Formelsammlung - ET/TI

Marc Ludwig

30. Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Mathematik

Kapitel 1

Algebra

Why waste time learning
when ignorance is instantaneous?
- Hobbes

1.1 Rechenregeln fuer Potenzen

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad \text{(fuer a} > 0\text{)}\ a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

1.2 Zusammenhang zwischen Wurzeln und Potenzen

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass alle Potenzen und Wurzeln existieren.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$$

1.3 Potenzen und Logarithmen

Schreibweise: x$= \log_a(b)$ mit $a > 0, a \neq 1$ und $b > 0$.
Es gillt: $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.

Der natuerliche Logarithmus

Der Logarithmus zur Basis e mit $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,71828...$

$$\log_e(b) = \ln(b) \qquad \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1;\ \text{da } e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\boxed{\text{Man beachte: x}^a = e^{\ln(\mathrm{x})\cdot a}}$

Rechnen mit Logarithmen

Es gillt:	Weitere Beziehungen:
$\log_a(u\cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_a(\sqrt[n]{u}) = \frac{1}{n}\log_a(u)$
$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$a^{\log_a(u)} = \log_a(a^u) = u$
$\log_a(u^p) = p\cdot\log_a(u)$	$\log_a(u) = \frac{\log_c(u)}{\log_c(a)}$

1.4 Der Binomische Lehrsatz

Die Potenzen eines Binoms a+b lassen sich nach dem Binomischen Lehrsatz wie folgt entwickeln ($n \in \mathbb{N}^*$):

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}\cdot b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1\cdot b^{n-1} + b^n$$

Die Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen Binominalkoeffizienten, ihr Bildungsgesetz lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Einige Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = 0 \text{ fuer k > n} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

1.5 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

1.5.1 Beziehungen zwischen Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \qquad \tan(\alpha) \cdot \cot(\alpha) = 1$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \qquad 1 + \cot^2(\alpha) = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$$

1.5.2 Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Funktionen des doppelten und halben Winkels

$$\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha) \\
\tan(2\alpha) &= \frac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)} \\
\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1-\cos(\alpha)) \\
\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1}{2}(1+\cos(\alpha)) \\
\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}
\end{aligned}$$

Umformungen

Summe oder Differenz in ein Produkt

$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Produkt in eine Summe oder Differenz

$2\sin(\alpha)\sin(\beta) = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$
$2\cos(\alpha)\cos(\beta) = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$
$2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$

1.6 Komplexe Zahlen

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreibt man:

$$\boxed{\mathbb{C} = \{z | z = a + bj, a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\}}$$

a-Realteil   b-Imaginaerteil   j-imaginaere Einheit

kartesiche Form	trigonometrische Form	exponentialform
$z = a + bj$	$z = \lvert z\rvert (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$	$z = \lvert z\rvert \cdot e^{j\varphi}$
$z^* = (a + bj)^* = a - bj$	$z^* = \lvert z\rvert (\cos\varphi - j \cdot \sin\varphi)$	$z^* = \lvert z\rvert \cdot e^{-j\varphi}$

$|z|$ = Betrag von z
φ = Argument (Winkel) von z
z^* = Konjugiert komplexe Zahl

1.6.1 Umrechnungen zwischen den Darstellungsformen

Polarform → Kartesiche Form

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} = |z| (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi) = \underbrace{|z| \cdot \cos\varphi}_{a} + j \cdot \underbrace{|z| \cdot \sin\varphi}_{b} = a + bj$$

Kartesische Form → Polarform

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

1.6.2 Rechnen mit Komplexen Zahlen

Multiplikation

In kartesischer Form:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j \cdot (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

In der Polarform:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [|z_1| (\cos \varphi_1 + j \cdot \sin \varphi_1)] \cdot [|z_2| (\cos \varphi_2 + j \cdot \sin \varphi_2)] \\ &= (|z_1| \, |z_2|) \cdot [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] \\ &= \left(|z_1| \cdot e^{j\varphi_1}\right) \cdot \left(|z_2| \cdot e^{j\varphi_2}\right) = (|z_1| \, |z_2|) \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

Division

In kartesischer Form

In der Polarform

Kapitel 2

Funktionen

2.1 Gleichungen

2.1.1 Gleichungen n-ten Grades

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R})$$

Eigenschafften

- Die Gleichung besitzen maximal n reelle Lösungen.
- Es gibt genau n komplexe Lösungen.
- Für ungerades n gibt es mindestens eine reelle Lösung.
- Komplexe Lösungen treten immer Paarweise auf.
- Es existieren nur Lösungsformeln bis $n \leq 4$. Für $n > 4$ gibt es nur noch grafische oder numerische Lösungswege.
- Wenn eine Nullstelle bekannt ist kann man die Gleichung um einen Grad verringern, indem man denn zugehörigen Linearfaktor $x - x_1$ abspaltet(Polynome Division).

2.1.2 Lineare Gleichungen

$$a_1 \cdot x + a_0 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_0}{a_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

2.1.3 Quadratische Gleichungen

$$a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0 \quad (a_2 \neq 0)$$

Normalform mit Lösung

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Überprüfung (Wurzelsatz von Vieta)

$$x_1 + x_2 = -p \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

x_1, x_2 : Lösung der quadratischen Gleichung.

2.1.4 Biquadratische Gleichungen

Diese Gleichungen lassen sich mithilfe der Substitution lösen.

$$a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0 \qquad\qquad u = x^2$$
$$a \cdot u^2 + b \cdot u + c = 0 \qquad\qquad x = \pm\sqrt{u}$$

Das u kann mithilfe der Lösungsformel einer quadratischen Gleichung gelöst werden.

2.1.5 Gleichungen höheren Grades

Gleichungen höheren Grades kann man durch graphische oder numerische Ansätze lösen. Hilfreich ist das finden einer Lösung und das abspalten eines Linearfaktor , mithilfe der Polynomdivision oder dem Hornor Schema,von der ursprünglichen Gleichung.

Polynomdivision

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = \frac{a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{x - x_0} = b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0 + r(x)$$

x_0 ist dabei die erste gefunden Nullstelle. r(x) verschwindet wenn x_0 ein Nullstellen oder eine Lösung von f(x) ist.

$$r(x) = \frac{a_3 \cdot x_0^3 + a_2 \cdot x_0^2 + a_1 \cdot x_0 + a_0}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x - x_0}$$

2.1.6 Wurzelgleichung

Wurzelgleichungen löst man durch quadrieren oder mit hilfe von Substitution. Bei Wurzelgleichung ist zu beachten das quadrieren keine Aquivalente Umformung ist und das Ergebniss überprüft werden muss.

2.1.7 Ungleichungen

- Beidseitiges Subtrahieren oder Addieren ist möglich
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige positiven Zahl multipliziert oder dividiert werden
- Die Ungleichung darf mit einer beliebige negativen Zahl multipliziert oder dividiert werden, wenn man gleichzeitig das Relationszeichen umdreht.

2.1.8 Betragsgleichungen

Betragsgleichungen löst man mithilfe der Fallunterscheidung. Dabei wird einmal davon ausgegangen das der Term inerhalb des Betrags einmal positiv und einmal negativen sein kann.

$$y = |x| = \begin{cases} x \text{ für } x \geq 0 \\ -x \text{ für } x < 0 \end{cases}$$

Kapitel 3

Vektorrechnung

3.1 Vektorrechnung

3.1.1 Grundlagen

Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \\ &= a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_y\vec{e}_y \\ &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2 Punkt Vektor

$$P_1\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

Betrag

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= a \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &= \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}\end{aligned}$$

Richtungswinkel

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} \\ \cos\beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} \\ \cos\gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} \\ 1 &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\end{aligned}$$

3.1.2 Vektoroperationen

Addition und Subtraktion

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$a \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} ab_x \\ ab_y \\ ab_z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

Einheitsvektor

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} a_x/|\vec{a}| \\ a_y/|\vec{a}| \\ a_z/|\vec{a}| \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ Fläche des Parallelograms $\vec{a}, \vec{b}$
$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \wedge \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Spatprodukt

$\vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c})$
Volumen des Parallelpiped $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$$\begin{aligned} [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] &= \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) \\ &= a_x(b_y c_z - b_z c_y) \\ &+ a_y(b_z c_x - b_x c_z) \\ &+ a_z(b_x c_y - b_y c_x) \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Schnittwinkel

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Projektion

$$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = (\vec{b} \circ \vec{e}_a) \vec{e}_a$$

3.1.3 Geraden

Geradegleichung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a} \\ d &= \frac{|\vec{a} \times \left(\vec{OP} - \vec{r}_1\right)|}{\vec{a}}\end{aligned}$$

Abstand zweier paralleler Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_1 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{\vec{a}_1}\end{aligned}$$

Abstand zweier windschiefen Geraden

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 \\ \vec{g}(t) &= \vec{r}_2 + t\vec{a}_2 \\ d &= \frac{|\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))|}{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}\end{aligned}$$

3.1.4 Ebenen

Ebenengleichung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t,s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ &= \vec{r}_1 + t(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &\quad + s(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

Parameterfreie Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{r}(t,s) &= \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2 \\ \vec{r} \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) &= \vec{r}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + t\vec{a}_1 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ &\quad + s\vec{a}_2 \circ (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \\ \vec{r} \circ \vec{n} &= \vec{r}_1 \circ \vec{n} + 0 + 0 \\ \vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_1) &= 0\end{aligned}$$

Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$$

Normierter Normalenvektor

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Hessesche Normalform

$$0 = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

$$d = \frac{|\vec{n} \times \left(\vec{OP} - \vec{r}_1\right)|}{\vec{n}}$$
$$d = \frac{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Abstand einer Geraden von einer Ebene

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}_1$$
$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_G - \vec{r}_1)|}{\vec{n}}$$
$$d = \frac{Ar_{G1} + Br_{G2} + Cr_{G3} + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Abstand zweier paralleler Ebenen

$$\vec{r}(t, s) = \vec{r}_1 + t\vec{a}_1 + s\vec{a}_2$$
$$\vec{g}(t, s) = \vec{r}_2 + t\vec{a}_3 + s\vec{a}_4$$
$$d = \frac{|\vec{n} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{\vec{n}}$$

Schnittwinkel zweier Ebenen

$$\cos\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Durchstoßpunkt

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_G + t\vec{a}$$
$$\vec{r}_s = \vec{r}_G + \frac{\vec{n} \circ (\vec{r}_1 - \vec{r}_G)}{\vec{n} \circ \vec{a}}\vec{a}$$
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{n} \circ \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}\right)$$

Kapitel 4

Differentialrechnung

4.1 Differntialrechnung

4.1.1 Erste Ableitungen der elementaren Funktionen

Potenzfunktion

$$x^n \iff n \cdot x^{n-1}$$

Exponentialfunktionen

$$e^x \iff e^x$$
$$a^x \iff \ln a \cdot a^x$$

Logarithmusfunktionen

$$\ln x \iff \frac{1}{x}$$
$$\log_a x \iff \frac{1}{(\ln a) \cdot x}$$

Trigonometrische Funktionen

$$\sin x \iff \cos x$$
$$\cos x \iff -\sin x$$
$$\tan x \iff \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\tan x \iff 1 + \tan^2 x$$

Arcusfunktionen

$$\arcsin x \iff \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\arccos x \iff \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\arctan x \iff \frac{1}{1-x^2}$$

Hyperbolische Funktionen

$$\sinh x \iff \cosh x$$
$$\cosh x \iff \sinh x$$
$$\tanh x \iff \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$\tanh x \iff 1+\tanh^2 x$$

4.1.2 Rechenregeln

Faktorregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(C\cdot f(x)\right) = C\cdot f'(x)$$

Summenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x)+f(x)\right) = g'(x)+f'(x)$$

Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x)\cdot f(x)\right) = g'(x)\cdot f(x)+g(x)\cdot f'(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(h(x)\cdot g(x)\cdot f(x)\right) = h'\cdot g\cdot f+h\cdot g'\cdot f+h\cdot g\cdot f'$$

Quotientenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{g'(x)\cdot f(x)-g(x)\cdot f'(x)}{f(x)^2}$$

Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g\left(f(x)\right) = g'(f)\cdot f'(x)\right.$$

Logarithmische Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = f(x)$$
$$\frac{1}{y}y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)$$

4.1.3 Fehlerrechnung

Absoluter Fehler

Δx Absoluter Fehler der Eingangsgröße
Δy Absoluter Fehler der Ausgangsgröße

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Relativer Fehler

δx Relativer Fehler der Eingangsgröße in %
δy Relativer Fehler der Ausgangsgröße in %

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}$$
$$\delta y = \frac{\Delta y}{y}$$
$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$$
$$\delta y = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \delta x$$

4.1.4 Linearisierung und Taylor-Polynom

Tangentengleichung

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird

$$y_T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Taylor Polynom

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird
R_n Restglied

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$
$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}}{i!}(x - x_0)^i + R_n(x)$$

Restglied

x_0 Punkt an dem das Polynom entwickelt wird
$x_0 < c < x$, wenn $x_0 < x$
$x_0 > c > x$, wenn $x_0 > x$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

4.1.5 Grenzwertregel von Bernoulli und de l'Hospital

de l'Hospital

Gilt nur wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ gleich $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4.1.6 Differentielle Kurvenuntersuchung

Normale der Kurve

$$y_N(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x)}\,(x - x_0)$$

Monotonie-Verhalten

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Monoton wachsend} \\ < 0 \text{ Monoton fallend} \end{cases}$$

Krümmungs-Verhalten

$$f''(x) = \begin{cases} > 0 \text{ Linkskr.(konvex)} \\ < 0 \text{ Rechtskr.(konkav)} \end{cases}$$

Ableitung in Polarkordinaten

$\dot{r}$ Ableitung nach φ
$\ddot{r}$ Zweite Ableitung nach φ

$$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$$
$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$
$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}$$

Ableitung in Parameterform

$\dot{x}$ Ableitung nach t
$\dot{y}$ Ableitung nach t

$$y = y(t)$$
$$x = x(t)$$
$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$
$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Bogendifferential

"Wegelement" einer Funktion

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot \mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} \cdot \mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + (r')^2} \cdot \mathrm{d}\varphi$$

Winkeländerung

$$\tau = \arctan y'$$
$$\mathrm{d}\tau = \frac{y''}{1 + (y')^2} \cdot \mathrm{d}x$$

Krümmungskreis

$$\rho = \frac{1}{|\kappa|}$$
$$x_K = x_P - y' \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$
$$y_K = y_P + \frac{1 + (y')^2}{|y''|}$$
$$\rho : \text{Radius}$$
$$(x_K, y_K) : \text{Kreismittelpunkt}$$
$$(x_P, y_P) : \text{Kurvenpunkt}$$

Kurvenkrümmung

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s} \\ &= \frac{y''}{\sqrt{(1 + (y')^2)^3}} \\ &= \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} \\ &= \frac{2(r')^2 - r \cdot r'' + r^2}{\sqrt{(r^2 + (r')^2)^3}}\end{aligned}$$

4.2 Differentialgleichungen

Anfangswertproblem:	Werte nur an einer Stelle vorgegeben
Randwertproblem:	Werte an mehreren Stellen vorgegeben

Lineare DG

$$y_{all} = y_h + y_p$$

4.2.1 DG 1. Ordnung

Trennung der variablen

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Lineare DG

$$y' + f(x) \cdot g(y) = g(x) g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

$$y_{all} = e^{-F(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)}\,\mathrm{d}x + C \right)$$

4.2.2 Lineare DG 2. Ordnung

Darstellung

$$a(x) \cdot y'' + b(x) \cdot y' + c(x) \cdot y = g(x)$$
$$g(x) = 0 \Rightarrow \text{homogen}$$

Fundamental Lösungen

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$
$$\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta \cdot j$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$
$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} \quad \lambda_1 = \lambda_2$$
$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$$
$$+ C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

In Folgenden Aufzählungen gillt:

- $G(x)$ Ansatz
- $g(x)$ Störglied
- r Anzahl der Resonanzfälle

Partikuläre Lösungen(Polynom)

$$\begin{aligned}
&a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \\
&g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \\
&G(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n && \lambda \neq 0 \\
&G(x) = \left(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n\right) \cdot x^r && \lambda = 0
\end{aligned}$$

Partikuläre Lösungen(Polynom und e-Funktion)

$$\begin{aligned}
&a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \\
&g(x) = \left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\right) e^{mx} \\
&G(x) = \left(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n\right) e^{mx} && \lambda \neq m \\
&G(x) = \left(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n\right) e^{mx} \cdot x^r && \lambda = m
\end{aligned}$$

Partikuläre Lösungen(sin- und cos Funktion)

$$\begin{aligned}
&a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \\
&g(x) = a\cos(kx) + b\sin(kx) \\
&G(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) && \lambda \neq \pm kj \\
&G(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \cdot x^r && \lambda = \pm kj
\end{aligned}$$

Partikuläre Lösungen(e-, sin- und cos Funktion)

$$\begin{aligned}
0 &= a\lambda^2 + b\lambda + c \\
g(x) &= \left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\right) e^{mx} \cdot (c\cos(kx) + d\sin(kx)) \\
G(x) &= \left(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_nx^n\right) e^{mx} \cdot (C\cos(kx) + D\sin(kx))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &\neq m \pm kj \\
G(x) &= \left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_n x^n\right) e^{mx} \cdot (C\cos(kx) + D\sin(kx)) \cdot x^r \\
\lambda &= m \pm kj
\end{aligned}$$

4.3 Differential- und Integralrechnung mit mehreren Variablen

4.3.1 Differentialrechnung

Aleitung

$$\begin{aligned}
y &= f(x_1, x_2, \ldots, x_3) \\
\frac{\partial y}{\partial x_1} &= y_{x_1} && \text{Alles bis auf } x_1 \text{ ist konstant beim ableiten} \\
\frac{\partial y}{\partial x_n} &= y_{x_n} && \text{Alles bis auf } x_n \text{ ist konstant beim ableiten} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} &= y_{x_1 x_1} && \text{Alles bis auf } x_1 \text{ ist konstant beim ableiten} \\
y_{x_1 x_2} &= y_{x_2 x_1}
\end{aligned}$$

Tangentialebene

(x_0, y_0) Entwicklungspunkte der Ebene

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

Totales Differential

$$\mathrm{d}z = f_x \cdot \mathrm{d}x + f_y \cdot \mathrm{d}y$$

Extrema

$$\begin{aligned}
& f_x(x_0, y_0) = 0 && f_y(x_0, y_0) = 0 \\
& f_{xx}(x_0; y_0) < 0 && \text{Maximum} \\
& f_{xx}(x_0; y_0) > 0 && \text{Minimum} \\
& \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} > 0
\end{aligned}$$

Sattelpunkt

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \qquad f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0; y_0) & f_{xy}(x_0; y_0) \\ f_{xy}(x_0; y_0) & f_{yy}(x_0; y_0) \end{vmatrix} < 0$$

Richtungsableitung

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \cdot (a_x z_x + a_y z_y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = z_x \cos\alpha + z_y \sin\alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \vec{e_a} \cdot \mathrm{grad}\,(z)$$

4.3.2 Mehrfachintegral

Polarkordinaten

$$x = x_0 + r\cos\varphi \qquad y = y_0 + r\sin\varphi$$

Volumen

$$\iiint_V \mathrm{d}V = \int_x \int_y \int_z \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\iiint_V \mathrm{d}V = \int_r \int_\varphi \int_z r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

Fläche

$$A = \iint_{(A)} \mathrm{d}A$$

Masse

$$
\begin{aligned}
m &= \iint_{(A)} \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{(A)} \rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \iiint_{(V)} \rho(x,y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iiint_{(V)} \rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

Statisches Moment

(M_x, M_y) Achsmomente

$$
\begin{aligned}
&M_x : \\
&= \iint_{(A)} y\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{(A)} y_0 + r\sin\varphi\rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&M_y : \\
&= \iint_{(A)} x\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{(A)} x_0 + r\cos\varphi\rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

Schwerpunkt

$x_s = \frac{M_y}{m}$

$y_s = \frac{M_x}{m}$

Trägheitsmoment

$$
\begin{aligned}
I_x &= \iint_{(A)} y^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
I_x &= \iint_{(A)} (y_0 + r\sin\varphi)^2\,\rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
I_y &= \iint_{(A)} x^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
I_y &= \iint_{(A)} (x_0 + r\cos\varphi)^2\,\rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

Polares Trägheitsmoment

$$
\begin{aligned}
I_x &= \iint_{(A)} \left(y^2 + x^2\right) \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
I_x &= \iint_{(A)} \left((y_0 + r\sin\varphi)^2 + (x_0 + r\cos\varphi)^2\right) \rho(r,\varphi) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

Kugelkoordinaten

$$V = \int_r \int_\vartheta \int_\varphi r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}r$$

Kapitel 5

Folgen und Reihen

5.1 Reihen

5.1.1 Geometrische Folge

Darstellung

$$a_n = a \cdot q^n \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}$$

Konvergent für $|q| < 1$

5.1.2 Harmonische Reihe

Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Konvergent für $s > 1$

5.1.3 Konvergenz

Majorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

b_n bekannte konvergente Reihe

Minorantenkriterium

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

b_n bekannte divergente Reihe

Wurzelkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \begin{cases} q > 1 \text{ ist die Reihe divergent} \\ q < 1 \text{ ist die Reihe konvergent} \\ q = 1 \text{ ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Quotientenkriterium

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \begin{cases} q > 1 \text{ ist die Reihe divergent} \\ q < 1 \text{ ist die Reihe konvergent} \\ q = 1 \text{ ist keine Aussage möglich} \end{cases}$$

Leibnizkriterium

Nur bei alternierenden Reihen

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n$

$\lim_{n\to\infty} a_n = q$ — $q = 0$ ist die Reihe divergent

$\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ — Absolut Konvergent

5.1.4 Bekannte konvergente Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

5.2 Funktionenreihen

Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

5.2.1 Potenzreihen

Darstellung

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$$

x_0 : Verschiebung des Entwicklungspunktes.

Konvergenz

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ränder müssen untersucht werden.

5.2.2 Bekannte Potenzreihen

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n \qquad x \in (0,2]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad x \in (-1,1]$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad x \in [-1,1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad x \in [-1,1]$$

5.2.3 spezielle Reihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \qquad x \in [-1,1]$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \qquad x \in [-1,1]$$

$$\operatorname{artanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} x^{2n+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

5.2.4 Fourier Reihen

Allgemein

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos(n\omega_0 t) + a_n \cdot \sin(n\omega_0 t)\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot \sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

Symetrie

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(n\omega_0 t\right)\right)$$

gerade Funktion $b_n = 0$

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cdot \sin\left(n\omega_0 t\right)\right)$$

ungerade Funktion $a_n = 0$

Komplex

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jnx} \qquad c_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(x) \cdot e^{-jnx} \, \mathrm{d}x$$

Umrechnung

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2} a_0 \\
c_n &= \frac{1}{2} \left(a_n - j b_n\right) \\
c_{-n} &= \frac{1}{2} \left(a_n + j b_n\right) \\
a_0 &= 2 c_0 \\
a_n &= c_n + c_{-n} \\
b_n &= j \left(c_n - c_{-n}\right)
\end{aligned}$$

Kapitel 6

Interpolation

6.1 Interpolationspolynome

Entwicklung einer Polynomfunktion anhand von $n + 1$ Kurvenpunkten.

- 1. Möglichkeit: Aufstellen von $n + 1$ Gleichungen und ermitteln der Kurvenfunktion mithilfe des Gauß' Algorithmus.
- 2. Möglichkeit: Interpolationspolynome nach Newton.

Interpolationspolynome nach Newton

Gegeben sind die Punkte:
$P_0 = (x_0; y_0), P_1 = (x_1; y_1), P_2 = (x_2; y_2), \ldots, P_n = (x_n; y_n)$,
damit lautet die Funktion wie folgt.

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 &+ a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \\ &+ a_3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \\ &+ \ldots \\ &+ a_n \cdot (x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ lassen sich mithilfe des Differentenschema berechnen. Dabei ist $y_0 = a_0, [x_0, x_1] = a_1, [x_0, x_1, x_2] = a_2$usw. .

Differentenschema

k	x_k	y_k	1	2	3	...
0	x_0	y_0				
			$[x_0, x_1]$			
1	x_1	y_1		$[x_0, x_1, x_2]$		
			$[x_1, x_2]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
2	x_2	y_2		$[x_1, x_2, x_3]$		...
			$[x_2, x_3]$		$[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
3	x_3	y_3		$[x_2, x_3, x_4]$		...
			...	...	...	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
n	x_n	y_n				

Rechenregeln für dividierte Differenzen

$$[x_0, x_1] = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \qquad [x_1, x_2] = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$[x_0, \dots, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2} \qquad [x_1, \dots, x_3] = \frac{[x_1, x_2] - [x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$$

$$[x_0, \dots, x_3] = \frac{[x_0, x_1, x_2] - [x_1, x_2, x_3]}{x_0 - x_2} \qquad [x_1, \dots, x_4] = \frac{[x_1, x_2, x_3] - [x_2, x_3, x_4]}{x_1 - x_3}$$

Teil II

Physik

Kapitel 7

Kinematik

Perfection is achieved
only on the point of collapse.
- C. N. Parkinson

7.1 Analogietabelle

Translation		Rotation
$\vec{s}$		$\vec{\varphi}$
$\downarrow \frac{ds}{dt}$		$\downarrow \frac{d\varphi}{dt}$
$\vec{v}$	$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$	$\vec{\omega}$
$\downarrow \frac{dv}{dt}$		$\downarrow \frac{d\omega}{dt}$
$\vec{a}$	$a = \underbrace{\alpha \times r}_{a_{Tan}} - \underbrace{\omega^2 r}_{a_R}$	$\vec{\alpha}$
m		J
$\downarrow \frac{dm}{dt}$		$\downarrow \frac{dJ}{dt}$
$\vec{F}$		$\vec{M}$
$\downarrow \frac{dF}{dt}$		$\downarrow \frac{dM}{dt}$
$\vec{p}$		$\vec{L}$
$\frac{m}{2}v^2$	E_{kin}	$\frac{J}{2}\omega^2$

7.1.1 Translation

$$a(t) = a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s}$$
$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$
$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

7.1.2 Rotation

$$\alpha(t) = \alpha_0 = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$
$$\omega(t) = \alpha_0 \cdot t + \omega_0 = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$$
$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

Bahngroessen

$$a_t(t) = a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{s}$$
$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0 = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$$
$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Winkelgroessen

$$\vec{a_t} = \vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha \cdot r \qquad \alpha \perp r$$
$$\vec{\alpha} = \vec{r} \times \vec{a_t}$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \cdot r \qquad \omega \perp r$$
$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$$
$$s = \varphi \cdot r$$

Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Radialbeschleunigung

$$a_r = \frac{v^2}{r} = v \cdot \omega = \omega^2 \cdot r$$

Umdrehungen

$$N = \frac{\omega_0 \cdot t}{2 \cdot \pi} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} \cdot t^2 = n_0 \cdot t + \frac{\alpha}{4 \cdot \pi} \cdot t^2$$

7.2 Dynamik

7.2.1 Geradlinig (Translation)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
$$\vec{F}_{\mathrm{Tr}} = -m \cdot \vec{a}$$

Impuls

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Kraftstoss

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{\vec{p}_2}^{\vec{p}_1} \mathrm{d}p = \int_0^t \vec{F}\,\mathrm{d}t$$

Arbeit

$$W = -\int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}_{\mathrm{Tr}} \circ \mathrm{d}\vec{s}$$
$$= \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_1} m\vec{v} \circ \mathrm{d}\vec{v} = \frac{1}{2}m\left(v_1^2 - v_0^2\right)$$

Hubarbeit

$$W_{\mathrm{hub}} = mgh$$

Kinetische Energie

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Leistung

$$P = \vec{F} \circ \vec{v} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \dot{W}$$

7.2.2 Drehbewegung(Rotation)

Massentraegheitsmoment

$$J = \int r^2\,\mathrm{d}m$$

Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpuls

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ &= J \cdot \vec{\omega}\end{aligned}$$

Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Arbeit

$$\begin{aligned}W &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{M} \circ \vec{e_\omega} \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{\vec{\omega}_0}^{\vec{\omega}_1} J \vec{\omega} \, \mathrm{d}\vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2} J \left(\omega_1^2 - \omega_0^2\right)\end{aligned}$$

Leistung

$$P = \vec{M} \circ \vec{\omega}$$

Zentripedalkraft

$$\begin{aligned}F_{zp} &= -m \cdot \omega^2 \cdot r \\ &= -m \cdot v^2 \cdot \frac{\vec{e_r}}{r}\end{aligned}$$

7.2.3 Geneigte Ebene

Kräfte

$$\begin{aligned}\vec{F}_N &= \vec{F}_G \cos \alpha \\ \vec{F}_H &= \vec{F}_G \sin \alpha\end{aligned}$$

7.2.4 Reibung

Reibungskraft

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

Rollreibung

$$\begin{aligned}M &= f \cdot F_N \\ F_R &= \frac{f}{r} \cdot F_N\end{aligned}$$

7.2.5 Feder

HOOKsches Gesetz

$$
\begin{aligned}
F &= -kx \\
M &= D\varphi
\end{aligned}
$$

Federspannarbeit

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} F \, \mathrm{d}x = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} kx \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x_{\max}^2 - x_{\min}^2\right)
\end{aligned}
$$

7.2.6 Elastischer Stoß

$$
\begin{aligned}
\text{Energie vor den Stoß} &= \text{Energie nach den Stoß} \\
\sum E_{\text{kin}} &= \sum E'_{\text{kin}}
\end{aligned}
$$

Impulserhaltung

$$
\begin{aligned}
\text{Impuls vor den Stoß} &= \text{Impuls nach den Stoß} \\
\sum m\vec{v} &= \sum m\vec{v}'
\end{aligned}
$$

Zentraler, Gerader, Elastischer Stoß

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \\
m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \\
v_1' &= \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1
\end{aligned}
$$

7.2.7 Unelastischer Stoß

Energieerhaltung

$$\text{Energie vor den Stoß} = \text{Energie nach den Stoß} + \text{Arbeit}$$
$$\sum E_{\text{kin}} = \sum E'_{\text{kin}} + \Delta W$$

Impulserhaltung

$$\text{Impuls vor den Stoß} = \text{Impuls nach den Stoß}$$
$$\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}'$$

Total unelastischer Stoss

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v'^2 + \Delta W$$
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v'$$

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Delta W = \frac{m_1 \cdot m_2}{2\,(m_1 + m_2)}\,(v_1 - v_2)^2$$

Drehimpulserhaltungssatz

$$\text{Drehinpuls zur Zeit 1} = \text{Drehimpuls zur Zeit 2}$$
$$\sum \vec{L} = \sum \vec{L}'$$

Kopplung zweier Rotationskörper

$$\vec{\omega}' = \frac{J_0\vec{\omega_0} + J_1\vec{\omega_1}}{J_1 + J_2}$$
$$W = \frac{J_0 \cdot J_1}{2\,(J_0 + J_1)}\,(\omega_0 - \omega_1)^2$$

7.2.8 Rotierendes Bezugssystem

Zentrifugalkraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_Z &= F_r \cdot \vec{e}_r = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= -m\vec{\omega} \times \vec{v}\end{aligned}$$

$$F_Z = -m\frac{v^2}{r} = -m\omega^2 r$$

Corioliskraft

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

7.3 Schwerpunkt

mehrere Punktmassen

$$\vec{r}_{\mathrm{Sp}} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Allgemein

$$\vec{r}_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

Schwerpunkt in Zylinderkoordinaten

$$r_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r r^2 \rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$$

$$\varphi_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r \varphi r \rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$$

$$z_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_\varphi \int_r z r \rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_\varphi \int_r r\rho \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z}$$

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z$$

Schwerpunkt in karthesischen Koordinaten

$$x_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x x\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$y_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x y\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

$$z_{\mathrm{Sp}} = \frac{\int_z \int_y \int_x z\rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\int_z \int_y \int_x \rho \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

7.4 Trägheitsmoment

$$J = \sum m_i r_i^2$$
$$J = \int_m r^2 \,\mathrm{d}m$$
$$J = \int_z \int_\varphi \int_r r^3 \rho \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z$$

STEINER'scher Satz

$$J_x = mr^2 + J_s$$

Trägheitsmoment Kugel

$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{2}{5} mr^2$$

Trägheitsmoment Zylinder

$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{1}{2} mr^2$$

Trägheitmoment Kreisring (Torus)

$$J_{\mathrm{Sp}} = mr^2$$

Trägheitsmoment Stab

$$J_{\mathrm{Sp}} = \frac{1}{12} ml^2$$

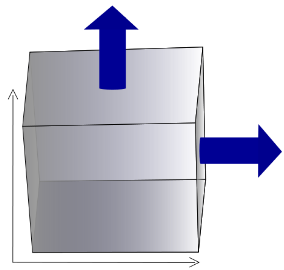
7.5 Elastizitätslehre

Spannung

$$\vec{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_n}{\mathrm{d}A}$$

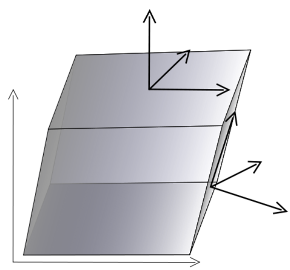
$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_t}{\mathrm{d}A}$$



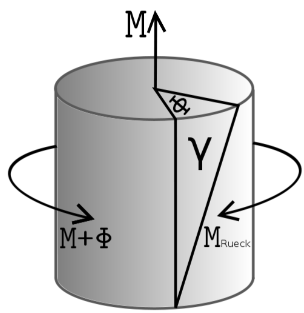
Schubmodul

$$G = \frac{\tau}{\varphi}$$



Drillung

$$\psi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l} = \frac{W_t}{G \cdot J_p}\tau = \frac{M_t}{G \cdot J_p}$$



Flächenmoment

$$J_p = \int r^2 \, \mathrm{d}A = \int_\varphi \int_r r^3 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi$$

Verformungsarbeit

$$W = V \int \sigma(\varepsilon) \, \mathrm{d}\varepsilon$$

7.6 Schwingungen

Harmonische Schwingungen

$$u(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

7.6.1 Ungedämpfte Schwingungen

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{k}{m} x \\
x(t) &= \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\dot{x}(t) &= -\hat{x}\omega \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\ddot{x}(t) &= -\hat{x}\omega^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\
\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
f &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \\
T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}
\end{aligned}$$

Mathemetisches Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$
$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Torsionsschwingung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{D}{J_A}\varphi$$
$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J_A}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{J_A}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{D}}$$

Elektrischer Schwingkreis

$$0 = L\ddot{Q} + \frac{Q}{C}$$
$$q(t) = \hat{Q}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\dot{q}(t) = -\hat{Q}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Physikalisches Pendel

$$\ddot{\varphi} = -\frac{lmg}{J_A}\varphi$$
$$\varphi(t) = \hat{\varphi}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{\varphi}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgl}}$$

Flüssigkeitspendel

$$\ddot{y} = -\frac{2A\rho g}{m}y$$
$$\varphi(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\hat{y}\omega\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\hat{y}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$$

$$\ddot{q}(t) = -\hat{Q}\omega^2\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

7.6.2 Gedämpfte Schwingungen

Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx + F_R$$

COULOMB Reibung

$$\begin{aligned} F_R &= -\operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \\ 0 &= m\ddot{x} + kx + \operatorname{sgn}(\dot{x})\mu F_N \end{aligned}$$

Gleitreibung

$$\begin{aligned} x(t) &= -(\hat{x}_0 - \hat{x}_1)\cos(\omega t) - \hat{x}_1 \qquad 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ x(t) &= -(\hat{x}_0 - 3\hat{x}_1)\cos(\omega t) + \hat{x}_1 \qquad \frac{T}{2} \le t \le T \\ \hat{x}_1 &= \frac{\mu F_N}{k} \end{aligned}$$

Viskosereibung

$$\begin{aligned} 0 &= m\ddot{x} + b\dot{x} + kx \\ x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t} \\ x(t) &= \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\omega_0\sqrt{1-D^2}t} \\ \delta &= \frac{b}{2m} \\ D &= \frac{\delta}{\omega_0} \\ D &= \frac{b}{2}\frac{1}{\sqrt{mk}} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \Lambda &= \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right) \\ \Lambda &= \delta T \\ \omega_D &= \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= 2D \\ Q &= \frac{1}{d} \end{aligned}$$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}t + \varphi)$$

Aperiodischer Grenzfall $\delta = \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}(1 - \delta t)$$

Kriechfall $\delta > \omega_0$

$$x(t) = \hat{x}e^{-\delta t}e^{\pm j\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}t}$$

Kapitel 8

Fluiddynamik

Premature optimization
is the root of all evil.
- D. Knuth

On the other hand,
we cannot ignore efficiency.
- Jon Bentley

8.1 Ohne Reibung

Statischer Druck

$$p = \frac{\mathrm{d}F_N}{\mathrm{d}A}$$

Dynamischer Druck

$$p = \frac{1}{2}\rho v^2$$

Schweredruck

$$\begin{aligned} p &= \frac{\rho V g}{A} \\ &= h\rho g \end{aligned}$$

Volumenstrom

$$\begin{aligned} \dot{V} &= vA \\ &= \iint_A \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{A} \\ &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \\ &= Q \end{aligned}$$

Massenstrom

$$\begin{aligned} \dot{m} &= jA \\ &= \iint_A \vec{j}\,\mathrm{d}\vec{A} \\ &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Auftrieb

$$\vec{F_A} = -\rho_V \vec{g} V$$
$$= -\frac{\rho_V}{\rho_M}\vec{F_G}$$

Kompressibilität

$$\kappa = \frac{\Delta V}{\Delta p V}$$

Volumenausdehnungskoeffezient

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta T$$

Kontinuitätsgleichung

$$\dot{m}\big|_1 = \dot{m}\big|_2 \qquad \dot{V}\Big|_1 = \dot{V}\Big|_2$$
$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \qquad \rho_1 = \rho_2$$

Barometrische Höhenformel

$$p = p_0 e^{-Ch}$$
$$C = \frac{\rho_0 g}{p_0}$$

Bernoulli Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \mathrm{const}$$

8.2 Laminare Reibung

Newtonsches Reibungsgesetz

$$F_R = \eta A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Laminare Strömung (Rohr)

$$v(r) = \frac{p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)$$
$$p = \frac{4\eta l}{R^2} v(0)$$
$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} p$$

Umströmung (Kugel)

$$F_R = 6\pi\eta r v$$

Bernoulligleichung mit Reibung

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1$$
$$= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + \Delta p$$

Reynoldszahl

$$Re = \frac{L\rho v}{\eta}$$
$$Re > Re_{krit}$$

Strömung wird Turbulent

Kapitel 9

Gravitation

The year is 787!
A.D.?
- Monty Python

Gravitationskraft

$$\vec{F}_{g,2} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{e}_r$$
$$\vec{F}_g = \vec{E}_g \cdot m = \vec{g}m$$

Gravitationspotential

$$\phi = -G\frac{M}{r}$$
$$\vec{E}_g = \mathrm{grad}\phi$$

Arbeit

$$W_{12} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \circ \mathrm{d}\vec{r}$$
$$= GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Planetenbahnen

$$\left(\frac{a}{a_E}\right)^3 = \left(\frac{T}{T_E}\right)^2$$

Kapitel 10

Elektrostatik

Don't interrupt me
while I'm interrupting.
- Winston S. Churchill

Ladung

$$\begin{aligned} Q &= n \cdot e_0 \\ &= CU \\ &= \int i \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i \vec{r}_i$$

COULOMB Gesetz

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r_1 2} \\ &= \vec{E} Q \\ \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \vec{r} \\ &= -\operatorname{grad} \varphi \\ &= -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right) \end{aligned}$$

Spannung

$$\begin{aligned} U_{AB} =& \frac{W_{AB}}{Q} \\ =& \int_A^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\ =& \oint_s \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} = 0 \\ =& \varphi_A - \varphi_B \\ =& -\int_\infty^A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\ & - \left(-\int_\infty^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \right) \end{aligned}$$

El- / Verschiebungsfluß

$$\psi = \int_A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A}$$
$$\psi = \oint_A \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Flußdichte

$$\vec{D} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}\vec{e}_A$$
$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$$
$$Q = \oint_A D\,\mathrm{d}A$$

Kapazität

$$Q = CU$$

OHMsches Gesetz

$$\begin{aligned} I &= \oint_A \vec{j} \circ \mathrm{d}\vec{A} \\ &= \oint_A \kappa\vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{A} \\ &= \underbrace{\kappa E \cdot 4\pi r^2}_{\text{Kugel}} \end{aligned}$$

Arbeit im elektrischen Feld

$$w = \frac{1}{2}\vec{E} \circ \vec{D}$$
$$\begin{aligned} W &= \int_V w\,\mathrm{d}V \\ &= -Q\int_A^B \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{s} \\ &= \int_U Q\,\mathrm{d}U \\ &= \int_U CU\,\mathrm{d}U \\ &= \frac{1}{2}CU^2 \end{aligned}$$

Kapitel 11

Thermodynamik

11.1 Wärmedehnung

$$\rho(T) = \rho_0(1 - \beta(T - T_0))$$
$$V(T) = V_0(1 + \gamma(T - T_0))$$
$$l(T) = l_0(1 + \alpha(T - T_0))$$
$$\gamma \approx 3 \cdot \alpha$$
$$\gamma \approx \beta$$

11.2 Wärme

$$\Delta Q = c \cdot m(T - T_0)$$
$$\Delta Q = C(T - T_0)$$
$$\Delta Q = \int_{T_0}^{T} c \cdot m \, \mathrm{d}T$$
$$\Delta Q = c_{mol} \cdot n(T - T_0)$$

11.3 Mischtemperatur

$$T_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i m_i c_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i c_i}$$

$\dot{Q}$Ist durch einen mehrschichtiges stationäres System Konstant

11.4 Wärmeleitung

$$\dot{Q} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \Phi = P$$
$$\vec{\dot{q}} = \frac{\dot{Q}}{A} \cdot \vec{e_A}$$
$$\vec{\dot{q}} = -\lambda \, \mathrm{grad} T$$
$$\vec{\dot{q}} = \frac{\lambda}{s} (T_A - T_B) \cdot \vec{e_s}$$
$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\lambda_i}} \cdot (T_A - T_B)$$

11.5 Wärmekonvektion

$$\dot{q} = \alpha \, (T_A - T_B)$$
$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}} \cdot (T_A - T_B)$$

11.6 Wärmewiderstand

$$R_{th} = \frac{T_A - T_B}{\dot{q} \cdot A} = \frac{s}{\lambda A} = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha A} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

11.6.1 Wärmeübertragung

$$k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

$$\dot{q} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{\lambda_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} R_i} \cdot (T_A - T_B)$$

$$\dot{q} = k \cdot (T_A - T_B)$$

11.6.2 Wärmestrahlung

$$\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \quad BoltzmannKonstante$$

$$\sigma_A = c_A$$

$$\alpha = \varepsilon$$

$$1 = \alpha + \tau + \vartheta$$

$$\dot{Q} = \varepsilon A \sigma T^4$$

$$\dot{Q}_{AB} = C_{AB} A_A \left(T_A^4 - T_B^4 \right)$$

$$C_{AB} = \varepsilon_{AB} \sigma = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{1}{\varepsilon_B} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_A} + \frac{1}{\sigma_B} - \frac{1}{\sigma}} \qquad \text{Parallel}$$

$$C_{AB} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\varepsilon_A} + \frac{A_A}{A_B} \left(\frac{1}{\varepsilon_B} - 1 \right)} \qquad A_A \text{ von } A_B \text{ umschlossen}$$

$$C_{AB} \approx \varepsilon_A \sigma \qquad \text{parallel } (A_A \ll A_B)$$

11.6.3 Zustandsänderung des idealen Gases

Teilchen stehen nicht in Wechselwirkung, besitzen kein Volumen und es kommt zu keinem Phasenübergang

Energie

$$
\begin{aligned}
U_{12} &= Q_{12} + W_{12} \\
&\text{Nur Isobar:} \\
\mathrm{d}H &= c_p m \,\mathrm{d}T = U + p \,\mathrm{d}V \\
\mathrm{d}S &= \frac{\mathrm{d}Q}{T}
\end{aligned}
$$

Zustandsgleichung

$$
\begin{aligned}
\frac{pV}{T} &= \text{const} \\
pV &= NkT = mR_sT = nRT \\
R_s &= \frac{nR}{m} \\
R_s &= c_p - c_v
\end{aligned}
$$

Isotherm

$$
\begin{aligned}
pV &= \text{const} \\
T &= \text{const} \\
U_{12} &= 0 \\
U_{12} &= Q_{12} + W_{12} \\
Q_{12} &= -W_{12} \\
W_{12} &= p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \\
W_{12} &= p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} \\
S_{12} &= mc_p \ln \frac{V_2}{V_1} + mc_V \ln \frac{p_2}{p_1}
\end{aligned}
$$

Isobar

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{T} &= \text{const} \\
p &= \text{const} \\
Q_{12} &= mc_p \left(T_2 - T_1\right) \\
W_{12} &= -p \left(V_2 - V_1\right) \\
U_{12} &= Q_{12} + W_{12} \\
S_{12} &= mc_p \ln \frac{V_2}{V_1}
\end{aligned}
$$

Isochor

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{T} &= \text{const} \\
V &= \text{const} \\
Q_{12} &= mc_v \left(T_2 - T_1\right) \\
W_{12} &= 0 \\
U_{12} &= Q_{12} \\
S_{12} &= mc_v \ln \frac{p_2}{p_1}
\end{aligned}
$$

Adiabat

$$
\begin{aligned}
pV^\kappa &= \text{const} \\
Q &= \text{const} \\
\kappa &= \frac{c_p}{c_V} \\
\frac{T_2}{T_1} &= \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\kappa} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \\
Q_{12} &= 0 \\
W_{12} &= mc_v \left(T_2 - T_1\right) \\
W_{12} &= \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left(\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\kappa} - 1\right) \\
U_{12} &= W_{12} \\
S_{12} &= 0;
\end{aligned}
$$

Kreisprozeß

$$\oint \mathrm{d}U = 0$$

$$\oint \mathrm{d}U = \oint \mathrm{d}Q + \oint \mathrm{d}W$$

$$\text{Revesiebel: } \oint \mathrm{d}S \quad = 0$$

$$\text{Irrevesiebel } \oint \mathrm{d}S \quad > 0$$

Carnot-Prozeß

$$\eta_C = \frac{W_{ab}}{Q_{zu}}$$

$$\eta_C = \frac{Q_{zu} - Q_{AB}}{Q_{zu}}$$

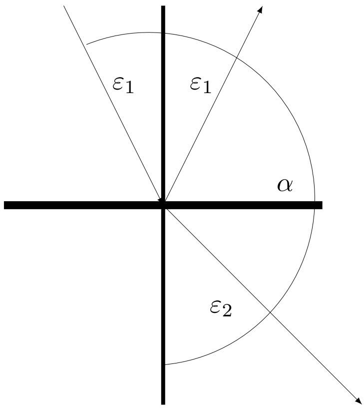
$$\eta_C = \frac{T_h - T_n}{T_n}$$

Kapitel 12

Optik

The path taken between two points by a ray of light
is the path that can be traversed in the least time.
- Pierre de Fermat

12.1 Brechung



$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

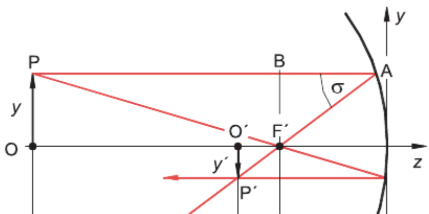
$$\varepsilon_2 = \arcsin \frac{\sin \varepsilon_1 \cdot n_1}{n_2}$$

12.2 Totalreflexion

Totalreflexion tritt nur auf, wenn der Lichtstrahl von einem dichteren in einen optisch dünneren Stoff übergeht.

$$\sin \varepsilon_g = \frac{n_2}{n_1}$$

12.3 Hohlspiegel



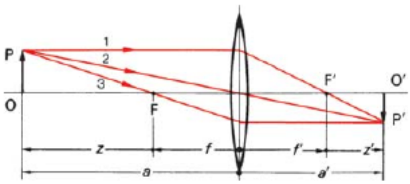
$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$f' = \frac{r}{2}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

$$\beta' = -\frac{a'}{a}$$

12.4 Linse



$$f = \frac{a \cdot a'}{a + a'} = -f'$$

$$a' = \frac{af'}{a + f'}$$

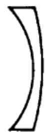
$$\beta' = \frac{f'}{a + f'}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y}$$

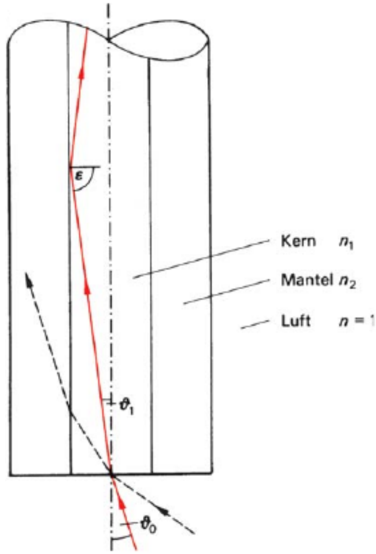
$$D' = \frac{1}{f'} = (n_L - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{a}$$

Linsenform						
Bezeichnung	bi-konvex	plan-konvex	konkav-konvex	bi-konkav	plan-konkav	konvex-konkav
Radien	$r_1 > 0$ $r_2 < 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 < 0$	$r_1 < r_2 < 0$	$r_1 < 0$ $r_2 > 0$	$r_1 = \infty$ $r_2 > 0$	$r_2 < r_1 < 0$
Brennweite im optisch dünneren Medium	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' > 0$	$f' < 0$	$f' < 0$	$f' < 0$

12.5 Lichtwellenleiter



Totalreflexion (Grenzwinkel)

$$n_1 \sin(90° - \vartheta_1) = n_2 \Longrightarrow \cos\vartheta_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

numerische Apertur

$$\begin{aligned} A_{WL} &= n_0 \sin\vartheta_0 = n_1\sqrt{1-\cos^2\vartheta_1} \\ &= n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} \\ &= \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \\ &= \sqrt{n_{Kern}^2 - n_{Mantel}^2} \end{aligned}$$

Teil III

Elektrotechnik

Kapitel 13

Gleichstromtechnik

13.1 Grundgrößen

Elementarladung

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} C$$

$$[Q] = 1C = 1As$$
$$Q = n \cdot e$$

Strom

$$[I] = 1A$$
$$i(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Stromdichte

$$[J] = 1\frac{A}{mm^2}$$
$$\vec{J} = \frac{I}{\vec{A}}$$

Potential

$$[\varphi] = 1V = 1\frac{Nm}{As} = 1\frac{kgm^2}{As^3}$$
$$\varphi = \frac{W}{Q}$$

Spannung

$$[U] = 1V$$
$$U_{AB} = \varphi_a - \varphi_b$$

Widerstand und Leitwert

$$[R] = 1\Omega = 1\frac{V}{A}$$

$$R = \frac{U}{I} = \rho\frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa}\frac{l}{A}$$

$$[G] = 1S = 1\frac{A}{V}$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R} = \kappa\frac{A}{l} = \frac{1}{\rho}\frac{A}{l}$$

Temperaturabhängigkeit

$$R_2 = R_1 \cdot \left(1 + \alpha\,(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \beta\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)^2\right)$$

Leistung

$$[P] = 1W = 1VA$$

$$P = u(t) \cdot i(t)$$

Leistung im Mittel

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t) \cdot i(t)\,\mathrm{d}t$$

13.2 Lineare Quellen

Spannungsquelle

$$U = U_q - R_i \cdot I$$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Stromquelle

$$I = I_q - \frac{U}{R_i}$$

$$U_l = I_q \cdot R_i$$

13.3 Kirchhoffsche Gesetze

Knotenpunktsatz

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$$

Maschensatz

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = 0$$

Kapitel 14

Wechselstromtechnik

No rule is so general,
which admits not some exception.
- Robert Burton

14.1 Definitionen

14.1.1 Periodische zeitabhängige Größen

Allgemein $x(t) \rightarrow$ speziell $u(t); i(t); q(t); \ldots$
es gillt $x(t) = x(t + n \cdot T); (n \in \mathbb{N}^*)$

14.1.2 Wechselgrößen

Allgemein $x_\sim(t)$; periodisch sich ändernde Größe, deren Gleichanteil bzw. zeitlich linearer Mittelwert gleich Null ist.

Nachweis:

$$\int\limits_{t1}^{t1+n\cdot T} x_\sim(t)\,dt = 0\ ;\ (n \in \mathbb{N}^*)\ ;\ t1 \text{ beliebiger Zeitwert}$$

14.1.3 Mischgrößen

Sind periodisch, Ihr Gleichanteil $\overline{x}$ bzw. zeitlich linearer Mittelwert
jedoch ist ungleich Null.

Mischgröße = Wechselgröße + Gleichanteil

$$x(t) = x_{\sim}(t) + \overline{x}$$
$$= \text{gleichanteilbehaftete Wechselgröße}$$

14.2 Anteile und Formfaktoren

Gleichanteil

$$\overline{x} = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} x(t)\,dt$$

Gleichrichtwert

$$|\overline{x}| = \frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} |x|(t)\,dt$$

Effektivwert

$$x_{eff} = X = \sqrt{\frac{1}{n \cdot T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} x^2(t)\,dt}$$

Formfaktor

$$F = \frac{x_{eff}}{|\overline{x}|} \qquad x_{eff} = |\overline{x}| \cdot F$$

crest - Faktor

$$\sigma = \frac{\hat{x}}{x_{eff}}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \rightarrow t1 \text{ beliebiger Zeitwert} \rightarrow [|\overline{x}|] = [x(t)]$$

14.3 Leistung und Leistungsfaktoren

Wirkleistung

$$P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} P(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} u(t) \cdot i(t)\,dt$$

Mittlere Leistung

$$\bar{p}(t) = P = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} P(t)\,dt$$

Scheinleistung

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I$$

Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S}$$
$$= \frac{\frac{1}{n\cdot T}\int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} p(t)\,dt}{u_{eff} \cdot i_{eff}}$$
$$= \frac{\int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} u(t) \cdot i(t)\,dt}{\sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} u^2(t)\,dt} \cdot \sqrt{\int_{t_1}^{t_1+n\cdot T} i^2(t)\,dt}}$$

14.4 Sinusförmige Größen

Sinusschwingung

$$x(t) = \hat{x}\sin(2\pi f + \varphi_x)$$
$$x(\omega t) = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi_x)$$

- $\hat{x}$: Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Linksverschiebung der Kurve

Kosinusschwingung

$$x(t) = \hat{x}\cos(2\pi f + \varphi_x)$$
$$x(\omega t) = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi_x)$$

- $\hat{x}$: Amplitude
- φ_x : Nullphasenwinkel
- $\varphi_x > 0$: Rechtssverschiebung der Kurve

Nullphasenzeit

$$t_x = -\frac{\varphi_x}{\omega} = -\varphi_x \cdot \frac{T}{2\pi}$$

Addition zweier Sinusgrößen gleicher Frequenz

mit: $a = \hat{a}\sin(\omega t + \alpha) \wedge b = \hat{b}\sin(\omega t + \beta)$

Resultierende Funktion:

$$\begin{aligned} x &= a + b \\ &= \hat{a}\sin(\omega t + \alpha) + \hat{b}\sin(\omega t + \beta) \\ &= \hat{x}\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

- $\hat{x}$: resultierende Amplitude
- φ : Nullphasenwinkel

Wobei: $\hat{x} = +\sqrt{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + 2\hat{a}\hat{b}\cos(\alpha - \beta)}$

$$\varphi = \arctan\frac{\hat{a}\sin\alpha + \hat{b}\sin\beta}{\hat{a}\cos\alpha + \hat{b}\cos\beta}$$

Vierquadrantenarkustangens

$$\varphi = \arctan\frac{ZP}{NP}$$

2. Quadrant $ZP > 0, NP < 0$	1. Quadrant $ZP > 0, NP > 0$
3. Quadrant $ZP < 0, NP < 0$	4. Quadrant $ZP < 0, NP > 0$

Der rotierende Zeiger als rotierender Vektor

$$\text{Allgemein gillt: } \sin(\omega t + \varphi_x) = \frac{GK}{HT} = \frac{b}{\hat{x}}$$

$$\cos(\omega t + \varphi_x) = \frac{AK}{HT} = \frac{a}{\hat{x}}$$

$$b = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi_x)$$

$$a = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$\text{Als Einheitsvektor: } \vec{x} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$$

Zeigerspitzenendpunkt

$$\underline{x} = \text{ Zeigerspitzenendpunkt}$$

$$\underline{x} = \underbrace{\hat{x}\cos(\omega t + \varphi_x)}_{Re \to Abszisse} + j \cdot \underbrace{\hat{x}\sin(\omega t + \varphi_x)}_{Im \to Ordinate}$$

$$\underline{x} = \hat{x} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$

$$\underline{x}_{eff} = \text{ rotierender Effektivwertzeiger}$$

$$\underline{x}_{eff} = \hat{x}_{eff} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_x)}$$

Wechsel zwischen Sinus und Kosinus

$$\hat{x}(t)\cos(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t)\sin\left(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\hat{x}(t)\sin(\omega t + \varphi_x) \equiv \hat{x}(t)\cos\left(\omega t + \varphi_x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Merke: $\frac{1}{j} = -j \qquad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

Differentiation und Integration von Sinusgrößen

Zeitbereich	Zeigerbereich
$x(t) = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$ $x(t) = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$	$\underline{x} = \hat{x}e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{HT_{1/2}}$	$\frac{d^n \underline{x}(t)}{dt^n} = (j\omega)^n \underline{x}$

Zeitbereich	Zeigerbereich
$x(t) = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_1}$ $x(t) = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{HT_2}$	$\underline{x} = \hat{x}e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
$\int \cdots \int x(t)\, dt^n \xrightarrow{HT_{1/2}}$	$\int \cdots \int \underline{x}(t)\, dt = \frac{1}{(j\omega)^n}\underline{x}$

R, L und C im kompl. Zeigerbereich

Ohmscher Widerstand	$\hat{U} = R\hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$
Induktivität	$\hat{U} = \omega L\hat{I} \quad \hat{I} = \frac{\hat{U}}{\omega L}$
Kapazität	$\hat{U} = \frac{\hat{I}}{\omega C} \quad \hat{I} = \omega C\hat{U}$

Widerstands und Leitwertoperator

$\underline{Z}$ komplexer Widerstand / Impedanz	$\underline{Y}$ komplexer Leitwert / Admitanz
$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$	$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \cdot e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$
$\lvert\underline{Z}\rvert = Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I}$	$\lvert\underline{Y}\rvert = Y = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{I}{U}$
mit $\varphi_u - \varphi_i = \varphi_Z$	mit $\varphi_i - \varphi_u = -\varphi_Z = \gamma_Y$

Widerstand

$$\underline{Z} = R \wedge \underline{Y} = 1/R$$

Kapazität

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = j\omega C = \omega C e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Induktivität

$$\underline{Z} = j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} \wedge \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{\omega L}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Zeitbereich		komplexer Zeitbereich
$x = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{Hintransformation1}$	$\underline{x} = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi_x) + j\hat{x}\sin(\omega t + \varphi_x)$
$x = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi_x)$	$\xrightarrow{Hintransformation2}$	$\underline{x} = \hat{x}e^{j(\omega t + \varphi_x)}$
		Berechnungen im komplexen Bereich
$y = Im\{y\} = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{Ruecktransformation1}$	$\underline{y} = \hat{y}e^{j(\omega t + \varphi_y)}$
$y = Re\{y\} = \hat{y}\cos(\omega t + \varphi_y)$	$\xleftarrow{Ruecktransformation2}$	$\underline{y} = \hat{y}\cos(\omega t + \varphi_y) + j\hat{y}\sin(\omega t + \varphi_y)$

HT1 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen reellen Kosinusterms mit dem ursprünglichen Sinusterm als Imaginärteil

HT2 erfordert die Ergänzung eines gleichwertigen imaginären Sinusterms mit dem ursprünglichen Kosinusterm als Realteil

RT1 entnahme des Imaginärteils

RT2 entnahme des Realteils

Resultierende Operatoren

Reihenschaltung

$$\underline{Z}_{ges} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_i$$

Parallelschaltung

$$\underline{Y}_{ges} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Y}_i$$

Spannungsteiler

$$\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}$$

Stromteiler

$$\frac{\underline{i}_1}{\underline{i}_2} = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_2}$$

Anteile am komplexen Widerstand (Impedanz)

$$\underline{Z} = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} + j \cdot \mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = R + jX = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi}$$

mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ Phasenwinkel; $R =$ Wirkwiderstand;
$X =$ Blindwiderstand; $|\underline{Z}| =$ Scheinwiderstand

$$R = R \qquad L = \frac{X}{\omega} \text{ mit } X > 0 \qquad C = -\frac{1}{\omega X} \text{ mit } X < 0$$

Anteile am komplexen Leiwert (Admitanz)

$$\underline{Y} = \mathrm{Re}\{\underline{Y}\} + j \cdot \mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = G + jB = |\underline{Y}| \cdot e^{j\gamma}$$

mit $\gamma = \varphi_i - \varphi_u$ Phasenwinkel; $G =$ Wirkleitwert;
$B =$ Blindleitwert; $|\underline{Y}| =$ Scheinleitwert

$$R = \frac{1}{G} \qquad C = \frac{B}{\omega} \text{ mit } B > 0 \qquad L = -\frac{1}{\omega B} \text{ mit } B < 0$$

komplexer Widerstand / komplexer Leitwert

$$\begin{aligned}\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{Z} \cdot e^{-j\varphi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{X}{R}} \\ &= \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \underbrace{\frac{R}{R^2 + X^2}}_{G} \underbrace{-j \frac{X}{R^2 + X^2}}_{B}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z} = R + jX = \frac{1}{\underline{Y}} &= \frac{1}{Y} \cdot e^{-j\gamma} \\
&= \frac{1}{\sqrt{G^2+B^2}} \cdot e^{-j \arctan \frac{B}{G}} \\
&= \frac{1}{G+jB} = \frac{G-jB}{G^2+B^2} = \underbrace{\frac{G}{G^2+B^2}}_{R} \underbrace{-j\frac{B}{G^2+B^2}}_{X}
\end{aligned}$$

Momentanleistung / Augenblicksleistung

$$\begin{aligned}
P(t) = &\underbrace{UI\cos\varphi}_{\text{zeitlich konstant}} - \underbrace{UI\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}_{\text{mit doppelter Frequenz schwingend}} \\
&= UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + 2\varphi_u - \varphi)
\end{aligned}$$

mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i \rightarrow \varphi_i = \varphi_u - \varphi$

Blindleistung *Ermittlung des Blindleistungsanteils aus der Momentanleistung*

$$P(t) = \underbrace{UI\cos\varphi}_{\text{Wirkleistung}} \underbrace{-UI\sin\varphi \cdot \sin(2\omega t + 2\varphi_u)}_{\text{Blindleistung}}$$

$$P_{ges}(t) = P_{wirk}(t) + P_{blind}(t)$$

$$u(t) \cdot i(t) \begin{cases} > 0 \text{ Energie zum Verbraucher} \\ < 0 \text{ Energie zum Erzeuger} \end{cases}$$

Mittlere Leistung / Wirkleistung

$$P = \overline{P}(t) = \frac{1}{n \cdot T} \int_{t_1}^{t_1 + n \cdot T} u(t) \cdot i(t)\, dt = UI\cos\varphi$$

Definition von Blind- und Scheinleistung

$$Q = UI\sin\varphi \quad [Q] = \text{var} \quad \text{mit} \begin{cases} Q > 0 \text{ induktive Blindleistung } Q_{ind} \\ Q < 0 \text{ kapazitive Blindleistung } Q_{kap} \end{cases}$$

$$S = u_{eff} \cdot i_{eff} = U \cdot I \quad [S] = VA$$

Beziehungen zwischen Wirk- Blind- und Scheinleistung

$$\boxed{P = UI \cdot \cos\varphi \qquad Q = UI \cdot \sin\varphi \qquad S = UI}$$

$$\tan\varphi = \frac{Q}{P} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos\varphi$$

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{S^2 - Q^2} \\ &= S \cdot \cos\varphi \\ &= \frac{Q}{\tan\varphi} \end{aligned}$$

$$Q = \begin{cases} > 0 \rightarrow Q_{ind} = \sqrt{S^2 - P^2} \\ < 0 \rightarrow Q_{kap} = -\sqrt{S^2 - P^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ &= \frac{Q}{\sin\varphi} \\ &= \frac{P}{\cos\varphi} \end{aligned}$$

$$Q = S \cdot \sin\varphi = P \cdot \tan\varphi$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arctan\frac{Q}{P} \\ &= \arcsin\frac{Q}{S} \\ &= \arccos\frac{P}{S} \end{aligned}$$

$$P^2 + Q^2 = U^2 \cdot I^2 = S^2$$

Die komplexe Leistung

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* \\ &= U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} \\ &= S \cdot e^{j\varphi} \\ &= \underbrace{S \cdot \cos\varphi}_{P} + j \cdot \underbrace{S \cdot \sin\varphi}_{Q} \\ &= P + jQ \end{aligned}$$

* - konjugiert Komplex

$[\underline{S}] = VA \quad [P] = W \quad [Q] = var$

Zusammenhang mit dem komplexen Leitwert / Widerstand

$$\underline{S} = I^2 \cdot \underline{Z} \qquad P = I^2 \cdot R = U^2 \cdot G \qquad Q = I^2 \cdot X = -U^2 \cdot B$$

Kapitel 15

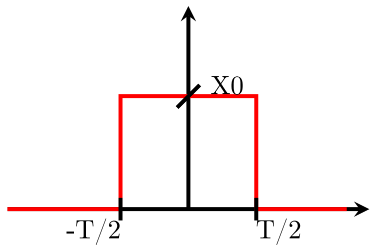
Signal- und Systemtheorie

15.1 Einfache Impulse

Rechteckimpuls/ -funktion $rect_T(t)$

$$x(t) = X_0 \cdot rect_T(t)$$

- T: Rechteckimpulsbreite > 0
- an den Sprungstellen nimmt der Impuls die Hälfte des max. Wertes an

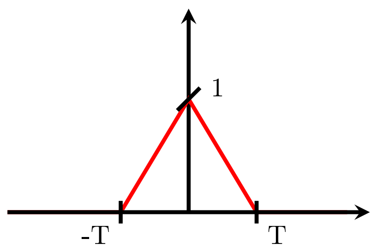


Dreiecksimpuls/ -funktion $\Lambda_T(t)$

$$x(t) = X_0 \cdot \Lambda_T(t)$$

$$\Lambda_T(t) = \begin{cases} 1 - |t/T| \text{ für } |t| < T \\ 0 \text{ für } |t| > T \end{cases}$$

- T: Dauer einer ansteigenden / abfallenden Flanke

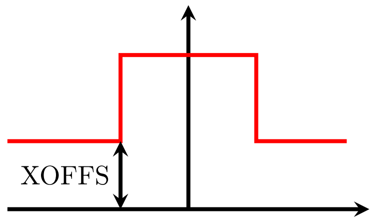


15.2 Elementare Operationen auf zeitliche Verläufe

Beeinflußung der Ordinate

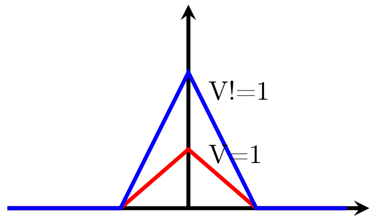
Signaloffset X_{OFFS}

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t) + X_{OFFS}$$



Skalierungsfaktor V $(V \neq 0)$

$$x_{neu}(t) = V \cdot x_{alt}(t)$$

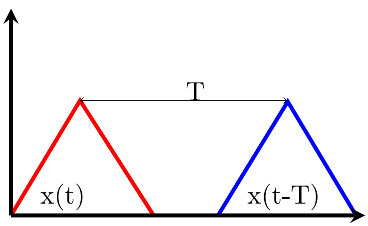


Beeinflußung der Abszisse

zeitliche Verschiebung t_0

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t - t_0) \text{ mit } t_0 = const.$$

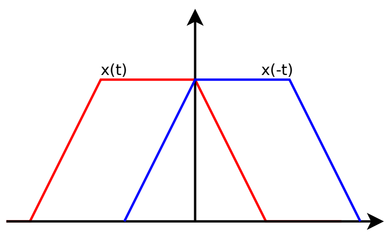
- Zusammenfassung der Offsetbehafteten Zeit $t - t_0$ zu einer neuen Zeitbasis $\tau = t - t_0$
- $x_{neu}(\tau + t_0) = x_{alt}(\tau)$
  $t > 0$ Verschiebung nach rechts
  $t < 0$ Verschiebung nach links



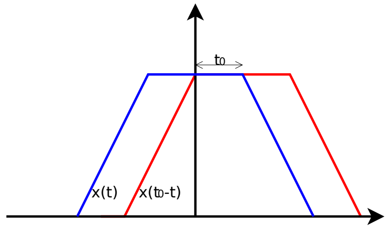
Negation des Arguments t

$$x_{neu}(t) = x_{alt}(-t) \text{ mit } \tau = -t$$
$$x_{neu}(-\tau) = x_{alt}(\tau)$$

- gleiche Funktionswerte mit negierter Zeitbasis, somit Spiegelung an der Ordinate



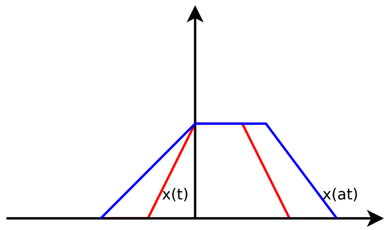
Nagation des Arguments t
sowie eine Verschiebung um t_0



$$x_{neu}(t) = x_{alt}(t_0 - t)$$
mit $t_0 = const.$
$$x_{neu}(t) = x_{alt}(\tau + 1/2t_0)$$
$$x_{neu}(1/2t_0 - \tau) = x_{alt}(\tau + 1/2t_0)$$

- neue Zeitbasis $\tau + 1/2t_0$
- gleiche Funktionswerte, gespiegelt an der Senkrechten von $1/2t_0$

Skalierungsfaktor $a \neq 0$



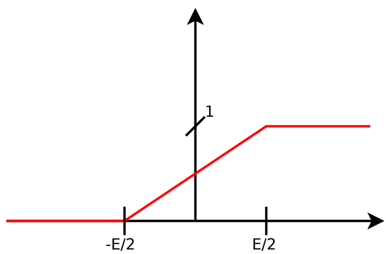
$$x_{neu}(t) = x_{alt}(a \cdot t)$$
mit $a = const.$
$$x_{neu}(t) = x_{alt}(\tau)$$
$$x_{neu}(\tau/a) = x_{alt}(\tau)$$

- neue Zeitbasis $\tau = a \cdot t$
- gleiche Funktionswerte, wenn die Zeitbasis durch a geteilt wird
- $a > 1$ Funktion wird gestaucht
  $0 < a < 1$ Funktion wird gestreckt

Einheitssprungfunktion

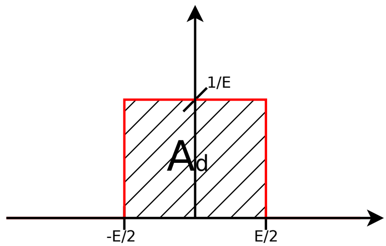
angenäherte Einheitssprungfunktion $\tilde{\sigma}(t, \epsilon)$

- endlicher Geradenanstieg
- Endwert von 1



Einheitsimpuls / Deltaimpuls $\tilde{\delta}(t,\epsilon)$

- Fläche des Impulses ist 1
- Impulshöhe und Breite variabel



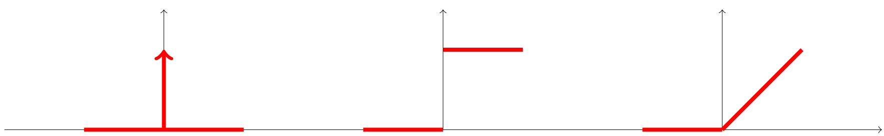
Mathematischer Zusammenhang:

$$\tilde{\delta}(t,\epsilon) = \frac{d\tilde{\sigma}(t,\epsilon)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{\sigma}(t,\epsilon) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{\delta}(t,\epsilon)\, dt$$

Beim Grenzübergang $\epsilon \to 0$ ergibt die Einheitssprungfunktion $\sigma(t)$ bzw. deren Ableitung den Deltaimpuls $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt} = \begin{cases} +\infty \text{ für } t = 0 \\ \\ 0 \text{ für } t \neq 0 \end{cases} \qquad \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\, dt = \begin{cases} 1 \text{ für } t > 0 \\ \frac{1}{2} \text{ für } t = 0 \\ 0 \text{ für } t < 0 \end{cases}$$

Zusammenhang zwischen Deltaimpuls, Einheitssprungfunktion und Einheitsanstiegsfunktion



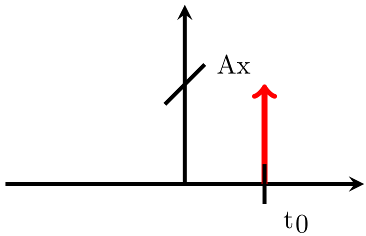
$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}^2\alpha(t)}{\mathrm{dt}^2} \qquad \sigma(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \delta(t)\,\mathrm{dt} = \frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{dt}}$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} t \text{ für } t > 0 \\ \\ 0 \text{ für } t \leq 0 \end{cases} = \int\limits_{-\infty}^{t} \sigma(t)\,\mathrm{dt} = \int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{-\infty}^{t} \delta(t)\,\mathrm{dt}$$

zeitliche Verschiebung und Wichtung

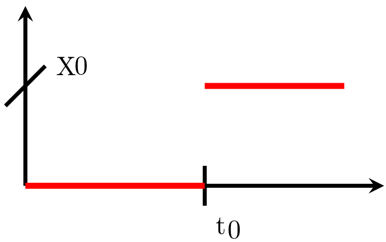
Deltaimpuls

$$x(t) = A_x \cdot \delta(t - t_0)$$
$$[x(t)] = [A_x] \cdot [\delta(t)]$$



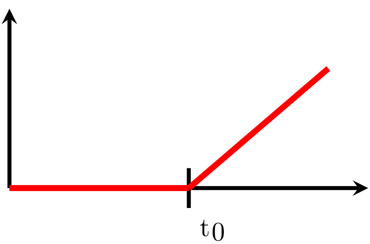
Einheitssprung

$$x(t) = X_0 \cdot \sigma(t - t_0)$$
$$[x(t)] = [X_0]$$



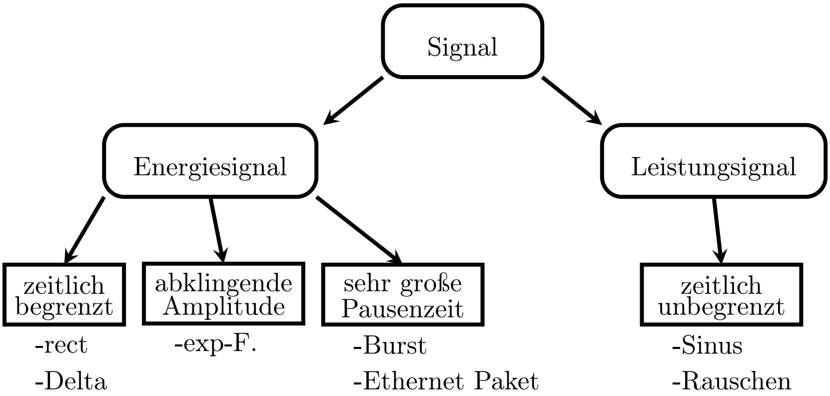
Einheitsanstiegsfunktion

$$x(t) = m \cdot \alpha(t - t_0)$$
$$[x(t)] = [m] \cdot [\alpha(t)]$$



15.3 Signale

Definition: Ein Signal ist eine zeitlich und / oder örtlich veränderliche Größe (physikalisch). Die Veränderung dieser physikalischen Größe, sagt nichts über Ihren Informationsgehalt aus.



Energiewandlung

$$E_R = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot i(t)\,\mathrm{dt} \qquad [E_R] = V \cdot A \cdot s = W s$$

$$\text{mit } i(t) = \frac{u(t)}{R} \text{ folgt}$$

$$E_R = \frac{1}{R} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\,\mathrm{dt}$$

Momentanleistung $P_r(t_1)$

$$P_R(t_1) = u(t_1) \cdot i(t_1) \qquad [P_R(t_1)] = W$$

$$P_R = U_0 \cdot I_0 = \frac{U_0^2}{R} \qquad \text{bei Gleichleistung}$$

Mittlere Leistung P_R

$$P_R = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} u(t) \cdot i(t)\,\mathrm{dt} \qquad [P_R] = W$$

$$= \frac{1}{R} \cdot \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} u^2(t)\,\mathrm{dt}$$

Spezialfall: Periodische Signalverläufe

$$= \frac{1}{n \cdot t_P} \int\limits_{t_1}^{t_1+n\cdot t_P} u_P(t) \cdot i_P(t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{R \cdot n \cdot t_P} \int\limits_{t_1}^{t_1+n\cdot t_P} u_P^2(t)\,\mathrm{dt}$$

T: Betrachtungszeit, Meßdauer t_1: Startzeitpunkt t_P: Periodendauer $R = const.$

Signalenergie / Impulsenergie / Impulsmoment 2. Ordnung E_U

Nur für Energiesignale sinnvoll.

$$E_U = m_{i2} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\,\mathrm{dt} \qquad [E_U] = V^2 s$$

Zeitdiskrete Signalverläufe:

$$E_X = m_{i2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_q^2(k) \qquad [E_X] = 1$$

Entnormierung über einem realen Widerstand:

$$E_R = E_U \cdot \frac{1}{R} \qquad [E_R] = Ws$$

Mittlere Signalleistung P_u/ Gesamtsignalleistung P_i/ quadratischer Mittelwert $\overline{u^2}$/ gewöhnliches Moment 2. Ordnung m_2

Nur für Leistungssignale sinnvoll.

$$P_u = \overline{u^2} = m_2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} u^2(t)\,\mathrm{dt} \qquad [P_u] = V^2$$

Spezialfall: Periodische Signalverläufe

$$P_u = \overline{u^2} = m_2 = \frac{1}{t_p} \int\limits_{t_1}^{t_1+t_p} u_p^2\,(t)\,\mathrm{dt}$$

Spezialfall: zeitdiskrete Signalverläufe

beliebiges nichtperiodisches Signal:

$$P_X = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2\,(k)$$

periodisches Signal:

$$P_X = \frac{1}{N_P} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2\,(k)_P$$

Spezialfall: konstannte Werte

$$P_X = X_q^2\,(k_1)_k$$

Entnormierung über einem realen Widerstand:

$$P_R = P_U \cdot \frac{1}{R} \qquad [P_R] = W$$

Signalenergie↔Signalleistung

	Energiesignal	Leistungssignal
Signalenergie	endlicher Wert	$+\infty$
Signalleistung	0	endlicher Wert

15.4 Signalbeschreibung Leistungssignale

Effektivwert

Energiesignale haben einen Effektivwert von Null.

$$u_{eff} = \sqrt{P_u} = \sqrt{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} u^2\,(t)\,\mathrm{dt}}$$

Spezialfall: zeitdiskrete Signalverläufe

$$X_{eff} = \sqrt{P_X} = \sqrt{\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q^2\,(k)}$$

gerader-/ungerader Anteil

gerader Anteil:

$$u_g(t) = \frac{u(t) + u(-t)}{2}$$

ungerader Anteil:

$$u_u(t) = \frac{u(t) - u(-t)}{2}$$

Gleichanteil / linearer Mittelwert / gewöhnliches Moment 1. Ordnung m_1

Enrgiesignale haben einen Gleichanteil von Null.

beliebige Signalverläufe

$$\overline{x} = m_1 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} x(t)\,\mathrm{dt} \qquad [\overline{x}] = [x]$$

periodische Signalverläufe

$$\overline{x} = m_1 = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} x(t)\,\mathrm{dt} \qquad [\overline{x}] = [x]$$

zeitdiskrete Signalverläufe

$$\overline{x_k} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x_q(k)$$

periodische zeitdiskrete Signalverläufe

$$\overline{x_k} = \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x_q(k)_p$$

Signalgleichleistung / quadrierter linearer Mittelwert $\overline{u}^2$/ quadriertes gewöhnliches Moment 1. Ordnung m_1^2

Energiesignale haben eine Signalgleichleistung von Null.

beliebige Signalverläufe

$$P_{u_=} = [\overline{u}]^2 = m_1^2 = \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t)\,\mathrm{dt}\right]^2 \qquad [P_{u_=}] = V^2$$

zeitdiskrete Signalverläufe

$$P_{X_=} = [\overline{x}]^2 = m_1^2 = \left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} X_q(k)\right]^2 \qquad [P_{X_=}] = 1$$

Entnormierung

$$P_{R_=} = \frac{P_{u_=}}{R} \qquad [P_{R_=}] = W$$

Signalwechselleistung $P_{u\sim}$/ Varianz σ^2/ zentrales Moment 2. Ordnung μ_2

Energiesignale haben eine Signalwechselleistung von Null.

$$P_{u\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} [u(t) - \overline{u}]^2 \,\mathrm{dt}$$

periodischer Spannungsverlauf

$$P_{p\sim} = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} [u(t) - \overline{u}]^2 \,\mathrm{dt}$$

zeitdiskrete Signale

$$P_{X\sim} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} \left[X_q(k) - \overline{X}\right]^2$$

periodische zeitdiskrete Signale

$$P_{X\sim} = \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} \left[X_q(k)_p - \overline{X}\right]^2$$

Entnormierung

$$P_{R\sim} = \frac{P_{u\sim}}{R} \qquad [P_{R\sim}] = W$$

Leistungsbilanz

$$P_u = P_{u_=} + P_{u\sim} = m_2 = m_1^2 + \mu_2 = [\overline{u}]^2 + \sigma^2$$

15.5 Signalbeschreibung Energiesignale

Impulsfläche A_u/ Impulsmoment 1. Ordnung m_{i1}

Leistungssignale besitzen Flächen von $\pm\infty$ bzw. Null.

$$A_u = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u\left(t\right) \mathrm{dt} \qquad\qquad [A_u] = Vs$$

zeitdiskrete Signale

$$A_X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_q\left(k\right) \qquad\qquad [A_X] = 1$$

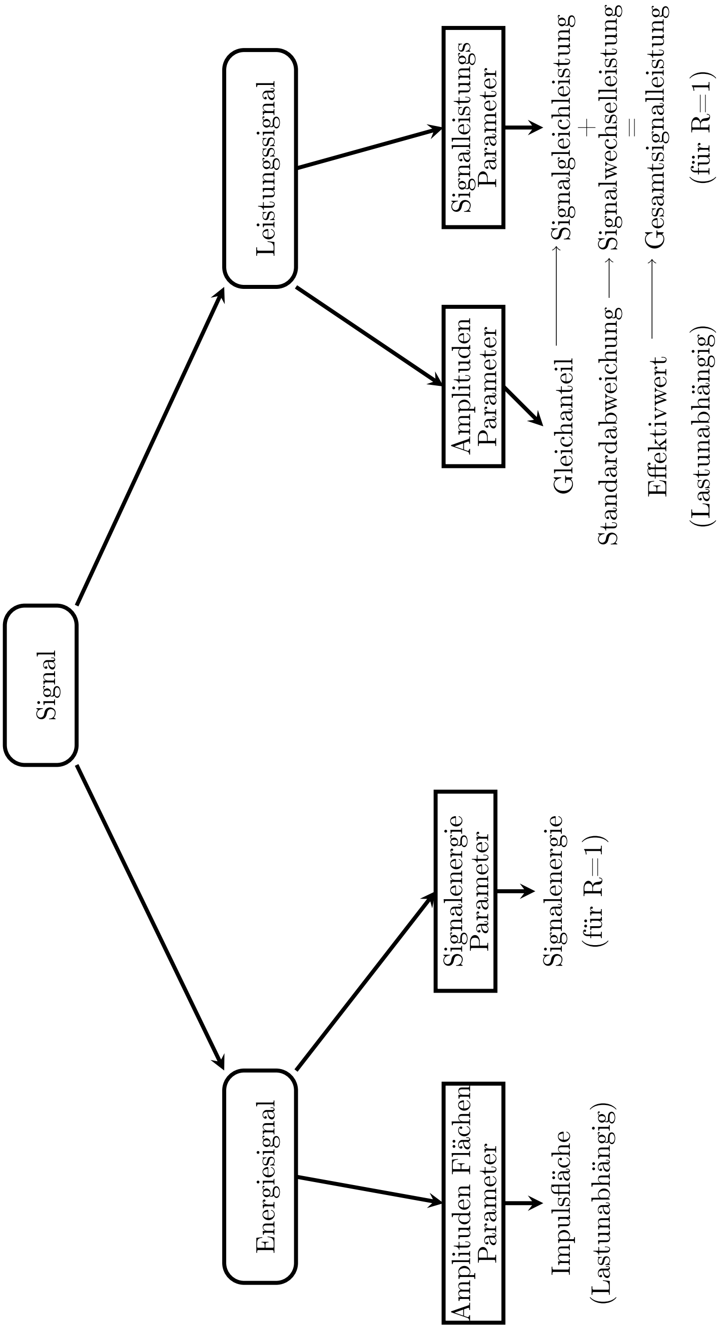
15.6 Systeme

Definition: Ein System ist ein physikalisches oder auch technisches Gebilde, welches ein Signal (Eingangssignal, Systemerregung / -anregung) in ein im Allgemeinen andersartiges Signal umformt. Dieses wird Ausgangssignal bzw. Systemantwort / -reaktion genannt.

- Systemeigenschaften
  - Linearität
    - Homogenität
    - Additivität
  - Zeitinvarianz
  - Kausalität
  - Stabilität

Übersicht:

Linearität	Ist nur vorhanden, wenn Homogenität und Additivität vorliegen. Die Multiplikation eines konstannten Faktors mit dem Eingang, führt zu Multiplikation des gleichen Faktors mit dem Ausgang.
Additivität	$x(t)$ ist additiv zerlegbar, diese Anteile können getrennt verarbeitet sowie die Systemreaktionen addiert werden.
Zeitinvarianz	Zeitinvarianz ist vorhanden, wenn sich die Systemeigenschaften zeitlich nicht ändern. Eine Zeitverzögerung des Eingangssignals überträgt sich somit um eine gleiche Verzögerung ins Ausgangssignal.
Kausalität	Kausalität ist Vorhanden, wenn die Systemreaktion nicht schon vor Begin der Systemerregung einsetzt. Somit ist jedes realisierbare System zwingend kausal.
Stabilität	**Stabilität** Ist vorhanden, wenn bei einem betragsmäßig beschränktem, beliebigem breitbandigen Eingangssignal auch ein betragsmäßig beschränktes Ausgangssignal vorliegt. **Grenzstabilität** Bedingungen der Stabilität werden nicht erfüllt, jedoch ist die Signalleistung ab einem best Zeitpunkt konstannt. **Instabilität** Ausgangssignal wächst selbst beim verschwinden von $x(t)$ unbegrenzt an.


Signal
Leistungssignal
Energiesignal
Amplituden Parameter
Signalleistungs Parameter
Gleichanteil
Standardabweichung
Effektivwert
(Lastunabhängig)
Signalgleichleistung
+
Signalwechselleistung
=
Gesamtsignalleistung
(für R=1)
Amplituden Flächen Parameter
Signalenergie Parameter
Impulsfläche
(Lastunabhängig)
Signalenergie
(für R=1)

Impulsantwort / Gewichtsfunktion $g(t)$

$$\text{mit } x(t) = \delta(t) \text{ folgt } y(t) = g(t)$$
$$[g(t)] = [\delta(t)] = s^{-1}$$
$$y(t) = T\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = x(t) \star g(t)$$

Zeitdiskret:

$$y(k) = \sum_{L=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot g(k-L) = x(k) \star g(k)$$

Sprungantwort / Übergangsfunktion $h(t)$

Zusammenhang:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,\mathrm{dt} \Leftrightarrow \delta(t) = \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{dt}}$$

$$FT\{\sigma(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) - j\frac{1}{2\pi f}$$

Zusammenhang zwischen Übergangs- und Gewichtsfunktion

$$g(t) = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{dt}} \quad \rightsquigarrow \quad h(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t)\,\mathrm{dt} = \underbrace{\int_{0}^{t} g(t)\,\mathrm{dt}}_{Kausales System}$$

Faltungsoperation

- setzt LTI-Systeme voraus
- Gewichtsfunktion wird nur bei LTI-Systemen angegeben

$$y(t) = T\{x(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = x(t) * g(t)$$

zeitdiskrete Systeme:

$$y(k) = T\{x(k)\} = \sum_{L=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot g(k-L) = x(k) * g(k)$$

Polynommultiplikation:

$$p_p = \sum Ordinatenwert \cdot r^{Abszissenwert}$$

$$y_p(k) = x_p \cdot g_p$$

Kapitel 16

Signalverarbeitung

16.1 Laplace / Fourier-Transformation

Laplaceintegral

$$X(p) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad x(t)$$
$$X(p) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)\, e^{-p\cdot t}\, \mathrm{d}t$$

Fourierintegral

$$X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t$$
$$X(\omega) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad x(t)$$
$$X(f) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, \mathrm{d}t$$
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_{re} + jx_{im}) \cdot (\cos(2\pi f t) - j \cdot \sin(2\pi f t))\, \mathrm{d}t$$
$$X(f) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad x(t)$$
$$x(t) = \frac{1}{2\cdot\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, \mathrm{d}\omega$$
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, \mathrm{d}\omega$$

Diskrete Fourier Transformation

1. Variante

$$X(l) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

2. Variante

$$X(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

$$x(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

3. Variante

$$X(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{-j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)\, e^{j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}}$$

DFT als Matrizen-Multiplikation

$$[X(l)] = \frac{1}{\alpha} \cdot \left[F_{l,k}^{N}\right] \cdot [x(k)] \qquad t \Rightarrow f$$

$$[x(k)] = \frac{1}{\alpha} \cdot \left[f_{k,l}^{N}\right] \cdot [X(l)] \qquad f \Rightarrow t$$

$$\left[f_{k,l}^{N}\right] = \frac{1}{\alpha} \cdot \left[F_{l,k}^{N}\right]^{*}$$

α ist je nach Art der Transformationsvariante $1, N$ oder $\sqrt{N}$ und eigentlich schon in der Transformationsvorschrifft enthalten.

$$F_{l,k}^{N} = e^{-j2\pi \cdot l \cdot \frac{k}{N}} = \cos\left(2\pi l \frac{k}{N}\right) - j \sin\left(2\pi l \frac{k}{N}\right)$$

Additionssatz

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \ldots \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = X_1(f) + X_2(f) + \ldots$$

Linearität

$$x(t) = C \cdot x_1(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = C \cdot X_1(f)$$

Verschiebungssatz

$$x(t) = x_1(t - t_0) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = X_1(f) \cdot e^{-j2\pi f \cdot t_0}$$

Ähnlichkeitssatz

$$x(t) = x_1(a \cdot t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \frac{1}{|a|} X_1\left(\frac{f}{a}\right)$$

$$x(t) = \frac{1}{|b|} x_1\left(\frac{t}{b}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = X_1(b \cdot f)$$

Differentiationssatz

$$x(t) = \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = j2\pi f \cdot X(f)$$

$$x(t) = \frac{\mathrm{d}^K x_1(t)}{\mathrm{d}t^K} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = j^K (2\pi f)^K \cdot X(f)$$

$$x(t) = \frac{\mathrm{d}^K x_1(t)}{\mathrm{d}t^K} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega) = j^K (\omega)^K \cdot X(\omega)$$

Integrationssatz

$$x(t) = \int_{\infty}^{t} x_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \frac{1}{j2\pi f} \cdot X_1(f) + \frac{1}{2} X_1(f=0)\,\delta(f)$$

$$x(t) = \int_{\infty}^{t} x_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot X_1(\omega) + \pi \cdot X_1(\omega=0)\,\delta(\omega)$$

Integrationssatz im Frequenzbereich

$$x(t) = \frac{1}{-j2\pi t} \cdot x_1(t) + \frac{1}{2} x_1(t=0)\,\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \int_{-\infty}^{f} X_1(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$x(t) = \frac{1}{-jt} \cdot x_1(t) + \pi \cdot x_1(t=0)\,\delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} X_1(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

Vertauschungssatz

$$x(t) = x_1(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = X_1(f)$$

$$x(t) = X_1(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = x_1(-f)$$

$$x(t) = x_1(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega) = X_1(\omega)$$

$$x(t) = X_1(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega) = 2\pi \cdot x_1(-\omega)$$

Faltung

$$x(t) = x_1(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\varphi) \cdot X_2(f-\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$x(t) = x_1(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\varphi) \cdot X_2(\omega-\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = x_1(f) \cdot x_2(f)$$

Delta-Impulsfläche

$$ш_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kt_p)\, s^{-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Ш_A(f) = f_a \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f-mf_a)\, Hz^{-1}$$

$$f_a = \frac{1}{t_p}$$

$$ш_a(t) = t_a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kt_a)\, s^{-1} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Ш_P(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f-mf_p)\, Hz^{-1}$$

$$f_p = \frac{1}{t_a}$$

Periodifizierung

$$x(t) = x_T(t) * ш_p(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = X_T(f) \cdot Ш_A(f)$$

Abgetastete Funktionen

$$x_\delta(t) = x(t) \cdot ш_a(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_\delta(f) = X(f) * Ш_p(f)$$

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kt_a) \cdot t_a \cdot \delta(t - kt_a) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_\delta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_p)$$

Abgetastete und Periodifizierte Funktionen

$$x_{\delta p}(t) = (x_T(t) * ш_p(t)) \cdot ш_a(t)$$

$$x_{\delta p}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_T(kt_a - mt_p) \cdot t_a \cdot \delta(t - kt_a)$$

$$X_{\delta p}(t) = (X_T(f) \cdot Ш_a(f)) * Ш_p(f)$$

$$X_{\delta p}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_T(mf_a - kf_p) \cdot f_a \cdot \delta(f - mf_a)$$

$$f_a = \frac{1}{t_p}$$

$$f_p = \frac{1}{t_a}$$

Korrespodenz

$$x(t) = \hat{X}\mathrm{rect}_T(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\omega) = \hat{X}T \cdot \mathrm{si}\left(\omega \cdot \frac{T}{2}\right)$$

$$x(t) = \hat{X}\Lambda_T(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(j\omega) = \hat{X}T \cdot \mathrm{si}^2\left(\omega \cdot \frac{T}{2}\right)$$

$$x(t) = \hat{X}\sin(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \frac{j\hat{X}}{2}\left(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)\right)$$

$$x(t) = \hat{X}\cos(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X(f) = \frac{\hat{X}}{2}\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)$$

16.2 Spektrum

Betragsspektrum

$$|X(f)| = \sqrt{(\mathrm{Re}\{X(f)\})^2 + (\mathrm{Im}\{X(f)\})^2}$$

Betragsquadratspektrum

$$|X(f)|^2 = (\mathrm{Re}\{X(f)\})^2 + (\mathrm{Im}\{X(f)\})^2$$

Theorem von Parseval

$$E = m_{i2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,\mathrm{d}f$$

16.3 Korrelation

Kreuzkorrelationsfunktion

$$E_{x_1x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t+\tau)\cdot x_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)\cdot x_2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$E_{x_1x_2}(l) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k+l)\cdot x_1(k)\,\mathrm{d}t$$

Normierte Kreuzkorrelationsfunktion

$$\mathring{x} = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$$
$$\mathring{E}_{x_1x_2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2(t)\,\mathrm{d}t}$$
$$r_{x_1x_2}(\tau) = \frac{E_{x_1x_2}(\tau)}{\mathring{E}_{x_1x_2}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t+\tau)\cdot x_1(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t)\,\mathrm{d}t\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2(t)\,\mathrm{d}t}}$$
$$|r_{x_1x_2}(\tau)| \leq 0$$

Kapitel 17

Binäre Rechenoperationen

17.1 Zahlensysteme

17.1.1 Dualsystem

Basis : 2 $\quad z \in (1;0)$

Format : $2^{n-1} \dots 2^0, 2^{-1} \dots 2^{-m}$

Zahlenwert : $\displaystyle\sum_{l=-m}^{n-1} z_l \cdot 2^l$

17.1.2 Ternärsystem

Basis : 2 $\quad z \in (1;0;-1)$

17.1.3 Oktalsystem

Basis : 8 $\quad z \in (0;1;2;3;4;5;6;7)$

17.1.4 Hexadezimalsystem

Basis : 16 $\quad z \in (0;1;2;3 \dots d;e;f)$

17.1.5 Dezimalsystem

Basis : 10 $\quad z \in (0;1;2;3 \dots 8;9)$

17.1.6 Stellenberechnung

k : Zahlenwert
l : Anzahl Nachkommastellen im Dezimalsystem
n : Anzahl Vorkommanstellen im Dualsystem
m : Anzahl Nachkommastellen im Dualsystem

$$n \geq \text{ceil}\left(\frac{\lg(k+1)}{\lg(2)}\right)$$
$$m \geq \text{ceil}\left(\frac{l}{\lg(2)}\right)$$

17.1.7 Wertebereich und Quantisierungsfehler(Dualsystem)

n : Anzahl Vorkommanstellen im Dualsystem
m : Anzahl Nachkommastellen im Dualsystem

$$\text{Wertebereich} = 0 \ldots 2^n - 2^{-m}$$
$$\text{Quantisierungsfehler} = \pm\frac{1}{2}\text{LSB} = \pm 2^{-m-1}$$
$$\text{Quantisierungsstuffen} = 2^{-m}$$

17.2 Addition

17.2.1 Zwei Operanden

Carry-Look-Ahead

s_i : Summe der Stelle i
p_{i+1} : Propagate Übertrag an der Stelle i
g_{i+1} : Generate Übertrag kompensation

$$s_i = a_i \nsim b_i \nsim c_i$$
$$p_{i+1} = a_i \nsim b_i$$
$$g_{i+1} = a_i \cdot b_i$$
$$c_{i+1} = p_{i+1} \cdot c_i + g_{i+1}$$

Halbaddierer

s_i : Summe der Stelle i
c_{i+1} : Übertrag der Stelle i+1

$$s_i = a_i \nsim b_i$$
$$c_{i+1} = a_i \cdot b_i$$

Volladdierer

s_i : Summe der Stelle i
c_{i+1} : Übertrag der Stelle i+1
c_i : Übertrag der Stelle i

$$s_i = a_i \nsim b_i \nsim c_i$$
$$c_{i+1} = a_i \cdot b_i + (a_i \nsim b_i) \cdot c_i$$

17.2.2 Mehrere Operanden

Ripple-Carry: Jede Stufe addiert jeweils einen Operanden hinzu.

Baumstruktur: Die einzelnen Operanden werden Baumförmig addiert.

Carry-Save: Nur der letzte Addierer ist Sequentiel aufgebaut. Daher wird der Übertrag des Vorgängers beim nächsten aufaddiert.

17.2.3 Überlauf

Positive Operanden

s : Summe
n : Anzahl Vorkommanstellen im Dualsystem

$$s = (a + b) \operatorname{mod} 2^n$$

Negative Operanden

s : Entstehender Summenwert
p : Operanden Anzahl

$$s = \left(a + b + 2^n \operatorname{ceil}\left(\frac{p-1}{2}\right) + 2^{n-1}\right) \operatorname{mod} 2^n - 2^{n-1}$$

Vermeidung

r : Zusätzliche Summenstellen
p : Operandenanzahl

$$r = \operatorname{ceil}\left(\frac{\lg(p)}{\lg(2)}\right)$$

17.2.4 Überlaufserkennung

Vergleich der MSB Stellen

$a_{MSB} \neq b_{MSB}$ $\Rightarrow$ Kein Überlauf möglich

$a_{MSB} = b_{MSB} = s_{MSB}$ $\Rightarrow$ Kein Überlauf möglich

$a_{MSB} = b_{MSB} = 0 \quad \& \quad s_{MSB} = 1$ $\Rightarrow$ Positiver Überlauf

$a_{MSB} = b_{MSB} = 1 \quad \& \quad s_{MSB} = 0$ $\Rightarrow$ Negativer Überlauf

$MIN = a_{MSB}$

$OVF = \bar{a}_{MSB} s_{MSB} \left(\overline{b_{MSB} \nsim s_{MSB}}\right) + a_{MSB} \bar{s}_{MSB} \left(b_{MSB} \nsim s_{MSB}\right)$

Vergleich des Carry

$c_{I;MSB} = c_{O;MSB}$ $\Rightarrow$ Kein Überlauf möglich

$c_{I;MSB} = 1 \quad \& \quad c_{O;MSB} = 0$ $\Rightarrow$ Po

$c_{I;MSB} = 0 \quad \& \quad c_{O;MSB} = 1$ $\Rightarrow$ Ne

$MIN = c_{O;MSB}$

$OVF = c_{I;MSB} \nsim c_{O;MSB}$

Erweiterung der MSB Stelle

$s_{MSB} = s_{MSB+1}$ $\Rightarrow$ Kei

$s_{MSB} = 1 \quad \& \quad s_{MSB+1} = 0$ $\Rightarrow$ Pos

$s_{MSB} = 0 \quad \& \quad s_{MSB+1} = 1$ $\Rightarrow$ Neg

$MIN = s_{O;MSB}$

$OVF = s_{I;MSB} \nsim s_{O;MSB}$

17.2.5 Sättigung

s_{MSB} : Behandlung der höchsten Stelle
s_{LSB} : Behandlung der restlichen Stellen

$$s'_{MSB} = s_{MSB}\overline{OVF} + OVF\,MIN$$
$$s'_{LSB} = s_{LSB}\overline{OVF} + OVF\,\overline{MIN}$$

Teil IV

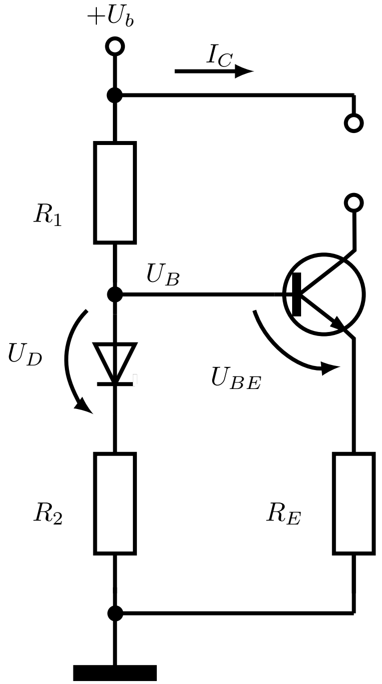
Analoge Schaltungstechnik

Kapitel 18

Grundschaltungen

Konstantstromquelle

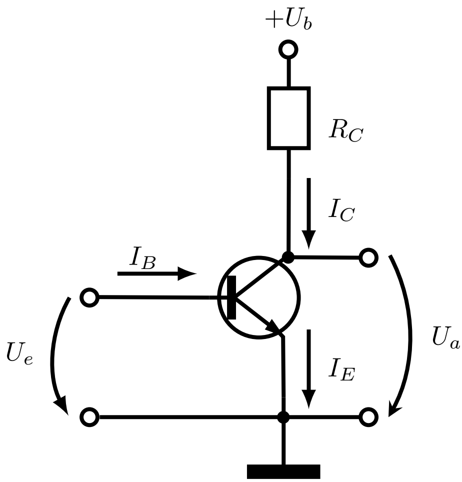
mit Bipolartransistoren



$$I_E \approx I_c = \frac{U_B - U_{BE}}{R_E} = const.$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{I_c = \frac{R_2}{R_E} \cdot I_1}_{Stromspiegel}$$

Emitterschaltung



Eingangswiderstand

$$r_e = r_{BE} = \frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}I_e} = \frac{1}{Y_{11}}$$

Ausgangswiderstand

$$r_a = -\frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{d}I_a} = R_C \| r_{CE}$$

Parameter

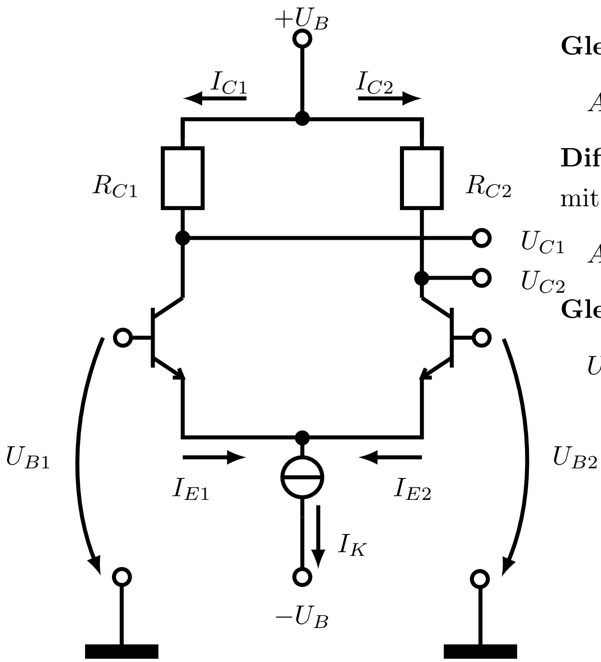
$$\mathrm{d}I_B = \underbrace{\frac{\partial I_B}{\partial U_{BE}}}_{Y_{11}=\frac{1}{r_{BE}}} \cdot \mathrm{d}U_{BE} + \underbrace{\frac{\partial I_B}{\partial U_{CE}}}_{Y_{12}=Sr} \cdot \mathrm{d}U_{CE}$$

$$\mathrm{d}I_C = \underbrace{\frac{\partial I_C}{\partial U_{BE}}}_{Y_{21}=S} \cdot \mathrm{d}U_{BE} + \underbrace{\frac{\partial I_C}{\partial U_{CE}}}_{Y_{22}=\frac{1}{r_{CE}}} \cdot \mathrm{d}U_{CE}$$

Verstärkung

$$A \text{ bzw. } V = \frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{d}U_e} = -S\,(R_C \| r_{CE})$$

Differenzverstärker



Gleichtaktaussteuerung

$$A_{GL} = \frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{d}U_{GL}} \stackrel{!}{=} 0$$

Differenzverstärkung

mit $U_D = U_{B_1} - U_{B_2}$ folgt

$$A_D = \frac{\Delta U_{C2}}{\Delta U_D}$$

Gleichtakteingangsspannung

$$U_{GL} = \frac{U_{B_1} + U_{B_2}}{2}$$

reine Differenzaussteuerung

$\Delta U_{B_1} = -\Delta U_{B_2} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{d}U_{B_1} = -\mathrm{d}U_{B_2} = \frac{\mathrm{d}U_D}{2}$

mit $U_E = const.$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}U_{C1}}{\mathrm{d}U_D} = \frac{\mathrm{d}U_{C1}}{2\mathrm{d}U_{B_1}} = -\frac{1}{2}S\left(R_C \parallel r_{CE}\right) = -A_D$$

$$\frac{\mathrm{d}U_{C2}}{\mathrm{d}U_D} = \frac{\mathrm{d}U_{C2}}{2\mathrm{d}U_{B_2}} = \frac{1}{2}S\left(R_C \parallel r_{CE}\right) = A_D$$

Gleichtaktaussteuerung

$\mathrm{d}U_E = \mathrm{d}U_{GL} \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{d}I_K = \frac{\mathrm{d}U_{GL}}{r_K} \neq const.$

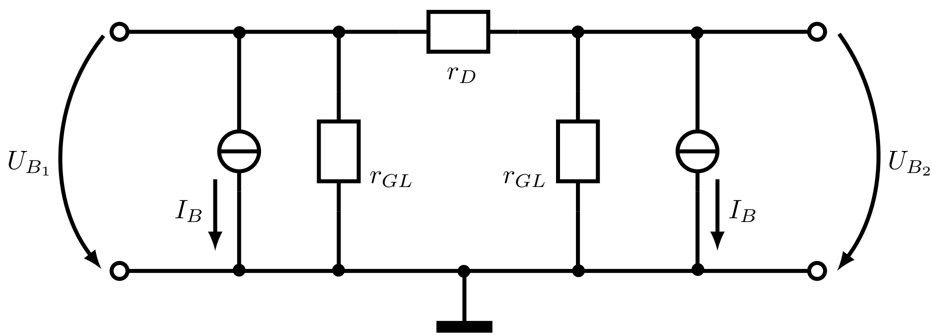
mit $\mathrm{d}U_C = -\mathrm{d}I_C \cdot R_C$ folgt:

$$\mathrm{d}U_{C1} = \mathrm{d}U_{C2} = -\frac{R_C}{2r_K} \cdot \mathrm{d}U_{Gl} \quad \rightsquigarrow \quad A_{Gl} = \frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{d}U_{Gl}} = -\frac{R_C}{2r_K}$$

Mischaussteuerung (lineare Überlagerung)

$$\mathrm{d}U_{C1} = -\frac{1}{2}S\left(R_C \parallel r_{CE}\right) \cdot \mathrm{d}U_D - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_C}{r_K} \cdot \mathrm{d}U_{Gl}$$
$$\mathrm{d}U_{C2} = +\frac{1}{2}S\left(R_C \parallel r_{CE}\right) \cdot \mathrm{d}U_D - \frac{1}{2} \cdot \frac{R_C}{r_K} \cdot \mathrm{d}U_{Gl}$$

Eingangswiderstand



Teil V

Messtechnik

Kapitel 19

Grundlagen

19.1 Begriffe

- Messwert x_i: gemessener Wert der Messgröße
- Wahrer Wert x_w: existierender Wert der Messgröße
- Richtiger Wert x_r: bekannter Wert mit vernachläßigbarer Differenz zum wahren Wert
- Messabweichung e: Differenz zwischen gemessenem und wahrem Wert
- Systematische Messabweichung e_{sys}: Bekannte systematische Messabweichung (korrigierbar)
- Messunsicherheit u: Intervall um den Messwert in dem der wahre Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit zu finden ist

19.2 Messabweichung e

$$e = x - x_w$$

19.2.1 relative Messabweichung

$$e_{rel} = \frac{e}{x_w} = \frac{x - x_w}{x_w} = \frac{x}{x_w} - 1$$

Korrekturfaktor K

Bei bekannter systematischer Messabweichung.

$$K = -e_{sys}$$

Korrigierter Messwert x_{korr}

$$x_{korr} = x + K$$

19.2.2 Messabweichung e_y

$$e_y = y - y_w = f\left(x_1 + e_{x_1}, x_2 + e_{x_2}, \cdots, x_n + e_{x_n}\right)$$

$$e_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_{x_i} \qquad \Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

19.2.3 Fortpflanzung systematischer Messabweichungen

Addition / Subtraktion

$$y = x_1 \pm x_2 \quad \longrightarrow \quad e_y = e_{x_1} \pm e_{x_2}$$

Multiplikation

$$y = x_1 \cdot x_2 \quad \longrightarrow \quad e_y = x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}$$

$$e_{rel} = \frac{e_y}{y} = \frac{x_2 \cdot e_{x_1} + x_1 \cdot e_{x_2}}{x_1 \cdot x_2} = e_{rel,x_1} + e_{rel,x_2}$$

Division

$$y = \frac{x_1}{x_2} \quad \longrightarrow \quad e_y = \frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{{x_2}^2} e_{x_2}$$

$$e_{rel} = \frac{e_y}{y} = \frac{\frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{{x_2}^2} e_{x_2}}{x_1 \cdot {x_2}^{-1}} = e_{rel,x_1} - e_{rel,x_2}$$

19.3 Statistische Größen

Verteilungsfunktion

$$F(x) = prob\,(X \leq x)$$

Verteilungsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Es gillt:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$F(x \to \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$$

$$prob\,(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

19.4 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Erwartungswert μ

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

nur für stetige Zufallsgrößen

wahrer Wert X

$$x_w = \mu$$

nach Korrektur
der systematischen Abweichung

Varianz σ^2

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 \cdot f(x)\,dx$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

19.5 Verteilungsfunktionen

Normalverteilung

- Normal oder Gaußverteilung
- gute Näherung bei unbekannter statistischer Verteilung
- Werteverteilung:
  - 68,3% aller Werte liegen in $\mu \pm \sigma$
  - 95,5% aller Werte liegen in $\mu \pm 2\sigma$
  - 99,7% aller Werte liegen in $\mu \pm 3\sigma$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

Gleichverteilung

- auch Rechteckverteilung
- alle vorkommenden Werte besitzen gleiche Wahrscheinlichkeit im Intervall

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \mu - a < x < \mu + a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}a^2$$

19.6 Stichprobe

Mittelwert $\overline{x}$

Der Mittelwert ist ein Schätzwert für den Erwartungswert μ und damit für den wahren Wert.

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

empirische Varianz s^2

Die empirische Varianz ist ein Schätzwert für die eigentliche Varianz der Messreihe.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

19.7 Vertrauensbereich für den Erwartungswert

Endlich große Stichprobe liefert zufällige Differenz zwischem Schätzwert $\overline{x}$ und wahrem Wert $\mu = x_w$.

$$\overline{x_g} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \overline{x_i} s_g^2 = \frac{1}{m} s_i^2 s_g = \frac{1}{\sqrt{m}} s_i$$

Vertrauensbereich:

$$\overline{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} s < \mu < \overline{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} \quad \text{mit} \quad t = t\,(n, \alpha)$$

Studentverteilung

Gibt den t Faktor für Normalverteilungen an

α Überschreitungswhrscheinlichkeit

$1 - \alpha$ Vertrauensniveau

$1-\alpha$	68,3%	95%	99,73%
$n = 2$	1,84	12,70	235,80
$n = 3$	1,32	4,30	19,21
$n = 4$	1,20	3,18	9,22
$n = 5$	1,15	2,78	6,62
$n = 6$	1,11	2,57	5,51
$n = 10$	1,06	2,26	4,09
$n = 20$	1,03	2,09	3,45
$n = 50$	1,01	2,01	3,16
$n \to \infty$	1,00	2,00	3,00

19.8 Fortpflanzung zufälliger Abweichungen

Bedingung: Messergebnis setzt sich aus mehreren Messgrößen x_i zusammen

Erwartungswerte

$$\mu_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{n_i}$$

Varianzen

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \left(x_{n_i} - \mu_n\right)^2$$

Worst-Case-Kombination

Maximale Abweichung des Ergebnisses vom Mittelwert.

$$\begin{aligned} y &= f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \\ |\Delta y| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| \end{aligned}$$

statistische Kombination der Varianzen

Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz…

$$\begin{aligned} y &= f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \\ \sigma_y^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)} \right)^2 \sigma_k^2 \right) \\ \sigma_y^2 &= \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{\mu_1} \sigma_1 \right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{\mu_2} \sigma_2 \right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x_3}\right|_{\mu_3} \sigma_3 \right)^2 + \quad \cdots \end{aligned}$$

…kann auf empirische Varianz übertragen werden.

$$\begin{aligned} y &= f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n}\right) \\ s_y^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\left.\frac{\partial f}{\partial \overline{x_k}}\right|_{(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)} \right)^2 s_k^2 \right) \end{aligned}$$

19.9 Fortpflanzung von Messunsicherheiten

Worst Case Abschätzung und Gaußsches Fortpflanzungsgesetz lassen sich auf die Messunsicherheiten übertragen.

Worst Case Abschätzung der Unsicherheit

$$u_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| u_{x_i}$$

Statistische Fortpflanzung der Unsicherheit

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2$$

Teil VI

Anhang

Sachregister