Schlecht konditioniertes LGS

Marvin Hohlfeld Marc Ludwig Matthias Springstein
Matthias Bukovsky

24. Juni 2013

Gliederung

Gegeben sei das folgende numerische Problem:

Die gegebene Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x} \tag{1}$$

soll durch ein Polynom $p(x)$ vom Grad n mit

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{2}$$

möglichst gut nach der Fehlerquadratmethode approximiert werden.

Zur Berechnung des Polynoms erhält man das LGS $Hx = R$ mit der Matrix

$$H := \left(\frac{1}{j+k+1}\right)_{j,k=0}^{n} \tag{3}$$

und dem Lösungsvektor R definiert durch

$$r_j = (-1)^j \left\{ \ln(2) + \sum_{i=1}^{j} (-1)^i \frac{1}{i} \right\}, \text{für} j = 1, ..., n \tag{4}$$

Dieses LGS ist schlecht konditioniert! Dies bedeutet, dass kleine Fehler in der rechten Seite des LGS große Fehler in der Lösung verursachen können.

Diese Problematik soll im Folgenden verdeutlicht werden.

Um zum Vergleich die exakten Koeffizienten des Polynoms p zu erhalten, wird $f(x)$ zunächst in eine Taylorreihe entwickelt.

Sei $I \subset \mathrm{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathrm{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion und a ein Element von I. Dann heißt die unendliche Reihe

$$P_f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \quad (5)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (6)$$

die Taylor-Reihe von $f(x)$ mit Entwicklungsstelle a.

Bei gegebener Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

und den Gleichungen 5 und 6 folgt für deren Ableitungen:

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \tag{7}$$

$$f''(x) = \frac{2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \tag{8}$$

$$f'''(x) = \frac{2(1+x)^4 - 8(1+x)(1+x)^3}{(1+x)^8} = -\frac{6}{(1+x)^4} \tag{9}$$

Hieraus lässt sich folgende Bildungsvorschrift für eine beliebige Ableitung bestimmen:

$$f^{n}(x) = (-1)^{n} \frac{n!}{(1+x)^{n+1}} \tag{10}$$

hieraus folgt nach Gleichung 6:

$$f(x) = P_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n!}{n!\,(1+a)^{n+1}} (x-a)^{n} \tag{11}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(x-a)^{n}}{(1+a)^{n+1}} \tag{12}$$

N	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9
3	0.962	−0.740	0.296							
4	0.987	−0.888	0.592	−0.197						
5	0.995	−0.954	0.790	−0.460	0.131					
6	0.998	−0.982	0.899	−0.680	0.351	−0.087				
7	1.000	−0.993	0.954	−0.826	0.570	−0.263	0.058			
8	1.000	−0.997	0.980	−0.912	0.741	−0.468	0.195	−0.039		
9	1.000	−1.000	0.991	−0.957	0.855	−0.650	0.377	−0.143	0.026	
10	1.000	−1.000	0.996	−0.980	0.923	−0.786	0.559	−0.299	0.104	−0.017

Tabelle : Koeffizienten der Polynome

Im Folgendem soll gezeigt werden, dass die Matrix H hermitesch ist, sodass gilt, dass die Kondition der Matrix H gegeben ist durch $cond(H) = \frac{|\alpha_{max}|}{|\alpha_{min}|}$ wobei α_{min} bzw. α_{max} den größten bzw. kleinsten Eigenwert von H darstellt.

Eine $n \times n$-Matrix A mit Einträgen in $\mathbb{C}$ heißt hermitesch, wenn sie mit ihrer (hermitesch) Adjungierten A^*, also der transponierten und komplex konjugierten Matrix übereinstimmt. Das heißt, wenn

$$A = A^* = \overline{A}^{\mathrm{T}} = \overline{A^{\mathrm{T}}} \tag{13}$$

gilt. Für die Einträge einer hermiteschen Matrix gilt also:

$$a_{jk} = \overline{a_{kj}} \tag{14}$$

Mit der gegebenen Bildungsvorschrift

$$H := \left(\frac{1}{j+k+1}\right)_{j,k=0}^{n} \tag{15}$$

Gleichung 14 und 13 folgt, dass für H der folgende Zusammenhang gilt:

$$H = H^{\mathrm{T}} \qquad \mid \text{da rein reelwertig} \tag{16}$$

$$H_{j,k} = H_{k,j} \qquad \mid \text{Indizees vertauschbar} \tag{17}$$

$$\left(\frac{1}{j+k+1}\right)_{j,k=0}^{n} = \left(\frac{1}{j+k+1}\right)_{k,j=0}^{n} \tag{18}$$

somit ist H symmetrisch und auch hermitesch.

Ermittelte Eigenwerte der Hilbertmatrix:

N	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	Kond.
3	0.0027	0.12	1.41								524.06
4	9.67 e-05	6.73 e-03	1.69 e-01	1.50 e+00							1.55 e+04
5	3.28 e-06	3.05 e-04	1.14 e-02	2.08 e-01	1.56 e+00						4.76 e+05
6	1.08 e-07	1.25 e-05	6.15 e-04	1.63 e-02	2.42 e-01	1.61 e+00					1.49 e+07
7	3.49 e-09	4.85 e-07	2.93 e-05	1.00 e-03	2.12 e-02	2.71 e-01	1.66 e+00				4.75 e+08
8	1.11 e-10	1.79 e-08	1.29 e-06	5.43 e-05	1.46 e-03	2.62 e-02	2.98 e-01	1.69 e+00			1.52 e+10
9	3.49 e-12	6.46 e-10	5.38 e-08	2.67 e-06	8.75 e-05	1.97 e-03	3.10 e-02	3.21 e-01	1.72 e+00		4.93 e+11
10	1.09 e-13	2.26 e-11	2.14 e-09	1.22 e-07	4.72 e-06	1.28 e-04	2.53 e-03	3.57 e-02	3.42 e-01	1.75 e+00	1.60 e+13

Tabelle : Eigenwerte & Konditionen für 3..10xn Matrizen

N	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9
3	0.986	−0.804	0.327							
4	0.997	−0.938	0.664	−0.224						
5	1.000	−0.983	0.863	−0.533	0.154					
6	1.000	−0.995	0.951	−0.768	0.419	−0.105				
7	1.000	−0.998	0.984	−0.901	0.667	−0.324	0.072			
8	1.000	−1.000	0.995	−0.962	0.835	−0.565	0.247	−0.049		
9	1.000	−1.000	0.998	−0.986	0.927	−0.757	0.471	−0.186	0.034	
10	1.000	−1.000	1.000	−0.995	0.970	−0.880	0.674	−0.386	0.140	−0.023

Tabelle : Exakte Lösung des Gleichungssystems

Ermittlung des Lösungsvektors unter Verwendung von $ln(2)$ mit nur 5 Stellen Genauigkeit.

$$Hx = R \tag{19}$$

$$r_j = (-1)^j \left\{ \ln(2) + \sum_{i=1}^{j} (-1)^i \frac{1}{i} \right\} \tag{20}$$

N	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
3	0.986	-0.805	0.328				
4	0.998	-0.955	0.703	-0.249			
5	1.00	-1.16	1.63	-1.69	0.724		
6	1.06	-2.74	12.6	-31.1	33.8	-13.2	
7	1.39	-16.5	151	-584	1072	-926	304

Tabelle : Lösung des Gleichungssystems mit Störung

Einführung eines Dämpfungsfaktor zur Reduzierung des Fehlers.

$$Ax = b \tag{21}$$

$$x_\alpha = \left(A^T A + \alpha I\right)^{-1} A^T b \tag{22}$$

Wenn das α nach Gleichung 22 gut gewählt wurde lässt sich der Fehler reduzieren.

Lösung des LGS mit $\alpha = 10^{-10}$ als Regularisierungsparameter.

N	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
3	0.986	-0.805	0.328				
4	0.998	-0.951	0.694	-0.244			
5	0.994	-0.893	0.471	0.0631	-0.139		
6	0.995	-0.908	0.523	0.0247	-0.182	0.0449	
7	0.997	-0.938	0.582	0.0801	-0.250	-0.165	0.196

Tabelle : Lösung des LGS mithilfe der Tikhonov Regularisierung