# Algoritmusok és adatszerkezetek II.

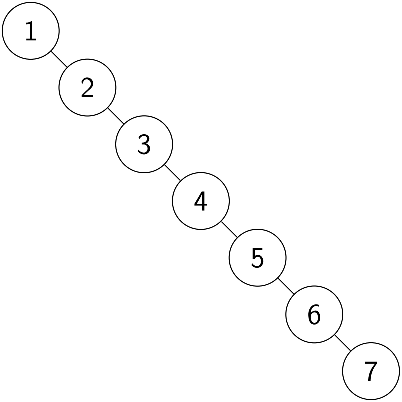
## Kiegyensúlyozott keresőfák

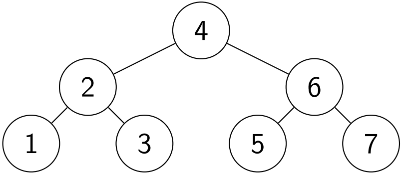
Szegedi Tudományegyetem

# Mit értünk kiegyensúlyozott keresőfa alatt?

## Emlékeztető

Az eddig tárgyalt műveletek $h$ magas fákra $O(h)$ idejűek voltak
A továbbiakban szeretnénk, ha $h = \Theta(\log n)$ is teljesülne



# Véletlen építésű bináris keresőfák (CLRS 12.4)

- $n$ elemű bináris fa **legrosszabb esetben** $\Theta(n)$ magas is lehet
- $n$ növekedésével a legrosszabb eset bekövetkezése azonban egyre valószínűtlenebb
- Ha egy bináris keresőfa előállítása során csak beszúrás műveleteket alkalmazunk, úgy igazolható a következő

**Tétel**

*Egy $n$ különböző kulcsot tartalmazó véletlen építésű bináris keresőfa várható magassága $O(\log n)$.*

# AVL fák (Adelson-Velsky, Landis, 1962)

- **Tetszőleges** műveletsorozat végrehajtása után **legrosszabb esetben is** $\Theta(\log n)$ magasságú kiegyensúlyozott keresőfa
- Garancia: semelyik csúcs egyensúlyi faktorának abszolút értéke nem lehet nagyobb 1-nél

**Definíció**

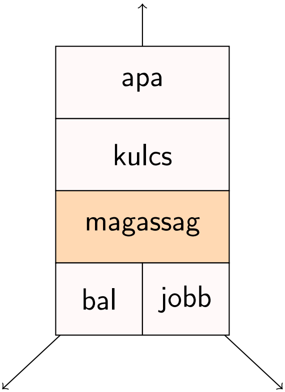
Egy $p$ csúcs **egyensúlyi faktora** fiai magasságának különbsége.

**Definíció**

Üres fa magassága: $h(nil) = 0$
$p$ gyökerű fa magassága: $h(p) = max(h(p.bal), h(p.jobb)) + 1$

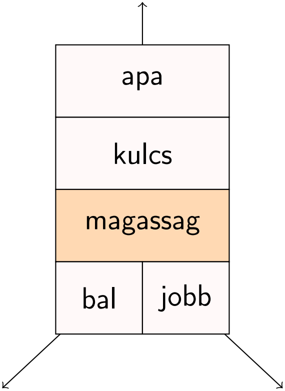
# AVL fa implementációja

```
class Node {
    Object kulcs;
    int magassag;
    Node *apa;
    Node *bal;
    Node *jobb;
}
```



# AVL fa implementációja

```
class Node {
    Object kulcs;
    int magassag;
    Node *apa;
    Node *bal;
    Node *jobb;
}
```




**Megjegyzés**

Találkozni olyan implementációval is, ahol a magasság helyett az egyensúlyi faktort tárolják

# Legalább hány kulcsból áll egy $h$ magas AVL fa?

| magasság | $m$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 1+2+1=4 |
| 4 | 2+4+1=7 |
| 5 | 4+7+1=12 |
| 6 | 7+12+1=20 |
| 7 | 12+20+1=33 |
| 8 | 20+33+1=54 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

# Legalább hány kulcsból áll egy $h$ magas AVL fa?

| magasság | $m$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 1+2+1=4 |
| 4 | 2+4+1=7 |
| 5 | 4+7+1=12 |
| 6 | 7+12+1=20 |
| 7 | 12+20+1=33 |
| 8 | 20+33+1=54 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| h | $m_{h-2} + m_{h-1} + 1$ |

# Miért igaz, hogy az AVL fák $O(\log n)$ magasak?

- Jelölje $m_h$ a $h$ magas AVL fában lévő minimálisan található kulcsok számát ($m_1 = 1, m_2 = 2$)
- Általánosságban ($h > 2$ esetén): $m_h = m_{h-2} + m_{h-1} + 1$
- $m_{h-2} < m_{h-1}$ természetesen teljesül, ahonnan

$$m_h > 2m_{h-2}$$

# Miért igaz, hogy az AVL fák $O(\log n)$ magasak?

- Jelölje $m_h$ a $h$ magas AVL fában lévő minimálisan található kulcsok számát ($m_1 = 1, m_2 = 2$)
- Általánosságban ($h > 2$ esetén): $m_h = m_{h-2} + m_{h-1} + 1$
- $m_{h-2} < m_{h-1}$ természetesen teljesül, ahonnan

$$m_h > 2m_{h-2} > 2 * 2m_{h-4} > \ldots > 2^i m_{h-2i}$$

# Miért igaz, hogy az AVL fák $O(\log n)$ magasak?

- Jelölje $m_h$ a $h$ magas AVL fában lévő minimálisan található kulcsok számát ($m_1 = 1, m_2 = 2$)
- Általánosságban ($h > 2$ esetén): $m_h = m_{h-2} + m_{h-1} + 1$
- $m_{h-2} < m_{h-1}$ természetesen teljesül, ahonnan

$$m_h > 2m_{h-2} > 2 * 2m_{h-4} > \ldots > 2^i m_{h-2i}$$

- $m_h > 2^i m_{h-2i}$ összefüggést $m_1$-ig kijátszva $m_h > 2^{h/2}$

# Miért igaz, hogy az AVL fák $O(\log n)$ magasak?

- Jelölje $m_h$ a $h$ magas AVL fában lévő minimálisan található kulcsok számát ($m_1 = 1, m_2 = 2$)
- Általánosságban ($h > 2$ esetén): $m_h = m_{h-2} + m_{h-1} + 1$
- $m_{h-2} < m_{h-1}$ természetesen teljesül, ahonnan

$$m_h > 2m_{h-2} > 2 * 2m_{h-4} > \ldots > 2^i m_{h-2i}$$

- $m_h > 2^i m_{h-2i}$ összefüggést $m_1$-ig kijátszva $m_h > 2^{h/2}$
- Tegyük fel, hogy egy $h$ magas AVL fa $n \geq m_h$ csúcsból áll, azaz $n > 2^{h/2}$, vagyis $h < 2\log_2(n)$

# Miért igaz, hogy az AVL fák $O(\log n)$ magasak?

- Jelölje $m_h$ a $h$ magas AVL fában lévő minimálisan található kulcsok számát ($m_1 = 1, m_2 = 2$)
- Általánosságban ($h > 2$ esetén): $m_h = m_{h-2} + m_{h-1} + 1$
- $m_{h-2} < m_{h-1}$ természetesen teljesül, ahonnan

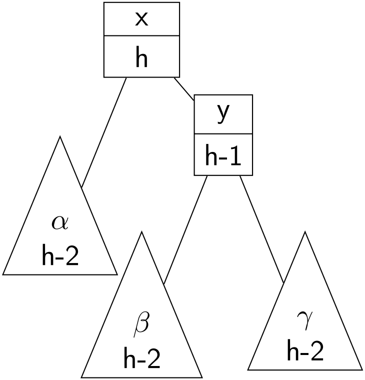
$$m_h > 2m_{h-2} > 2 * 2m_{h-4} > \ldots > 2^i m_{h-2i}$$

- $m_h > 2^i m_{h-2i}$ összefüggést $m_1$-ig kijátszva $m_h > 2^{h/2}$
- Tegyük fel, hogy egy $h$ magas AVL fa $n \geq m_h$ csúcsból áll, azaz $n > 2^{h/2}$, vagyis $h < 2\log_2(n)$

**Megjegyzés**

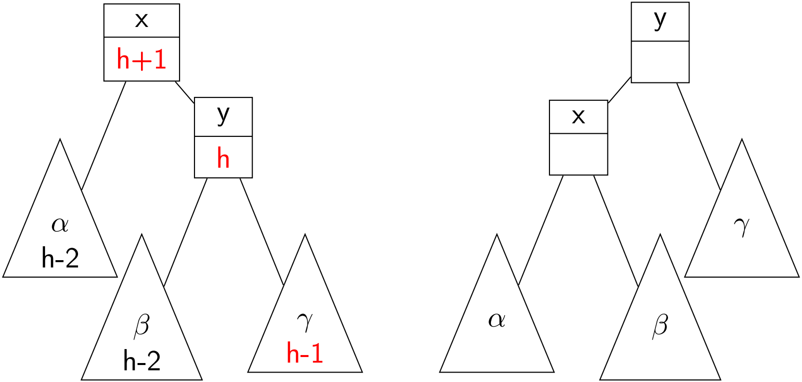
Az élesebb $h < 1.44\log_2(n)$ korlát is bizonyítható.

# AVL fák kiegyensúlyozottságának fenntartása forgatásokkal



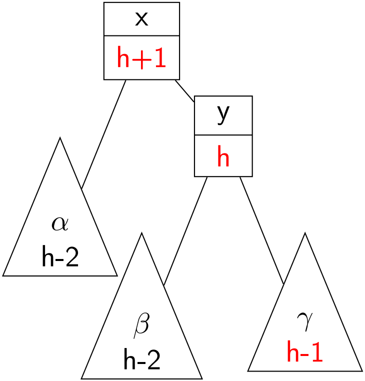

(a) beszúrás előtt

# AVL fák kiegyensúlyozottságának fenntartása forgatásokkal

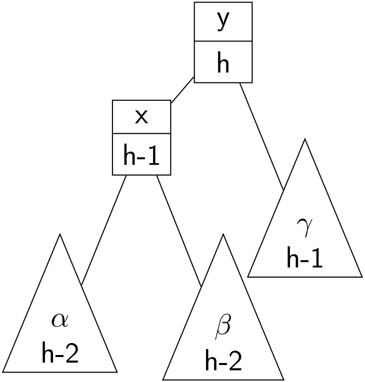



(a) beszúrás után (b) $x$ körüli balra forgatva

# AVL fák kiegyensúlyozottságának fenntartása forgatásokkal

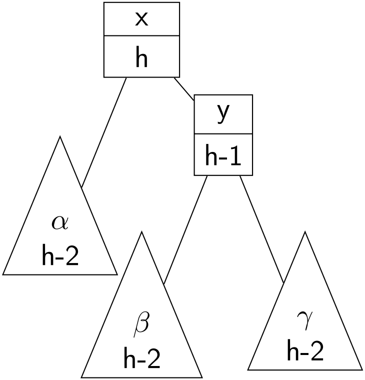



(a) beszúrás után



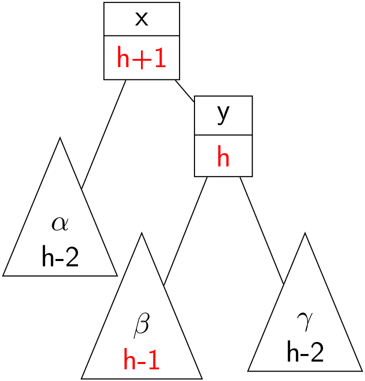

(b) $x$ körüli balra forgatva

# Amikor egy forgatás nem elég

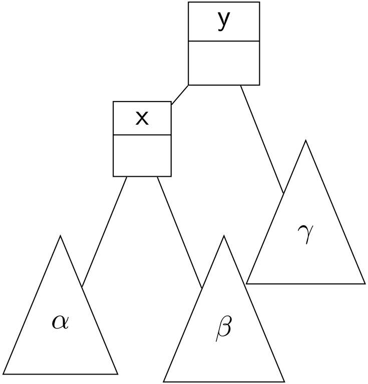



(a) beszúrás előtt

# Amikor egy forgatás nem elég

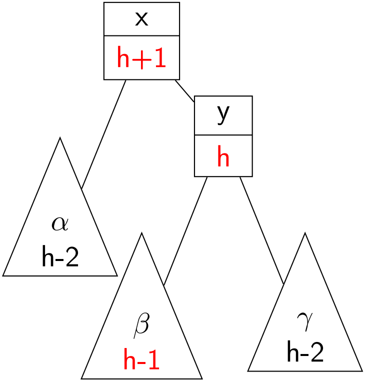



(a) beszúrás után

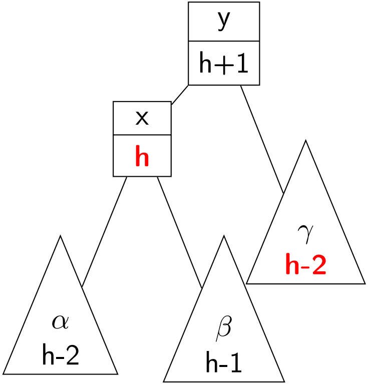



(b) $x$ körüli balra forgatva

# Amikor egy forgatás nem elég

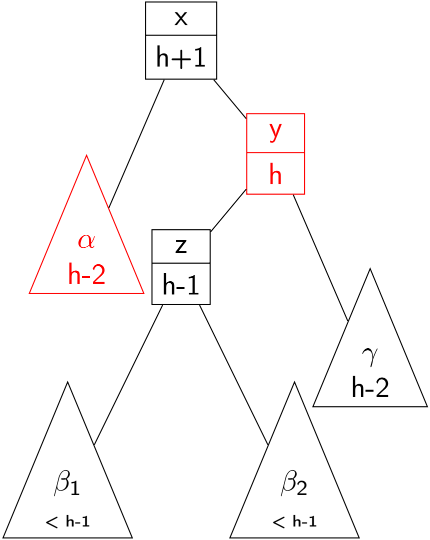



(a) beszúrás után




(b) $x$ körüli balra forgatva

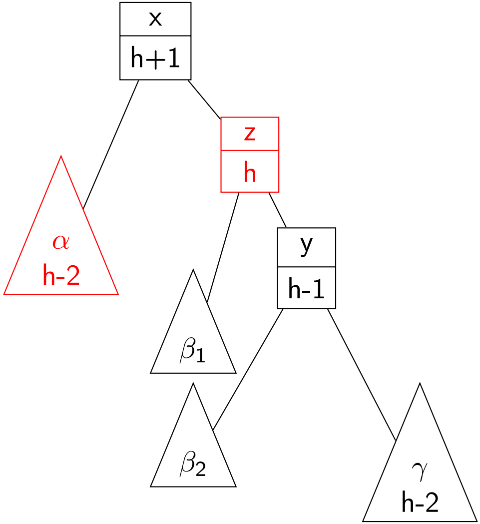
# Amikor egy forgatás nem elég – segédforgatás




**Megoldás**

*y* körül jobbra forgatunk, majd *x* körül balra

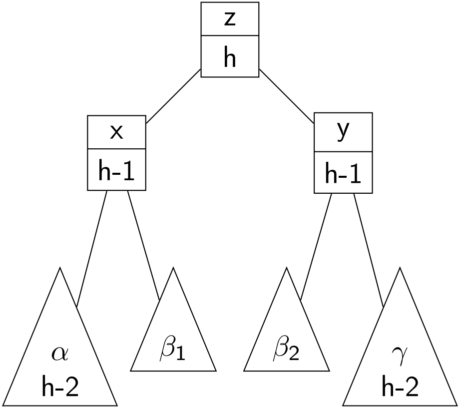
# Amikor egy forgatás nem elég – segédforgatás




**Észrevétel**

$\beta_2$ nem lehetett magasabb $\gamma$-nál

# Amikor egy forgatás nem elég – segédforgatás




**Miért kellett kettőt forgassunk?**

Mert (kiinduláskor) $x$ **jobboldali** részfája volt magasabb
És mert ennek a részfának már a **baloldali** részfája volt magasabb (zikk-zakk)

# Megjegyzések a helyreállításokhoz

- A tárgyalt esetek tükörképei is előfordulhatnak
- A törlés hatására elromló AVL-fát azonos módon állítjuk helyre

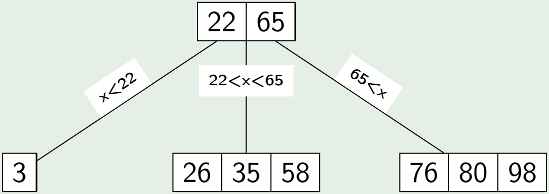
# Általános keresőfák

- Az általános keresőfát az különbözteti meg a bináris keresőfától, hogy egy csúcs több kulcsot is tartalmazhat
- Keresőfa tulajdonság kiterjesztése
  - A csúcsban található kulcsok $<$ szerint rendezettek
  - A tárolt kulcsok értékei meghatározzák a kulcsértékeknek azon tartományait, amelyekbe a részfák kulcsai eshetnek

# Általános keresőfák

- Az általános keresőfát az különbözteti meg a bináris keresőfától, hogy egy csúcs több kulcsot is tartalmazhat
- Keresőfa tulajdonság kiterjesztése
  - A csúcsban található kulcsok $<$ szerint rendezettek
  - A tárolt kulcsok értékei meghatározzák a kulcsértékeknek azon tartományait, amelyekbe a részfák kulcsai eshetnek

## Példa



# B-fa definíciója

## Definíció

A $t$-rendű B-fa olyan általános keresőfa, amelyre teljesül, hogy:

- Minden gyökértől különböző $p$ csúcsára $t \leq Rang(p) \leq 2t$ (rang alatt a fapontban tárolt kulcsok számát értjük)
- $r$ gyökerének rangjára pedig $1 \leq Rang(r) \leq 2t$
- Minden nemlevél $p$ csúcsra és $1 \leq i \leq Rang(p) + 1$ esetén $p.gyerekek[i] \neq Nil$
- Minden levél azonos mélységű (ez az érték a fa $h$ magassága).

# B-fa implementációja

```
class Node {
    Object[] kulcsok;
    int meret;
    Node *apa;
    Node *gyerekek[meret+1];
    boolean level;
}
```

# B-fa implementációja

```
class Node {
    Object[] kulcsok;
    int meret;
    Node *apa;
    Node *gyerekek[meret+1];
    boolean level;
}
```

**Fontos!**

Az eddigiektől eltérően egy csúcsban több kulcs is található.
A csúcson belüli kulcsokra érvényesül a $<$ rendezés.
A csúcsokról eltároljuk, hogy levelek-e (`level` változó)

# B-fában keresés

```
B-FÁBANKERES(x, k) {
  i=0
  while i < meret és k > x.kulcsok[i] {
     i = i+1
  }

  if (i < meret és k = x.kulcsok[i]) {
     return (x,i)    // az x csúcs i-edik kulcsát kerestük
  if (x.level) {
     return nil     // a B-fa nem tartalmazza k-t
  } else {
     // a megfelelő ágban keresünk tovább
     return  B-FÁBANKERES(x.gyerekek[i], k)
  }
}
```

# B-fák kiegyensúlyozottsága

- B fákat olyan esetekben szokás használni, amikor az adatunk nem fér be a főmemóriába, azt a háttértáron tároljuk
- A B-fák kiegyensúlyozottsága abból fakad, hogy minden levél azonos mélységen található, illetve, hogy minden (nemgyökér) csúcs legalább $t+1$ elágazással rendelkezik
  - $t$-rendű B-fa $i$-edik ($i > 1$) szintjén legalább $2(t+1)^{i-2}$ csúcs és $2t(t+1)^{i-2}$ érték található
  - $t$ értéke a valóságban nagy, mi ezen a kurzuson 2-nek vesszük (hacsak mást nem mondunk)
- Az AVL-fánál "kiegyensúlyozottabb", magassága $O(\log_{\mathbf{t}} n)$
  - Aszimptotikusan nincs jelentősége a logaritmus alapjának, viszont ha másodlagos memóriából olvasunk, számíthat

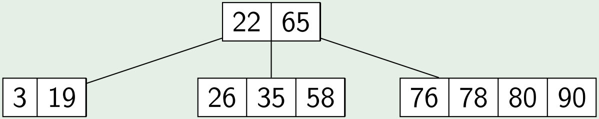
# B-fák tulajdonságainak fenntartása – méret túlcsordulása

- B-fákba is levélként szúrunk be
- $2t$ méretű csúcsba beszúrva, $2t + 1$ méretű csúcsot kapunk

# B-fák tulajdonságainak fenntartása – méret túlcsordulása

- B-fákba is levélként szúrunk be
- $2t$ méretű csúcsba beszúrva, $2t+1$ méretű csúcsot kapunk a "középső" elem mentén kettévágva éppen 2 $t$ méretű csúcsunk lesz (a középső elemet küldjük föl az ősbe)
- Szükség szerint ismételjük az előző lépést

## Példa

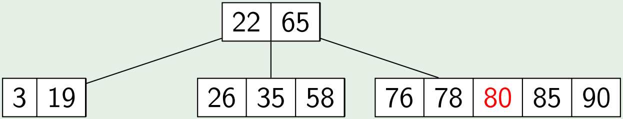


# B-fák tulajdonságainak fenntartása – méret túlcsordulása

- B-fákba is levélként szúrunk be
- $2t$ méretű csúcsba beszúrva, $2t+1$ méretű csúcsot kapunk a "középső" elem mentén kettévágva éppen 2 $t$ méretű csúcsunk lesz (a középső elemet küldjük föl az ősbe)
- Szükség szerint ismételjük az előző lépést

**Példa**

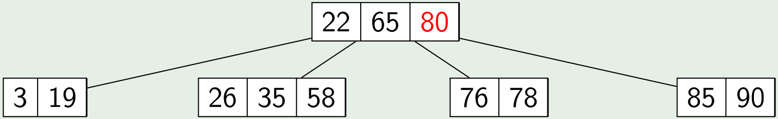
Beszúr(85)



# B-fák tulajdonságainak fenntartása – méret túlcsordulása

- B-fákba is levélként szúrunk be
- $2t$ méretű csúcsba beszúrva, $2t + 1$ méretű csúcsot kapunk a ''középső'' elem mentén kettévágva éppen 2 $t$ méretű csúcsunk lesz (a középső elemet küldjük föl az ősbe)
- Szükség szerint ismételjük az előző lépést

## Példa



# B-fák tulajdonságainak fenntartása – méret alulcsordulása

- Kulcs törlése $t$ méretű csúcsból $t - 1$ méretűvé teheti azt
- Itt is megelőzővel helyettesítünk
- Két eset lehetséges
  1. Testvértől kölcsönzünk, ha annak van feleslege ($> t$ méretű)
  2. Összeolvasztjuk a kritikusan kicsi csúcsot a $t$ méretű testvérével $\Rightarrow t + (t - 1) + 1 = 2t$ méretű csúcs jön létre
- A kölcsönvételt preferáljuk, hiszen az $O(1)$ időben elvégezhető

# B fa variánsok

- Egyes implementációk/források (pl. CLRS könyv is) $t$ értéket a csúcsok fokszámkorlátjára használja: ilyenkor a csúcsokban lévő kulcsok száma $\in [t-1, 2t-1]$

# B fa variánsok

- Egyes implementációk/források (pl. CLRS könyv is) $t$ értéket a csúcsok fokszámkorlátjára használja: ilyenkor a csúcsokban lévő kulcsok száma $\in [t-1, 2t-1]$
- A telített csúcsok kaszkád vágását elkerülendő, bizonyos implementációk proaktívan viselkednek: már leszálló ágban (top-down) elvégzik a vágásokat (preemtive split)
    - Így garantált, hogy amennyiben egy csúcsot szétvágunk, akkor az ő őse már nem szorul további szétvágásra (tail rekurzió)

# B fa variánsok

- Egyes implementációk/források (pl. CLRS könyv is) $t$ értéket a csúcsok fokszámkorlátjára használja: ilyenkor a csúcsokban lévő kulcsok száma $\in [t-1, 2t-1]$
- A telített csúcsok kaszkád vágását elkerülendő, bizonyos implementációk proaktívan viselkednek: már leszálló ágban (top-down) elvégzik a vágásokat (preemtive split)
  - Így garantált, hogy amennyiben egy csúcsot szétvágunk, akkor az ő őse már nem szorul további szétvágásra (tail rekurzió)
- B+ fa: a kulcsokat kísérő (esetleges) adattagok csak a levelekben legyenek tárolva $\rightarrow$ a belső pontokban csak pointerek és indexelt kulcsok $\rightarrow$ nagyobb elágazási faktort tudunk alkalmazni $\rightarrow$ tovább csökkenthető a fa magassága

# Tail rekurzió

- Olyan rekurzív függvény, amely legutolsó műveleteként hajtja végre a rekurzív hívást
- Hatékonyabb a nem tail rekurzív megoldásnál

```
FiboT(n, a, b) {
  if (n==0) return a
  if (n==1) return b
  return Fibo(n-1, b, a+b)
}
```

```
Fibo(n) {
  if (n<2) return n
  return Fibo(n-1) + Fibo(n-2)
}
```

```
In [33]: %timeit fibo(35)
4.82 s ± 60.7 ms per loop

In [34]: %timeit fiboT(35)
9.63 µs ± 33.7 ns per loop
```

# Összegzés

- A bináris keresőfák műveletei $O(h)$ idejűek
- Legrosszabb esetben azonban $n$ is lehet a fák magassága ($\Theta(\log n)$ helyett)
- Kiegyensúlyozott keresőfák használatával garantálható, hogy a keresőfa kiegyensúlyozottsága sose romoljon el ”túlságosan”