Ernst-Abbe-Fachhochschule Jena
Hochschule für angewandte Wissenschaften

Beleg

Numerische Mathematik - Problem2: schlecht konditioniertes LGS

Marc Ludwig
Marvin Hohlfeld
Matthias Bukovsky
Matthias Springstein

Jena, 16. Mai 2013

Betreuer: Prof. P. Wilde
Gutachter: Dipl. Ing. Mustermann

Inhaltsverzeichnis

Abstract

Hier kommt das Geschwafel hin, welches als Einführung in unsere Problemstellung dient.

1. Entwickle die Funktion *f* aus obigem Problem in eine Taylorreihe

1.1. Die Taylorreihe

In der Analysis verwendet man Taylorreihen (auch Taylor-Entwicklungen, nach dem Mathematiker Brook Taylor[1]), um Funktionen in der Umgebung bestimmter Punkte durch Potenzreihen darzustellen (Reihenentwicklung). So kann ein komplizierter analytischer Ausdruck durch eine nach wenigen Gliedern abgebrochene Taylorreihe (oftmals gut) angenähert werden, z.B. in der Physik oder bei der Ausgleichung geodätischer Netze: So ist die oft verwendete Kleinwinkelnäherung des Sinus eine nach dem ersten Glied abgebrochene Taylorreihe dieser Funktion.

1.2. Definition

Sei $I \subset$ R ein offenes Intervall, $f\colon I \to$ R eine unendlich oft differenzierbare Funktion und a ein Element von I. Dann heißt die unendliche Reihe

$$P_f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \quad (1.1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (1.2)$$

die Taylor-Reihe von f mit Entwicklungsstelle a.

Hierbei bezeichnet

- $n!$ die Fakultät $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ und
- $f^{(n)}(a)$ die n-te Ableitung von f an der Stelle a, wobei man $f^{(0)} := f$ setzt.

1.3. Eigenschaften

Die Taylorreihe $P_f(x)$ zur Funktion $f(x)$ ist eine Potenzreihe P in x. Im Fall einer analytischen Funktion f hat die Taylor-Reihe in jedem Punkt a einen positiven Konvergenzradius r und stimmt in ihrem Konvergenzbereich mit f überein, d.h. es gibt ein

[1] Brook Taylor (* 18. August 1685 in Edmonton, Middlesex; † 29. Dezember 1731 in Somerset House, London) war ein britischer Mathematiker. Nach ihm wurde u.a. die Taylorreihe benannt.

$r > 0$, sodass für $|x - a| < r$ gilt

$$P_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = f(x) \tag{1.3}$$

. Außerdem stimmen die Ableitungen der Reihe im Entwicklungspunkt a mit den tatsächlichen Ableitungswerten überein:

$$P_f^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \tag{1.4}$$

.

1.4. Konstruktion

Damit die Ableitungen der Reihe im Entwicklungspunkt a mit den tatsächlichen Ableitungswerten übereinstimmen, sind die Koeffizienten a_n der Taylorreihe wie folgt konstruiert:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \Rightarrow P_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.5}$$

.

1.5. Entwicklung von *f(x)* in eine Tylor Reihe

Bei gegebener Funktion

$$f\left(x\right) = \frac{1}{1+x} \tag{1.6}$$

und den Gleichungen 1.1 und 1.2 folgt für deren Ableitungen

$$f'\left(x\right) = -\frac{1}{\left(1+x\right)^2} \tag{1.7}$$

$$f''\left(x\right) = \frac{2\left(1+x\right)}{\left(1+x\right)^4} = \frac{2}{\left(1+x\right)^3} \tag{1.8}$$

$$f'''\left(x\right) = \frac{2\left(1+x\right)^4 - 8\left(1+x\right)\left(1+x\right)^3}{\left(1+x\right)^8} = -\frac{6}{\left(1+x\right)^4} \tag{1.9}$$

Hieraus läßt sich folgende Bildungsvorschrifft für eine beliebige Ableitung bestimmen

$$f^n\left(x\right) = \left(-1\right)^n \frac{n!}{\left(1+x\right)^{n+1}} \tag{1.10}$$

hieraus folgt nach Gleichung 1.5

$$f(x) = P_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n!\,(1+a)^{n+1}} (x-a)^n \tag{1.11}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-a)^n}{(1+a)^{n+1}} \tag{1.12}$$

Glossar und Abkürzungsverzeichnis

Begriff Erklärung des Begriffs

Abbildungsverzeichnis

Quelltextverzeichnis

Literaturverzeichnis

KARP, RICHARD M. (1972). *Reducibility Among Combinatorial Problems*. In: MILLER, R. E. und J. W. THATCHER, Hrsg.: *Complexity of Computer Computations*, S. 85–103. Plenum Press.

PRECHELT, LUTZ (2000). *An Empirical Comparison of Seven Programming Languages*. Foobar book of lazyness, S. 23–29.

SEIFART, MANFRED (1990). *Analoge Schaltungen*. Huethig Buch Verlag Heidelberg, Heidelberg, Baden-Wuerttemberg, Germany.

A. Anhang

A.1. Quelltexte