Formelsammlung - ET/TI

Marc Ludwig

18. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Mathematik

Kapitel 1

Algebra

1.1 Rechenregeln fuer Potenzen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\text{(fuer a > 0)}\ a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

1.2 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

$$\boxed{\text{Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Potenzen und Wurzeln existieren.}}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

1.3 Potenzen und Logarithmen

Schreibweise: x= $\log_a(b)$ mit $a > 0, a \neq 1$ und $b > 0$.
Es gillt: $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.

1.3.1 Der natuerliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e mit $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828...$

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1; \text{ da } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\boxed{\text{Man beachte: } \mathrm{x}^a = e^{\ln(\mathrm{x})\cdot a}}$

1.3.2 Rechnen mit Logarithmen

Es gillt:	Weitere Beziehungen:
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n}\log_a(u)$
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$a^{\log_a(u)} = \log_a(a^u) = u$
$\log_a(u^p) = p \cdot \log_a(u)$	$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$

1.4 Der Binomische Lehrsatz

Die Potenzen eines Binoms a+b lassen sich nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln ($n \in \mathbb{N}^*$):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1\cdot b^{n-1} + b^n$$

Die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen Binominalkoeffizienten, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Einige Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = 0 \text{ fuer k > n} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

1.5 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

1.5.1 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \qquad \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \qquad 1 + \cot^2(\alpha) = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$$

1.5.2 Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

1.5.3 Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$$
$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos(\alpha))$$
$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+\cos(\alpha))$$
$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$$

1.5.4 Umformungen

Summe oder Differenz in ein Produkt

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Produkt in eine Summe oder Differenz

$$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$
$$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$
$$2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

1.6 Komplexe Zahlen

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man:

$$\boxed{\mathbb{C} = \{z | z = a + bj, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}}$$

a-Realteil b-Imaginaerteil j-imaginaere Einheit

kartesiche Form	trigonometrische Form	exponentialform
$z = a + bj$	$z = \lvert z\rvert (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$	$z = \lvert z\rvert \cdot e^{j\varphi}$
$z^* = (a + bj)^* = a - bj$	$z^* = \lvert z\rvert (\cos\varphi - j \cdot \sin\varphi)$	$z^* = \lvert z\rvert \cdot e^{-j\varphi}$

$|z|$ = Betrag von z
φ = Argument (Winkel) von z
z^* = Konjugiert komplexe Zahl

1.6.1 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

Polarform → Kartesiche Form

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = \underbrace{|z| \cdot \cos\varphi}_{a} + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin\varphi}_{b} = a + bj$$

Kartesische Form → Polarform

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

1.6.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

In der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [|z_1| (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [|z_2| (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)] \\ &= (|z_1| \, |z_2|) \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= \left(|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}\right) \cdot \left(|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}\right) = (|z_1| \, |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division

In kartesischer Form

In der Polarform

Kapitel 2

Lineare Algebra

Ein Test um das Skript auszuprobieren.

Teil II

Physik

Kapitel 3

Kinematik

3.1 Kinematik

3.1.1 Analogietabelle

Translation		Rotation
$\vec{s}$		$\vec{\varphi}$
$\downarrow \frac{ds}{dt}$		$\downarrow \frac{d\varphi}{dt}$
$\vec{v}$	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	$\vec{\omega}$
$\downarrow \frac{dv}{dt}$		$\downarrow \frac{d\omega}{dt}$
$\vec{a}$	$a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_{Tan}} - \underbrace{\omega^2 r}_{a_R}$	$\vec{\alpha}$
m		J
$\downarrow \frac{dm}{dt}$		$\downarrow \frac{dJ}{dt}$
$\vec{F}$		$\vec{M}$
$\downarrow \frac{dF}{dt}$		$\downarrow \frac{dM}{dt}$
$\vec{p}$		$\vec{L}$
$\frac{m}{2}v^2$	E_{kin}	$\frac{J}{2}\omega^2$

3.1.2 Translation

$$a(t) = a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

3.1.3 Rotation

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

Bahngroessen

$$a_t(t) = a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s}$$
$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$
$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Winkelgroessen

$$\vec{a_t} = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r \qquad \alpha \perp r$$
$$\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{a_t}$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot r \qquad \omega \perp r$$
$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$
$$s = \varphi \cdot r$$

Kreisfrequenz

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot n \\ &= 2 \cdot \pi \cdot f \end{aligned}$$

Radialbeschleunigung

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{v^2}{r} \\ &= v \cdot \omega \\ &= \omega^2 \cdot r \end{aligned}$$

Umdrehungen

$$\begin{aligned} N &= \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \\ &= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2 \end{aligned}$$

3.2 Dynamik

Geradlinig (Translation)

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \cdot \vec{a} \\ \vec{F}_{\mathrm{Tr}} &= -m \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Kraftstoss

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \\ \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 &= \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} \mathrm{d}p = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Arbeit

$$\begin{aligned} W &= -\int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F_{\mathrm{Tr}}} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\ &= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\vec{v} \circ \mathrm{d}\vec{v} = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_0^2\right) \end{aligned}$$

Hubarbeit

$$W_{\mathrm{hub}} = mgh$$

Kinetische Energie

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \dot{W}$$

3.2.1 Drehbewegung(Rotation)

Massentraegheitsmoment

$$J = \int r^2\,\mathrm{d}m$$

Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpuls

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= J \cdot \vec{\omega} \end{aligned}$$

Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e_\omega} \,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J\vec{\omega} \,\mathrm{d}\vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2} J \left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right) \end{aligned}$$

Leistung

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Zentripedalkraft

$$\begin{aligned} F_{zp} &= -m \cdot \omega^2 \cdot r \\ &= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e_r}}{r} \end{aligned}$$

3.2.2 Geneigte Ebene

Kräfte

$$\begin{aligned} \vec{F}_N &= \vec{F}_G \cos\alpha \\ \vec{F}_H &= \vec{F}_G \sin\alpha \end{aligned}$$

3.2.3 Reibung

Reibungskraft

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

Rollreibung

$$\begin{aligned} M &= f \cdot F_N \\ F_R &= \frac{f}{r} \cdot F_N \end{aligned}$$

3.2.4 Feder

HOOKsches Gesetz

$$\begin{aligned} F &= -kx \\ M &= D\varphi \end{aligned}$$

Federspannarbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \,\mathrm{d}x = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x_{\max}^2 - x_{\min}^2\right) \end{aligned}$$

3.2.5 Elastischer Stoss

$$\text{Energie vor den Stoß} = \text{Energie nach den Stoß}$$
$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

Impulserhaltung

$$\text{Impuls vor den Stoß} = \text{Impuls nach den Stoß}$$
$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Zentraler, Gerader, Elastischer Stoss

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2$$
$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$$

3.2.6 Unelastischer Stoss

Energieerhaltung

$$\text{Energie vor den Stoß} = \text{Energie nach den Stoß} + \text{Arbeit}$$
$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

Impulserhaltung

$$\text{Impuls vor den Stoß} = \text{Impuls nach den Stoß}$$
$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Total unelastischer Stoss

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v'^2 + \Delta W$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = \left(m_1+m_2\right)v'$$

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v2}{m_1+m_2}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2\left(m_1+m_2\right)}\left(v_1-v_2\right)^2$$

Drehimpulserhaltungssatz

$$\text{Drehinpuls zur Zeit } 1 = \text{Drehimpuls zur Zeit } 2$$
$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

Kopplung zweier Rotationskörper

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0\vec{\omega_0} + J_1\vec{\omega_1}}{J_1+J_2}$$
$$W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2\left(J_0+J_1\right)}\left(\omega_0-\omega_1\right)^2$$

3.2.7 Rotierendes Bezugssystem

Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z = F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$
$$= -m\vec{\omega}\times\vec{v}$$
$$F_Z = -m\frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}$$

3.3 Schwerpunkt

Schwerpunkt mehrerer Punktmassen

$$\vec{r}_{\mathrm{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Allgemein

$$\vec{r}_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

Schwerpunkt in Zylinderkoordinaten

$$r_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$$

$$\varphi_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$$

$$z_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$$

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z$$

Schwerpunkt in karthesischen Koordinaten

$$x_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x x\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$y_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x y\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$z_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x z\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

3.4 Trägheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$
$$J = \int_m r^2 \,\mathrm{d}m$$
$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z$$

STEINER'scher Satz

$$J_x = mr^2 + J_s$$

Traegheitsmoment Kugel

$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{2}{5} mr^2$$

Traegheitsmoment Zylinder

$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{1}{2} mr^2$$

Traegheitmoment Kreisring (Torus)

$$J_{\mathrm{Sp}} = mr^2$$

Traegheitsmoment Stab

$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{1}{12} ml^2$$

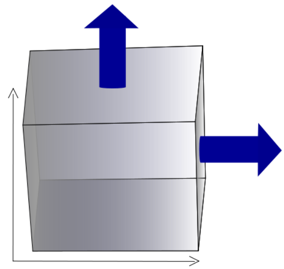
3.5 Elastizitaetslehre

Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_n}{\mathrm{d}A}$$

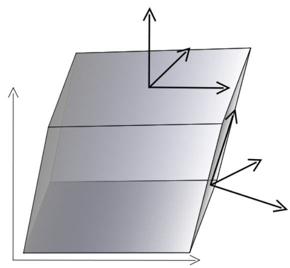
$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_t}{\mathrm{d}A}$$



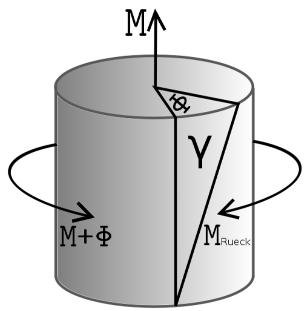
Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$



Drillung

$$\psi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \frac{W_t}{G \cdot J_p}\tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$



Flaechenmoment

$$J_p = \int r^2 \,\mathrm{d}A = \int_\varphi \int_r r^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi$$

Verformungsarbeit

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) \,\mathrm{d}\varepsilon$$

3.6 Schwingungen

Harmonische Schwingungen

$$u(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

3.6.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{k}{m}x \\
x(t) &= \hat{x}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{x}(t) &= -\hat{x}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{x}(t) &= -\hat{x}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}
\end{aligned}$$

Mathemetisches Pendel

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}
\end{aligned}$$

Physikalisches Pendel

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{lmg}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgl}}
\end{aligned}$$

Torsionsschwingung

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{D}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{D}}
\end{aligned}$$

Flüssigkeitspendel

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -\frac{2A\rho g}{m}y \\
\varphi(t) &= \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}
\end{aligned}$$

Elektrischer Schwingkreis

$$\begin{aligned}
0 &= L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \\
q(t) &= \hat{Q}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

3.6.2 Gedaempfte Schwingungen

Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

COULOMB Reibung

$$\begin{aligned}
F_R &= -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \\
0 &= m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N
\end{aligned}$$

Gleitreibung

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1)\cos(\omega t) - \hat{x}_1 \qquad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1)\cos(\omega t) + \hat{x}_1 \qquad \frac{T}{2} \leq t \leq T$$

$$\hat{x}_1 = \frac{\mu F_N}{k}$$

Viskosereibung

$$0 = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}t}$$

$$\delta = \frac{b}{2m}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

$$D = \frac{b}{2}\frac{1}{\sqrt{mk}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Lambda = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$$

$$\Lambda = \delta T$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$d = 2D$$

$$Q = \frac{1}{d}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi)$$

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

Kriechfall $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t}$$

Kapitel 4

Fluiddynamik

4.1 Fluidmechanik

4.1.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

$$p = \frac{\mathrm{d}F_N}{\mathrm{d}A}$$

Dynamischer Druck

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Schweredruck

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho V g}{A} \\ &= h\rho g \end{aligned}$$

Volumenstrom

$$\begin{aligned} \dot{V} &= vA \\ &= \iint_A \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{A} \\ &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \\ &= Q \end{aligned}$$

Massenstrom

$$\begin{aligned} \dot{m} &= jA \\ &= \iint_A \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A} \\ &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Auftrieb

$$\begin{aligned} \vec{F_A} &= -\rho_V \vec{g} V \\ &= -\frac{\rho_V}{\rho_M}\vec{F_G} \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{m}\big|_1 &= \dot{m}\big|_2 \\ \dot{V}\Big|_1 &= \dot{V}\Big|_2 & \rho_1 = \rho_2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 & \rho_1 = \rho_2 \end{aligned}$$

Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

Volumenausdehnungskoeffezient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

Barometrische Höhenformel

$$p = p_0 e^{-Ch}$$
$$C = \frac{\rho_0 g}{p_0}$$

Bernoulli Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const}$$

4.1.2 Laminare Reibung

Newtonsches Reibungsgesetz

$$F_R = \eta A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Laminare Strömung (Rohr)

$$v(r) = \frac{p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)$$
$$p = \frac{4\eta l}{R^2} v(0)$$
$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} p$$

Umströmung (Kugel)

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

Bernoulligleichung mit Reibung

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1$$
$$= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p$$

Reynoldszahl

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$
$$Re > Re_{krit}$$

Strömung wird Turbulent

Kapitel 5

Gravitation

Gravitationskraft

$$\vec{F}_{g,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{e}_r$$
$$\vec{F}_g = \vec{E}_g \cdot m = \vec{g}m$$

Gravitationspotential

$$\phi = -G\frac{M}{r}$$
$$\vec{E}_g = \mathrm{grad}\phi$$

Arbeit

$$\begin{aligned} W_{12} &= -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ \mathrm{d}\vec{r} \\ &= GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \end{aligned}$$

Planetenbahnen

$$\left(\frac{a}{a_E}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_E}\right)^2$$

Kapitel 6

Elektrostatik

Ladung

$$
\begin{aligned}
Q &= n \cdot e_0 \\
&= CU \\
&= \int i \,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

COULOMB Gesetz

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r_1}2 \\
&= \vec{E} Q \\
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \\
&= -\operatorname{grad}\varphi \\
&= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z \right)
\end{aligned}
$$

Punktladungen

$$
\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \vec{r}_i
$$

Spannung

$$
\begin{aligned}
U_{AB} =& \frac{W_{AB}}{Q} \\
=& \int_A^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\
=& \oint_s \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} = 0 \\
=& \varphi_A - \varphi_B \\
=& -\int_\infty^A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\
& - \left(-\int_\infty^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \right)
\end{aligned}
$$

El- / Verschiebungsfluß

$$\psi = \int_A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A}$$
$$\psi = \oint_A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Flußdichte

$$\vec{D} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}\vec{e}_A$$
$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$$
$$Q = \oint_A D\,\mathrm{d}A$$

Kapazität

$$Q = CU$$

OHMsches Gesetz

$$\begin{aligned} I &= \oint_A \vec{j} \circ \mathrm{d}\vec{A} \\ &= \oint_A \kappa\vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A} \\ &= \underbrace{\kappa E \cdot 4\pi r^2}_{\text{Kugel}} \end{aligned}$$

Arbeit im elektrischem Feld

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}\vec{E} \circ \vec{D} \\ W &= \int_V w\,\mathrm{d}V \\ &= -Q\int_A^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\ &= \int_U Q\,\mathrm{d}U \\ &= \int_U CU\,\mathrm{d}U \\ &= \frac{1}{2}CU^2 \end{aligned}$$

Teil III
Elektrotechnik

Kapitel 7

Gleichstromtechnik

7.1 Grundgrößen

Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[Q] = 1C = 1As$$
$$Q = n \cdot e$$

Strom

$$[I] = 1A$$
$$i(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Stromdichte

$$[J] = 1\frac{A}{mm^2}$$
$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

Potential

$$[\varphi] = 1V = 1\frac{Nm}{As} = 1\frac{kgm^2}{As^3}$$
$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

Spannung

$$[U] = 1V$$
$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

Widerstand und Leitwert

$$[R] = 1\Omega = 1\frac{V}{A}$$
$$R = \frac{U}{I}$$
$$= \rho\frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa}\frac{l}{A}$$

$$[G] = 1S = 1\frac{A}{V}$$
$$G = \frac{I}{U}$$
$$= \frac{1}{R}$$
$$= \kappa\frac{A}{l} = \frac{1}{\rho}\frac{A}{l}$$

Temperaturabhängigkeit

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha\left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right) + \beta\left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right)^2\right)$$

Leistung

$$[P] = 1W = 1VA$$
$$P = u(t) \cdot i(t)$$

Leistung im Mittel

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \cdot i(t)\,\mathrm{d}t$$

7.2 Lineare Quellen

Spannungsquelle

$$U = U_q - R_i \cdot I$$
$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$
$$U_l = I_q \cdot R_i$$

7.3 Kirchhoffsche Gesetze

Knotenpunktsatz

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

Kapitel 8

Wechselstromtechnik

8.1 Definitionen

8.1.1 periodische zeitabhängige Größen

Allgemein $x(t) \rightarrow$ speziell $u(t)\,; i(t)\,; q(t)\,; \ldots$
es gillt $x(t) = x(t + n \cdot T)\,; (n \in \mathbb{N}^*)$

8.1.2 Wechselgrößen

Allgemein $x_\sim(t)$; periodisch sich ändernde Größe, deren Gleichanteil bzw. zeitlich linearer Mittelwert gleich Null ist.

Nachweis:

$$\int\limits_{t1}^{t1+n\cdot T} x_\sim(t)\,dt = 0\ ;\ (n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ t1 \text{ beliebiger Zeitwert}$$

8.1.3 Mischgrößen

Sind periodisch, Ihr Gleichanteil $\overline{x}$ bzw. zeitlich linearer Mittelwert jedoch ist ungleich Null.

$$\begin{aligned} \text{Mischgröße} &= \text{Wechselgröße} + \text{Gleichanteil} \\ x(t) &= x_\sim(t) + \overline{x} \\ &= \text{gleichanteilbehaftete Wechselgröße} \end{aligned}$$

8.2 Anteile und Formfaktoren

8.2.1 Gleichanteil

$$\overline{x} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} x\,(t)\,dt$$

8.2.2 Gleichrichtwert

$$|\overline{x}| = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} |x|\,(t)\,dt$$

8.2.3 Effektivwert

$$x_{eff} = X = \sqrt{\frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} x^2\,(t)\,dt}$$

$n \in \mathbb{N}^* \rightarrow t1$ beliebiger Zeitwert $\rightarrow [|\overline{x}|] = [x\,(t)]$

8.2.4 Formfaktor

$$F = \frac{x_{eff}}{|\overline{x}|} \qquad x_{eff} = |\overline{x}| \cdot F$$

8.2.5 crest - Faktor

$$\sigma = \frac{\hat{x}}{x_{eff}}$$

8.3 Leistung und Leistungsfaktoren

8.3.1 Wirkleistung

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} P\,(t)\,dt \\ &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} u\,(t) \cdot i\,(t)\,dt \end{aligned}$$

8.3.2 Mittlere Leistung

$$\bar{p}\,(t) = P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} P\,(t)\,dt$$

8.3.3 Scheinleistung

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I$$

8.3.4 Leistungsfaktor

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{P}{S} \\ &= \frac{\frac{1}{n\cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} p\,(t)\,dt}{u_{eff} \cdot i_{eff}} \\ &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} u\,(t) \cdot i\,(t)\,dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} u^2\,(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} i^2\,(t)\,dt}} \end{aligned}$$

8.4 Sinusförmige Größen

8.4.1 Sinusschwingung

$$x(t) = \hat{x}\sin(2\pi f + \varphi_x)$$
$$x(\omega t) = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi_x)$$

- $\hat{x}$: Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Linksverschiebung der Kurve

8.4.2 Kosinusschwingung

$$x(t) = \hat{x}\cos(2\pi f + \varphi_x)$$
$$x(\omega t) = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi_x)$$

- $\hat{x}$: Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Rechtssverschiebung der Kurve

8.4.3 Nullphasenzeit

$$t_x = -\frac{\varphi_x}{\omega} = -\varphi_x \cdot \frac{T}{2\pi}$$

8.4.4 Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz

mit: $a = \hat{a}\sin(\omega t + \alpha) \wedge b = \hat{b}\sin(\omega t + \beta)$

Resultierende Funktion:

$$\begin{aligned} x &= a + b \\ &= \hat{a}\sin(\omega t + \alpha) + \hat{b}\sin(\omega t + \beta) \\ &= \hat{x}\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

- $\hat{x}$: resultierende Amplitude
- φ : Nullphasenwinkel

Wobei: $\hat{x} = +\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\alpha - \beta)}$

$$\varphi = \arctan\frac{\hat{a}\sin\alpha + \hat{b}\sin\beta}{\hat{a}\cos\alpha + \hat{b}\cos\beta}$$

Vierquadrantenarkustangens

$$\varphi = \arctan\frac{ZP}{NP}$$

2. Quadrant $ZP > 0, NP < 0$	1. Quadrant $ZP > 0, NP > 0$
3. Quadrant $ZP < 0, NP < 0$	4. Quadrant $ZP < 0, NP > 0$

Der rotierende Zeiger als rotierender Vektor

$$\begin{aligned}
\text{Allgemein gillt: } \sin(\omega t + \varphi_x) &= \frac{GK}{HT} = \frac{b}{\hat{x}} \\
\cos(\omega t + \varphi_x) &= \frac{AK}{HT} = \frac{a}{\hat{x}} \\
b &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \\
a &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \\
\text{Als Einheitsvektor: } \vec{x} &= a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}
\end{aligned}$$

Zeigerspitzenendpunkt

$$\begin{aligned}
\underline{x} &= \text{ Zeigerspitzenendpunkt} \\
\underline{x} &= \underbrace{\hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)}_{Re \to Abszisse} + j \cdot \underbrace{\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)}_{Im \to Ordinate} \\
\underline{x} &= \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)} \\
\underline{x}_{eff} &= \text{ rotierender Effektivwertzeiger} \\
\underline{x}_{eff} &= \hat{x}_{eff} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}
\end{aligned}$$

8.4.5 Wechsel zwischen Sinus und Kosinus

$$\hat{x}(t) \cos(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t) \sin\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{x}(t) \sin(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t) \cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Zeitbereich		komplexer Zeitbereich
$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{Hintransformation1}$	$\underline{x} = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) + j\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$
$x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{Hintransformation2}$	$\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
		Berechnungen im komplexen Bereich
$y = Im\{y\} = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{Ruecktransformation1}$	$\underline{y} = \hat{y} e^{j(\omega t + \varphi_y)}$
$y = Re\{y\} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{Ruecktransformation2}$	$\underline{y} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y) + j\hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$

HT1 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen reellen Kosinusterms mit dem ursprünglichen Sinusterm als Imaginärteil

HT2 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen imaginären Sinusterms mit dem ursprünglichen Kosinusterm als Realteil

RT1 entnahme des Imaginärteils

RT2 entnahme des Realteils

8.4.6 Differentiation von Sinusgrößen

Merke:

- $\frac{1}{j} = -j$
- $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$