

Formelsammlung - ET/TI

Marc Ludwig

29. März 2011

Inhaltsverzeichnis

I	Mathematik	3
1	Algebra	4
1.1	Rechenregeln fuer Potenzen	4
1.2	Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen	4
1.3	Potenzen und Logarithmen	5
1.3.1	Der natuerliche Logarithmus	5
1.3.2	Rechnen mit Logarithmen	5
1.4	Der Binomische Lehrsatz	5
1.5	Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens	6
1.5.1	Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens	6
1.5.2	Additionstheoreme	6
1.5.3	Funktionen des doppelten und halben Winkels	7
1.5.4	Umformungen	7
1.6	Komplexe Zahlen	8
1.6.1	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	8
1.6.2	Rechnen mit Komplexen Zahlen	9
II	Physik	10
2	Kinematik	11
2.1	Kinematik	11
2.1.1	Analogietabelle	11
2.1.2	Translation	11
2.1.3	Rotation	11
2.2	Dynamik	13
2.2.1	Drehbewegung(Rotation)	13
2.2.2	Geneigte Ebene	14
2.2.3	Reibung	14
2.2.4	Feder	14
2.2.5	Elastischer Stoss	15

2.2.6	Unelastischer Stoss	15
2.2.7	Rotierendes Bezugssystem	16
2.3	Schwerpunkt	17
2.4	Trägheitsmoment	18
2.5	Elastizitätslehre	19
2.6	Schwingungen	20
2.6.1	Ungedämpfte Schwingungen	20
2.6.2	Gedämpfte Schwingungen	21
3	Fluiddynamik	23
3.1	Fluidmechanik	23
3.1.1	Ohne Reibung	23
3.1.2	Laminare Reibung	24
4	Gravitation	25
5	Elektrostatik	26
III	Elektrotechnik	28
6	Gleichstromtechnik	29
6.1	Grundgrößen	29
6.2	Lineare Quellen	30
6.3	Kirchhoffsche Gesetze	30
7	Wechselstromtechnik	31
7.1	Definitionen	31
7.1.1	periodische zeitabhängige Größen	31
7.1.2	Wechselgrößen	31
7.1.3	Mischgrößen	31
7.2	Anteile und Formfaktoren	31
7.2.1	Gleichanteil	32
7.2.2	Gleichrichtwert	32

Teil I

Mathematik

Kapitel 1

Algebra

1.1 Rechenregeln fuer Potenzen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(\text{fuer } a > 0) \ a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

1.2 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Potenzen und Wurzeln existieren.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

1.3 Potenzen und Logarithmen

Schreibweise: $x = \log_a(b)$ mit $a > 0, a \neq 1$ und $b > 0$.

Es gilt: $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.

1.3.1 Der natuerliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e mit $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\dots$

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1; \text{ da } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Man beachte: $x^a = e^{\ln(x) \cdot a}$

1.3.2 Rechnen mit Logarithmen

Es gilt:	Weitere Beziehungen:
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log_a(u)$
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$a^{\log_a(u)} = \log_a(a^u) = u$
$\log_a(u^p) = p \cdot \log_a(u)$	$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$

1.4 Der Binomische Lehrsatz

Die Potenzen eines Binoms $a+b$ lassen sich nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln ($n \in \mathbb{N}^*$):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 \cdot b^{n-1} + b^n$$

Die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen Binominalkoeffizienten, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Einige Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ fuer } k > n & \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} & \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

1.5 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens**1.5.1 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens**

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 & \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) &= 1 \\ \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ 1 + \tan^2(\alpha) &= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} & 1 + \cot^2(\alpha) &= \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

1.5.2 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)} \end{aligned}$$

1.5.3 Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 - \cos(\alpha))$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\alpha))$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

1.5.4 Umformungen

Summe oder Differenz in ein Produkt

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Produkt in eine Summe oder Differenz

$$2 \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

1.6 Komplexe Zahlen

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man:

$$\mathbb{C} = \{z|z = a + bj, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

a-Realteil b-Imaginaerteil j-imaginaere Einheit

kartesische Form	trigonometrische Form	exponentialform
$z = a + bj$	$z = z (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$	$z = z \cdot e^{j\varphi}$
$z^* = (a + bj)^* = a - bj$	$z^* = z (\cos \varphi - j \cdot \sin \varphi)$	$z^* = z \cdot e^{-j\varphi}$

- $|z|$ = Betrag von z
- φ = Argument (Winkel) von z
- z^* = Konjugiert komplexe Zahl

1.6.1 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

Polarform → Kartesische Form

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \underbrace{|z| \cdot \cos \varphi}_a + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin \varphi}_b = a + bj$$

Kartesische Form → Polarform

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

1.6.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j \cdot (a_1b_2 + a_2b_1)$$

In der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [|z_1| (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [|z_2| (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)] \\ &= (|z_1| |z_2|) \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= (|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}) = (|z_1| |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division

In kartesischer Form

In der Polarform

Teil II

Physik

Kapitel 2

Kinematik

2.1 Kinematik

2.1.1 Analogietabelle

Translation		Rotation
\vec{s} $\downarrow \frac{ds}{dt}$ \vec{v} $\downarrow \frac{dv}{dt}$ \vec{a}	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_{Tan}} - \underbrace{\omega^2 r}_{a_R}$	$\vec{\varphi}$ $\downarrow \frac{d\varphi}{dt}$ $\vec{\omega}$ $\downarrow \frac{d\omega}{dt}$ $\vec{\alpha}$
m $\downarrow \frac{dm}{dt}$ \vec{F} $\downarrow \frac{dF}{dt}$ \vec{p} $\frac{m}{2}v^2$	E_{kin}	J $\downarrow \frac{dJ}{dt}$ \vec{M} $\downarrow \frac{dM}{dt}$ \vec{L} $\frac{J}{2}\omega^2$

2.1.2 Translation

$$a(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

2.1.3 Rotation

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

Bahngroessen

$$a_t(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Winkelgroessen

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r \quad \alpha \perp r$$

$$\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{a}_t$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot r \quad \omega \perp r$$

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$s = \varphi \cdot r$$

Kreisfrequenz

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot n \\ &= 2 \cdot \pi \cdot f \end{aligned}$$

Radialbeschleunigung

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{v^2}{r} \\ &= v \cdot \omega \\ &= \omega^2 \cdot r \end{aligned}$$

Umdrehungen

$$\begin{aligned} N &= \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \\ &= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2 \end{aligned}$$

2.2 Dynamik

Geradlinig (Translation)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{Tr}} = -m \cdot \vec{a}$$

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Kraftstoss

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} d\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Arbeit

$$W = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\text{Tr}} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\vec{v} \circ d\vec{v} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

Hubarbeit

$$W_{\text{hub}} = mgh$$

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

2.2.1 Drehbewegung(Rotation)

Massentraegheitsmoment

$$J = \int r^2 dm$$

Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= J \cdot \vec{\omega}$$

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Arbeit

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e}_{\omega} \, d\varphi \\
 &= \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} \, d\vec{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2)
 \end{aligned}$$

2.2.2 Geneigte Ebene**Kräfte**

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_N &= \vec{F}_G \cos \alpha \\
 \vec{F}_H &= \vec{F}_G \sin \alpha
 \end{aligned}$$

2.2.3 Reibung**Reibungskraft**

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

2.2.4 Feder**HOOKsches Gesetz**

$$\begin{aligned}
 F &= -kx \\
 M &= D\varphi
 \end{aligned}$$

Leistung

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Zentripedalkraft

$$\begin{aligned}
 F_{zp} &= -m \cdot \omega^2 \cdot r \\
 &= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r}
 \end{aligned}$$

Rollreibung

$$\begin{aligned}
 M &= f \cdot F_N \\
 F_R &= \frac{f}{r} \cdot F_N
 \end{aligned}$$

Federspannarbeit

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2)
 \end{aligned}$$

2.2.5 Elastischer Stoß

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Zentraler, Gerader, Elastischer Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 \\ v_1' &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \end{aligned}$$

2.2.6 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß + Arbeit

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Total unelastischer Stoß

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + \Delta W$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$$

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2$$

Drehimpulserhaltungssatz

Drehimpuls zur Zeit 1 = Drehimpuls zur Zeit 2

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

Kopplung zweier Rotationskörper

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0\vec{\omega}_0 + J_1\vec{\omega}_1}{J_1 + J_2}$$

$$W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0 + J_1)}(\omega_0 - \omega_1)^2$$

2.2.7 Rotierendes Bezugssystem**Zentrifugalkraft****Corioliskraft**

$$\vec{F}_Z = F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= -m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$F_Z = -m \frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r$$

2.3 Schwerpunkt

Schwerpunkt mehrerer
Punktmassen

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Allgemein

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

Schwerpunkt in
Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} r_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho dr d\varphi dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho dr d\varphi dz} \\ \varphi_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho dr d\varphi dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho dr d\varphi dz} \\ z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho dr d\varphi dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho dr d\varphi dz} \\ x &= r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z \end{aligned}$$

Schwerpunkt in
kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} x_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x x \rho dx dy dz}{\int_z \int_y \int_x \rho dx dy dz} \\ y_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x y \rho dx dy dz}{\int_z \int_y \int_x \rho dx dy dz} \\ z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x z \rho dx dy dz}{\int_z \int_y \int_x \rho dx dy dz} \end{aligned}$$

2.4 Trägheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$

$$J = \int_m r^2 \, dm$$

$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz$$

STEINER'scher Satz

$$J_x = mr^2 + J_s$$

Traegheitsmoment Kugel

$$J_{\text{Sp}} = \frac{2}{5}mr^2$$

Traegheitsmoment Zylinder

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{2}mr^2$$

**Traegheitmoment Kreisring
(Torus)**

$$J_{\text{Sp}} = mr^2$$

Traegheitsmoment Stab

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{12}ml^2$$

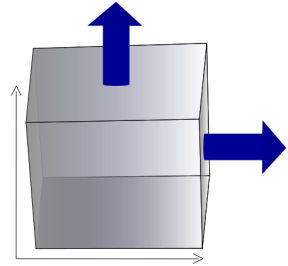
2.5 Elastizitaetslehre

Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_n}{dA}$$

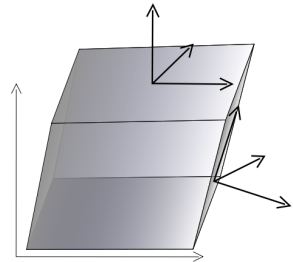
$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_t}{dA}$$



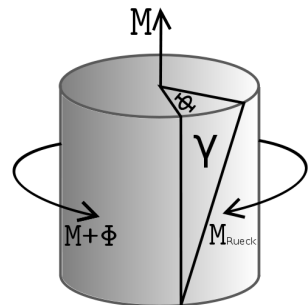
Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$



Drillung

$$\psi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{W_t}{G \cdot J_p} \tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$



Flaechenmoment

$$J_p = \int r^2 dA = \int_{\varphi} \int_r r^3 dr d\varphi$$

Verformungsarbeit

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

2.6 Schwingungen

Harmonische Schwingungen

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

2.6.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Mathematisches Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Physikalisches Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{I_A}{J_A} \varphi$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}}$$

Torsionsschwingung

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{D}{J_A} \varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}}
\end{aligned}$$

Flüssigkeitsspendel

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -\frac{2A\rho g}{m} y \\
\varphi(t) &= \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{y} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{y} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}
\end{aligned}$$

Elektrischer Schwingkreis

$$\begin{aligned}
0 &= L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \\
q(t) &= \hat{Q} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{q}(t) &= -\hat{Q} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{q}(t) &= -\hat{Q} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

2.6.2 Gedaempfte Schwingungen**Schwingungsgleichung**

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

COULOMB Reibung

$$\begin{aligned}
F_R &= -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \\
0 &= m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N
\end{aligned}$$

Gleitreibung

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1) \cos(\omega t) - \hat{x}_1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\
 x(t) &= -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1) \cos(\omega t) + \hat{x}_1 & \frac{T}{2} \leq t \leq T \\
 \hat{x}_1 &= \frac{\mu F_N}{k}
 \end{aligned}$$

Viskosereibung

$$\begin{aligned}
 0 &= m\ddot{x} + b\dot{x} + kx & d &= 2D \\
 x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t} & Q &= \frac{1}{d} \\
 x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}t} \\
 \delta &= \frac{b}{2m} & x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi) \\
 D &= \frac{\delta}{\omega_0} \\
 D &= \frac{b}{2} \frac{1}{\sqrt{mk}} \\
 \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
 \Lambda &= \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) \\
 \Lambda &= \delta T \\
 \omega_D &= \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

Kriechfall $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}$$

Kapitel 3

Fluiddynamik

3.1 Fluidmechanik

3.1.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

$$p = \frac{dF_N}{dA}$$

Dynamischer Druck

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Schweredruck

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho V g}{A} \\ &= h \rho g \end{aligned}$$

Volumenstrom

$$\begin{aligned} \dot{V} &= vA \\ &= \iint_A \vec{v} d\vec{A} \\ &= \frac{dV}{dt} \\ &= Q \end{aligned}$$

Massenstrom

$$\begin{aligned} \dot{m} &= jA \\ &= \iint_A \vec{j} d\vec{A} \\ &= \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

Auftrieb

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= -\rho_V \vec{g} V \\ &= -\frac{\rho_V}{\rho_M} \vec{F}_G \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{m}|_1 &= \dot{m}|_2 \\ \dot{V}|_1 &= \dot{V}|_2 & \rho_1 &= \rho_2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 & \rho_1 &= \rho_2 \end{aligned}$$

Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

Volumenausdehnungskoeffizient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

3.1.2 Laminare Reibung**Newtonsches Reibungsgesetz**

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

Laminare Strömung (Rohr)

$$v(r) = \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

$$p = \frac{4\eta l}{R^2} v(0)$$

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} p$$

Umströmung (Kugel)

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

Barometrische Höhenformel

$$p = p_0 e^{-Ch}$$

$$C = \frac{\rho_0 g}{p_0}$$

Bernoulli Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const}$$

Bernoulligleichung mit Reibung

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1$$

$$= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + \Delta p$$

Reynoldszahl

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$

$$Re > Re_{krit}$$

Strömung wird Turbulent

Kapitel 4

Gravitation

Gravitationskraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_{g,2} &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_r \\ \vec{F}_g &= \vec{E}_g \cdot m = \vec{g} m\end{aligned}$$

Gravitationspotential

$$\begin{aligned}\phi &= -G \frac{M}{r} \\ \vec{E}_g &= \text{grad} \phi\end{aligned}$$

Arbeit

$$\begin{aligned}W_{12} &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ d\vec{r} \\ &= GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)\end{aligned}$$

Planetenbahnen

$$\left(\frac{a}{a_E} \right)^3 = \left(\frac{T}{T_E} \right)^2$$

Kapitel 5

Elektrostatik

Ladung

$$\begin{aligned}Q &= n \cdot e_0 \\&= CU \\&= \int i \, dt\end{aligned}$$

Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \vec{r}_i$$

COULOMB Gesetz

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_{12} \\&= \vec{E} Q \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \\&= -\text{grad} \varphi \\&= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right)\end{aligned}$$

Spannung

$$\begin{aligned}U_{AB} &= \frac{W_{AB}}{Q} \\&= \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \\&= \oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = 0 \\&= \varphi_A - \varphi_B \\&= - \int_{\infty}^A \vec{E} \circ d\vec{s} \\&\quad - \left(- \int_{\infty}^B \vec{E} \circ d\vec{s} \right)\end{aligned}$$

El- / Verschiebungsfluß

$$\psi = \int_A \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$\psi = \oint_A \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Flußdichte

$$\vec{D} = \frac{dQ}{dA} \vec{e}_A$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$Q = \oint_A D dA$$

Kapazität

$$Q = CU$$

OHMsches Gesetz

$$I = \oint_A \vec{j} \circ d\vec{A}$$

$$= \oint_A \kappa \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$= \underbrace{\kappa E \cdot 4\pi r^2}_{\text{Kugel}}$$

Arbeit im elektrischem Feld

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{D}$$

$$W = \int_V w dV$$

$$= -Q \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_U Q dU$$

$$= \int_U CU dU$$

$$= \frac{1}{2} CU^2$$

Teil III

Elektrotechnik

Kapitel 6

Gleichstromtechnik

6.1 Grundgrößen

Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[Q] = 1C = 1As$$

$$Q = n \cdot e$$

Strom

$$[I] = 1A$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Stromdichte

$$[J] = 1 \frac{A}{mm^2}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

Potential

$$[\varphi] = 1V = 1 \frac{Nm}{As} = 1 \frac{kgm^2}{As^3}$$

$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

Spannung

$$[U] = 1V$$

$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

Widerstand und Leitwert

$$[R] = 1\Omega = 1\frac{V}{A}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}$$

$$[G] = 1S = 1\frac{A}{V}$$

$$G = \frac{I}{U}$$

$$= \frac{1}{R}$$

$$= \kappa \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l}$$

Temperaturabhängigkeit

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\right)$$

Leistung

$$[P] = 1W = 1VA$$

$$P = u(t) \cdot i(t)$$

Leistung im Mittel

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

6.2 Lineare Quellen

Spannungsquelle

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$

$$U_l = I_q \cdot R_i$$

6.3 Kirchhoffsche Gesetze

Knotenpunktsatz

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

Kapitel 7

Wechselstromtechnik

7.1 Definitionen

7.1.1 periodische zeitabhängige Größen

Allgemein $x(t) \rightarrow$ speziell $u(t); i(t); q(t); \dots$
es gilt $x(t) = x(t + n \cdot T); (n \in \mathbb{N}^*)$

7.1.2 Wechselgrößen

Allgemein $x_{\sim}(t)$; periodisch sich ändernde Größe, deren Gleichanteil bzw. zeitlich linearer Mittelwert gleich Null ist.

Nachweis:

$$\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x_{\sim}(t) dt = 0; (n \in \mathbb{N}^*); t_1 \text{ beliebiger Zeitwert}$$

7.1.3 Mischgrößen

Sind periodisch, Ihr Gleichanteil \bar{x} bzw. zeitlich linearer Mittelwert jedoch ist ungleich Null.

Mischgröße = Wechselgröße + Gleichanteil

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\sim}(t) + \bar{x} \\ &= \text{gleichanteilbehaftete Wechselgröße} \end{aligned}$$

7.2 Anteile und Formfaktoren

7.2.1 Gleichanteil

$$\bar{x} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x(t) dt$$

7.2.2 Gleichrichtwert

$$|\bar{x}| = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} |x|(t) dt$$

$n \in \mathbb{N}^*$; t_1 beliebiger Zeitwert ; $[|\bar{x}|] = [x(t)]$