

## Schlecht konditioniertes LGS

Marvin Hohlfeld   Marc Ludwig   Matthias Springstein  
Matthias Bukovsky

24. Juni 2013

# Gliederung

- 1 Problemstellung
- 2 Entwicklung der Taylorreihe
  - Definition
  - Entwicklung von  $f(x)$  in eine Taylor Reihe
  - Taylorreihe für die Funktion  $f$
- 3 Nachweis der hermiteschen Form von  $H$ 
  - Definition
  - Mathematischer Beweis für die gegebene Matrix  $H$
- 4 Eigenwerte der Hilbertmatrix  $H$
- 5 Numerische Lösung  $Hx = R$ 
  - Exakte Lösung
  - Lösung des LGS mit Störung
  - Lösung mithilfe der Tikonov Regularization

Gegeben sei das folgende numerische Problem:

Die gegebene Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (1)$$

soll durch ein Polynom  $p(x)$  vom Grad  $n$  mit

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (2)$$

möglichst gut nach der Fehlerquadratmethode approximiert werden.

Zur Berechnung des Polynoms erhält man das LGS  $Hx = R$  mit der Matrix

$$H := \left( \frac{1}{j+k+1} \right)_{j,k=0}^n \quad (3)$$

und dem Lösungsvektor  $R$  definiert durch

$$r_j = (-1)^j \left\{ \ln(2) + \sum_{i=1}^j (-1)^i \frac{1}{i} \right\}, \text{ für } j = 1, \dots, n \quad (4)$$

Dieses LGS ist schlecht konditioniert! Dies bedeutet, dass kleine Fehler in der rechten Seite des LGS große Fehler in der Lösung verursachen können.

Diese Problematik soll im Folgenden verdeutlicht werden.

Um zum Vergleich die exakten Koeffizienten des Polynoms  $p$  zu erhalten, wird  $f(x)$  zunächst in eine Taylorreihe entwickelt.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine unendlich oft differenzierbare Funktion und  $a$  ein Element von  $I$ . Dann heißt die unendliche Reihe

$$P_f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \quad (5)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (6)$$

die Taylor-Reihe von  $f(x)$  mit Entwicklungsstelle  $a$ .

Bei gegebener Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

und den Gleichungen 5 und 6 folgt für deren Ableitungen:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad (7)$$

$$f''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \quad (8)$$

$$f'''(x) = \frac{2(1+x)^4 - 8(1+x)(1+x)^3}{(1+x)^8} = -\frac{6}{(1+x)^4} \quad (9)$$

Hieraus lässt sich folgende Bildungsvorschrift für eine beliebige Ableitung bestimmen:

$$f^n(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \quad (10)$$

hieraus folgt nach Gleichung 6:

$$f(x) = P_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n! (1+a)^{n+1}} (x-a)^n \quad (11)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-a)^n}{(1+a)^{n+1}} \quad (12)$$

N	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
3	0.962	-0.740	0.296							
4	0.987	-0.888	0.592	-0.197						
5	0.995	-0.954	0.790	-0.460	0.131					
6	0.998	-0.982	0.899	-0.680	0.351	-0.087				
7	1	-0.993	0.954	-0.826	0.570	-0.263	0.058			
8	1	-0.997	0.980	-0.912	0.741	-0.468	0.195	-0.039		
9	1	-1	0.991	-0.957	0.855	-0.650	0.377	-0.143	0.026	
10	1	-1	0.996	-0.980	0.923	-0.786	0.559	-0.299	0.104	-0.017

Tabelle : Koeffizienten der Polynome



Im Folgendem soll gezeigt werden, dass die Matrix  $H$  hermitesch ist, sodass gilt, dass die Kondition der Matrix  $H$  gegeben ist durch  $cond(H) = \frac{|\alpha_{max}|}{|\alpha_{min}|}$  wobei  $\alpha_{min}$  bzw.  $\alpha_{max}$  den größten bzw. kleinsten Eigenwert von  $H$  darstellt.

Eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  mit Einträgen in  $\mathbb{C}$  heißt hermitesch, wenn sie mit ihrer (hermitesch) Adjungierten  $A^*$ , also der transponierten und komplex konjugierten Matrix übereinstimmt. Das heißt, wenn

$$A = A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T} \quad (13)$$

gilt. Für die Einträge einer hermiteschen Matrix gilt also:

$$a_{jk} = \overline{a_{kj}} \quad (14)$$

Mit der gegebenen Bildungsvorschrift

$$H := \left( \frac{1}{j+k+1} \right)_{j,k=0}^n \quad (15)$$

Gleichung 14 und 13 folgt, dass für  $H$  der folgende Zusammenhang gilt:

$$H = H^T \quad | \text{ da rein reelwertig } \quad (16)$$

$$H_{j,k} = H_{k,j} \quad | \text{ Indizees vertauschbar } \quad (17)$$

$$\left( \frac{1}{j+k+1} \right)_{j,k=0}^n = \left( \frac{1}{j+k+1} \right)_{k,j=0}^n \quad (18)$$

somit ist  $H$  symmetrisch und auch hermitesch.

## Ermittelte Eigenwerte der Hilbertmatrix:

N	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	Kond.
3	0.0027	0.12	1.41								524.06
4	9.67 e-05	6.73 e-03	1.69 e-01	1.50 e+00							1.55 e+04
5	3.28 e-06	3.05 e-04	1.14 e-02	2.08 e-01	1.56 e+00						4.76 e+05
6	1.08 e-07	1.25 e-05	6.15 e-04	1.63 e-02	2.42 e-01	1.61 e+00					1.49 e+07
7	3.49 e-09	4.85 e-07	2.93 e-05	1.00 e-03	2.12 e-02	2.71 e-01	1.66 e+00				4.75 e+08
8	1.11 e-10	1.79 e-08	1.29 e-06	5.43 e-05	1.46 e-03	2.62 e-02	2.98 e-01	1.69 e+00			1.52 e+10
9	3.49 e-12	6.46 e-10	5.38 e-08	2.67 e-06	8.75 e-05	1.97 e-03	3.10 e-02	3.21 e-01	1.72 e+00		4.93 e+11
10	1.09 e-13	2.26 e-11	2.14 e-09	1.22 e-07	4.72 e-06	1.28 e-04	2.53 e-03	3.57 e-02	3.42 e-01	1.75 e+00	1.60 e+13

Tabelle : Eigenwerte & Konditionen für 3..10xn Matrizen

N	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$
3	0.986	-0.804	0.327							
4	0.997	-0.938	0.664	-0.224						
5	0.999	-0.983	0.863	-0.533	0.154					
6	0.999	-0.995	0.951	-0.768	0.419	-0.105				
7	0.999	-0.998	0.984	-0.901	0.667	-0.324	0.072			
8	0.999	-0.999	0.995	-0.962	0.835	-0.565	0.247	-0.049		
9	0.999	-0.999	0.998	-0.986	0.927	-0.757	0.471	-0.186	0.034	
10	1.000	-0.999	0.999	-0.995	0.970	-0.880	0.674	-0.386	0.140	-0.023

Tabelle : Exakte Lösung des Gleichungsystems

Ermittlung des Lösungsvektor unter Verwendung von  $\ln(2)$  mit nur 5 Stellen Genauigkeit.

$$Hx = R \tag{19}$$

$$r_j = (-1)^j \left\{ \ln(2) + \sum_{i=1}^j (-1)^i \frac{1}{i} \right\} \tag{20}$$

N	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$
3	0.986	-0.805	0.328				
4	0.998	-0.955	0.703	-0.249			
5	1.00	-1.16	1.63	-1.69	0.724		
6	1.06	-2.74	12.6	-31.1	33.8	-13.2	
7	1.39	-16.5	151	-584	1072	-926	304

Tabelle : Lösung des Gleichungssystems mit Störung

Einführung eines Dämpfungsfaktor zur Reduzierung des Fehlers.

$$Ax = b \quad (21)$$

$$x_\alpha = \left( A^T A + \alpha I \right)^{-1} A^T b \quad (22)$$

Wenn das  $\alpha$  nach Gleichung 22 gut gewählt wurde lässt sich der Fehler reduzieren.

Lösung des LGS mit  $\alpha = 10^{-10}$  als Regularisierungsparameter.

N	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$
3	0.986	-0.805	0.328				
4	0.998	-0.951	0.694	-0.244			
5	0.994	-0.893	0.471	0.0631	-0.139		
6	0.995	-0.908	0.523	0.0247	-0.182	0.0449	
7	0.997	-0.938	0.582	0.0801	-0.250	-0.165	0.196

Tabelle : Lösung des LGS mithilfe der Tikhonov Regularisierung