

Formelsammlung - ET/TI

Marc Ludwig

9. Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

I	Mathematik	5
1	Algebra	6
1.1	Rechenregeln fuer Potenzen	6
1.2	Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen	6
1.3	Potenzen und Logarithmen	7
1.3.1	Der natuerliche Logarithmus	7
1.3.2	Rechnen mit Logarithmen	7
1.4	Der Binomische Lehrsatz	7
1.5	Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens	8
1.5.1	Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens	8
1.5.2	Additionstheoreme	8
1.5.3	Funktionen des doppelten und halben Winkels	9
1.5.4	Umformungen	9
1.6	Komplexe Zahlen	10
1.6.1	Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen	10
1.6.2	Rechnen mit Komplexen Zahlen	11
2	Funktionen	12
2.1	Gleichungen	12
2.1.1	Gleichungen n -ten Grades	12
2.1.2	Lineare Gleichungen	12
2.1.3	Quadratische Gleichungen	13
2.1.4	Biquadratische Gleichungen	13
2.1.5	Gleichungen höheren Grades	13
2.1.6	Wurzelgleichung	13
2.1.7	Ungleichungen	14
2.1.8	Betragsgleichungen	14
3	Vektorrechnung	15
3.1	Vektorrechnung	15
3.1.1	Grundlagen	15

3.1.2	Vektoroperationen	16
3.1.3	Geraden	17
3.1.4	Ebenen	17
4	Differentialrechnung	19
4.1	Differntialrechnung	19
4.1.1	Erste Ableitungen der elementaren Funktionen	19
4.1.2	Rechenregeln	20
4.1.3	Fehlerrechnung	20
4.1.4	Linearisierung und Taylor-Polynom	21
4.1.5	Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital	22
4.1.6	Differentielle Kurvenuntersuchung	22
4.2	Differentialgleichungen	24
4.2.1	DG 1. Ordnung	24
4.2.2	Lineare DG 2. Ordnung	24
5	Folgen und Reihen	27
6	Interpolation	28
II	Physik	29
7	Kinematik	30
7.1	Analogietabelle	30
7.1.1	Translation	31
7.1.2	Rotation	31
7.2	Dynamik	32
7.2.1	Geradlinig (Translation)	32
7.2.2	Drehbewegung(Rotation)	32
7.2.3	Geneigte Ebene	33
7.2.4	Reibung	33
7.2.5	Feder	33
7.2.6	Elastischer Stoss	34
7.2.7	Unelastischer Stoss	34
7.2.8	Rotierendes Bezugssystem	35
7.3	Schwerpunkt	36
7.4	Trägheitsmoment	37
7.5	Elastizitaetslehre	38
7.6	Schwingungen	39
7.6.1	Ungedämpfte Schwingungen	39
7.6.2	Gedaempfte Schwingungen	40

8	Fluiddynamik	42
8.1	Ohne Reibung	42
8.2	Laminare Reibung	43
9	Gravitation	44
10	Elektrostatik	45
11	Thermodynamik	47
11.1	Wärmedehnung	47
11.2	Wärme	47
11.3	Mischtemperatur	47
11.4	Wärmeleitung	47
11.5	Wärmekonvektion	47
11.6	Wärmewiderstand	48
11.6.1	Wärmeübertragung	48
11.6.2	Wärmestrahlung	48
11.6.3	Zustandsänderung des idealen Gases	48
12	Optik	50
12.1	Brechung	50
12.2	Totalreflexion	50
12.3	Hohlspiegel	50
12.4	Linse	51
12.5	Lichtwellenleiter	52
III	Elektrotechnik	53
13	Gleichstromtechnik	54
13.1	Grundgrößen	54
13.2	Lineare Quellen	55
13.3	Kirchhoffsche Gesetze	55
14	Wechselstromtechnik	56
14.1	Anteile und Formfaktoren	57
14.2	Leistung und Leistungsfaktoren	57
14.2.1	Wirkleistung	57
14.2.2	Mittlere Leistung	57
14.2.3	Scheinleistung	57
14.2.4	Leistungsfaktor	57
14.3	Sinusförmige Größen	58
14.3.1	Sinusschwingung	58

14.3.2	Kosinusschwingung	58
14.3.3	Nullphasenzeit	58
14.3.4	Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz	58
14.3.5	Wechsel zwischen Sinus und Kosinus	59
14.3.6	Differentiation und Integration von Sinusgrößen	60
14.3.7	R, L und C im kompl. Zeigerbereich	61
14.3.8	Widerstands und Leitwertoperator	61
14.3.9	Resultierende Operatoren	62
14.3.10	Anteile am komplexen Widerstand (Impedanz)	62
14.3.11	Anteile am komplexen Leiwert (Admitanz)	62
14.3.12	komplexer Widerstand / komplexer Leitwert	62
14.3.13	Momentanleistung / Augenblicksleistung	63
14.3.14	Blindleistung	63
14.3.15	Mittlere Leistung / Wirkleistung	63
14.3.16	Definition von Blind- und Scheinleistung	63
14.3.17	Beziehungen zwischen Wirk- Blind- und Scheinleistung	64
14.3.18	Die komplexe Leistung	64

Teil I

Mathematik

Kapitel 1

Algebra

Why waste time learning
when ignorance is instantaneous?
- Hobbes

1.1 Rechenregeln fuer Potenzen

$$\begin{array}{lll} a^m \cdot a^n = a^{m+n} & \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n} \\ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n & \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n & (\text{fuer } a > 0) \ a^b = e^{b \cdot \ln a} \end{array}$$

1.2 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Potenzen und Wurzeln existieren.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

1.3 Potenzen und Logarithmen

Schreibweise: $x = \log_a(b)$ mit $a > 0, a \neq 1$ und $b > 0$.

Es gilt: $\log_a(1) = 0, \log_a(a) = 1$.

1.3.1 Der natuerliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e mit $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828\dots$

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1; \text{ da } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Man beachte: $x^a = e^{\ln(x) \cdot a}$

1.3.2 Rechnen mit Logarithmen

Es gilt:	Weitere Beziehungen:
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n} \log_a(u)$
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$a^{\log_a(u)} = \log_a(a^u) = u$
$\log_a(u^p) = p \cdot \log_a(u)$	$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$

1.4 Der Binomische Lehrsatz

Die Potenzen eines Binoms $a+b$ lassen sich nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln ($n \in \mathbb{N}^*$):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 \cdot b^{n-1} + b^n$$

Die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen Binominalkoeffizienten, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Einige Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 & \quad \binom{n}{k} = 0 \text{ fuer } k > n & \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} & \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

1.5 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens**1.5.1 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens**

$$\begin{aligned} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) &= 1 & \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) &= 1 \\ \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} & \cot(\alpha) &= \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \\ 1 + \tan^2(\alpha) &= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} & 1 + \cot^2(\alpha) &= \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

1.5.2 Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)} \end{aligned}$$

1.5.3 Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2 \sin^2(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\alpha))$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha))$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$$

1.5.4 Umformungen

Summe oder Differenz in ein Produkt

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Produkt in eine Summe oder Differenz

$$2 \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos(\alpha) \cos(\beta) = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin(\alpha) \cos(\beta) = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$$

1.6 Komplexe Zahlen

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man:

$$\mathbb{C} = \{z | z = a + bj, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}$$

a-Realteil b-Imaginaerteil j-imaginaere Einheit

kartesische Form	trigonometrische Form	exponentialform
$z = a + bj$	$z = z (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi)$	$z = z \cdot e^{j\varphi}$
$z^* = (a + bj)^* = a - bj$	$z^* = z (\cos \varphi - j \cdot \sin \varphi)$	$z^* = z \cdot e^{-j\varphi}$

$|z|$ = Betrag von z

φ = Argument (Winkel) von z

z^* = Konjugiert komplexe Zahl

1.6.1 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

Polarform \rightarrow Kartesische Form

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| (\cos \varphi + j \cdot \sin \varphi) = \underbrace{|z| \cdot \cos \varphi}_a + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin \varphi}_b = a + bj$$

Kartesische Form \rightarrow Polarform

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

1.6.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j \cdot (a_1b_2 + a_2b_1)$$

In der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [|z_1| (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [|z_2| (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)] \\ &= (|z_1| |z_2|) \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= (|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}) \cdot (|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}) = (|z_1| |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division

In kartesischer Form

In der Polarform

Kapitel 2

Funktionen

2.1 Gleichungen

2.1.1 Gleichungen n -ten Grades

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R})$$

Eigenschaften

- Die Gleichung besitzen maximal n reelle Lösungen.
- Es gibt genau n komplexe Lösungen.
- Für ungerades n gibt es mindestens eine reelle Lösung.
- Komplexe Lösungen treten immer Paarweise auf.
- Es existieren nur Lösungsformeln bis $n \leq 4$. Für $n > 4$ gibt es nur noch grafische oder numerische Lösungswege.
- Wenn eine Nullstelle bekannt ist kann man die Gleichung um einen Grad verringern, indem man den zugehörigen Linearfaktor $x - x_1$ abspaltet (Polynome Division).

2.1.2 Lineare Gleichungen

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

2.1.3 Quadratische Gleichungen

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Normalform mit Lösung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Überprüfung (Vietascher Wurzelsatz)

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

x_1, x_2 : Lösung der quadratischen Gleichung.

2.1.4 Biquadratische Gleichungen

Diese Gleichungen lassen sich mithilfe der Substitution lösen.

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$$

$$u = x^2$$

$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0$$

$$x = \pm \sqrt{u}$$

Das u kann mithilfe der Lösungsformel einer quadratischen Gleichung gelöst werden.

2.1.5 Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades kann man durch graphische oder numerische Ansätze lösen. Hilfreich ist das finden einer Lösung und das abspalten eines Linearfaktor, mithilfe der Polynomdivision oder dem Horner Schema, von der ursprünglichen Gleichung.

Polynomdivision

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{x - x_0} = b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 + r(x)$$

x_0 ist dabei die erste gefundene Nullstelle. $r(x)$ verschwindet wenn x_0 eine Nullstelle oder eine Lösung von $f(x)$ ist.

$$r(x) = \frac{a_3 \cdot x_0^3 + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x - x_0}$$

2.1.6 Wurzelgleichung

Wurzelgleichungen löst man durch quadrieren oder mit Hilfe von Substitution. Bei Wurzelgleichung ist zu beachten das quadrieren keine Äquivalente Umformung ist und das Ergebniss überprüft werden muss.

2.1.7 Ungleichungen

- Beidseitiges Subtrahieren oder Addieren ist möglich
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige positiven Zahl multipliziert oder dividiert werden
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige negativen Zahl multipliziert oder dividiert werden, wenn man gleichzeitig das Relationszeichen umdreht.

2.1.8 Betragsgleichungen

Betragsgleichungen löst man mithilfe der Fallunterscheidung. Dabei wird einmal davon ausgegangen das der Term innerhalb des Betrags einmal positiv und einmal negativen sein kann.

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Kapitel 3

Vektorrechnung

3.1 Vektorrechnung

3.1.1 Grundlagen

Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \\ &= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2 Punkt Vektor

$$P_1 \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Betrag

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= a \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &= \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}\end{aligned}$$

Richtungswinkel

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} \\ 1 &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma\end{aligned}$$

3.1.2 Vektoroperationen

Addition und Subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$a \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} ab_x \\ ab_y \\ ab_z \end{pmatrix}$$

Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

Kreuzprodukt

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ Fläche des Parallelograms \vec{a}, \vec{b}
 $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Spatprodukt

$$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$$

Volumen des Parallelepiped $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\begin{aligned} [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] &= \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= a_x(b_y c_z - b_z c_y) \\ &\quad + a_y(b_z c_x - b_x c_z) \\ &\quad + a_z(b_x c_y - b_y c_x) \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Schnittwinkel

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Projektion

$$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = (\vec{b} \circ \vec{e}_a) \vec{e}_a$$

3.1.3 Geraden

Geradengleichung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ d &= \frac{|\vec{a} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}|}\end{aligned}$$

Abstand zweier paralleler Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_1 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{|\vec{a}_1|}\end{aligned}$$

Abstand zweier windschiefen Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_2 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}\end{aligned}$$

3.1.4 Ebenen

Ebenengleichung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t, s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &\quad + s(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Parameterfreie Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t, s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ \vec{r} \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) &= \vec{r}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + t\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + s\vec{a}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ \vec{r} \circ \vec{n} &= \vec{r}_1 \circ \vec{n} + 0 + 0 \\ \vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_1) &= 0\end{aligned}$$

Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

Normierter Normalenvektor

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Hessesche Normalform

$$0 = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

$$\begin{aligned}d &= \frac{|\vec{n} \times (\vec{OP} - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|} \\ d &= \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\end{aligned}$$

Abstand eines Geraden von einer Ebene Abstand zweier paralleler Ebenen

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}_1$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_G - \vec{r}_1)|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{Ar_{G1} + Br_{G2} + Cr_{G3} + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$$

$$\vec{g}(t, s) = \vec{r}_2 + t\vec{a}_3 + s\vec{a}_4$$

$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{n}|}$$

Schnittwinkel zweier Ebenen

$$\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Durchstoßpunkt

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}$$

$$\vec{r}_s = \vec{r}_G + \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_1 - \vec{r}_G)}{\vec{n} \circ \vec{a}} \vec{a}$$

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|} \right)$$

Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 Differntialrechnung

4.1.1 Erste Ableitungen der elementaren Funktionen

Potenzfunktion

$$x^n \iff n \cdot x^{n-1}$$

Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned} e^x &\iff e^x \\ a^x &\iff \ln a \cdot a^x \end{aligned}$$

Logarithmusfunktionen

$$\begin{aligned} \ln x &\iff \frac{1}{x} \\ \log_a x &\iff \frac{1}{(\ln a) \cdot x} \end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen

$$\begin{aligned} \sin x &\iff \cos x \\ \cos x &\iff -\sin x \\ \tan x &\iff \frac{1}{\cos^2 x} \\ \tan x &\iff 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

Arcusfunktionen

$$\begin{aligned} \arcsin x &\iff \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arccos x &\iff \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \arctan x &\iff \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

Hyperbolische Funktionen

$$\begin{aligned} \sinh x &\iff \cosh x \\ \cosh x &\iff \sinh x \\ \tanh x &\iff \frac{1}{\cosh^2 x} \\ \tanh x &\iff 1 + \tanh^2 x \end{aligned}$$

4.1.2 Rechenregeln

Faktorregel

$$\frac{d}{dx} (C \cdot f(x)) = C \cdot f'(x)$$

Summenregel

$$\frac{d}{dx} (g(x) + f(x)) = g'(x) + f'(x)$$

Produktregel

$$\frac{d}{dx} (g(x) \cdot f(x)) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

$$\frac{d}{dx} (h(x) \cdot g(x) \cdot f(x)) = h' \cdot g \cdot f + h \cdot g' \cdot f + h \cdot g \cdot f'$$

Quotientenregel

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f(x)^2}$$

Kettenregel

$$\frac{d}{dx} (g(f(x))) = g'(f) \cdot f'(x)$$

Logarithmische Ableitungen

$$\frac{d}{dx} y = f(x)$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{d}{dx} \ln f(x)$$

4.1.3 Fehlerrechnung

Absoluter Fehler

Δx Absoluter Fehler der Eingangsgröße

Δy Absoluter Fehler der Ausgangsgröße

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Relativer Fehler

δx Relativer Fehler der Eingangsgröße in %

δy Relativer Fehler der Ausgangsgröße in %

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$$

$$\delta y = \frac{\Delta y}{y}$$

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\delta y = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \delta x$$

4.1.4 Linearisierung und Taylor-Polynom**Tangentengleichung**

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$$y_T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Taylor Polynom

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

R_n Restglied

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R_n(x)$$

Restglied

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$x_0 < c < x$, wenn $x_0 < x$

$x_0 > c > x$, wenn $x_0 > x$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

4.1.5 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

de l'Hospital

Gilt nur wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ gleich $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.1.6 Differentielle Kurvenuntersuchung

Normale der Kurve

$$y_N(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x)}(x - x_0)$$

Monotonie-Verhalten

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Monoton wachsend} \\ < 0 \text{ Monoton fallend} \end{cases}$$

Krümmungs-Verhalten

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Linkskr. (konvex)} \\ < 0 \text{ Rechtskr. (konkav)} \end{cases}$$

Ableitung in Polarkordinaten

\dot{r} Ableitung nach φ

\ddot{r} Zweite Ableitung nach φ

$$y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi$$

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^3}$$

Ableitung in Parameterform

\dot{x} Ableitung nach t

\dot{y} Ableitung nach t

$$y = y(t)$$

$$x = x(t)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Bogendifferential

"Wegelement" einer Funktion

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

$$ds = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \cdot dt$$

$$ds = \sqrt{r^2 + (r')^2} \cdot d\varphi$$

Winkeländerung

$$\tau = \arctan y'$$

$$d\tau = \frac{y''}{1 + (y')^2} \cdot dx$$

Krümmungskreis

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|}$$

$$x_K = x_P - y' \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$

$$y_K = y_P + \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$

- ρ Radius des Krümmungskreises

- x_K x-Koordinaten des Kreismittelpunktes
- y_K y-Koordinaten des Kreismittelpunktes
- x_P x-Koordinaten des Kurvenpunktes
- y_P y-Koordinaten des Kurvenpunktes

Kurvenkrümmung

$$\kappa = \frac{d\tau}{ds}$$

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}}$$

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}$$

$$\kappa = \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{\sqrt{(r^2 + (r')^2)^3}}$$

4.2 Differentialgleichungen

Anfangswertproblem: Werte nur an einer Stelle vorgegeben
 Randwertproblem: Werte an mehreren Stellen vorgegeben

Lineare DG

$$y_{all} = y_h + y_p$$

4.2.1 DG 1. Ordnung

Trennung der variablen

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Lineare DG

$$y' + f(x) \cdot g(y) = g(x)g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

$$y_{all} = e^{-F(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C \right)$$

4.2.2 Lineare DG 2. Ordnung

Darstellung

$$a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = g(x)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

Fundamental Lösungen

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta \cdot j$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$$

$$+ C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

In Folgenden Aufzählungen gilt:

- $G(x)$ Ansatz
- $g(x)$ Störglied
- r Anzahl der Resonanzfälle

Partikuläre Lösungen(Polynom)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

$$G(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n \quad \lambda \neq 0$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) \cdot x^r \quad \lambda = 0$$

Partikuläre Lösungen(Polynom und e-Funktion)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) e^{mx}$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \quad \lambda \neq m$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot x^r \quad \lambda = m$$

Partikuläre Lösungen(sin- und cos Funktion)

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$g(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx)$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \quad \lambda \neq \pm kj$$

$$G(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx) \cdot x^r \quad \lambda = \pm kj$$

Partikuläre Lösungen(e-, sin- und cos Funktion)

$$0 = a\lambda^2 + b\lambda + c$$

$$g(x) = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) e^{mx} \cdot (c \cos(kx) + d \sin(kx))$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx))$$

$$\lambda \neq m \pm kj$$

$$G(x) = (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n) e^{mx} \cdot (C \cos(kx) + D \sin(kx)) \cdot x^r$$

$$\lambda = m \pm kj$$

Kapitel 5

Folgen und Reihen

Kapitel 6

Interpolation

Teil II

Physik

Kapitel 7

Kinematik

Perfection is achieved
only on the point of collapse.
- C. N. Parkinson

7.1 Analogietabelle

Translation		Rotation
\vec{s} $\downarrow \frac{ds}{dt}$ \vec{v} $\downarrow \frac{dv}{dt}$ \vec{a}	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_{Tan}} - \underbrace{\omega^2 r}_{a_R}$	$\vec{\varphi}$ $\downarrow \frac{d\varphi}{dt}$ $\vec{\omega}$ $\downarrow \frac{d\omega}{dt}$ $\vec{\alpha}$
m $\downarrow \frac{dm}{dt}$ \vec{F} $\downarrow \frac{dF}{dt}$ \vec{p} $\frac{m}{2}v^2$	E_{kin}	J $\downarrow \frac{dJ}{dt}$ \vec{M} $\downarrow \frac{dM}{dt}$ \vec{L} $\frac{J}{2}\omega^2$

7.1.1 Translation

$$\begin{aligned}a(t) &= a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \\v(t) &= a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\s(t) &= \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\end{aligned}$$

Bahngroessen

$$\begin{aligned}a_t(t) &= a_0 = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s} \\v(t) &= a_0 \cdot t + v_0 = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \\s(t) &= \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0\end{aligned}$$

Kreisfrequenz

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{2 \cdot \pi}{T} \\&= 2 \cdot \pi \cdot n \\&= 2 \cdot \pi \cdot f\end{aligned}$$

Umdrehungen

$$\begin{aligned}N &= \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 \\&= n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2\end{aligned}$$

7.1.2 Rotation

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_0 = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \\\omega(t) &= \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \\\varphi(t) &= \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0\end{aligned}$$

Winkelgroessen

$$\begin{aligned}\vec{a}_t &= \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r & \alpha \perp r \\\vec{\alpha} &= \vec{r} \times \vec{a}_t \\\vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot r & \omega \perp r \\\vec{\omega} &= \vec{r} \times \vec{v} \\s &= \varphi \cdot r\end{aligned}$$

Radialbeschleunigung

$$\begin{aligned}a_r &= \frac{v^2}{r} \\&= v \cdot \omega \\&= \omega^2 \cdot r\end{aligned}$$

7.2 Dynamik

7.2.1 Geradlinig (Translation)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{F}_{\text{Tr}} = -m \cdot \vec{a}$$

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Kraftstoss

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} d\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Arbeit

$$W = - \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\text{Tr}} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\vec{v} \circ d\vec{v} = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

Hubarbeit

$$W_{\text{hub}} = mgh$$

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{dW}{dt} = \dot{W}$$

7.2.2 Drehbewegung(Rotation)

Massentraegheitsmoment

$$J = \int r^2 dm$$

Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= J \cdot \vec{\omega}$$

Kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Arbeit

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e}_\omega \, d\varphi \\
 &= \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} \, d\vec{\omega} \\
 &= \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_0^2)
 \end{aligned}$$

7.2.3 Geneigte Ebene**Kräfte**

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_N &= \vec{F}_G \cos \alpha \\
 \vec{F}_H &= \vec{F}_G \sin \alpha
 \end{aligned}$$

7.2.4 Reibung**Reibungskraft**

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

7.2.5 Feder**HOOKsches Gesetz**

$$\begin{aligned}
 F &= -kx \\
 M &= D\varphi
 \end{aligned}$$

Leistung

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Zentripedalkraft

$$\begin{aligned}
 F_{zp} &= -m \cdot \omega^2 \cdot r \\
 &= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e}_r}{r}
 \end{aligned}$$

Rollreibung

$$\begin{aligned}
 M &= f \cdot F_N \\
 F_R &= \frac{f}{r} \cdot F_N
 \end{aligned}$$

Federspannarbeit

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_{\max}^2 - x_{\min}^2)
 \end{aligned}$$

7.2.6 Elastischer Stoß

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}}$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Zentraler, Gerader, Elastischer Stoß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 \\ v_1' &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \end{aligned}$$

7.2.7 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

Energie vor den Stoß = Energie nach den Stoß + Arbeit

$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

Impulserhaltung

Impuls vor den Stoß = Impuls nach den Stoß

$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Total unelastischer Stoss

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 + \Delta W$$

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v'$$

$$v' = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2$$

Drehimpulserhaltungssatz

Drehimpuls zur Zeit 1 = Drehimpuls zur Zeit 2

$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

Kopplung zweier Rotationskörper

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0\vec{\omega}_0 + J_1\vec{\omega}_1}{J_1 + J_2}$$

$$W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2(J_0 + J_1)}(\omega_0 - \omega_1)^2$$

7.2.8 Rotierendes Bezugssystem**Zentrifugalkraft**

$$\vec{F}_Z = F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$= -m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$F_Z = -m\frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

7.3 Schwerpunkt

mehrere Punktmassen

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Schwerpunkt in Zylinderkoordinaten

$$r_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}$$

$$\varphi_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}$$

$$z_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}{\int_z \int_\varphi \int_r r \rho \, dr \, d\varphi \, dz}$$

$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi \quad z = z$$

Allgemein

$$\vec{r}_{\text{Sp}} = \frac{\int \vec{r} \, dm}{\int dm}$$

Schwerpunkt in kartesischen Koordinaten

$$x_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x x \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz}$$

$$y_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x y \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz}$$

$$z_{\text{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x z \rho \, dx \, dy \, dz}{\int_z \int_y \int_x \rho \, dx \, dy \, dz}$$

7.4 Trägheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$

$$J = \int_m r^2 \, dm$$

$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \, dr \, d\varphi \, dz$$

STEINER'scher Satz

$$J_x = mr^2 + J_s$$

Traegheitsmoment Kugel

$$J_{\text{Sp}} = \frac{2}{5} mr^2$$

Traegheitsmoment Zylinder

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{2} mr^2$$

**Traegheitmoment Kreisring
(Torus)**

$$J_{\text{Sp}} = mr^2$$

Traegheitsmoment Stab

$$J_{\text{Sp}} = \frac{1}{12} ml^2$$

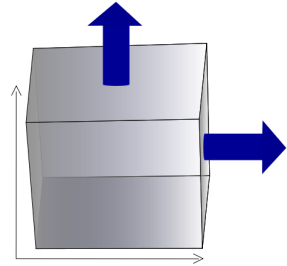
7.5 Elastizitaetslehre

Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{F}_n}{dA}$$

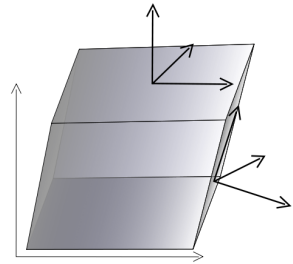
$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{F}_t}{dA}$$



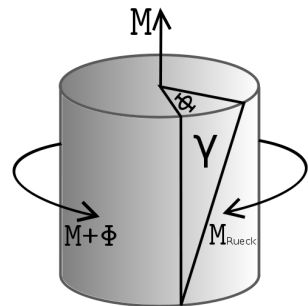
Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$



Drillung

$$\psi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{W_t}{G \cdot J_p} \tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$



Flaechenmoment

$$J_p = \int r^2 dA = \int_{\varphi} \int_r r^3 dr d\varphi$$

Verformungsarbeit

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

7.6 Schwingungen

Harmonische Schwingungen

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

7.6.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -\hat{x}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -\hat{x}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Mathematisches Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Physikalisches Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgl}{J_A}\varphi$$

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mgl}}$$

Torsionsschwingung

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{D}{J_A}\varphi \\
\varphi(t) &= \hat{\varphi} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{\varphi}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{J_A}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{D}}
\end{aligned}$$

Flüssigkeitsspendel

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -\frac{2A\rho g}{m}y \\
\varphi(t) &= \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{\varphi}(t) &= -\hat{y}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}
\end{aligned}$$

Elektrischer Schwingkreis

$$\begin{aligned}
0 &= L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} \\
q(t) &= \hat{Q} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{q}(t) &= -\hat{Q}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

7.6.2 Gedaempfte Schwingungen**Schwingungsgleichung**

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

COULOMB Reibung

$$\begin{aligned}
F_R &= -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \\
0 &= m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N
\end{aligned}$$

Gleitreibung

$$\begin{aligned}
 x(t) &= -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1) \cos(\omega t) - \hat{x}_1 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\
 x(t) &= -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1) \cos(\omega t) + \hat{x}_1 & \frac{T}{2} \leq t \leq T \\
 \hat{x}_1 &= \frac{\mu F_N}{k}
 \end{aligned}$$

Viskosereibung

$$\begin{aligned}
 0 &= m\ddot{x} + b\dot{x} + kx & d &= 2D \\
 x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t} & Q &= \frac{1}{d} \\
 x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}t} \\
 \delta &= \frac{b}{2m} & x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi) \\
 D &= \frac{\delta}{\omega_0} \\
 D &= \frac{b}{2} \frac{1}{\sqrt{mk}} \\
 \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
 \Lambda &= \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) \\
 \Lambda &= \delta T \\
 \omega_D &= \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

Kriechfall $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t}$$

Kapitel 8

Fluiddynamik

Premature optimization
is the root of all evil.
- D. Knuth

On the other hand,
we cannot ignore efficiency.
- Jon Bentley

8.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

$$p = \frac{dF_N}{dA}$$

Dynamischer Druck

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Schweredruck

$$p = \frac{\rho V g}{A} \\ = h\rho g$$

Volumenstrom

$$\dot{V} = vA \\ = \iint_A \vec{v} d\vec{A} \\ = \frac{dV}{dt} \\ = Q$$

Massenstrom

$$\dot{m} = jA \\ = \iint_A \vec{j} d\vec{A} \\ = \frac{dm}{dt}$$

Auftrieb

$$\vec{F}_A = -\rho_V \vec{g} V \\ = -\frac{\rho_V}{\rho_M} \vec{F}_G$$

Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m}|_1 = \dot{m}|_2 \quad \dot{V}|_1 = \dot{V}|_2 \\ v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \rho_1 = \rho_2$$

Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

Volumenausdehnungskoeffizient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

8.2 Laminare Reibung**Newtonsches Reibungsgesetz**

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$$

Laminare Strömung (Rohr)

$$v(r) = \frac{p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

$$p = \frac{4\eta l}{R^2} v(0)$$

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} p$$

Umströmung (Kugel)

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

Barometrische Höhenformel

$$p = p_0 e^{-Ch}$$

$$C = \frac{\rho_0 g}{p_0}$$

Bernoulli Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const}$$

Bernoulligleichung mit Reibung

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_1$$

$$= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gh_2 + \Delta p$$

Reynoldszahl

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$

$$Re > Re_{krit}$$

Strömung wird Turbulent

Kapitel 9

Gravitation

The year is 787!
A.D.?
- Monty Python

Gravitationskraft

$$\vec{F}_{g,2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_r$$
$$\vec{F}_g = \vec{E}_g \cdot m = \vec{g} m$$

Gravitationspotential

$$\phi = -G \frac{M}{r}$$
$$\vec{E}_g = \text{grad} \phi$$

Arbeit

$$W_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ d\vec{r}$$
$$= GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Planetenbahnen

$$\left(\frac{a}{a_E} \right)^3 = \left(\frac{T}{T_E} \right)^2$$

Kapitel 10

Elektrostatik

Don't interrupt me
while I'm interrupting.
- Winston S. Churchill

Ladung

$$\begin{aligned}Q &= n \cdot e_0 \\&= CU \\&= \int i \, dt\end{aligned}$$

Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \vec{r}_i$$

COULOMB Gesetz

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}_{12} \\&= \vec{E} Q \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \\&= -\text{grad}\varphi \\&= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z\right)\end{aligned}$$

Spannung

$$\begin{aligned}U_{AB} &= \frac{W_{AB}}{Q} \\&= \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s} \\&= \oint_s \vec{E} \circ d\vec{s} = 0 \\&= \varphi_A - \varphi_B \\&= -\int_{\infty}^A \vec{E} \circ d\vec{s} \\&\quad - \left(-\int_{\infty}^B \vec{E} \circ d\vec{s}\right)\end{aligned}$$

El- / Verschiebungsfluß

$$\psi = \int_A \vec{E} \circ d\vec{A}$$

$$\psi = \oint_A \vec{E} \circ d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Flußdichte

$$\vec{D} = \frac{dQ}{dA} \vec{e}_A$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$Q = \oint_A D dA$$

Kapazität

$$Q = CU$$

OHMsches Gesetz

$$\begin{aligned} I &= \oint_A \vec{j} \circ d\vec{A} \\ &= \oint_A \kappa \vec{E} \circ d\vec{A} \\ &= \underbrace{\kappa E \cdot 4\pi r^2}_{\text{Kugel}} \end{aligned}$$

Arbeit im elektrischem Feld

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{D}$$

$$W = \int_V w dV$$

$$= -Q \int_A^B \vec{E} \circ d\vec{s}$$

$$= \int_U Q dU$$

$$= \int_U CU dU$$

$$= \frac{1}{2} CU^2$$

Kapitel 11

Thermodynamik

11.1 Wärmedehnung

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$$

$$V(T) = V_0(1 + \gamma(T - T_0))$$

$$l(T) = l_0(1 + \alpha(T - T_0))$$

$$\gamma \approx 3 \cdot \alpha$$

$$\gamma \approx \beta$$

11.2 Wärme

$$\Delta Q = c \cdot m(T - T_0)$$

$$\Delta Q = C(T - T_0)$$

$$\Delta Q = \int_{T_0}^T c \cdot m \, dT$$

$$\Delta Q = c_{mol} \cdot n(T - T_0)$$

11.3 Mischtemperatur

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^n T_i m_i c_i}{\sum_{i=1}^n m_i c_i}$$

\dot{Q} Ist durch einen mehrschichtiges
stationäres System Konstant

11.4 Wärmeleitung

$$\dot{Q} = \frac{dQ}{dt} = \Phi = P$$

$$\vec{\dot{q}} = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \vec{e}_A$$

$$\vec{\dot{q}} = -\lambda \operatorname{grad} T$$

$$\vec{\dot{q}} = \frac{\lambda}{s} (T_A - T_B) \cdot \vec{e}_s$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i}} \cdot (T_A - T_B)$$

11.5 Wärmekonvektion

$$\dot{q} = \alpha (T_A - T_B)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}} \cdot (T_A - T_B)$$

11.6 Wärmewiderstand

$$R_{th} = \frac{T_A - T_B}{\dot{q} \cdot A} = \frac{s}{\lambda A} = \frac{1}{\alpha A} = \sum_{i=1}^n R_i$$

11.6.1 Wärmeübertragung

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n R_i}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^n R_i} \cdot (T_A - T_B)$$

$$\dot{q} = k \cdot (T_A - T_B)$$

11.6.2 Wärmestrahlung

$$\alpha = \varepsilon$$

$$1 = \alpha + \tau + \vartheta$$

$$\dot{Q} = \varepsilon A \sigma T^4$$

$$\dot{Q}_{AB} = C_{AB} A_A (T_A^4 - T_B^4)$$

$$C_{AB} = \varepsilon_{AB} \sigma = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_A} + \frac{1}{\sigma_B} - \frac{1}{\sigma}} \quad \text{Parallel}$$

$$C_{AB} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{A_A}{A_B} \left(\frac{1}{\varepsilon_B} - 1 \right)} \quad A_A \text{ von } A_B \text{ umschlossen}$$

$$C_{AB} \approx \varepsilon_A \sigma \quad \text{parallel } (A_A \ll A_B)$$

11.6.3 Zustandsänderung des idealen Gases

Teilchen stehen nicht in Wechselwirkung, besitzen kein Volumen und es kommt zu keinem Phasenübergang

Energie

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

Nur Isobar:

$$dH = c_p m dT = U + p dV$$

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Zustandsgleichung

$$\frac{pV}{T} = \text{const}$$

$$pV = NkT = mR_s T = nRT$$

$$R_s = \frac{nR}{m}$$

$$R_s = c_p - c_v$$

Isotherm

$$pV = \text{const}$$

$$T = \text{const}$$

$$U_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$Q_{12} = -W_{12}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W_{12} = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1} + mc_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Isohar

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$

$$p = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_p (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = -p (V_2 - V_1)$$

$$U_{12} = Q_{12} + W_{12}$$

$$S_{12} = mc_p \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Isochor

$$\frac{p}{T} = \text{const}$$

$$V = \text{const}$$

$$Q_{12} = mc_v (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = 0$$

$$U_{12} = Q_{12}$$

$$S_{12} = mc_v \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Adiabat

$$pV^\kappa = \text{const}$$

$$Q = \text{const}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$Q_{12} = 0$$

$$W_{12} = mc_v (T_2 - T_1)$$

$$W_{12} = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left(\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\kappa} - 1 \right)$$

$$U_{12} = W_{12}$$

$$S_{12} = 0;$$

Kreisprozess

$$\oint dU = 0$$

$$\oint dU = \oint dQ + \oint dW$$

$$\text{Reversibel: } \oint dS = 0$$

$$\text{Irreversibel: } \oint dS > 0$$

Carnot-Prozeß

$$\eta_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{Q_{zu} - Q_{AB}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{T_h - T_n}{T_n}$$

Kapitel 12

Optik

The path taken between two points by a ray of light
is the path that can be traversed in the least time.
- Pierre de Fermat

12.1 Brechung

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

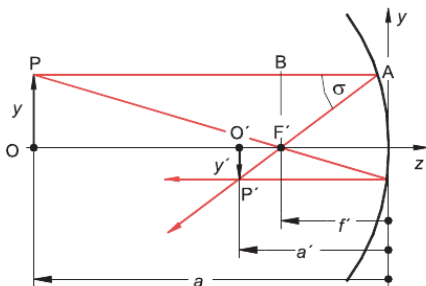
$$\varepsilon_2 = \arcsin \frac{\sin \varepsilon_1 \cdot n_1}{n_2}$$

12.2 Totalreflexion

$$\sin \varepsilon_g = \frac{n_2}{n_1}$$

Totalreflexion tritt nur auf, wenn der Lichtstrahl von einem dichteren
in ein optisch dünneren Stoff übergeht.

12.3 Hohlspiegel



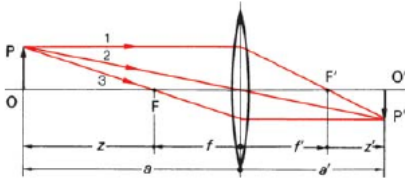
$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$f' = \frac{r}{2}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

$$\beta' = -\frac{a'}{a}$$

12.4 Linse



$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{a}$$

$$f = \frac{a \cdot a'}{a + a'} = -f'$$

$$a' = \frac{a f'}{a + f'}$$

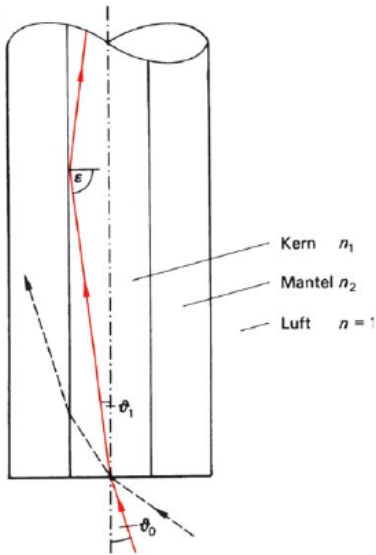
$$\beta' = \frac{f'}{a + f'}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

$$D' = \frac{1}{f'} = (n_L - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Linsenform						
Bezeichnung	bi-konvex	plan-konvex	konkav-konvex	bi-konkav	plan-konkav	konvex-konkav
Radien	$r_1 > 0$ $r_2 < 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 < 0$	$r_1 < r_2 < 0$	$r_1 < 0$ $r_2 > 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 > 0$	$r_2 < r_1 < 0$
Brennweite im optisch dünneren Medium	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' < 0$

12.5 Lichtwellenleiter



Totalreflexion (Grenzwinkel)

$$n_1 \sin(90^\circ - \vartheta_1) = n_2 \implies \cos \vartheta_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

numerische Apertur

$$\begin{aligned} A_{WL} &= n_0 \sin \vartheta_0 = n_1 \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta_1} \\ &= n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \\ &= \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \\ &= \sqrt{n_{Kern}^2 - n_{Mantel}^2} \end{aligned}$$

Teil III

Elektrotechnik

Kapitel 13

Gleichstromtechnik

13.1 Grundgrößen

Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[Q] = 1C = 1As$$

$$Q = n \cdot e$$

Strom

$$[I] = 1A$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Stromdichte

$$[J] = 1 \frac{A}{mm^2}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

Potential

$$[\varphi] = 1V = 1 \frac{Nm}{As} = 1 \frac{kgm^2}{As^3}$$

$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

Spannung

$$[U] = 1V$$

$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

Widerstand und Leitwert

$$[R] = 1\Omega = 1\frac{V}{A}$$

$$R = \frac{U}{I}$$

$$= \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{A}$$

$$[G] = 1S = 1\frac{A}{V}$$

$$G = \frac{I}{U}$$

$$= \frac{1}{R}$$

$$= \kappa \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l}$$

Temperaturabhängigkeit

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha (\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\right)$$

Leistung

$$[P] = 1W = 1VA$$

$$P = u(t) \cdot i(t)$$

Leistung im Mittel

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt$$

13.2 Lineare Quellen**Spannungsquelle**

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$

$$U_l = I_q \cdot R_i$$

13.3 Kirchhoffsche Gesetze**Knotenpunktsatz**

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^n U_i = 0$$

Kapitel 14

Wechselstromtechnik

No rule is so general,
which admits not some exception.
- Robert Burton

Periodische zeitabhängige Größen

Allgemein $x(t) \rightarrow$ speziell $u(t); i(t); q(t); \dots$
es gilt $x(t) = x(t + n \cdot T); (n \in \mathbb{N}^*)$

Wechselgrößen

Allgemein $x_{\sim}(t)$; periodisch sich ändernde Größe, deren Gleichanteil bzw. zeitlich linearer Mittelwert gleich Null ist.

Nachweis:

$$\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x_{\sim}(t) dt = 0; (n \in \mathbb{N}^*); t_1 \text{ beliebiger Zeitwert}$$

Mischgrößen

Sind periodisch, Ihr Gleichanteil \bar{x} bzw. zeitlich linearer Mittelwert jedoch ist ungleich Null.

$$\begin{aligned} \text{Mischgröße} &= \text{Wechselgröße} + \text{Gleichanteil} \\ x(t) &= x_{\sim}(t) + \bar{x} \\ &= \text{gleichanteilbehaftete Wechselgröße} \end{aligned}$$

14.1 Anteile und Formfaktoren

Gleichanteil

$$\bar{x} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x(t) dt$$

Formfaktor

$$F = \frac{x_{eff}}{|\bar{x}|} \quad x_{eff} = |\bar{x}| \cdot F$$

Gleichrichtwert

$$|\bar{x}| = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} |x|(t) dt$$

crest - Faktor

Effektivwert

$$x_{eff} = X = \sqrt{\frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} x^2(t) dt}$$

$$\sigma = \frac{\hat{x}}{x_{eff}}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \rightarrow t_1 \text{ beliebiger Zeitwert} \rightarrow [|\bar{x}|] = [x(t)]$$

14.2 Leistung und Leistungsfaktoren

14.2.1 Wirkleistung

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt \\ &= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt \end{aligned}$$

14.2.2 Mittlere Leistung

$$\bar{p}(t) = P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} P(t) dt$$

14.2.3 Scheinleistung

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I$$

14.2.4 Leistungsfaktor

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{P}{S} \\ &= \frac{\frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} p(t) dt}{u_{eff} \cdot i_{eff}} \\ &= \frac{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} u^2(t) dt} \cdot \sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n \cdot T} i^2(t) dt}} \end{aligned}$$

14.3 Sinusförmige Größen

14.3.1 Sinusschwingung

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{x} \sin(2\pi f + \varphi_x) \\x(\omega t) &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)\end{aligned}$$

- \hat{x} : Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Linksverschiebung der Kurve

14.3.2 Kosinusschwingung

$$\begin{aligned}x(t) &= \hat{x} \cos(2\pi f + \varphi_x) \\x(\omega t) &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)\end{aligned}$$

- \hat{x} : Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Rechtssverschiebung der Kurve

14.3.3 Nullphasenzeit

$$t_x = -\frac{\varphi_x}{\omega} = -\varphi_x \cdot \frac{T}{2\pi}$$

14.3.4 Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz

$$\text{mit: } a = \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) \wedge b = \hat{b} \sin(\omega t + \beta)$$

Resultierende Funktion:

$$\begin{aligned}x &= a + b \\&= \hat{a} \sin(\omega t + \alpha) + \hat{b} \sin(\omega t + \beta) \\&= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

- \hat{x} : resultierende Amplitude
- φ : Nullphasenwinkel

$$\text{Wobei: } \hat{x} = +\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\alpha - \beta)}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{a} \sin \alpha + \hat{b} \sin \beta}{\hat{a} \cos \alpha + \hat{b} \cos \beta}$$

Vierquadrantenarkustangens

$$\varphi = \arctan \frac{ZP}{NP}$$

2. Quadrant $ZP > 0, NP < 0$	1. Quadrant $ZP > 0, NP > 0$
3. Quadrant $ZP < 0, NP < 0$	4. Quadrant $ZP < 0, NP > 0$

Der rotierende Zeiger als rotierender Vektor

$$\begin{aligned}
\text{Allgemein gilt: } \sin(\omega t + \varphi_x) &= \frac{GK}{HT} = \frac{b}{\hat{x}} \\
\cos(\omega t + \varphi_x) &= \frac{AK}{HT} = \frac{a}{\hat{x}} \\
b &= \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \\
a &= \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \\
\text{Als Einheitsvektor: } \vec{x} &= a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}
\end{aligned}$$

Zeigerspitzenendpunkt

$$\begin{aligned}
\underline{x} &= \text{Zeigerspitzenendpunkt} \\
\underline{x} &= \underbrace{\hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)}_{Re \rightarrow Abszisse} + j \cdot \underbrace{\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)}_{Im \rightarrow Ordinate} \\
\underline{x} &= \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)} \\
\underline{x}_{eff} &= \text{rotierender Effektivwertzeiger} \\
\underline{x}_{eff} &= \hat{x}_{eff} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}
\end{aligned}$$

14.3.5 Wechsel zwischen Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) \cos(\omega t + \varphi_x) &\equiv \hat{x}(t) \sin\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right) \\
\hat{x}(t) \sin(\omega t + \varphi_x) &\equiv \hat{x}(t) \cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Zeitbereich		komplexer Zeitbereich
$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{\text{Hintransformation1}}$	$\underline{x} = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) + j\hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x)$
$x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{\text{Hintransformation2}}$	$\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
		Berechnungen im komplexen Bereich
$y = \text{Im}\{y\} = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{\text{Ruecktransformation1}}$	$\underline{y} = \hat{y} e^{j(\omega t + \varphi_y)}$
$y = \text{Re}\{y\} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{\text{Ruecktransformation2}}$	$\underline{y} = \hat{y} \cos(\omega t + \varphi_y) + j\hat{y} \sin(\omega t + \varphi_y)$

HT1 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen reellen Kosinusterns mit dem ursprünglichen Sinustern als Imaginärteil

HT2 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen imaginären Sinusterns mit dem ursprünglichen Kosinustern als Realteil

RT1 entnahme des Imaginärteils

RT2 entnahme des Realteils

Merke: $\frac{1}{j} = -j \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

14.3.6 Differentiation und Integration von Sinusgrößen

Zeitbereich	Zeigerbereich
$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$	$\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$	
$\xrightarrow{\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{HT_{1/2}}}$	$\frac{d^n \underline{x}(t)}{dt^n} = (j\omega)^n \underline{x}$

Zeitbereich	Zeigerbereich
$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$	$\underline{x} = \hat{x} e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$	
$\xrightarrow{\int \dots \int x(t) dt^n \xrightarrow{HT_{1/2}}}$	$\int \dots \int \underline{x}(t) dt = \frac{1}{(j\omega)^n} \underline{x}$

14.3.7 R, L und C im kompl. Zeigerbereich

Ohmscher Widerstand	$\hat{U} = R \hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$
Induktivität	$\hat{U} = \omega L \hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega L}$
Kapazität	$\hat{U} = \frac{\hat{I}}{\omega C} \quad \hat{I} = \omega C \hat{U}$

14.3.8 Widerstands und Leitwertoperator

\underline{Z} komplexer Widerstand / Impedanz	\underline{Y} komplexer Leitwert / Admitanz
$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$	$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \cdot e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$
$ \underline{Z} = Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I}$	$ \underline{Y} = Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U}$
mit $\varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z$	mit $\varphi_i - \varphi_u = -\varphi_Z = \gamma_Y$

Widerstand

$$\underline{Z} = R \wedge \underline{Y} = 1/R$$

Kapazität

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Induktivität

$$\underline{Z} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

14.3.9 Resultierende Operatoren

Reihenschaltung

$$\underline{Z}_{ges} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i$$

Parallelschaltung

$$\underline{Y}_{ges} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i$$

Spannungsteiler

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}$$

Stromteiler

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}$$

14.3.10 Anteile am komplexen Widerstand (Impedanz)

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = R + jX = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi}$$

mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ Phasenwinkel; R = Wirkwiderstand;

X = Blindwiderstand; $|\underline{Z}|$ = Scheinwiderstand

$$R = R \quad L = \frac{X}{\omega} \text{ mit } X > 0 \quad C = -\frac{1}{\omega X} \text{ mit } X < 0$$

14.3.11 Anteile am komplexen Leiwert (Admitanz)

$$\underline{Y} = \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} + j \cdot \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = G + jB = |\underline{Y}| \cdot e^{j\gamma}$$

mit $\gamma = \varphi_i - \varphi_u$ Phasenwinkel; G = Wirkleitwert;

B = Blindleitwert; $|\underline{Y}|$ = Scheinleitwert

$$R = \frac{1}{G} \quad C = \frac{B}{\omega} \text{ mit } B > 0 \quad L = -\frac{1}{\omega B} \text{ mit } B < 0$$

14.3.12 komplexer Widerstand / komplexer Leitwert

$$\begin{aligned} \underline{Y} = G + jB &= \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{X}{R}} \\ &= \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \underbrace{\frac{R}{R^2 + X^2}}_G - j \underbrace{\frac{X}{R^2 + X^2}}_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} = R + jX &= \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{Y} \cdot e^{-j\gamma} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{G^2 + B^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{B}{G}} \\
 &= \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2} = \underbrace{\frac{G}{G^2 + B^2}}_R - j \underbrace{\frac{B}{G^2 + B^2}}_X
 \end{aligned}$$

14.3.13 Momentanleistung / Augenblicksleistung

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{zeitlich konstant}} - \underbrace{UI \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{mit doppelter Frequenz schwingend}} \\
 &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi)
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \varphi = \varphi_u - \varphi_i \rightarrow \varphi_i = \varphi_u - \varphi$$

14.3.14 Blindleistung

Ermittlung des Blindleistungsanteils aus der Momentanleistung

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \underbrace{UI \cos \varphi}_{\text{Wirkleistung}} - \underbrace{UI \sin \varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Blindleistung}} \\
 P_{ges}(t) &= P_{wirk}(t) + P_{blind}(t)
 \end{aligned}$$

$$u(t) \cdot i(t) \begin{cases} > 0 \text{ Energie zum Verbraucher} \\ < 0 \text{ Energie zum Erzeuger} \end{cases}$$

14.3.15 Mittlere Leistung / Wirkleistung

$$P = \bar{P}(t) = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1 + n \cdot T} u(t) \cdot i(t) dt = UI \cos \varphi$$

14.3.16 Definition von Blind- und Scheinleistung

$$Q = UI \sin \varphi \quad [Q] = \text{var} \quad \text{mit} \begin{cases} Q > 0 \text{ induktive Blindleistung } Q_{ind} \\ Q < 0 \text{ kapazitive Blindleistung } Q_{kap} \end{cases}$$

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I \quad [S] = VA$$

14.3.17 Beziehungen zwischen Wirk- Blind- und Scheinleistung

$$\boxed{P = UI \cdot \cos \varphi \quad Q = UI \cdot \sin \varphi \quad S = UI}$$

$$\tan \varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos \varphi$$

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{S^2 - Q^2} \\ &= S \cdot \cos \varphi \\ &= \frac{Q}{\tan \varphi} \end{aligned}$$

$$Q = \begin{cases} > 0 \rightarrow Q_{ind} = \sqrt{S^2 - P^2} \\ < 0 \rightarrow Q_{kap} = -\sqrt{S^2 - P^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ &= \frac{Q}{\sin \varphi} \\ &= \frac{P}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi = P \cdot \tan \varphi$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan \frac{Q}{P} \\ &= \arcsin \frac{Q}{S} \\ &= \arccos \frac{P}{S} \end{aligned}$$

$$P^2 + Q^2 = U^2 \cdot I^2 = S^2$$

14.3.18 Die komplexe Leistung

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$$

* - konjugiert Komplex

$$= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$= S \cdot e^{j\varphi}$$

$$= \underbrace{S \cdot \cos \varphi}_P + j \cdot \underbrace{S \cdot \sin \varphi}_Q$$

$$= P + jQ$$

$$[\underline{S}] = VA \quad [P] = W \quad [Q] = var$$

Zusammenhang mit dem komplexen Leitwert / Widerstand

$$\underline{S} = I^2 \cdot \underline{Z} \quad P = I^2 \cdot R = U^2 \cdot G \quad Q = I^2 \cdot X = -U^2 \cdot B$$