b> |
| <b>10</b> | <b>Elektrostatik</b>               | <b>54</b> |
| <b>11</b> | <b>Thermodynamik</b>               | <b>56</b> |
| 11.1      | Wärmedehnung                       | 56        |
| 11.2      | Wärme                              | 56        |
| 11.3      | Mischtemperatur                    | 56        |
| 11.4      | Wärmeleitung                       | 56        |
| 11.5      | Wärmekonvektion                    | 56        |
| 11.6      | Wärmewiderstand                    | 57        |
| 11.6.1    | Wärmeübertragung                   | 57        |
| 11.6.2    | Wärmestrahlung                     | 57        |
| 11.6.3    | Zustandsänderung des idealen Gases | 57        |
| <b>12</b> | <b>Optik</b>                       | <b>60</b> |
| 12.1      | Brechung                           | 60        |
| 12.2      | Totalreflexion                     | 60        |
| 12.3      | Hohlspiegel                        | 60        |
| 12.4      | Linse                              | 61        |
| 12.5      | Lichtwellenleiter                  | 62        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>III Elektrotechnik</b>   | <b>63</b> |
| <b>13 Gleichstromtechnik</b>  | <b>64</b> |
| 13.1 Grundgrößen . . . . .  | 64        |
| 13.2 Lineare Quellen . . . . .  | 65        |
| 13.3 Kirchhoffsche Gesetze . . . . .                                  | 65        |
| <b>14 Wechselstromtechnik</b>   | <b>67</b> |
| 14.1 Anteile und Formfaktoren . . . . .                               | 68        |
| 14.2 Leistung und Leistungsfaktoren . . . . .                         | 68        |
| 14.2.1 Wirkleistung . . . . .   | 68        |
| 14.2.2 Mittlere Leistung . . . . .                                    | 68        |
| 14.2.3 Scheinleistung . . . . .                                       | 68        |
| 14.2.4 Leistungsfaktor . . . . .                                      | 68        |
| 14.3 Sinusförmige Größen . . . . .                                    | 70        |
| 14.3.1 Sinusschwingung . . . . .                                      | 70        |
| 14.3.2 Kosinusschwingung . . . . .                                    | 70        |
| 14.3.3 Nullphasenzeit . . . . .                                       | 70        |
| 14.3.4 Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz . . . . .        | 70        |
| 14.3.5 Wechsel zwischen Sinus und Kosinus . . . . .                   | 71        |
| 14.3.6 Differentiation und Integration von Sinusgrößen . . . . .      | 73        |
| 14.3.7 R, L und C im kompl. Zeigerbereich . . . . .                   | 73        |
| 14.3.8 Widerstands und Leitwertoperator . . . . .                     | 73        |
| 14.3.9 Resultierende Operatoren . . . . .                             | 74        |
| 14.3.10 Anteile am komplexen Widerstand (Impedanz) . . . . .          | 74        |
| 14.3.11 Anteile am komplexen Leiwert (Admitanz) . . . . .             | 74        |
| 14.3.12komplexer Widerstand / komplexer Leitwert . . . . .            | 74        |
| 14.3.13Momentanleistung / Augenblicksleistung . . . . .               | 75        |
| 14.3.14Blindleistung . . . . .  | 75        |
| 14.3.15Mittlere Leistung / Wirkleistung . . . . .                     | 75        |
| 14.3.16Definition von Blind- und Scheinleistung . . . . .             | 76        |
| 14.3.17Beziehungen zwischen Wirk- Blind- und Scheinleistung . . . . . | 76        |
| 14.3.18Die komplexe Leistung . . . . .                                | 76        |
| <b>15 Signal- und Systemtheorie</b>                                   | <b>78</b> |
| 15.1 Einfache Impulse . . . . .                                       | 78        |
| 15.1.1 Rechteckimpuls/ -funktion $rect_T(t)$ . . . . .                | 78        |
| 15.1.2 Dreiecksimpuls/ -funktion $\Lambda_T(t)$ . . . . .             | 78        |
| 15.2 Elementare Operationen auf zeitliche Verläufe . . . . .          | 79        |
| 15.2.1 Beeinflußung der Ordinate . . . . .                            | 79        |
| 15.2.2 Beeinflußung der Abszisse . . . . .                            | 79        |
| 15.2.3 Einheitssprungfunktion / Deltaimpuls . . . . .                 | 80        |

|        |   |    |
|--------|---|----|
| 15.2.4 | Zusammenhang zwischen Deltaimpuls, Einheitssprungfunktion<br>und Einheitsanstiegsfunktion . . . . . | 81 |
| 15.2.5 | zeitliche Verschiebung und Wichtung . . . . .   | 82 |
| 15.3   | Signale . . . . .   | 83 |

## IV Messtechnik 84

### 16 Grundlagen 85

|        |  |    |
|--------|--|----|
| 16.1   | Begriffe . . . . .                                       | 85 |
| 16.2   | Messabweichung $e$ . . . . .                             | 85 |
| 16.2.1 | relative Messabweichung . . . . .                        | 85 |
| 16.2.2 | Messabweichung $e_y$ . . . . .                           | 86 |
| 16.2.3 | Fortpflanzung systematischer Messabweichungen . . . . .  | 86 |
| 16.3   | Statistische Größen . . . . .                            | 87 |
| 16.4   | Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung . . . . . | 87 |
| 16.4.1 | Erwartungswert $\mu$ . . . . .                           | 87 |
| 16.4.2 | wahrer Wert $X$ . . . . .                                | 87 |
| 16.4.3 | Varianz $\sigma^2$ . . . . .                             | 87 |
| 16.4.4 | Standardabweichung . . . . .                             | 87 |
| 16.5   | Verteilungsfunktionen . . . . .                          | 88 |
| 16.5.1 | Normalverteilung . . . . .                               | 88 |
| 16.5.2 | Gleichverteilung . . . . .                               | 88 |
| 16.6   | Stichprobe . . . . .                                     | 89 |
| 16.6.1 | Mittelwert $\bar{x}$ . . . . .                           | 89 |
| 16.6.2 | empirische Varianz $s^2$ . . . . .                       | 89 |
| 16.7   | Vertrauensbereich für den Erwartungswert . . . . .       | 89 |
| 16.7.1 | Studentverteilung . . . . .                              | 89 |
| 16.8   | Fortpflanzung zufälliger Abweichungen . . . . .          | 90 |
| 16.9   | Fortpflanzung von Messunsicherheiten . . . . .           | 91 |

Teil I

**Mathematik**

# Kapitel 1

# Algebra

Why waste time learning  
when ignorance is instantaneous?  
- Hobbes

## 1.1 Rechenregeln fuer Potenzen

$$\begin{array}{lll} a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n & \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n & (\text{fuer } a > 0) \ a^b = e^{b \cdot \ln a} \end{array}$$

## 1.2 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Potenzen und Wurzeln existieren.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$



## 1.3 Potenzen und Logarithmen

Schreibweise:  $x = \log_a(b)$  mit  $a > 0, a \neq 1$  und  $b > 0$ .

Es gilt:  $\log_a(1) = 0, \log_a(a) = 1$ .

### 1.3.1 Der natuerliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis  $e$  mit  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\dots$

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1; \text{ da } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Man beachte:  $x^a = e^{\ln(x) \cdot a}$

### 1.3.2 Rechnen mit Logarithmen

| Es gilt:   | Weitere Beziehungen:                          |
|--|---|
| $\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$              | $\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log_a(u)$ |
| $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$ | $a^{\log_a(u)} = \log_a(a^u) = u$             |
| $\log_a(u^p) = p \cdot \log_a(u)$                        | $\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$     |

## 1.4 Der Binomische Lehrsatz

Die Potenzen eines Binoms  $a+b$  lassen sich nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln ( $n \in \mathbb{N}^*$ ):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 \cdot b^{n-1} + b^n$$

Die Koeffizienten  $\binom{n}{k}$  heißen Binominalkoeffizienten, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

## Einige Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ fuer } k > n \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

## 1.5 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

### 1.5.1 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

$$1 + \cot^2(\alpha) = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$$

### 1.5.2 Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$$

### 1.5.3 Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\alpha))$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha))$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

### 1.5.4 Umformungen

#### Summe oder Differenz in ein Produkt

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

#### Produkt in eine Summe oder Differenz

$$2 \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

## 1.6 Komplexe Zahlen

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man:

$$\mathbb{C} = \{z | z = a + bj, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

a-Realteil   b-Imaginaerteil   j-imaginaere Einheit

| kartesische Form            | trigonometrische Form                             | exponentialform                 |
|-----------------------------|---|---------------------------------|
| $z = a + bj$                | $z =  z  (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$   | $z =  z  \cdot e^{j\varphi}$    |
| $z^* = (a + bj)^* = a - bj$ | $z^* =  z  (\cos \varphi - j \cdot \sin \varphi)$ | $z^* =  z  \cdot e^{-j\varphi}$ |

$|z|$  = Betrag von z

$\varphi$  = Argument (Winkel) von z

$z^*$  = Konjugiert komplexe Zahl

### 1.6.1 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

#### Polarform $\rightarrow$ Kartesische Form

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \underbrace{|z| \cdot \cos \varphi}_a + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin \varphi}_b = a + bj$$

#### Kartesische Form $\rightarrow$ Polarform

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

## 1.6.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

### Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j \cdot (a_1b_2 + a_2b_1)$$

In der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [|z_1| (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [|z_2| (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)] \\ &= (|z_1| |z_2|) \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= (|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}) = (|z_1| |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

### Division

In kartesischer Form

In der Polarform

# Kapitel 2

## Funktionen

### 2.1 Gleichungen

#### 2.1.1 Gleichungen $n$ -ten Grades

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R})$$

##### Eigenschaften

- Die Gleichung besitzen maximal  $n$  reelle Lösungen.
- Es gibt genau  $n$  komplexe Lösungen.
- Für ungerades  $n$  gibt es mindestens eine reelle Lösung.
- Komplexe Lösungen treten immer Paarweise auf.
- Es existieren nur Lösungsformeln bis  $n \leq 4$ . Für  $n > 4$  gibt es nur noch grafische oder numerische Lösungswege.
- Wenn eine Nullstelle bekannt ist kann man die Gleichung um einen Grad verringern, indem man den zugehörigen Linearfaktor  $x - x_1$  abspaltet (Polynome Division).

#### 2.1.2 Lineare Gleichungen

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

### 2.1.3 Quadratische Gleichungen

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Normalform mit Lösung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Überprüfung (Vietascher Wurzelsatz)

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$x_1, x_2$  : Lösung der quadratischen Gleichung.

### 2.1.4 Biquadratische Gleichungen

Diese Gleichungen lassen sich mithilfe der Substitution lösen.

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$$

$$u = x^2$$

$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0$$

$$x = \pm\sqrt{u}$$

Das  $u$  kann mithilfe der Lösungsformel einer quadratischen Gleichung gelöst werden.

### 2.1.5 Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades kann man durch graphische oder numerische Ansätze lösen. Hilfreich ist das finden einer Lösung und das abspalten eines Linearfaktor, mithilfe der Polynomdivision oder dem Horner Schema, von der ursprünglichen Gleichung.

*Polynomdivision*

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{x - x_0} = b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 + r(x)$$

$x_0$  ist dabei die erste gefunden Nullstelle.  $r(x)$  verschwindet wenn  $x_0$  ein Nullstellen oder eine Lösung von  $f(x)$  ist.

$$r(x) = \frac{a_3 \cdot x_0^3 + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x - x_0}$$

### 2.1.6 Wurzelgleichung

Wurzelgleichungen löst man durch quadrieren oder mit Hilfe von Substitution. Bei Wurzelgleichung ist zu beachten das quadrieren keine Äquivalente Umformung ist und das Ergebniss überprüft werden muss.

### 2.1.7 Ungleichungen

- Beidseitiges Subtrahieren oder Addieren ist möglich
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige positiven Zahl multipliziert oder dividiert werden
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige negativen Zahl multipliziert oder dividiert werden, wenn man gleichzeitig das Relationszeichen umdreht.

### 2.1.8 Betragsgleichungen

Betragsgleichungen löst man mithilfe der Fallunterscheidung. Dabei wird einmal davon ausgegangen das der Term innerhalb des Betrags einmal positiv und einmal negativen sein kann.

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



# Kapitel 3

## Vektorrechnung

### 3.1 Vektorrechnung

#### 3.1.1 Grundlagen

Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \\ &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2 Punkt Vektor

$$P_1 \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Betrag

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= a \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &= \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}\end{aligned}$$

Richtungswinkel

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} \\ 1 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma\end{aligned}$$

### 3.1.2 Vektoroperationen

#### Addition und Subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

#### Multiplikation mit einem Skalar

$$a \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} ab_x \\ ab_y \\ ab_z \end{pmatrix}$$

#### Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

#### Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix}$$

#### Kreuzprodukt

$|\vec{a} \times \vec{b}|$  Fläche des Parallelograms  $\vec{a}, \vec{b}$   
 $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

#### Spatprodukt

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$$

Volumen des Parallelepiped  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\begin{aligned} [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] &= \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= a_x(b_y c_z - b_z c_y) \\ &\quad + a_y(b_z c_x - b_x c_z) \\ &\quad + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

#### Schnittwinkel

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

#### Projektion

$$\vec{a}_b = \left( \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = (\vec{b} \circ \vec{e}_a) \vec{e}_a$$

### 3.1.3 Geraden

Geradengleichung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ d &= \frac{|\vec{a} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}\end{aligned}$$

Abstand zweier paralleler Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_1 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|}\end{aligned}$$

Abstand zweier windschiefen Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_2 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}\end{aligned}$$

### 3.1.4 Ebenen

Ebenengleichung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t, s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &\quad + s(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Parameterfreie Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t, s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ \vec{r} \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) &= \vec{r}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + t\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + s\vec{a}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ \vec{r} \circ \vec{n} &= \vec{r}_1 \circ \vec{n} + 0 + 0 \\ \vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_1) &= 0\end{aligned}$$

Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

Normierter Normalenvektor

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

**Hessesche Normalform**

$$0 = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

**Abstand eines Punktes von einer Ebene**

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

**Abstand eines Geraden von einer Ebene      Abstand zweier paralleler Ebenen**

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}_1$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_G - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{Ar_{G1} + Br_{G2} + Cr_{G3} + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$$

$$\vec{g}(t, s) = \vec{r}_2 + t\vec{a}_3 + s\vec{a}_4$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}|}$$

**Schnittwinkel zweier Ebenen**

$$\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

**Durchstoßpunkt**

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}$$

$$\vec{r}_s = \vec{r}_G + \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_1 - \vec{r}_G)}{\vec{n} \circ \vec{a}} \vec{a}$$

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} \right)$$

# Kapitel 4

## Differentialrechnung

### 4.1 Differentialrechnung

#### 4.1.1 Erste Ableitungen der elementaren Funktionen

##### Potenzfunktion

$$x^n \quad \Longleftrightarrow \quad n \cdot x^{n-1}$$

##### Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned} e^x &\Longleftrightarrow e^x \\ a^x &\Longleftrightarrow \ln a \cdot a^x \end{aligned}$$

##### Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned} \ln x &\Longleftrightarrow \frac{1}{x} \\ \log_a x &\Longleftrightarrow \frac{1}{(\ln a) \cdot x} \end{aligned}$$

##### Trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \sin x &\Longleftrightarrow \cos x \\ \cos x &\Longleftrightarrow -\sin x \\ \tan x &\Longleftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} \\ \tan x &\Longleftrightarrow 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

**Arcusfunktionen****Hyperbolische Funktionen**

$$\arcsin x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-x^2}$$

$$\sinh x \quad \Longleftrightarrow \quad \cosh x$$

$$\cosh x \quad \Longleftrightarrow \quad \sinh x$$

$$\tanh x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\tanh x \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + \tanh^2 x$$

**4.1.2 Rechenregeln****Faktorregel**

$$\frac{d}{dx} (C \cdot f(x)) = C \cdot f'(x)$$

**Summenregel**

$$\frac{d}{dx} (g(x) + f(x)) = g'(x) + f'(x)$$

**Produktregel**

$$\frac{d}{dx} (g(x) \cdot f(x)) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (h(x) \cdot g(x) \cdot f(x)) = h' \cdot g \cdot f + h \cdot g' \cdot f + h \cdot g \cdot f'$$

**Quotientenregel**

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{g(x)}{f(x)} \right) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f(x)^2}$$

**Kettenregel**

$$\frac{d}{dx} (g(f(x))) = g'(f) \cdot f'(x)$$

**Logarithmische Ableitungen**

$$\frac{d}{dx} y = f(x)$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{d}{dx} \ln f(x)$$

### 4.1.3 Fehlerrechnung

#### Absoluter Fehler

$\Delta x$  Absoluter Fehler der Eingangsgröße

$\Delta y$  Absoluter Fehler der Ausgangsgröße

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

#### Relativer Fehler

$\delta x$  Relativer Fehler der Eingangsgröße in %

$\delta y$  Relativer Fehler der Ausgangsgröße in %

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y}$$

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\delta y = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \delta x$$

### 4.1.4 Linearisierung und Taylor-Polynom

#### Tangentengleichung

$x_0$  Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$$y_T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

#### Taylor Polynom

$x_0$  Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$R_n$  Restglied

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R_n(x)$$

**Restglied**

$x_0$  Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$x_0 < c < x$ , wenn  $x_0 < x$

$x_0 > c > x$ , wenn  $x_0 > x$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

**4.1.5 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital****de l'Hospital**

Gilt nur wenn  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  gleich  $\frac{0}{0}$  oder  $\frac{\infty}{\infty}$  ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**4.1.6 Differentielle Kurvenuntersuchung****Normale der Kurve**

$$y_N(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x)} (x - x_0)$$

**Monotonie-Verhalten**

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Monoton wachsend} \\ < 0 \text{ Monoton fallend} \end{cases}$$

**Krümmungs-Verhalten**

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Linkskr. (konvex)} \\ < 0 \text{ Rechtskr. (konkav)} \end{cases}$$

**Ableitung in Polarkordinaten**

$\dot{r}$  Ableitung nach  $\varphi$

$\ddot{r}$  Zweite Ableitung nach  $\varphi$

$$y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3}$$

**Ableitung in Parameterform**

$\dot{x}$  Ableitung nach  $t$

$\dot{y}$  Ableitung nach  $t$

$$y = y(t)$$

$$x = x(t)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$



**Bogendifferential**

”Wegelement” einer Funktion

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

$$ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \cdot dt$$

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} \cdot d\varphi$$

**Winkeländerung**

$$\tau = \arctan y'$$

$$d\tau = \frac{y''}{1 + (y')^2} \cdot dx$$

**Krümmungskreis**

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|}$$

$$x_K = x_P - y' \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$

$$y_K = y_P + \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$

$\rho$  : Radius

$(x_K, y_K)$  : Kreismittelpunkt

$(x_P, y_P)$  : Kurvenpunkt

**Kurvenkrümmung**

$$\kappa = \frac{d\tau}{ds}$$

$$= \frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}}$$

$$= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}$$

$$= \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{\sqrt{(r^2 + (r')^2)^3}}$$

## 4.2 Differentialgleichungen

Anfangswertproblem: Werte nur an einer Stelle vorgegeben

Randwertproblem: Werte an mehreren Stellen vorgegeben

### Lineare DG

$$y_{all} = y_h + y_p$$

#### 4.2.1 DG 1. Ordnung

Trennung der variablen

Lineare DG

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x) \cdot g(y) \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x) dx \end{aligned}$$

$$y' + f(x) \cdot g(y) = g(x)g(y) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

$$y_{all} = e^{-F(x)} \cdot \left( \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right)$$

#### 4.2.2 Lineare DG 2. Ordnung

Darstellung

Fundamental Lösungen

$$\begin{aligned} a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y &= g(x) \\ g(x) = 0 &\Rightarrow \text{homogen} \end{aligned}$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta \cdot j$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$$

$$+ C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

In Folgenden Aufzählungen gilt:

- $G(x)$  Ansatz
- $g(x)$  Störglied
- $r$  Anzahl der Resonanzfälle

**Partikuläre Lösungen(Polynom)**

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

$$G(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n \quad \lambda \neq 0$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) \cdot x^r \quad \lambda = 0$$

**Partikuläre Lösungen(Polynom und e-Funktion)**

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) e^{mx}$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \quad \lambda \neq m$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot x^r \quad \lambda = m$$

**Partikuläre Lösungen(sin- und cos Funktion)**

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx)$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad \lambda \neq \pm kj$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \cdot x^r \quad \lambda = \pm kj$$

**Partikuläre Lösungen(e-, sin- und cos Funktion)**

$$0 = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

$$g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) e^{mx} \cdot (c \cos(kx) + d \sin(kx))$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx))$$

$$\lambda \neq m \pm kj$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx)) \cdot x^r$$

$$\lambda = m \pm kj$$

## 4.3 Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen

### 4.3.1 Differentialrechnung

#### Ableitung

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = y_{x_1}$$

Alles bis auf  $x_1$  ist konstant beim ableiten

$$\frac{\partial y}{\partial x_n} = y_{x_n}$$

Alles bis auf  $x_n$  ist konstant beim ableiten

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = y_{x_1 x_1}$$

Alles bis auf  $x_1$  ist konstant beim ableiten

$$y_{x_1 x_2} = y_{x_2 x_1}$$

#### Tangentialebene

$(x_0, y_0)$  Entwicklungspunkte der Ebene

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

#### Totales Differential

$$dz = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$$

#### Extrema

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$f_{xx}(x_0; y_0) < 0$$

Maximum

$$f_{xx}(x_0; y_0) > 0$$

Minimum

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} > 0$$

**Sattelpunkt**

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} < 0$$

**Richtungsableitung**

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \cdot (a_x z_x + a_y z_y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = z_x \cos \alpha + z_y \sin \alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \vec{e}_a \cdot \text{grad}(z)$$

**4.3.2 Mehrfachintegral****Polarkordinaten**

$$x = x_0 + r \cos \varphi$$

$$y = y_0 + r \sin \varphi$$

**Volumen**

$$\iiint_V dV = \int_x \int_y \int_z dz dy dx$$

$$\iiint_V dV = \int_r \int_\varphi \int_z r dz dr d\varphi$$

**Fläche**

$$A = \iint_{(A)} dA$$

**Masse**

$$\begin{aligned}
m &= \iint_{(A)} \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
&= \iiint_{(V)} \rho(x, y) \, dz \, dx \, dy \\
&= \iiint_{(V)} \rho(r, \varphi) r \, dz \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

**Statisches Moment** $(M_x, M_y)$  Achsmomente

$$\begin{aligned}
M_x : \\
&= \iint_{(A)} y \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} (y_0 + r \sin \varphi) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
M_y : \\
&= \iint_{(A)} x \rho(x, y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{(A)} (x_0 + r \cos \varphi) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

**Schwerpunkt**

$$x_s = \frac{M_y}{m}$$

$$y_s = \frac{M_x}{m}$$

**Trägheitsmoment**

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_{(A)} y^2 \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_x &= \iint_{(A)} (y_0 + r \sin \varphi)^2 \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi \\
I_y &= \iint_{(A)} x^2 \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_y &= \iint_{(A)} (x_0 + r \cos \varphi)^2 \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

**Polares Trägheitsmoment**

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_{(A)} (y^2 + x^2) \rho(x, y) \, dx \, dy \\
I_x &= \iint_{(A)} \left( (y_0 + r \sin \varphi)^2 + (x_0 + r \cos \varphi)^2 \right) \rho(r, \varphi) r \, dr \, d\varphi
\end{aligned}$$

**Kugelkoordinaten**

$$V = \int_r \int_{\vartheta} \int_{\varphi} r^2 \sin \vartheta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}r$$

# Kapitel 5

## Folgen und Reihen

### 5.1 Reihen

#### 5.1.1 Geometrische Folge

Darstellung

$$a_n = a \cdot q^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$$

Konvergent für  $|q| < 1$

#### 5.1.2 Harmonische Reihe

Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Konvergent für  $s > 1$



### 5.1.3 Konvergenz

#### Majorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$b_n$  bekannte konvergente Reihe

#### Minorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$b_n$  bekannte divergente Reihe

#### Wurzelkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \begin{cases} q > 1 \text{ ist die Reihe divergent} \\ q < 1 \text{ ist die Reihe konvergent} \\ q = 1 \text{ ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

#### Quotientenkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \begin{cases} q > 1 \text{ ist die Reihe divergent} \\ q < 1 \text{ ist die Reihe konvergent} \\ q = 1 \text{ ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

#### Leibnizkriterium

Nur bei alternierenden Reihen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q$$

$q = 0$  ist die Reihe divergent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Absolut Konvergent

### 5.1.4 Bekannte konvergente Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

## 5.2 Funktionenreihen

### Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

### 5.2.1 Potenzreihen

#### Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$x_0$  : Verschiebung des  
Entwicklungspunktes.

#### Konvergenz

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ränder müssen  
untersucht werden.

### 5.2.2 Bekannte Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$$

$$x \in (0, 2]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

$$x \in (-1, 1]$$

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$x \in [-1, 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$x \in [-1, 1]$$

### 5.2.3 spezielle Reihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in [-1, 1]$$

$$\operatorname{artanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

### 5.2.4 Fourier Reihen

#### Allgemein

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + a_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \cos(n\omega_0 t) \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t) \, dt$$

**Symetrie**

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n\omega_0 t))$$

gerade Funktion  $b_n = 0$ 

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cdot \sin(n\omega_0 t))$$

ungerade Funktion  $a_n = 0$ **Komplex**

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn x}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(x) \cdot e^{-jn x} dx$$

**Umrechnung**

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - j b_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + j b_n)$$

$$a_0 = 2c_0$$

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = j (c_n - c_{-n})$$

# Kapitel 6

## Interpolation

### 6.1 Interpolationspolynome

Entwicklung einer Polynomfunktion anhand von  $n + 1$  Kurvenpunkten.

- 1. Möglichkeit: Aufstellen von  $n + 1$  Gleichungen und ermitteln der Kurvenfunktion mithilfe des Gauß' Algorithmus.
- 2. Möglichkeit: Interpolationspolynome nach Newton.

#### Interpolationspolynome nach Newton

Gegeben sind die Punkte:

$P_0 = (x_0; y_0), P_1 = (x_1; y_1), P_2 = (x_2; y_2), \dots, P_n = (x_n; y_n)$ ,  
damit lautet die Funktion wie folgt.

$$\begin{aligned} f(x) = & a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \\ & + a_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ & + \dots \\ & + a_n \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  lassen sich mithilfe des Differentschema berechnen. Dabei ist  $y_0 = a_0, [x_0, x_1] = a_1, [x_0, x_1, x_2] = a_2$  usw. .

### Differentenschema

| $k$      | $x_k$    | $y_k$    | 1            | 2                 | 3                      | ... |
|----------|----------|----------|--------------|-------------------|------------------------|-----|
| 0        | $x_0$    | $y_0$    |              |                   |                        |     |
|          |          |          | $[x_0, x_1]$ |                   |                        |     |
| 1        | $x_1$    | $y_1$    |              | $[x_0, x_1, x_2]$ |                        |     |
|          |          |          | $[x_1, x_2]$ |                   | $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ |     |
| 2        | $x_2$    | $y_2$    |              | $[x_1, x_2, x_3]$ |                        | ... |
|          |          |          | $[x_2, x_3]$ |                   | $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ |     |
| 3        | $x_3$    | $y_3$    |              | $[x_2, x_3, x_4]$ |                        | ... |
|          |          |          | ...          | ...               | ...                    |     |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |              |                   |                        |     |
| n        | $x_n$    | $y_n$    |              |                   |                        |     |

### Rechenregeln für dividierte Differenzen

$$[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

$$[x_1, x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$[x_0, \dots, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

$$[x_1, \dots, x_3] = \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$$

$$[x_0, \dots, x_3] = \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_3} \quad [x_1, \dots, x_4] = \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_4}$$

# Teil II

# Physik

# Kapitel 7

## Kinematik

Perfection is achieved  
only on the point of collapse.  
- C. N. Parkinson

### 7.1 Analogietabelle

| Translation   |   | Rotation   |
|---|---|--|
| $\vec{s}$<br>$\downarrow \frac{ds}{dt}$<br>$\vec{v}$<br>$\downarrow \frac{dv}{dt}$<br>$\vec{a}$               | $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$<br><br>$a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_{Tan}} - \underbrace{\omega^2 r}_{a_R}$ | $\vec{\varphi}$<br>$\downarrow \frac{d\varphi}{dt}$<br>$\vec{\omega}$<br>$\downarrow \frac{d\omega}{dt}$<br>$\vec{\alpha}$ |
| $m$<br>$\downarrow \frac{dm}{dt}$<br>$\vec{F}$<br>$\downarrow \frac{dF}{dt}$<br>$\vec{p}$<br>$\frac{m}{2}v^2$ | $E_{kin}$   | $J$<br>$\downarrow \frac{dJ}{dt}$<br>$\vec{M}$<br>$\downarrow \frac{dM}{dt}$<br>$\vec{L}$<br>$\frac{J}{2}\omega^2$         |



### 7.1.1 Translation

$$\begin{aligned}a(t) &= a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \\v(t) &= a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\s(t) &= \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\end{aligned}$$

#### Bahngroessen

$$\begin{aligned}a_t(t) &= a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \\v(t) &= a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\s(t) &= \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\end{aligned}$$

#### Kreisfrequenz

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \\&= 2 \cdot \pi \cdot n \\&= 2 \cdot \pi \cdot f\end{aligned}$$

#### Umdrehungen

$$\begin{aligned}N &= \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \\&= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2\end{aligned}$$

### 7.1.2 Rotation

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_0 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \\\omega(t) &= \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \\\varphi(t) &= \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0\end{aligned}$$

#### Winkelgroessen

$$\begin{aligned}\vec{a}_t &= \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r & \alpha \perp r \\\vec{\alpha} &= \vec{r} \times \vec{a}_t \\\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot r & \omega \perp r \\\vec{\omega} &= \vec{r} \times \vec{v} \\s &= \varphi \cdot r\end{aligned}$$

#### Radialbeschleunigung

$$\begin{aligned}a_r &= \frac{v^2}{r} \\&= v \cdot \omega \\&= \omega^2 \cdot r\end{aligned}$$

## 7.2 Dynamik

### 7.2.1 Geradlinig (Translation)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{Tr}} = -m \cdot \vec{a}$$

#### Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

#### Kraftstoss

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} dp = \int_0^t \vec{F} dt$$

#### Arbeit

$$W = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\text{Tr}} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m \vec{v} \circ d\vec{v} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2)$$

#### Hubarbeit

$$W_{\text{hub}} = mgh$$

#### Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

#### Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

### 7.2.2 Drehbewegung(Rotation)

#### Massentraegheitsmoment

$$J = \int r^2 dm$$

#### Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J \vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

**Drehimpuls**

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= J \cdot \vec{\omega}\end{aligned}$$

**Arbeit**

$$\begin{aligned}W &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e}_{\omega} \, d\varphi \\ &= \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} \, d\vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2)\end{aligned}$$

**7.2.3 Geneigte Ebene****Kräfte**

$$\begin{aligned}\vec{F}_N &= \vec{F}_G \cos \alpha \\ \vec{F}_H &= \vec{F}_G \sin \alpha\end{aligned}$$

**7.2.4 Reibung****Reibungskraft**

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

**Kinetische Energie**

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

**Leistung**

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

**Zentripedalkraft**

$$\begin{aligned}F_{zp} &= -m \cdot \omega^2 \cdot r \\ &= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r}\end{aligned}$$

**Rollreibung**

$$\begin{aligned}M &= f \cdot F_N \\ F_R &= \frac{f}{r} \cdot F_N\end{aligned}$$

### 7.2.5 Feder

HOOKsches Gesetz

$$F = -kx$$

$$M = D\varphi$$

Federspannarbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2) \end{aligned}$$

### 7.2.6 Elastischer Stoß

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

**Zentraler, Gerader, Elastischer Stoß**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \end{aligned}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2$$

$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1$$

### 7.2.7 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß + Arbeit

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

### Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

### Total unelastischer Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + \Delta W \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= (m_1 + m_2)v' \end{aligned}$$

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

### Drehimpulserhaltungssatz

Drehimpuls zur Zeit 1 = Drehimpuls zur Zeit 2

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

### Kopplung zweier Rotationskörper

$$\begin{aligned} \vec{\omega}' &= \frac{J_0\vec{\omega}_0 + J_1\vec{\omega}_1}{J_1 + J_2} \\ W &= \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0 + J_1)} (\omega_0 - \omega_1)^2 \end{aligned}$$

## 7.2.8 Rotierendes Bezugssystem

**Zentrifugalkraft**

$$\begin{aligned}
\vec{F}_Z &= F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= -m\vec{\omega} \times \vec{v} \\
F_Z &= -m \frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r
\end{aligned}$$

**Corioliskraft**

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

**7.3 Schwerpunkt****mehrere Punktmassen**

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

**Allgemein**

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\int dm}$$

**Schwerpunkt in  
Zylinderkoordinaten**

$$\begin{aligned}
r_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\
\varphi_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\
z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\
x &= r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z
\end{aligned}$$

**Schwerpunkt in  
kartesischen Koordinaten**

$$\begin{aligned}
x_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x x \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \\
y_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x y \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \\
z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x z \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz}
\end{aligned}$$

## 7.4 Trägheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$

$$J = \int_m r^2 \, dm$$

$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz$$

**STEINER'scher Satz**

$$J_x = mr^2 + J_s$$

**Traegheitsmoment Kugel**

$$J_{\text{Sp}} = \frac{2}{5}mr^2$$

**Traegheitsmoment Zylinder**

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{2}mr^2$$

**Traegheitsmoment Kreisring  
(Torus)**

$$J_{\text{Sp}} = mr^2$$

**Traegheitsmoment Stab**

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{12}ml^2$$

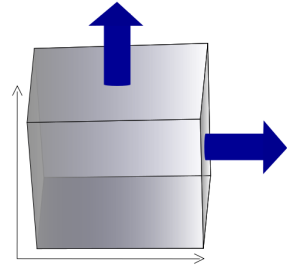
## 7.5 Elastizitaetslehre

### Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_n}{dA}$$

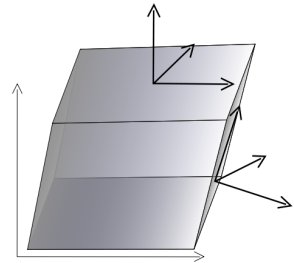
$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_t}{dA}$$



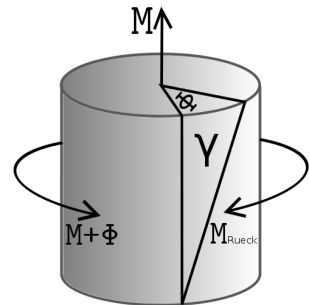
### Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$



### Drillung

$$\psi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{W_t}{G \cdot J_p} \tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$



### Flaechenmoment

$$J_p = \int r^2 dA = \int_{\varphi} \int_r r^3 dr d\varphi$$



**Verformungsarbeit**

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) \, d\varepsilon$$

**7.6 Schwingungen****Harmonische Schwingungen**

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

**7.6.1 Ungedämpfte Schwingungen**

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

**Mathematisches Pendel**

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}
\end{aligned}$$

**Physikalisches Pendel**

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{lmg}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}}
\end{aligned}$$

**Torsionsschwingung**

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{D}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}}
\end{aligned}$$

**Flüssigkeitspendel**

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -\frac{2A\rho g}{m}y \\
\varphi(t) &= \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}
\end{aligned}$$

**Elektrischer Schwingkreis**

$$\begin{aligned}
0 &= L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \\
q(t) &= \hat{Q} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

## 7.6.2 Gedaempfte Schwingungen

### Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

### COULOMB Reibung

$$F_R = -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N$$

$$0 = m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N$$

### Gleitreibung

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1) \cos(\omega t) - \hat{x}_1 \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1) \cos(\omega t) + \hat{x}_1 \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T$$

$$\hat{x}_1 = \frac{\mu F_N}{k}$$

### Viskosereibung

$$0 = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}t}$$

$$\delta = \frac{b}{2m}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

$$D = \frac{b}{2\sqrt{mk}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Lambda = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$$

$$\Lambda = \delta T$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$d = 2D$$

$$Q = \frac{1}{d}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi)$$

Aperiodischer Grenzfall  $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

Kriechfall  $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}$$

# Kapitel 8

## Fluiddynamik

Premature optimization  
is the root of all evil.  
- D. Knuth

On the other hand,  
we cannot ignore efficiency.  
- Jon Bentley

### 8.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

Dynamischer Druck

Schweredruck

$$p = \frac{dF_N}{dA}$$

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho V g}{A} \\ &= h \rho g \end{aligned}$$

Volumenstrom

Massenstrom

$$\begin{aligned} \dot{V} &= vA \\ &= \iint_A \vec{v} d\vec{A} \\ &= \frac{dV}{dt} \\ &= Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{m} &= jA \\ &= \iint_A \vec{j} d\vec{A} \\ &= \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

**Auftrieb**

$$\begin{aligned}\vec{F}_A &= -\rho_V \vec{g}V \\ &= -\frac{\rho_V}{\rho_M} \vec{F}_G\end{aligned}$$

**Kompressibilität**

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

**Volumenausdehnungskoeffizient**

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

**8.2 Laminare Reibung****Newtonsches Reibungsgesetz**

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

**Laminare Strömung (Rohr)**

$$\begin{aligned}v(r) &= \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \\ p &= \frac{4\eta l}{R^2} v(0) \\ \dot{V} &= \frac{\pi R^4}{8\eta l} p\end{aligned}$$

**Umströmung (Kugel)**

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

**Kontinuitätsgleichung**

$$\begin{aligned}\dot{m}|_1 &= \dot{m}|_2 & \dot{V}|_1 &= \dot{V}|_2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 & \rho_1 &= \rho_2\end{aligned}$$

**Barometrische Höhenformel**

$$\begin{aligned}p &= p_0 e^{-C h} \\ C &= \frac{\rho_0 g}{p_0}\end{aligned}$$

**Bernoulli Gleichung**

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const}$$

**Bernoulligleichung mit Reibung**

$$\begin{aligned}p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 \\ = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p\end{aligned}$$

**Reynoldszahl**

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$

$$Re > Re_{krit}$$

Strömung wird Turbulent

# Kapitel 9

## Gravitation

The year is 787!  
A.D.?  
- Monty Python

### Gravitationskraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_{g,2} &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_r \\ \vec{F}_g &= \vec{E}_g \cdot m = \vec{g} m\end{aligned}$$

### Gravitationspotential

$$\begin{aligned}\phi &= -G \frac{M}{r} \\ \vec{E}_g &= \text{grad} \phi\end{aligned}$$

### Arbeit

$$\begin{aligned}W_{12} &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ d\vec{r} \\ &= GmM \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)\end{aligned}$$

### Planetenbahnen

$$\left( \frac{a}{a_E} \right)^3 = \left( \frac{T}{T_E} \right)^2$$

# Kapitel 10

## Elektrostatik

Don't interrupt me  
while I'm interrupting.  
- Winston S. Churchill

### Ladung

$$\begin{aligned}Q &= n \cdot e_0 \\&= CU \\&= \int i \, dt\end{aligned}$$

### Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \vec{r}_i$$

### COULOMB Gesetz

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_1 \vec{r}_2 \\&= \vec{E} Q \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \\&= -\text{grad} \varphi \\&= -\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right)\end{aligned}$$

### Spannung

$$\begin{aligned}U_{AB} &= \frac{W_{AB}}{Q} \\&= \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \\&= \oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = 0 \\&= \varphi_A - \varphi_B \\&= - \int_{\infty}^A \vec{E} \circ d\vec{s} \\&\quad - \left( - \int_{\infty}^B \vec{E} \circ d\vec{s} \right)\end{aligned}$$

**El- / Verschiebungsfluß**

$$\psi = \int_A \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$\psi = \oint_A \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$$

**Flußdichte**

$$\vec{D} = \frac{dQ}{dA} \vec{e}_A$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$Q = \oint_A D dA$$

**Kapazität**

$$Q = CU$$

**OHMsches Gesetz**

$$\begin{aligned} I &= \oint_A \vec{j} \circ d\vec{A} \\ &= \oint_A \kappa \vec{E} \circ d\vec{A} \\ &= \underbrace{\kappa E \cdot 4\pi r^2}_{\text{Kugel}} \end{aligned}$$

**Arbeit im elektrischem Feld**

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{D}$$

$$W = \int_V w dV$$

$$= -Q \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_U Q dU$$

$$= \int_U CU dU$$

$$= \frac{1}{2} CU^2$$



# Kapitel 11

## Thermodynamik

### 11.1 Wärmedehnung

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \rho_0(1 - \beta(T - T_0)) \\ V(T) &= V_0(1 + \gamma(T - T_0)) \\ l(T) &= l_0(1 + \alpha(T - T_0)) \\ \gamma &\approx 3 \cdot \alpha \\ \gamma &\approx \beta\end{aligned}$$

### 11.2 Wärme

$$\begin{aligned}\Delta Q &= c \cdot m(T - T_0) \\ \Delta Q &= C(T - T_0) \\ \Delta Q &= \int_{T_0}^T c \cdot m \, dT \\ \Delta Q &= c_{mol} \cdot n(T - T_0)\end{aligned}$$

### 11.3 Mischtemperatur

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^n T_i m_i c_i}{\sum_{i=1}^n m_i c_i}$$

$\dot{Q}$  Ist durch einen mehrschichtiges  
stationäres System Konstant

### 11.4 Wärmeleitung

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \frac{dQ}{dt} = \Phi = P \\ \vec{q} &= \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \vec{e}_A \\ \vec{q} &= -\lambda \operatorname{grad} T \\ \vec{q} &= \frac{\lambda}{s} (T_A - T_B) \cdot \vec{e}_s \\ \dot{q} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i}} \cdot (T_A - T_B)\end{aligned}$$

### 11.5 Wärmekonvektion

$$\begin{aligned}\dot{q} &= \alpha (T_A - T_B) \\ \dot{q} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}} \cdot (T_A - T_B)\end{aligned}$$

## 11.6 Wärmewiderstand

$$R_{th} = \frac{T_A - T_B}{\dot{q} \cdot A} = \frac{s}{\lambda A} = \frac{1}{\alpha A} = \sum_{i=1}^n R_i$$

### 11.6.1 Wärmeübertragung

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n R_i}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n R_i} \cdot (T_A - T_B)$$

$$\dot{q} = k \cdot (T_A - T_B)$$

### 11.6.2 Wärmestrahlung

$$\alpha = \varepsilon$$

$$1 = \alpha + \tau + \vartheta$$

$$\dot{Q} = \varepsilon A \sigma T^4$$

$$\dot{Q}_{AB} = C_{AB} A_A (T_A^4 - T_B^4)$$

$$C_{AB} = \varepsilon_{AB} \sigma = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_A} + \frac{1}{\sigma_B} - \frac{1}{\sigma}} \quad \text{Parallel}$$

$$C_{AB} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{A_A}{A_B} \left( \frac{1}{\varepsilon_B} - 1 \right)} \quad A_A \text{ von } A_B \text{ umschlossen}$$

$$C_{AB} \approx \varepsilon_A \sigma \quad \text{parallel } (A_A \ll A_B)$$

### 11.6.3 Zustandsänderung des idealen Gases

Teilchen stehen nicht in Wechselwirkung, besitzen kein Volumen und es kommt zu keinem Phasenübergang

**Energie**

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

Nur Isobar:

$$dH = c_p m dT = U + p dV$$

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

**Isotherm**

$$pV = \text{const}$$

$$T = \text{const}$$

$$U_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$Q_{12} = -W_{12}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1} + mc_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

**Isobar**

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$

$$p = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_p (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = -p (V_2 - V_1)$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1}$$

**Zustandsgleichung**

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

$$pV = NkT = mR_s T = nRT$$

$$R_s = \frac{nR}{m}$$

$$R_s = c_p - c_v$$

**Isochor**

$$\frac{p}{T} = \text{const}$$

$$V = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_v (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12}$$

$$S_{12} = mc_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

**Adiabat**

$$pV^\kappa = \text{const}$$

$$Q = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$Q_{12} = 0$$

$$W_{12} = mc_v (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left( \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} - 1 \right)$$

$$U_{12} = W_{12}$$

$$S_{12} = 0;$$

**Kreisprozess**

$$\oint dU = 0$$

$$\oint dU = \oint dQ + \oint dW$$

$$\text{Reversibel: } \oint dS = 0$$

$$\text{Irreversibel } \oint dS > 0$$

**Carnot-Prozeß**

$$\eta_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{Q_{zu} - Q_{AB}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{T_h - T_n}{T_n}$$

# Kapitel 12

## Optik

The path taken between two points by a ray of light is the path that can be traversed in the least time.  
- Pierre de Fermat

### 12.1 Brechung

### 12.2 Totalreflexion

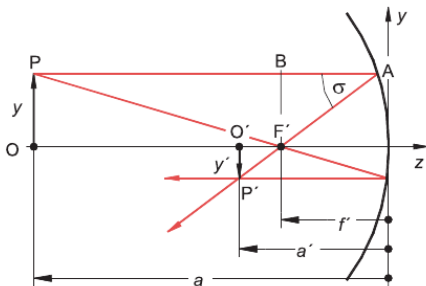
$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\varepsilon_2 = \arcsin \frac{\sin \varepsilon_1 \cdot n_1}{n_2}$$

$$\sin \varepsilon_g = \frac{n_2}{n_1}$$

Totalreflexion tritt nur auf, wenn der Lichtstrahl von einem dichteren in ein optisch dünneren Stoff übergeht.

### 12.3 Hohlspiegel



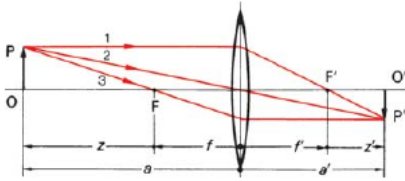
$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$f' = \frac{r}{2}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

$$\beta' = -\frac{a'}{a}$$

# 12.4 Linse



$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{a}$$

$$f = \frac{a \cdot a'}{a + a'} = -f'$$

$$a' = \frac{a f'}{a + f'}$$

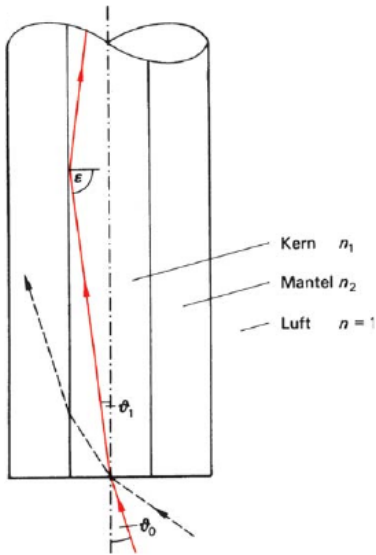
$$\beta' = \frac{f'}{a + f'}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

$$D' = \frac{1}{f'} = (n_L - 1) \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

|                                       |                        |                             |                 |                        |                             |                 |
|---------------------------------------|------------------------|-----------------------------|-----------------|------------------------|-----------------------------|-----------------|
| Linsenform                            |                        |                             |                 |                        |                             |                 |
| Bezeichnung                           | bi-konvex              | plan-konvex                 | konkav-konvex   | bi-konkav              | plan-konkav                 | konvex-konkav   |
| Radien                                | $r_1 > 0$<br>$r_2 < 0$ | $r_1 = \infty$<br>$r_2 < 0$ | $r_1 < r_2 < 0$ | $r_1 < 0$<br>$r_2 > 0$ | $r_1 = \infty$<br>$r_2 > 0$ | $r_2 < r_1 < 0$ |
| Brennweite im optisch dünneren Medium | $f' > 0$               | $f' > 0$                    | $f' > 0$        | $f' < 0$               | $f' < 0$                    | $f' < 0$        |

## 12.5 Lichtwellenleiter



### Totalreflexion (Grenzwinkel)

$$n_1 \sin(90^\circ - \vartheta_1) = n_2 \implies \cos \vartheta_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

### numerische Apertur

$$\begin{aligned} A_{WL} &= n_0 \sin \vartheta_0 = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_1} \\ &= n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \\ &= \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \\ &= \sqrt{n_{Kern}^2 - n_{Mantel}^2} \end{aligned}$$

# Teil III

# Elektrotechnik



# Kapitel 13

## Gleichstromtechnik

### 13.1 Grundgrößen

#### Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[Q] = 1C = 1As$$

$$Q = n \cdot e$$

#### Strom

#### Stromdichte

$$[I] = 1A$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$[J] = 1 \frac{A}{mm^2}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

#### Potential

#### Spannung

$$[\varphi] = 1V = 1 \frac{Nm}{As} = 1 \frac{kgm^2}{As^3}$$

$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

$$[U] = 1V$$

$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

**Widerstand und Leitwert**

$$[R] = 1\Omega = 1\frac{V}{A}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}$$

$$[G] = 1S = 1\frac{A}{V}$$

$$G = \frac{I}{U}$$

$$= \frac{1}{R}$$

$$= \kappa \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l}$$

**Temperaturabhängigkeit**

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\right)$$

**Leistung**

$$[P] = 1W = 1VA$$

$$P = u(t) \cdot i(t)$$

**Leistung im Mittel**

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

**13.2 Lineare Quellen****Spannungsquelle**

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

**Stromquelle**

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$

$$U_l = I_q \cdot R_i$$

**13.3 Kirchhoffsche Gesetze****Knotenpunktsatz**

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

**Maschensatz**

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

# Kapitel 14

## Wechselstromtechnik

No rule is so general,  
which admits not some exception.  
- Robert Burton

### Periodische zeitabhängige Größen

Allgemein  $x(t) \rightarrow$  speziell  $u(t); i(t); q(t); \dots$   
es gilt  $x(t) = x(t + n \cdot T); (n \in \mathbb{N}^*)$

### Wechselgrößen

Allgemein  $x_{\sim}(t)$ ; periodisch sich ändernde Größe, deren Gleichanteil bzw. zeitlich linearer Mittelwert gleich Null ist.

Nachweis:

$$\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x_{\sim}(t) dt = 0; (n \in \mathbb{N}^*); t_1 \text{ beliebiger Zeitwert}$$

### Mischgrößen

Sind periodisch, Ihr Gleichanteil  $\bar{x}$  bzw. zeitlich linearer Mittelwert jedoch ist ungleich Null.

$$\begin{aligned} \text{Mischgröße} &= \text{Wechselgröße} + \text{Gleichanteil} \\ x(t) &= x_{\sim}(t) + \bar{x} \\ &= \text{gleichanteilbehaftete Wechselgröße} \end{aligned}$$

## 14.1 Anteile und Formfaktoren

Gleichanteil

Formfaktor

$$\bar{x} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x(t) dt$$

$$F = \frac{x_{eff}}{|\bar{x}|} \quad x_{eff} = |\bar{x}| \cdot F$$

Gleichrichtwert

$$|\bar{x}| = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} |x|(t) dt$$

crest - Faktor

Effektivwert

$$x_{eff} = X = \sqrt{\frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x^2(t) dt}$$

$$\sigma = \frac{\hat{x}}{x_{eff}}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \rightarrow t_1 \text{ beliebiger Zeitwert} \rightarrow [|\bar{x}|] = [x(t)]$$

## 14.2 Leistung und Leistungsfaktoren

14.2.1 Wirkleistung

14.2.2 Mittlere Leistung

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt \\ &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt \end{aligned}$$

$$\bar{p}(t) = P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt$$

14.2.3 Scheinleistung

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I$$

14.2.4 Leistungsfaktor

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{P}{S} \\ &= \frac{\frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} p(t) dt}{u_{eff} \cdot i_{eff}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u^2(t) dt} \cdot \sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} i^2(t) dt}}$$

## 14.3 Sinusförmige Größen

### 14.3.1 Sinusschwingung

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{x} \sin(2\pi f + \varphi_x) \\x(\omega t) &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)\end{aligned}$$

- $\hat{x}$  : Amplitude
- $\varphi_x$  : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$  : Linksverschiebung der Kurve

### 14.3.2 Kosinusschwingung

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{x} \cos(2\pi f + \varphi_x) \\x(\omega t) &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)\end{aligned}$$

- $\hat{x}$  : Amplitude
- $\varphi_x$  : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$  : Rechtsverschiebung der Kurve

### 14.3.3 Nullphasenzeit

$$t_x = -\frac{\varphi_x}{\omega} = -\varphi_x \cdot \frac{T}{2\pi}$$

### 14.3.4 Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz

$$\text{mit: } a = \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) \wedge b = \hat{b} \sin(\omega t + \beta)$$

Resultierende Funktion:

$$\begin{aligned}x &= a + b \\&= \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) + \hat{b} \sin(\omega t + \beta) \\&= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

- $\hat{x}$  : resultierende Amplitude
- $\varphi$  : Nullphasenwinkel

$$\text{Wobei: } \hat{x} = +\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\alpha - \beta)}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{a} \sin \alpha + \hat{b} \sin \beta}{\hat{a} \cos \alpha + \hat{b} \cos \beta}$$

**Vierquadrantenarkustangens**

$$\varphi = \arctan \frac{ZP}{NP}$$

|                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| 2. Quadrant $ZP > 0, NP < 0$ | 1. Quadrant $ZP > 0, NP > 0$ |
| 3. Quadrant $ZP < 0, NP < 0$ | 4. Quadrant $ZP < 0, NP > 0$ |

**Der rotierende Zeiger als rotierender Vektor**

$$\begin{aligned} \text{Allgemein gilt: } \sin(\omega t + \varphi_x) &= \frac{GK}{HT} = \frac{b}{\hat{x}} \\ \cos(\omega t + \varphi_x) &= \frac{AK}{HT} = \frac{a}{\hat{x}} \\ b &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \\ a &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \end{aligned}$$

$$\text{Als Einheitsvektor: } \vec{x} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$$

**Zeigerspitzenendpunkt**

$\underline{x}$  = Zeigerspitzenendpunkt

$$\underline{x} = \underbrace{\hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)}_{Re \rightarrow Abszisse} + j \cdot \underbrace{\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)}_{Im \rightarrow Ordinate}$$

$$\underline{x} = \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$

$\underline{x}_{eff}$  = rotierender Effektivwertzeiger

$$\underline{x}_{eff} = \hat{x}_{eff} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$

**14.3.5 Wechsel zwischen Sinus und Kosinus**

$$\hat{x}(t) \cos(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t) \sin\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{x}(t) \sin(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t) \cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right)$$



|   |  |  |
|---|--|--|
| Zeitbereich   |  | komplexer Zeitbereich  |
| $x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$                  | $\xrightarrow{\text{Hintransformation1}}$  | $\underline{x} = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) + j\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$ |
| $x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)$                  | $\xrightarrow{\text{Hintransformation2}}$  | $\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$                                      |
|   |  | Berechnungen im komplexen Bereich  |
| $y = \text{Im}\{y\} = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$ | $\xleftarrow{\text{Ruecktransformation1}}$ | $\underline{y} = \hat{y} e^{j(\omega t + \varphi_y)}$                                      |
| $y = \text{Re}\{y\} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y)$ | $\xleftarrow{\text{Ruecktransformation2}}$ | $\underline{y} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y) + j\hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$ |

HT1 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen reellen Kosinusters mit dem ursprünglichen Sinusterm als Imaginärteil

HT2 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen imaginären Sinusters mit dem ursprünglichen Kosinusterm als Realteil

RT1 entnahme des Imaginärteils

RT2 entnahme des Realteils

Merke:  $\frac{1}{j} = -j \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

### 14.3.6 Differentiation und Integration von Sinusgrößen

| Zeitbereich  | Zeigerbereich   |
|--|---|
| $x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$ | $\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$           |
| $x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$ |   |
| $\xrightarrow{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{HT_{1/2}}}$   | $\frac{d^n \underline{x}(t)}{dt^n} = (j\omega)^n \underline{x}$ |

| Zeitbereich  | Zeigerbereich   |
|--|---|
| $x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$   | $\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$                       |
| $x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$   |   |
| $\xrightarrow{\int \dots \int x(t) dt^n \xrightarrow{HT_{1/2}}}$ | $\int \dots \int \underline{x}(t) dt = \frac{1}{(j\omega)^n} \underline{x}$ |

### 14.3.7 R, L und C im kompl. Zeigerbereich

|                     |   |
|---------------------|---|
| Ohmscher Widerstand | $\hat{U} = R \hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$               |
| Induktivität        | $\hat{U} = \omega L \hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega L}$ |
| Kapazität           | $\hat{U} = \frac{\hat{I}}{\omega C} \quad \hat{I} = \omega C \hat{U}$ |

### 14.3.8 Widerstands und Leitwertoperator

| $\underline{Z}$ komplexer Widerstand / Impedanz  | $\underline{Y}$ komplexer Leitwert / Admitanz  |
|--|--|
| $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$ | $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \cdot e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$ |
| $ \underline{Z}  = Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I}$  | $ \underline{Y}  = Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U}$  |
| mit $\varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z$  | mit $\varphi_i - \varphi_u = -\varphi_Z = \gamma_Y$  |

Widerstand

$$\underline{Z} = R \wedge \underline{Y} = 1/R$$

Kapazität

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Induktivität

$$\underline{Z} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

### 14.3.9 Resultierende Operatoren

Reihenschaltung

Parallelschaltung

$$\underline{Z}_{ges} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i$$

$$\underline{Y}_{ges} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i$$

Spannungsteiler

Stromteiler

$$\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}$$

$$\frac{\underline{i}_1}{\underline{i}_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}$$

### 14.3.10 Anteile am komplexen Widerstand (Impedanz)

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = R + jX = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi}$$

mit  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  Phasenwinkel;  $R$  = Wirkwiderstand;

$X$  = Blindwiderstand;  $|\underline{Z}|$  = Scheinwiderstand

$$R = R \quad L = \frac{X}{\omega} \text{ mit } X > 0 \quad C = -\frac{1}{\omega X} \text{ mit } X < 0$$

### 14.3.11 Anteile am komplexen Leiwert (Admitanz)

$$\underline{Y} = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = G + jB = |\underline{Y}| \cdot e^{j\gamma}$$

mit  $\gamma = \varphi_i - \varphi_u$  Phasenwinkel;  $G$  = Wirkleitwert;

$B$  = Blindleitwert;  $|\underline{Y}|$  = Scheinleitwert

$$R = \frac{1}{G} \quad C = \frac{B}{\omega} \text{ mit } B > 0 \quad L = -\frac{1}{\omega B} \text{ mit } B < 0$$

### 14.3.12 komplexer Widerstand / komplexer Leitwert

$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{X}{R}} \\
&= \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \underbrace{\frac{R}{R^2 + X^2}}_G \underbrace{-j \frac{X}{R^2 + X^2}}_B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z} = R + jX &= \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{Y} \cdot e^{-j\gamma} \\
&= \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{B}{G}} \\
&= \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} = \underbrace{\frac{G}{G^2 + B^2}}_R \underbrace{-j \frac{B}{G^2 + B^2}}_X
\end{aligned}$$

### 14.3.13 Momentanleistung / Augenblicksleistung

$$\begin{aligned}
P(t) &= \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{zeitlich konstant}} - \underbrace{UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{mit doppelter Frequenz schwingend}} \\
&= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi)
\end{aligned}$$

$$\text{mit } \varphi = \varphi_u - \varphi_i \rightarrow \varphi_i = \varphi_u - \varphi$$

### 14.3.14 Blindleistung

*Ermittlung des Blindleistungsanteils aus der Momentanleistung*

$$\begin{aligned}
P(t) &= \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{Wirkleistung}} - \underbrace{UI \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Blindleistung}} \\
P_{ges}(t) &= P_{wirk}(t) + P_{blind}(t)
\end{aligned}$$

$$u(t) \cdot i(t) \begin{cases} > 0 \text{ Energie zum Verbraucher} \\ < 0 \text{ Energie zum Erzeuger} \end{cases}$$

### 14.3.15 Mittlere Leistung / Wirkleistung

$$P = \overline{P}(t) = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1 + n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt = UI \cos \varphi$$

### 14.3.16 Definition von Blind- und Scheinleistung

$$Q = UI \sin \varphi \quad [Q] = \text{var} \quad \text{mit} \begin{cases} Q > 0 \text{ induktive Blindleistung } Q_{ind} \\ Q < 0 \text{ kapazitive Blindleistung } Q_{kap} \end{cases}$$

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I \quad [S] = VA$$

### 14.3.17 Beziehungen zwischen Wirk- Blind- und Scheinleistung

|  |
|--|
| $P = UI \cdot \cos \varphi \quad Q = UI \cdot \sin \varphi \quad S = UI$ |
|--|

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{S^2 - Q^2} \\ &= S \cdot \cos \varphi \\ &= \frac{Q}{\tan \varphi} \end{aligned}$$

$$Q = \begin{cases} > 0 \rightarrow Q_{ind} = \sqrt{S^2 - P^2} \\ < 0 \rightarrow Q_{kap} = -\sqrt{S^2 - P^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ &= \frac{Q}{\sin \varphi} \\ &= \frac{P}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi = P \cdot \tan \varphi$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{Q}{P} \\ &= \arcsin \frac{Q}{S} \\ &= \arccos \frac{P}{S} \end{aligned}$$

$$P^2 + Q^2 = U^2 \cdot I^2 = S^2$$

### 14.3.18 Die komplexe Leistung

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* \\ &= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= S \cdot e^{j\varphi} \end{aligned}$$

\* - konjugiert Komplex

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{S \cdot \cos \varphi}_P + j \cdot \underbrace{S \cdot \sin \varphi}_Q \\
&= P + jQ \qquad [S] = VA \quad [P] = W \quad [Q] = var
\end{aligned}$$

**Zusammenhang mit dem komplexen Leitwert / Widerstand**

$$\underline{S} = I^2 \cdot \underline{Z} \qquad P = I^2 \cdot R = U^2 \cdot G \qquad Q = I^2 \cdot X = -U^2 \cdot B$$

# Kapitel 15

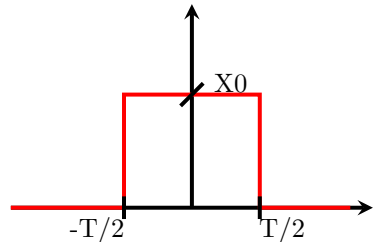
## Signal- und Systemtheorie

### 15.1 Einfache Impulse

#### 15.1.1 Rechteckimpuls/ -funktion $rect_T(t)$

$$x(t) = X_0 \cdot rect_T(t)$$

- T: Rechteckimpulsbreite  $> 0$
- an den Sprungstellen nimmt der Impuls die Hälfte des max. Wertes an

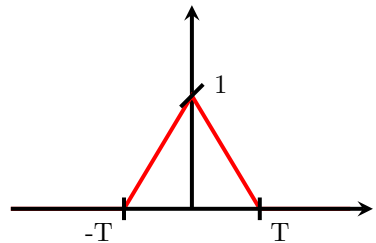


#### 15.1.2 Dreiecksimpuls/ -funktion $\Lambda_T(t)$

$$x(t) = X_0 \cdot \Lambda_T(t)$$

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - |t/T| & \text{für } |t| < T \\ 0 & \text{für } |t| > T \end{cases}$$

- T: Dauer einer ansteigenden / abfallenden Flanke

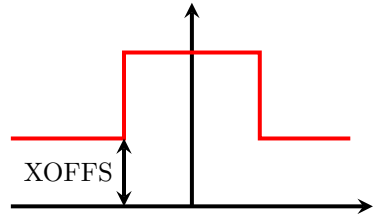


## 15.2 Elementare Operationen auf zeitliche Verläufe

### 15.2.1 Beeinflußung der Ordinate

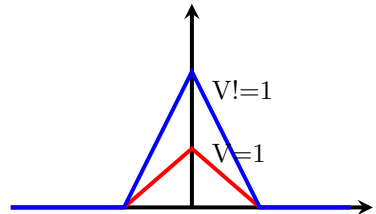
Signaloffset  $X_{OFFS}$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t) + X_{OFFS}$$



Skalierungsfaktor  $V$  ( $V \neq 0$ )

$$x_{neu}(t) = V \cdot x_{alt}(t)$$

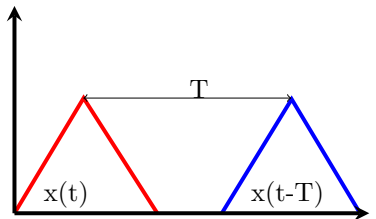


### 15.2.2 Beeinflußung der Abszisse

zeitliche Verschiebung  $t_0$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t - t_0) \text{ mit } t_0 = \text{const.}$$

- Zusammenfassung der Offsetbehafteten Zeit  $t - t_0$  zu einer neuen Zeitbasis  $\tau = t - t_0$
- $x_{neu}(\tau + t_0) = x_{alt}(\tau)$   
 $t > 0$  Verschiebung nach rechts  
 $t < 0$  Verschiebung nach links

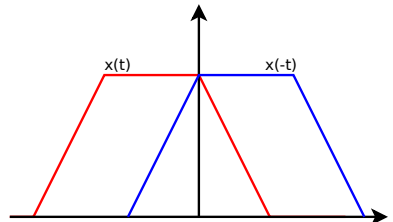


Negation des Arguments  $t$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(-t) \text{ mit } \tau = -t$$

$$x_{neu}(-\tau) = x_{alt}(\tau)$$

- gleiche Funktionswerte mit negierter Zeitbasis, somit Spiegelung an der Ordinate





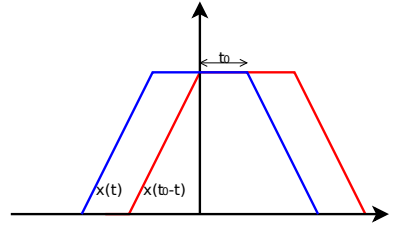
### Nagation des Arguments $t$ sowie eine Verschiebung um $t_0$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t_0 - t)$$

$$\text{mit } t_0 = \text{const.}$$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(\tau + 1/2t_0)$$

$$x_{neu}(1/2t_0 - \tau) = x_{alt}(\tau + 1/2t_0)$$



- neue Zeitbasis  $\tau + 1/2t_0$
- gleiche Funktionswerte, gespiegelt an der Senkrechten von  $1/2t_0$

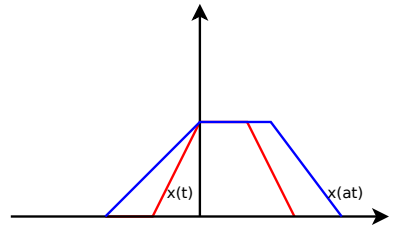
### Skalierungsfaktor $a \neq 0$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(a \cdot t)$$

$$\text{mit } a = \text{const.}$$

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(\tau)$$

$$x_{neu}(\tau/a) = x_{alt}(\tau)$$

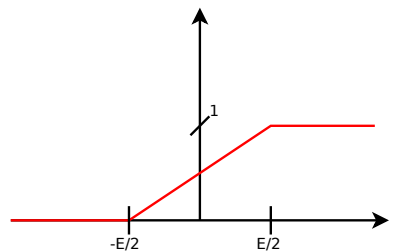


- neue Zeitbasis  $\tau = a \cdot t$
- gleiche Funktionswerte, wenn die Zeitbasis durch  $a$  geteilt wird
- $a > 1$  Funktion wird gestaucht  
 $0 < a < 1$  Funktion wird gestreckt

## 15.2.3 Einheitssprungfunktion / Deltaimpuls

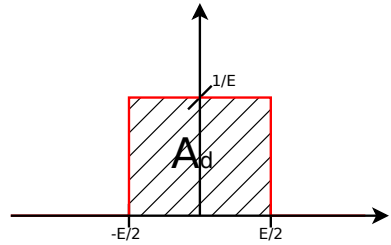
### angenäherte Einheitssprungfunktion $\tilde{\sigma}(t, \epsilon)$

- endlicher Geradenanstieg
- Endwert von 1



**Einheitsimpuls / Deltaimpuls  $\tilde{\delta}(t, \epsilon)$** 

- Fläche des Impulses ist 1
- Impulshöhe und Breite variabel

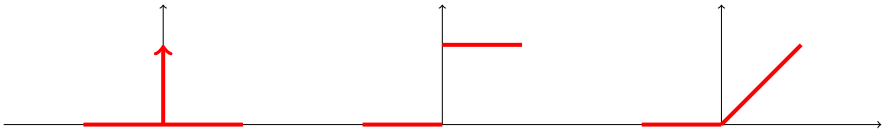


Mathematischer Zusammenhang:

$$\tilde{\delta}(t, \epsilon) = \frac{d\tilde{\sigma}(t, \epsilon)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\sigma}(t, \epsilon) = \int_{-\infty}^t \tilde{\delta}(t, \epsilon) dt$$

Beim Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  ergibt die Einheitssprungfunktion  $\sigma(t)$  bzw. deren Ableitung den Deltaimpuls  $\delta(t)$ .

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \begin{cases} +\infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

**15.2.4 Zusammenhang zwischen Deltaimpuls, Einheitssprungfunktion und Einheitsanstiegsfunktion**

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

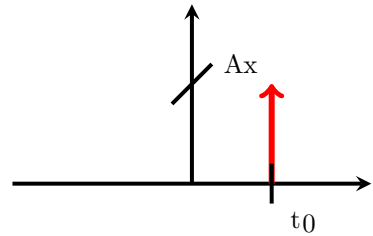
$$\alpha(t) = \begin{cases} t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t \sigma(t) dt = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

### 15.2.5 zeitliche Verschiebung und Wichtung

#### Deltaimpuls

$$x(t) = A_x \cdot \delta(t - t_0)$$

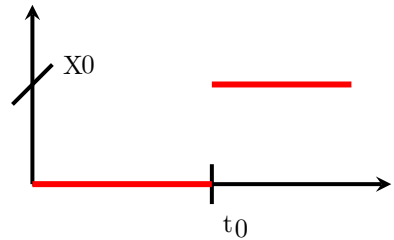
$$[x(t)] = [A_x] \cdot [\delta(t)]$$



#### Einheitssprung

$$x(t) = X_0 \cdot \sigma(t - t_0)$$

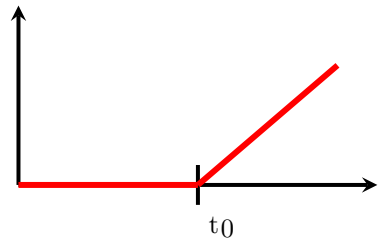
$$[x(t)] = [X_0]$$



#### Einheitsanstiegsfunktion

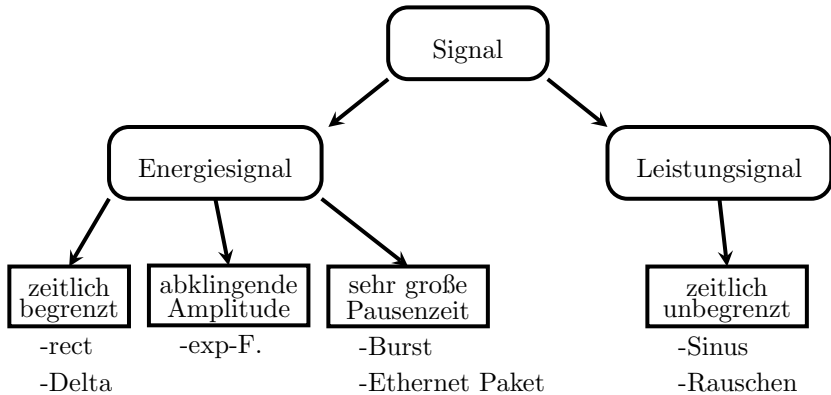
$$x(t) = m \cdot \alpha(t - t_0)$$

$$[x(t)] = [m] \cdot [\alpha(t)]$$



## 15.3 Signale

**Definition:** Ein Signal ist eine zeitlich und / oder örtlich veränderliche Größe (physikalisch). Die Veränderung dieser physikalischen Größe, sagt nichts über Ihren Informationsgehalt aus.



# Teil IV

# Messtechnik

# Kapitel 16

## Grundlagen

### 16.1 Begriffe

- Messwert  $x_i$ : gemessener Wert der Messgröße
- Wahrer Wert  $x_w$ : existierender Wert der Messgröße
- Richtiger Wert  $x_r$ : bekannter Wert mit vernachlässigbarer Differenz zum wahren Wert
- Messabweichung  $e$ : Differenz zwischen gemessenem und wahren Wert
- Systematische Messabweichung  $e_{sys}$ : Bekannte systematische Messabweichung (korrigierbar)
- Messunsicherheit  $u$ : Intervall um den Messwert in dem der wahre Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu finden ist

### 16.2 Messabweichung $e$

$$e = x - x_w$$

#### 16.2.1 relative Messabweichung

$$e_{rel} = \frac{e}{x_w} = \frac{x - x_w}{x_w} = \frac{x}{x_w} - 1$$

**Korrekturfaktor  $K$** **Korrigierter Messwert  $x_{\text{kor}}$** 

Bei bekannter systematischer Messabweichung.

$$K = -e_{\text{sys}}$$

$$x_{\text{kor}} = x + K$$

**16.2.2 Messabweichung  $e_y$** 

$$e_y = y - y_w = f(x_1 + e_{x_1}, x_2 + e_{x_2}, \dots, x_n + e_{x_n})$$

$$e_y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} e_{x_i}$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

**16.2.3 Fortpflanzung systematischer Messabweichungen****Addition / Subtraktion**

$$y = x_1 \pm x_2$$

 $\longrightarrow$ 

$$e_y = e_{x_1} \pm e_{x_2}$$

**Multiplikation**

$$y = x_1 \cdot x_2$$

 $\longrightarrow$ 

$$e_y = x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}$$

$$e_{\text{rel}} = \frac{e_y}{y} = \frac{x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}}{x_1 \cdot x_2} = e_{\text{rel}, x_1} + e_{\text{rel}, x_2}$$

**Division**

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

 $\longrightarrow$ 

$$e_y = \frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2}$$

$$e_{\text{rel}} = \frac{e_y}{y} = \frac{\frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2}}{x_1 \cdot x_2^{-1}} = e_{\text{rel}, x_1} - e_{\text{rel}, x_2}$$

## 16.3 Statistische Größen

### Verteilungsfunktion

$$F(x) = \text{prob}(X \leq x)$$

Es gilt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

$$F(x \rightarrow \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

$$\text{prob}(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

### Verteilungsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

## 16.4 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

### 16.4.1 Erwartungswert $\mu$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

nur für stetige Zufallsgrößen

### 16.4.2 wahrer Wert $X$

$$x_w = \mu$$

nach Korrektur

der systematischen Abweichung

### 16.4.3 Varianz $\sigma^2$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx \end{aligned}$$

### 16.4.4 Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$



## 16.5 Verteilungsfunktionen

### 16.5.1 Normalverteilung

- Normal oder Gaußverteilung
- gute Näherung bei unbekannter statistischer Verteilung
- Werteverteilung:
  - 68,3% aller Werte liegen in  $\mu \pm \sigma$
  - 95,5% aller Werte liegen in  $\mu \pm 2\sigma$
  - 99,7% aller Werte liegen in  $\mu \pm 3\sigma$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

### 16.5.2 Gleichverteilung

- auch Rechteckverteilung
- alle vorkommenden Werte besitzen gleiche Wahrscheinlichkeit im Intervall

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \mu - a < x < \mu + a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}a^2$$

## 16.6 Stichprobe

### 16.6.1 Mittelwert $\bar{x}$

Der Mittelwert ist ein Schätzwert für den Erwartungswert  $\mu$  und damit für den wahren Wert.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

### 16.6.2 empirische Varianz $s^2$

Die empirische Varianz ist ein Schätzwert für die eigentliche Varianz der Messreihe.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

## 16.7 Vertrauensbereich für den Erwartungswert

Endlich große Stichprobe liefert zufällige Differenz zwischem Schätzwert  $\bar{x}$  und wahren Wert  $\mu = x_w$ .

$$\overline{x_g} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \overline{x_i} s_g^2 = \frac{1}{m} s_i^2 s_g = \frac{1}{\sqrt{m}} s_i$$

Vertrauensbereich:

$$\bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} s < \mu < \bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} \quad \text{mit} \quad t = t(n, \alpha)$$

### 16.7.1 Studentverteilung

Gibt den  $t$  Faktor für Normalverteilungen an

$\alpha$  Überschreitungswahrscheinlichkeit

$1 - \alpha$  Vertrauensniveau

| $1 - \alpha$           | 68,3% | 95%   | 99,73% |
|------------------------|-------|-------|--------|
| $n = 2$                | 1,84  | 12,70 | 235,80 |
| $n = 3$                | 1,32  | 4,30  | 19,21  |
| $n = 4$                | 1,20  | 3,18  | 9,22   |
| $n = 5$                | 1,15  | 2,78  | 6,62   |
| $n = 6$                | 1,11  | 2,57  | 5,51   |
| $n = 10$               | 1,06  | 2,26  | 4,09   |
| $n = 20$               | 1,03  | 2,09  | 3,45   |
| $n = 50$               | 1,01  | 2,01  | 3,16   |
| $n \rightarrow \infty$ | 1,00  | 2,00  | 3,00   |

## 16.8 Fortpflanzung zufälliger Abweichungen

Bedingung: Messergebnis setzt sich aus mehreren Messgrößen  $x_i$  zusammen

**Erwartungswerte**

**Varianzen**

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{n_i}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_{n_i} - \mu_n)^2$$

### Worst-Case-Kombination

Maximale Abweichung des Ergebnisses vom Mittelwert.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$|\Delta y| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

### statistische Kombination der Varianzen

Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz...

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)} \right)^2 \sigma_k^2$$

$$\sigma_y^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{\mu_1}^2 \sigma_1^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)_{\mu_2}^2 \sigma_2^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_{\mu_3}^2 \sigma_3^2 + \dots$$

... kann auf empirische Varianz übertragen werden.

$$y = f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n})$$

$$s_y^2 = \sum_{k=1}^n \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_{(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)} \right)^2 s_k^2$$

## 16.9 Fortpflanzung von Messunsicherheiten

Worst Case Abschätzung und Gaußsches Fortpflanzungsgesetz lassen sich auf die Messunsicherheiten übertragen.

Worst Case Abschätzung der Unsicherheit

Statistische Fortpflanzung der Unsicherheit

$$u_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| u_{x_i}$$

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2$$