Formelsammlung - ET/TI

Marc Ludwig

13. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Mathematik

Kapitel 1

Algebra

1.1 Rechenregeln fuer Potenzen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \qquad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

(fuer a > 0) $a^b = e^{b \cdot \ln a}$

1.2 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Potenzen und Wurzeln existieren.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

1.3 Potenzen und Logarithmen

Schreibweise: x$= \log_a(b)$ mit $a > 0, a \neq 1$ und $b > 0$.
Es gillt: $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.

1.3.1 Der natuerliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e mit $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,71828...$

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad\qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1; \text{ da } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\boxed{\text{Man beachte: x}^a = e^{\ln(\text{x})\cdot a}}$

1.3.2 Rechnen mit Logarithmen

Es gillt:	Weitere Beziehungen:
$\log_a(u\cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n}\log_a(u)$
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$a^{\log_a(u)} = \log_a(a^u) = u$
$\log_a(u^p) = p\cdot\log_a(u)$	$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$

1.4 Der Binomische Lehrsatz

Die Potenzen eines Binoms a+b lassen sich nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln ($n \in \mathbb{N}^*$):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1\cdot b^{n-1} + b^n$$

Die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen Binominalkoeffizienten, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Einige Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = 0 \text{ fuer k > n} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

1.5 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

1.5.1 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \qquad \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \qquad 1 + \cot^2(\alpha) = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$$

1.5.2 Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

1.5.3 Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha) \\
\tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} \\
\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1-\cos(\alpha)) \\
\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1+\cos(\alpha)) \\
\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}
\end{aligned}$$

1.5.4 Umformungen

Summe oder Differenz in ein Produkt

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Produkt in eine Summe oder Differenz

$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$
$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$
$2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$

1.6 Komplexe Zahlen

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man:

$$\boxed{\mathbb{C} = \{z|z = a + bj, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}}$$

a-Realteil b-Imaginaerteil j-imaginaere Einheit

kartesiche Form	trigonometrische Form	exponentialform
$z = a + bj$	$z = \|z\| (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$	$z = \|z\| \cdot e^{j\varphi}$
$z^* = (a + bj)^* = a - bj$	$z^* = \|z\| (\cos\varphi - j \cdot \sin\varphi)$	$z^* = \|z\| \cdot e^{-j\varphi}$

$|z|$ = Betrag von z
φ = Argument (Winkel) von z
z^* = Konjugiert komplexe Zahl

1.6.1 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

Polarform → Kartesiche Form

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = \underbrace{|z| \cdot \cos\varphi}_{a} + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin\varphi}_{b} = a + bj$$

Kartesische Form → Polarform

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$

1.6.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

In der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [|z_1| (\cos\varphi_1 + j \cdot \sin\varphi_1)] \cdot [|z_2| (\cos\varphi_2 + j \cdot \sin\varphi_2)] \\ &= (|z_1| \, |z_2|) \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= \left(|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}\right) \cdot \left(|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}\right) = (|z_1| \, |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division

In kartesischer Form

In der Polarform

Kapitel 2

Lineare Algebra

Ein Test um das Skript auszuprobieren.

Teil II

Physik

Kapitel 3

Kinematik

3.1 Kinematik

3.1.1 Analogietabelle

Translation		Rotation
$\vec{s}$		$\vec{\varphi}$
$\downarrow \frac{ds}{dt}$		$\downarrow \frac{d\varphi}{dt}$
$\vec{v}$	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	$\vec{\omega}$
$\downarrow \frac{dv}{dt}$		$\downarrow \frac{d\omega}{dt}$
$\vec{a}$	$a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_{Tan}} - \underbrace{\omega^2 r}_{a_R}$	$\vec{\alpha}$
m		J
$\downarrow \frac{dm}{dt}$		$\downarrow \frac{dJ}{dt}$
$\vec{F}$		$\vec{M}$
$\downarrow \frac{dF}{dt}$		$\downarrow \frac{dM}{dt}$
$\vec{p}$		$\vec{L}$
$\frac{m}{2}v^2$	E_{kin}	$\frac{J}{2}\omega^2$

3.1.2 Translation

$$a(t) = a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

3.1.3 Rotation

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

Bahngroessen

$$a_t(t) = a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s}$$
$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$
$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Winkelgroessen

$$\vec{a_t} = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r \qquad \alpha \perp r$$
$$\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{a_t}$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot r \qquad \omega \perp r$$
$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$
$$s = \varphi \cdot r$$

Kreisfrequenz

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot n \\ &= 2 \cdot \pi \cdot f \end{aligned}$$

Radialbeschleunigung

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{v^2}{r} \\ &= v \cdot \omega \\ &= \omega^2 \cdot r \end{aligned}$$

Umdrehungen

$$\begin{aligned} N &= \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \\ &= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2 \end{aligned}$$

3.2 Dynamik

Geradlinig (Translation)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
$$\vec{F}_{\mathrm{Tr}} = -m \cdot \vec{a}$$

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Kraftstoss

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} \mathrm{d}p = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

Arbeit

$$W = -\int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F_{\mathrm{Tr}}} \circ \mathrm{d}\vec{s}$$
$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\vec{v} \circ \mathrm{d}\vec{v} = \frac{1}{2} m \left(v_1^2 - v_0^2\right)$$

Hubarbeit

$$W_{\mathrm{hub}} = mgh$$

Kinetische Energie

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \dot{W}$$

3.2.1 Drehbewegung(Rotation)

Massentraegheitsmoment

$$J = \int r^2\,\mathrm{d}m$$

Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$= J \cdot \vec{\omega}$$

Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Arbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e_\omega} \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J\vec{\omega} \, \mathrm{d}\vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2} J \left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right) \end{aligned}$$

Leistung

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Zentripedalkraft

$$\begin{aligned} F_{zp} &= -m \cdot \omega^2 \cdot r \\ &= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e_r}}{r} \end{aligned}$$

3.2.2 Geneigte Ebene

Kräfte

$$\begin{aligned} \vec{F}_N &= \vec{F}_G \cos\alpha \\ \vec{F}_H &= \vec{F}_G \sin\alpha \end{aligned}$$

3.2.3 Reibung

Reibungskraft

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

Rollreibung

$$\begin{aligned} M &= f \cdot F_N \\ F_R &= \frac{f}{r} \cdot F_N \end{aligned}$$

3.2.4 Feder

HOOKsches Gesetz

$$\begin{aligned} F &= -kx \\ M &= D\varphi \end{aligned}$$

Federspannarbeit

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, \mathrm{d}x = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x_{\max}^2 - x_{\min}^2\right) \end{aligned}$$

3.2.5 Elastischer Stoss

$$\text{Energie vor den Stoß} = \text{Energie nach den Stoß}$$
$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

Impulserhaltung

$$\text{Impuls vor den Stoß} = \text{Impuls nach den Stoß}$$
$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Zentraler, Gerader, Elastischer Stoss

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2$$
$$v_1' = \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$$

3.2.6 Unelastischer Stoss

Energieerhaltung

$$\text{Energie vor den Stoß} = \text{Energie nach den Stoß} + \text{Arbeit}$$
$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

Impulserhaltung

$$\text{Impuls vor den Stoß} = \text{Impuls nach den Stoß}$$
$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Total unelastischer Stoss

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2\right)v'^2+\Delta W$$
$$m_1v_1+m_2v_2=\left(m_1+m_2\right)v'$$

$$v'=\frac{m_1v_1+m_2v2}{m_1+m_2}$$

$$\Delta W=\frac{m_1\cdot m_2}{2\left(m_1+m_2\right)}\left(v_1-v_2\right)^2$$

Drehimpulserhaltungssatz

$$\text{Drehinpuls zur Zeit 1}=\text{Drehimpuls zur Zeit 2}$$
$$\sum\vec{L}=\sum\vec{L}'$$

Kopplung zweier Rotationskörper

$$\vec{\omega}'=\frac{J_0\vec{\omega_0}+J_1\vec{\omega_1}}{J_1+J_2}$$
$$W=\frac{J_0\cdot J_1}{2\left(J_0+J_1\right)}\left(\omega_0-\omega_1\right)^2$$

3.2.7 Rotierendes Bezugssystem

Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z=F_r\cdot\vec{e}_r=-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$
$$=-m\vec{\omega}\times\vec{v}$$
$$F_Z=-m\frac{v^2}{r}=-m\omega^2r$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C=-2m\vec{\omega}\times\vec{v}$$

3.3 Schwerpunkt

Schwerpunkt mehrerer Punktmassen

$$\vec{r}_{\mathrm{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Allgemein

$$\vec{r}_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

Schwerpunkt in Zylinderkoordinaten

$$r_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$$

$$\varphi_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$$

$$z_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$$

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z$$

Schwerpunkt in karthesischen Koordinaten

$$x_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x x\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$y_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x y\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$z_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x z\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

3.4 Trägheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$
$$J = \int_m r^2 \, \mathrm{d}m$$
$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z$$

STEINER'scher Satz

$$J_x = mr^2 + J_s$$

Traegheitsmoment Kugel

$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{2}{5} mr^2$$

Traegheitsmoment Zylinder

$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{1}{2} mr^2$$

Traegheitmoment Kreisring (Torus)

$$J_{\mathrm{Sp}} = mr^2$$

Traegheitsmoment Stab

$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{1}{12} ml^2$$

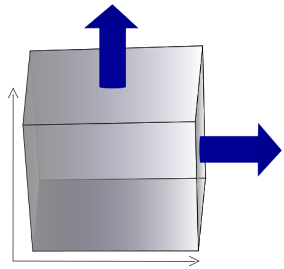
3.5 Elastizitaetslehre

Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_n}{\mathrm{d}A}$$

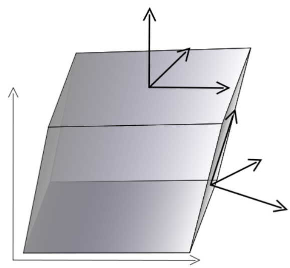
$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_t}{\mathrm{d}A}$$



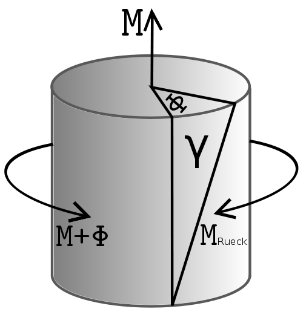
Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$



Drillung

$$\psi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \frac{W_t}{G \cdot J_p}\tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$



Flaechenmoment

$$J_p = \int r^2 \,\mathrm{d}A = \int_\varphi \int_r r^3 \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Verformungsarbeit

$$W = V \int \sigma(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon$$

3.6 Schwingungen

Harmonische Schwingungen

$$u(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

3.6.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{k}{m}x \\
x(t) &= \hat{x}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{x}(t) &= -\hat{x}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{x}(t) &= -\hat{x}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}
\end{aligned}$$

Mathemetisches Pendel

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{g}{l}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}
\end{aligned}$$

Physikalisches Pendel

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{lmg}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{J_A}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgl}}
\end{aligned}$$

Torsionsschwingung

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{D}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{D}}
\end{aligned}$$

Flüssigkeitspendel

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -\frac{2A\rho g}{m}y \\
\varphi(t) &= \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}
\end{aligned}$$

Elektrischer Schwingkreis

$$\begin{aligned}
0 &= L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \\
q(t) &= \hat{Q}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

3.6.2 Gedaempfte Schwingungen

Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

COULOMB Reibung

$$\begin{aligned}
F_R &= -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \\
0 &= m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N
\end{aligned}$$

Gleitreibung

$$x(t) = -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1)\cos(\omega t) - \hat{x}_1 \qquad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}$$
$$x(t) = -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1)\cos(\omega t) + \hat{x}_1 \qquad \frac{T}{2} \leq t \leq T$$
$$\hat{x}_1 = \frac{\mu F_N}{k}$$

Viskosereibung

$$0 = m\ddot{x} + b\dot{x} + kx$$
$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t}$$
$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}t}$$
$$\delta = \frac{b}{2m}$$
$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$
$$D = \frac{b}{2}\frac{1}{\sqrt{mk}}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\Lambda = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$$
$$\Lambda = \delta T$$
$$\omega_D = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$d = 2D$$
$$Q = \frac{1}{d}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi)$$

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

Kriechfall $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t}$$

Kapitel 4

Fluiddynamik

4.1 Fluidmechanik

4.1.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

$$p = \frac{\mathrm{d}F_N}{\mathrm{d}A}$$

Dynamischer Druck

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Schweredruck

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho V g}{A} \\ &= h\rho g \end{aligned}$$

Volumenstrom

$$\begin{aligned} \dot{V} &= vA \\ &= \iint_A \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{A} \\ &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \\ &= Q \end{aligned}$$

Massenstrom

$$\begin{aligned} \dot{m} &= jA \\ &= \iint_A \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A} \\ &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Auftrieb

$$\begin{aligned} \vec{F_A} &= -\rho_V \vec{g} V \\ &= -\frac{\rho_V}{\rho_M}\vec{F_G} \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{m}\big|_1 &= \dot{m}\big|_2 \\ \dot{V}\Big|_1 &= \dot{V}\Big|_2 & \rho_1 = \rho_2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 & \rho_1 = \rho_2 \end{aligned}$$

Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

Volumenausdehnungskoeffezient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

Barometrische Höhenformel

$$p = p_0 e^{-Ch}$$
$$C = \frac{\rho_0 g}{p_0}$$

Bernoulli Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const}$$

4.1.2 Laminare Reibung

Newtonsches Reibungsgesetz

$$F_R = \eta A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Laminare Strömung (Rohr)

$$v(r) = \frac{p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)$$
$$p = \frac{4\eta l}{R^2} v(0)$$
$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} p$$

Umströmung (Kugel)

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

Bernoulligleichung mit Reibung

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1$$
$$= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p$$

Reynoldszahl

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$
$$Re > Re_{krit}$$

Strömung wird Turbulent

Kapitel 5

Gravitation

Gravitationskraft

$$\vec{F}_{g,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{e}_r$$
$$\vec{F}_g = \vec{E}_g \cdot m = \vec{g}m$$

Gravitationspotential

$$\phi = -G\frac{M}{r}$$
$$\vec{E}_g = \mathrm{grad}\phi$$

Arbeit

$$\begin{aligned} W_{12} &= -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ \mathrm{d}\vec{r} \\ &= GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \end{aligned}$$

Planetenbahnen

$$\left(\frac{a}{a_E}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_E}\right)^2$$

Kapitel 6

Elektrostatik

Ladung

$$
\begin{aligned}
Q &= n \cdot e_0 \\
&= CU \\
&= \int i \,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

COULOMB Gesetz

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\vec{r_1}2 \\
&= \vec{E}Q \\
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q}{r^2}\vec{r} \\
&= -\operatorname{grad}\varphi \\
&= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right)
\end{aligned}
$$

Punktladungen

$$
\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\vec{r}_i
$$

Spannung

$$
\begin{aligned}
U_{AB} =& \frac{W_{AB}}{Q} \\
=& \int_A^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\
=& \oint_s \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} = 0 \\
=& \varphi_A - \varphi_B \\
=& -\int_\infty^A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\
& - \left(-\int_\infty^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s}\right)
\end{aligned}
$$

El- / Verschiebungsfluß

$$\psi = \int_A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A}$$
$$\psi = \oint_A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Flußdichte

$$\vec{D} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}\vec{e}_A$$
$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$$
$$Q = \oint_A D \,\mathrm{d}A$$

Kapazität

$$Q = CU$$

OHMsches Gesetz

$$\begin{aligned} I &= \oint_A \vec{j} \circ \mathrm{d}\vec{A} \\ &= \oint_A \kappa\vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A} \\ &= \underbrace{\kappa E \cdot 4\pi r^2}_{\text{Kugel}} \end{aligned}$$

Arbeit im elektrischem Feld

$$w = \frac{1}{2}\vec{E} \circ \vec{D}$$
$$\begin{aligned} W &= \int_V w \,\mathrm{d}V \\ &= -Q \int_A^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\ &= \int_U Q \,\mathrm{d}U \\ &= \int_U CU \,\mathrm{d}U \\ &= \frac{1}{2}CU^2 \end{aligned}$$

Teil III

Elektrotechnik

Kapitel 7

Gleichstromtechnik

7.1 Grundgrößen

Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[Q] = 1C = 1As$$
$$Q = n \cdot e$$

Strom

$$[I] = 1A$$
$$i(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Stromdichte

$$[J] = 1\frac{A}{mm^2}$$
$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

Potential

$$[\varphi] = 1V = 1\frac{Nm}{As} = 1\frac{kgm^2}{As^3}$$
$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

Spannung

$$[U] = 1V$$
$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

Widerstand und Leitwert

$$[R] = 1\Omega = 1\frac{V}{A}$$
$$R = \frac{U}{I} = \rho\frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa}\frac{l}{A}$$

$$[G] = 1S = 1\frac{A}{V}$$
$$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R} = \kappa\frac{A}{l} = \frac{1}{\rho}\frac{A}{l}$$

Temperaturabhängigkeit

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha\left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right) + \beta\left(\vartheta_2 - \vartheta_1\right)^2\right)$$

Leistung

$$[P] = 1W = 1VA$$
$$P = u(t) \cdot i(t)$$

Leistung im Mittel

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \cdot i(t)\,\mathrm{d}t$$

7.2 Lineare Quellen

Spannungsquelle

$$U = U_q - R_i \cdot I$$
$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$
$$U_l = I_q \cdot R_i$$

7.3 Kirchhoffsche Gesetze

Knotenpunktsatz

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

Kapitel 8

Wechselstromtechnik

8.1 Definitionen

8.1.1 periodische zeitabhängige Größen

Allgemein $x\left(t\right) \rightarrow$ speziell $u\left(t\right); i\left(t\right); q\left(t\right); \ldots$
es gillt $x\left(t\right) = x\left(t + n \cdot T\right); \left(n \in \mathbb{N}^{*}\right)$

8.1.2 Wechselgrößen

Allgemein $x_{\sim}\left(t\right)$; periodisch sich ändernde Größe, deren Gleichanteil bzw. zeitlich linearer Mittelwert gleich Null ist.

Nachweis:

$$\int\limits_{t1}^{t1+n\cdot T} x_{\sim}\left(t\right)dt = 0\ ;\ \left(n \in \mathbb{N}^{*}\right)\ ;\ t1 \text{ beliebiger Zeitwert}$$

8.1.3 Mischgrößen

Sind periodisch, Ihr Gleichanteil $\overline{x}$ bzw. zeitlich linearer Mittelwert
jedoch ist ungleich Null.

$$\begin{aligned}\text{Mischgröße} &= \text{Wechselgröße} + \text{Gleichanteil}\\ x\left(t\right) &= x_{\sim}\left(t\right) + \overline{x}\\ &= \text{gleichanteilbehaftete Wechselgröße}\end{aligned}$$

8.2 Anteile und Formfaktoren

8.2.1 Gleichanteil

$$\overline{x} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} x(t)\, dt$$

8.2.2 Gleichrichtwert

$$|\overline{x}| = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} |x|(t)\, dt$$

8.2.3 Effektivwert

$$x_{eff} = X = \sqrt{\frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} x^2(t)\, dt}$$

$n \in \mathbb{N}^* \rightarrow t1$ beliebiger Zeitwert $\rightarrow [|\overline{x}|] = [x(t)]$

8.2.4 Formfaktor

$$F = \frac{x_{eff}}{|\overline{x}|} \qquad x_{eff} = |\overline{x}| \cdot F$$

8.2.5 crest - Faktor

$$\sigma = \frac{\hat{x}}{x_{eff}}$$

8.3 Leistung und Leistungsfaktoren

8.3.1 Wirkleistung

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} P(t)\, dt \\ &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} u(t) \cdot i(t)\, dt \end{aligned}$$

8.3.2 Mittlere Leistung

$$\bar{p}(t) = P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} P(t)\, dt$$

8.3.3 Scheinleistung

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I$$

8.3.4 Leistungsfaktor

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{P}{S} \\ &= \frac{\frac{1}{n\cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} p(t)\, dt}{u_{eff} \cdot i_{eff}} \\ &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} u(t) \cdot i(t)\, dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} u^2(t)\, dt} \cdot \sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} i^2(t)\, dt}} \end{aligned}$$

8.4 Sinusförmige Größen

8.4.1 Sinusschwingung

$$x(t) = \hat{x}\sin(2\pi f + \varphi_x)$$
$$x(\omega t) = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi_x)$$

- $\hat{x}$: Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Linksverschiebung der Kurve

8.4.2 Kosinusschwingung

$$x(t) = \hat{x}\cos(2\pi f + \varphi_x)$$
$$x(\omega t) = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi_x)$$

- $\hat{x}$: Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Rechtssverschiebung der Kurve

8.4.3 Nullphasenzeit

$$t_x = -\frac{\varphi_x}{\omega} = -\varphi_x \cdot \frac{T}{2\pi}$$

8.4.4 Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz

mit: $a = \hat{a}\sin(\omega t + \alpha) \wedge b = \hat{b}\sin(\omega t + \beta)$

Resultierende Funktion:

$$\begin{aligned} x &= a + b \\ &= \hat{a}\sin(\omega t + \alpha) + \hat{b}\sin(\omega t + \beta) \\ &= \hat{x}\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

- $\hat{x}$: resultierende Amplitude
- φ : Nullphasenwinkel

Wobei: $\hat{x} = +\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\alpha - \beta)}$

$$\varphi = \arctan\frac{\hat{a}\sin\alpha + \hat{b}\sin\beta}{\hat{a}\cos\alpha + \hat{b}\cos\beta}$$

Vierquadrantenarkustangens

$$\varphi = \arctan\frac{ZP}{NP}$$

2. Quadrant $ZP > 0, NP < 0$	1. Quadrant $ZP > 0, NP > 0$
3. Quadrant $ZP < 0, NP < 0$	4. Quadrant $ZP < 0, NP > 0$

Der rotierende Zeiger als rotierender Vektor

$$\text{Allgemein gillt: } \sin(\omega t + \varphi_x) = \frac{GK}{HT} = \frac{b}{\hat{x}}$$
$$\cos(\omega t + \varphi_x) = \frac{AK}{HT} = \frac{a}{\hat{x}}$$
$$b = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$$
$$a = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)$$
$$\text{Als Einheitsvektor: } \vec{x} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$$

Zeigerspitzenendpunkt

$$\underline{x} = \text{ Zeigerspitzenendpunkt}$$
$$\underline{x} = \underbrace{\hat{x}\cos(\omega t + \varphi_x)}_{Re \to Abszisse} + j \cdot \underbrace{\hat{x}\sin(\omega t + \varphi_x)}_{Im \to Ordinate}$$
$$\underline{x} = \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$
$$\underline{x}_{eff} = \text{ rotierender Effektivwertzeiger}$$
$$\underline{x}_{eff} = \hat{x}_{eff} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$

8.4.5 Wechsel zwischen Sinus und Kosinus

$$\hat{x}(t) \cos(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t) \sin\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\hat{x}(t) \sin(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t) \cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Zeitbereich		komplexer Zeitbereich
1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15