

Formelsammlung - ET/TI

Marc Ludwig

14. Mai 2011

Inhaltsverzeichnis

I	Mathematik	4
1	Algebra	5
1.1	Rechenregeln fuer Potenzen	5
1.2	Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen	5
1.3	Potenzen und Logarithmen	6
1.3.1	Der natuerliche Logarithmus	6
1.3.2	Rechnen mit Logarithmen	6
1.4	Der Binomische Lehrsatz	6
1.5	Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens	7
1.5.1	Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens	7
1.5.2	Additionstheoreme	7
1.5.3	Funktionen des doppelten und halben Winkels	8
1.5.4	Umformungen	8
1.6	Komplexe Zahlen	9
1.6.1	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	9
1.6.2	Rechnen mit Komplexen Zahlen	10
2	Lineare Algebra	11
II	Physik	12
3	Kinematik	13
3.1	Kinematik	13
3.1.1	Analogietabelle	13
3.1.2	Translation	13
3.1.3	Rotation	13
3.2	Dynamik	15
3.2.1	Drehbewegung(Rotation)	15
3.2.2	Geneigte Ebene	16
3.2.3	Reibung	16

3.2.4	Feder	16
3.2.5	Elastischer Stoss	17
3.2.6	Unelastischer Stoss	17
3.2.7	Rotierendes Bezugssystem	18
3.3	Schwerpunkt	19
3.4	Trägheitsmoment	20
3.5	Elastizitätslehre	21
3.6	Schwingungen	22
3.6.1	Ungedämpfte Schwingungen	22
3.6.2	Gedämpfte Schwingungen	23
4	Fluiddynamik	25
4.1	Fluidmechanik	25
4.1.1	Ohne Reibung	25
4.1.2	Laminare Reibung	26
5	Gravitation	27
6	Elektrostatik	28
III	Elektrotechnik	30
7	Gleichstromtechnik	31
7.1	Grundgrößen	31
7.2	Lineare Quellen	32
7.3	Kirchhoffsche Gesetze	32
8	Wechselstromtechnik	33
8.1	Definitionen	33
8.1.1	periodische zeitabhängige Größen	33
8.1.2	Wechselgrößen	33
8.1.3	Mischgrößen	33
8.2	Anteile und Formfaktoren	34
8.2.1	Gleichanteil	34
8.2.2	Gleichrichtwert	34
8.2.3	Effektivwert	34
8.2.4	Formfaktor	34
8.2.5	crest - Faktor	34
8.3	Leistung und Leistungsfaktoren	34
8.3.1	Wirkleistung	34
8.3.2	Mittlere Leistung	34
8.3.3	Scheinleistung	34

8.3.4	Leistungsfaktor	34
8.4	Sinusförmige Größen	35
8.4.1	Sinusschwingung	35
8.4.2	Kosinusschwingung	35
8.4.3	Nullphasenzeit	35
8.4.4	Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz	35
8.4.5	Wechsel zwischen Sinus und Kosinus	36

Teil I

Mathematik

Kapitel 1

Algebra

1.1 Rechenregeln fuer Potenzen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(\text{fuer } a > 0) \ a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

1.2 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Potenzen und Wurzeln existieren.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

1.3 Potenzen und Logarithmen

Schreibweise: $x = \log_a(b)$ mit $a > 0, a \neq 1$ und $b > 0$.

Es gilt: $\log_a(1) = 0, \log_a(a) = 1$.

1.3.1 Der natuerliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e mit $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\dots$

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1; \text{ da } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Man beachte: $x^a = e^{\ln(x) \cdot a}$

1.3.2 Rechnen mit Logarithmen

Es gilt:	Weitere Beziehungen:
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log_a(u)$
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$a^{\log_a(u)} = \log_a(a^u) = u$
$\log_a(u^p) = p \cdot \log_a(u)$	$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$

1.4 Der Binomische Lehrsatz

Die Potenzen eines Binoms $a+b$ lassen sich nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln ($n \in \mathbb{N}^*$):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 \cdot b^{n-1} + b^n$$

Die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen Binominalkoeffizienten, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Einige Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ fuer } k > n & \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} & \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

1.5 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens**1.5.1 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens**

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 & \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) &= 1 \\ \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ 1 + \tan^2(\alpha) &= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} & 1 + \cot^2(\alpha) &= \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

1.5.2 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)} \end{aligned}$$

1.5.3 Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 - \cos(\alpha))$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\alpha))$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

1.5.4 Umformungen

Summe oder Differenz in ein Produkt

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Produkt in eine Summe oder Differenz

$$2 \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

1.6 Komplexe Zahlen

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man:

$$\mathbb{C} = \{z | z = a + bj, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

a-Realteil b-Imaginaerteil j-imaginaere Einheit

kartesische Form	trigonometrische Form	exponentialform
$z = a + bj$	$z = z (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$	$z = z \cdot e^{j\varphi}$
$z^* = (a + bj)^* = a - bj$	$z^* = z (\cos \varphi - j \cdot \sin \varphi)$	$z^* = z \cdot e^{-j\varphi}$

- $|z|$ = Betrag von z
- φ = Argument (Winkel) von z
- z^* = Konjugiert komplexe Zahl

1.6.1 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

Polarform → Kartesische Form

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \underbrace{|z| \cdot \cos \varphi}_a + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin \varphi}_b = a + bj$$

Kartesische Form → Polarform

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

1.6.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j \cdot (a_1b_2 + a_2b_1)$$

In der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [|z_1| (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [|z_2| (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)] \\ &= (|z_1| |z_2|) \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= (|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}) = (|z_1| |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division

In kartesischer Form

In der Polarform

Kapitel 2

Lineare Algebra

Ein Test um das Skript auszuprobieren.

Teil II

Physik

Kapitel 3

Kinematik

3.1 Kinematik

3.1.1 Analogietabelle

Translation		Rotation
\vec{s} $\downarrow \frac{ds}{dt}$ \vec{v} $\downarrow \frac{dv}{dt}$ \vec{a}	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_{Tan}} - \underbrace{\omega^2 r}_{a_R}$	$\vec{\varphi}$ $\downarrow \frac{d\varphi}{dt}$ $\vec{\omega}$ $\downarrow \frac{d\omega}{dt}$ $\vec{\alpha}$
m $\downarrow \frac{dm}{dt}$ \vec{F} $\downarrow \frac{dF}{dt}$ \vec{p} $\frac{m}{2}v^2$	E_{kin}	J $\downarrow \frac{dJ}{dt}$ \vec{M} $\downarrow \frac{dM}{dt}$ \vec{L} $\frac{J}{2}\omega^2$

3.1.2 Translation

$$a(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

3.1.3 Rotation

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

Bahngroessen

$$a_t(t) = a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Winkelgroessen

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r \quad \alpha \perp r$$

$$\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{a}_t$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot r \quad \omega \perp r$$

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$

$$s = \varphi \cdot r$$

Kreisfrequenz

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \\ &= 2 \cdot \pi \cdot n \\ &= 2 \cdot \pi \cdot f \end{aligned}$$

Radialbeschleunigung

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{v^2}{r} \\ &= v \cdot \omega \\ &= \omega^2 \cdot r \end{aligned}$$

Umdrehungen

$$\begin{aligned} N &= \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \\ &= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2 \end{aligned}$$

3.2 Dynamik

Geradlinig (Translation)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{Tr}} = -m \cdot \vec{a}$$

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Kraftstoss

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} d\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Arbeit

$$W = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\text{Tr}} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\vec{v} \circ d\vec{v} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

Hubarbeit

$$W_{\text{hub}} = mgh$$

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

3.2.1 Drehbewegung(Rotation)

Massentraegheitsmoment

$$J = \int r^2 dm$$

Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= J \cdot \vec{\omega}$$

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Arbeit

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e}_{\omega} \, d\varphi \\
 &= \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} \, d\vec{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2)
 \end{aligned}$$

3.2.2 Geneigte Ebene**Kräfte**

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_N &= \vec{F}_G \cos \alpha \\
 \vec{F}_H &= \vec{F}_G \sin \alpha
 \end{aligned}$$

3.2.3 Reibung**Reibungskraft**

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

3.2.4 Feder**HOOKsches Gesetz**

$$\begin{aligned}
 F &= -kx \\
 M &= D\varphi
 \end{aligned}$$

Leistung

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Zentripedalkraft

$$\begin{aligned}
 F_{zp} &= -m \cdot \omega^2 \cdot r \\
 &= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r}
 \end{aligned}$$

Rollreibung

$$\begin{aligned}
 M &= f \cdot F_N \\
 F_R &= \frac{f}{r} \cdot F_N
 \end{aligned}$$

Federspannarbeit

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2)
 \end{aligned}$$

3.2.5 Elastischer Stoß

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Zentraler, Gerader, Elastischer Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 \\ v_1' &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \end{aligned}$$

3.2.6 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß + Arbeit

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Total unelastischer Stoß

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + \Delta W$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$$

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2$$

Drehimpulserhaltungssatz

Drehimpuls zur Zeit 1 = Drehimpuls zur Zeit 2

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

Kopplung zweier Rotationskörper

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0\vec{\omega}_0 + J_1\vec{\omega}_1}{J_1 + J_2}$$

$$W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0 + J_1)}(\omega_0 - \omega_1)^2$$

3.2.7 Rotierendes Bezugssystem**Zentrifugalkraft****Corioliskraft**

$$\vec{F}_Z = F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= -m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$F_Z = -m \frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r$$

3.3 Schwerpunkt

**Schwerpunkt mehrerer
Punktmassen**

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

**Schwerpunkt in
Zylinderkoordinaten**

$$\begin{aligned} r_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\ \varphi_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\ z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz} \\ x &= r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z \end{aligned}$$

Allgemein

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\int dm}$$

**Schwerpunkt in
kartesischen Koordinaten**

$$\begin{aligned} x_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x x \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \\ y_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x y \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \\ z_{\text{Sp}} &= \frac{\int_z \int_y \int_x z \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz} \end{aligned}$$

3.4 Trägheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$

$$J = \int_m r^2 \, dm$$

$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz$$

STEINER'scher Satz

$$J_x = mr^2 + J_s$$

Traegheitsmoment Kugel

$$J_{\text{Sp}} = \frac{2}{5}mr^2$$

Traegheitsmoment Zylinder

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{2}mr^2$$

**Traegheitmoment Kreisring
(Torus)**

$$J_{\text{Sp}} = mr^2$$

Traegheitsmoment Stab

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{12}ml^2$$

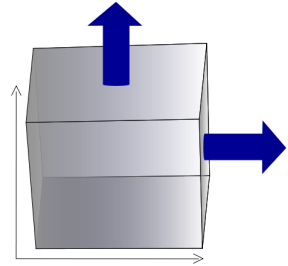
3.5 Elastizitaetslehre

Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_n}{dA}$$

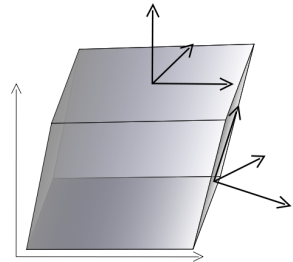
$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_t}{dA}$$



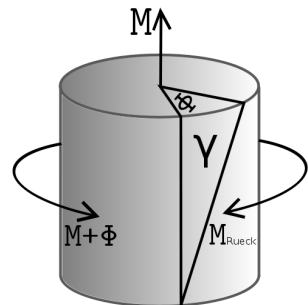
Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$



Drillung

$$\psi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{W_t}{G \cdot J_p} \tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$



Flaechenmoment

$$J_p = \int r^2 dA = \int_{\varphi} \int_r r^3 dr d\varphi$$

Verformungsarbeit

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

3.6 Schwingungen

Harmonische Schwingungen

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

3.6.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Mathematisches Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Physikalisches Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{lmg}{J_A}\varphi$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}}$$

Torsionsschwingung

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{D}{J_A} \varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}}
\end{aligned}$$

Flüssigkeitsspendel

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -\frac{2A\rho g}{m} y \\
\varphi(t) &= \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{y} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{y} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}
\end{aligned}$$

Elektrischer Schwingkreis

$$\begin{aligned}
0 &= L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \\
q(t) &= \hat{Q} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{q}(t) &= -\hat{Q} \omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{q}(t) &= -\hat{Q} \omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

3.6.2 Gedaempfte Schwingungen**Schwingungsgleichung**

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

COULOMB Reibung

$$\begin{aligned}
F_R &= -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \\
0 &= m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N
\end{aligned}$$

Gleitreibung

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1) \cos(\omega t) - \hat{x}_1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\
 x(t) &= -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1) \cos(\omega t) + \hat{x}_1 & \frac{T}{2} \leq t \leq T \\
 \hat{x}_1 &= \frac{\mu F_N}{k}
 \end{aligned}$$

Viskosereibung

$$\begin{aligned}
 0 &= m\ddot{x} + b\dot{x} + kx & d &= 2D \\
 x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t} & Q &= \frac{1}{d} \\
 x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}t} & x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi) \\
 \delta &= \frac{b}{2m} \\
 D &= \frac{\delta}{\omega_0} \\
 D &= \frac{b}{2} \frac{1}{\sqrt{mk}} \\
 \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
 \Lambda &= \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) \\
 \Lambda &= \delta T \\
 \omega_D &= \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} & \text{Aperiodischer Grenzfall } \delta &= \omega_0 \\
 & & x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t) \\
 & & \text{Kriechfall } \delta &> \omega_0 \\
 & & x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}
 \end{aligned}$$

Kapitel 4

Fluiddynamik

4.1 Fluidmechanik

4.1.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

$$p = \frac{dF_N}{dA}$$

Dynamischer Druck

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Schweredruck

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho V g}{A} \\ &= h \rho g \end{aligned}$$

Volumenstrom

$$\begin{aligned} \dot{V} &= vA \\ &= \iint_A \vec{v} d\vec{A} \\ &= \frac{dV}{dt} \\ &= Q \end{aligned}$$

Massenstrom

$$\begin{aligned} \dot{m} &= jA \\ &= \iint_A \vec{j} d\vec{A} \\ &= \frac{dm}{dt} \end{aligned}$$

Auftrieb

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= -\rho_V \vec{g} V \\ &= -\frac{\rho_V}{\rho_M} \vec{F}_G \end{aligned}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{m}|_1 &= \dot{m}|_2 \\ \dot{V}|_1 &= \dot{V}|_2 & \rho_1 &= \rho_2 \\ v_1 A_1 &= v_2 A_2 & \rho_1 &= \rho_2 \end{aligned}$$

Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

Volumenausdehnungskoeffizient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

4.1.2 Laminare Reibung**Newtonsches Reibungsgesetz**

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

Laminare Strömung (Rohr)

$$v(r) = \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

$$p = \frac{4\eta l}{R^2} v(0)$$

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} p$$

Umströmung (Kugel)

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

Barometrische Höhenformel

$$p = p_0 e^{-Ch}$$

$$C = \frac{\rho_0 g}{p_0}$$

Bernoulli Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const}$$

Bernoulligleichung mit Reibung

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1$$

$$= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + \Delta p$$

Reynoldszahl

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$

$$Re > Re_{krit}$$

Strömung wird Turbulent

Kapitel 5

Gravitation

Gravitationskraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_{g,2} &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_r \\ \vec{F}_g &= \vec{E}_g \cdot m = \vec{g} m\end{aligned}$$

Gravitationspotential

$$\begin{aligned}\phi &= -G \frac{M}{r} \\ \vec{E}_g &= \text{grad} \phi\end{aligned}$$

Arbeit

$$\begin{aligned}W_{12} &= - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ d\vec{r} \\ &= GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)\end{aligned}$$

Planetenbahnen

$$\left(\frac{a}{a_E} \right)^3 = \left(\frac{T}{T_E} \right)^2$$

Kapitel 6

Elektrostatik

Ladung

$$\begin{aligned}Q &= n \cdot e_0 \\&= CU \\&= \int i \, dt\end{aligned}$$

Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \vec{r}_i$$

COULOMB Gesetz

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_{12} \\&= \vec{E} Q \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \\&= -\text{grad} \varphi \\&= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right)\end{aligned}$$

Spannung

$$\begin{aligned}U_{AB} &= \frac{W_{AB}}{Q} \\&= \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \\&= \oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = 0 \\&= \varphi_A - \varphi_B \\&= - \int_{\infty}^A \vec{E} \circ d\vec{s} \\&\quad - \left(- \int_{\infty}^B \vec{E} \circ d\vec{s} \right)\end{aligned}$$

El- / Verschiebungsfluß

$$\psi = \int_A \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$\psi = \oint_A \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Flußdichte

$$\vec{D} = \frac{dQ}{dA} \vec{e}_A$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$Q = \oint_A D dA$$

Kapazität

$$Q = CU$$

OHMsches Gesetz

$$I = \oint_A \vec{j} \circ d\vec{A}$$

$$= \oint_A \kappa \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$= \underbrace{\kappa E \cdot 4\pi r^2}_{\text{Kugel}}$$

Arbeit im elektrischem Feld

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{D}$$

$$W = \int_V w dV$$

$$= -Q \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_U Q dU$$

$$= \int_U CU dU$$

$$= \frac{1}{2} CU^2$$

Teil III

Elektrotechnik

Kapitel 7

Gleichstromtechnik

7.1 Grundgrößen

Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[Q] = 1C = 1As$$

$$Q = n \cdot e$$

Strom

$$[I] = 1A$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Stromdichte

$$[J] = 1 \frac{A}{mm^2}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

Potential

$$[\varphi] = 1V = 1 \frac{Nm}{As} = 1 \frac{kgm^2}{As^3}$$

$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

Spannung

$$[U] = 1V$$

$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

Widerstand und Leitwert

$$[R] = 1\Omega = 1\frac{V}{A}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}$$

$$[G] = 1S = 1\frac{A}{V}$$

$$G = \frac{I}{U}$$

$$= \frac{1}{R}$$

$$= \kappa \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l}$$

Temperaturabhängigkeit

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\right)$$

Leistung

$$[P] = 1W = 1VA$$

$$P = u(t) \cdot i(t)$$

Leistung im Mittel

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

7.2 Lineare Quellen

Spannungsquelle

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$

$$U_l = I_q \cdot R_i$$

7.3 Kirchhoffsche Gesetze

Knotenpunktsatz

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

Kapitel 8

Wechselstromtechnik

8.1 Definitionen

8.1.1 periodische zeitabhängige Größen

Allgemein $x(t) \rightarrow$ speziell $u(t); i(t); q(t); \dots$
es gilt $x(t) = x(t + n \cdot T); (n \in \mathbb{N}^*)$

8.1.2 Wechselgrößen

Allgemein $x_{\sim}(t)$; periodisch sich ändernde Größe, deren Gleichanteil bzw. zeitlich linearer Mittelwert gleich Null ist.

Nachweis:

$$\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x_{\sim}(t) dt = 0; (n \in \mathbb{N}^*); t_1 \text{ beliebiger Zeitwert}$$

8.1.3 Mischgrößen

Sind periodisch, Ihr Gleichanteil \bar{x} bzw. zeitlich linearer Mittelwert jedoch ist ungleich Null.

Mischgröße = Wechselgröße + Gleichanteil

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{\sim}(t) + \bar{x} \\ &= \text{gleichanteilbehaftete Wechselgröße} \end{aligned}$$

8.2 Anteile und Formfaktoren

8.2.1 Gleichanteil

$$\bar{x} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x(t) dt$$

8.2.4 Formfaktor

$$F = \frac{x_{eff}}{|\bar{x}|} \quad x_{eff} = |\bar{x}| \cdot F$$

8.2.2 Gleichrichtwert

$$|\bar{x}| = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} |x|(t) dt$$

8.2.5 crest - Faktor

8.2.3 Effektivwert

$$x_{eff} = X = \sqrt{\frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x^2(t) dt}$$

$$\sigma = \frac{\hat{x}}{x_{eff}}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \rightarrow t_1 \text{ beliebiger Zeitwert} \rightarrow [|\bar{x}|] = [x(t)]$$

8.3 Leistung und Leistungsfaktoren

8.3.1 Wirkleistung

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt \\ &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt \end{aligned}$$

8.3.2 Mittlere Leistung

$$\bar{p}(t) = P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt$$

8.3.3 Scheinleistung

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I$$

8.3.4 Leistungsfaktor

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{P}{S} \\ &= \frac{\frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} p(t) dt}{u_{eff} \cdot i_{eff}} \\ &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u^2(t) dt} \cdot \sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} i^2(t) dt}} \end{aligned}$$

8.4 Sinusförmige Größen

8.4.1 Sinusschwingung

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{x} \sin(2\pi f + \varphi_x) \\x(\omega t) &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)\end{aligned}$$

- \hat{x} : Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Linksverschiebung der Kurve

8.4.2 Kosinusschwingung

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{x} \cos(2\pi f + \varphi_x) \\x(\omega t) &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)\end{aligned}$$

- \hat{x} : Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Rechtsverschiebung der Kurve

8.4.3 Nullphasenzeit

$$t_x = -\frac{\varphi_x}{\omega} = -\varphi_x \cdot \frac{T}{2\pi}$$

8.4.4 Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz

$$\text{mit: } a = \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) \wedge b = \hat{b} \sin(\omega t + \beta)$$

Resultierende Funktion:

$$\begin{aligned}x &= a + b \\&= \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) + \hat{b} \sin(\omega t + \beta) \\&= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

- \hat{x} : resultierende Amplitude
- φ : Nullphasenwinkel

$$\text{Wobei: } \hat{x} = +\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\alpha - \beta)}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{a} \sin \alpha + \hat{b} \sin \beta}{\hat{a} \cos \alpha + \hat{b} \cos \beta}$$

Vierquadrantenarkustangens

$$\varphi = \arctan \frac{ZP}{NP}$$

2. Quadrant $ZP > 0, NP < 0$	1. Quadrant $ZP > 0, NP > 0$
3. Quadrant $ZP < 0, NP < 0$	4. Quadrant $ZP < 0, NP > 0$

Der rotierende Zeiger als rotierender Vektor

$$\begin{aligned}
\text{Allgemein gilt: } \sin(\omega t + \varphi_x) &= \frac{GK}{HT} = \frac{b}{\hat{x}} \\
\cos(\omega t + \varphi_x) &= \frac{AK}{HT} = \frac{a}{\hat{x}} \\
b &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \\
a &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \\
\text{Als Einheitsvektor: } \vec{x} &= a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}
\end{aligned}$$

Zeigerspitzenendpunkt

$$\begin{aligned}
\underline{x} &= \text{Zeigerspitzenendpunkt} \\
\underline{x} &= \underbrace{\hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)}_{Re \rightarrow Abszisse} + j \cdot \underbrace{\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)}_{Im \rightarrow Ordinate} \\
\underline{x} &= \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)} \\
\underline{x}_{eff} &= \text{rotierender Effektivwertzeiger} \\
\underline{x}_{eff} &= \hat{x}_{eff} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}
\end{aligned}$$

8.4.5 Wechsel zwischen Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) \cos(\omega t + \varphi_x) &\equiv \hat{x}(t) \sin\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) \\
\hat{x}(t) \sin(\omega t + \varphi_x) &\equiv \hat{x}(t) \cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Zeitbereich		komplexer Zeitbereich
$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{\text{Hintransformation1}}$	$\underline{x} = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) + j\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$
$x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{\text{Hintransformation2}}$	$\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
		Berechnungen im komplexen Bereich
$y = \text{Im}\{y\} = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{\text{Ruecktransformation1}}$	$\underline{y} = \hat{y} e^{j(\omega t + \varphi_y)}$
$y = \text{Re}\{y\} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{\text{Ruecktransformation2}}$	$\underline{y} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y) + j\hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$

HT1 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen reellen Kosinusters mit dem ursprünglichen Sinusterm als Imaginärteil

HT2 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen imaginären Sinusters mit dem ursprünglichen Kosinusterm als Realteil

RT1 entnahme des Imaginärteils

RT2 entnahme des Realteils