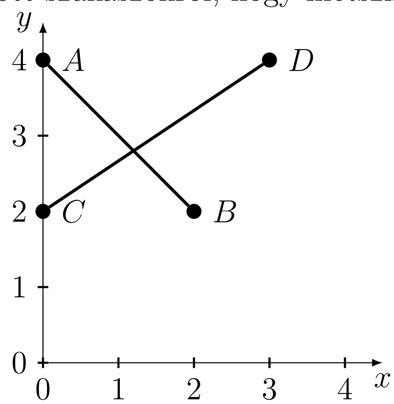
8–9. gyakorlat – Geometriai algoritmusok

2019. április 16.

1. Döntsük el az $A = [0,4], B = [2,2]$, valamint a $C = [0,2], D = [3,4]$ végpontokkal adott szakaszokról, hogy metszik-e egymást?



I. $\overline{CD}$ átfogja-e $\overline{AB}$-t?

I/a) $\textsc{Forgásirány}(A,B,C) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-0 & 0-0 \\ 2-4 & 2-4 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\right) = -4 < 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ szakaszhoz képest a C csúcs jobbra fordulva érhető el

I/b) $\textsc{Forgásirány}(A,B,D) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-0 & 3-0 \\ 2-4 & 4-4 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 6 > 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}$ szakaszhoz képest a D csúcs balra fordulva érhető el

II. $\overline{AB}$ átfogja-e $\overline{CD}$-t?

II/c) $\textsc{Forgásirány}(C,D,A) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-0 & 0-0 \\ 4-2 & 4-2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\right) = 6 > 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD}$ szakaszhoz képest a A csúcs balra fordulva érhető el

II/d) $\textsc{Forgásirány}(C,D,B) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-0 & 2-0 \\ 4-2 & 2-2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = -4 < 0$

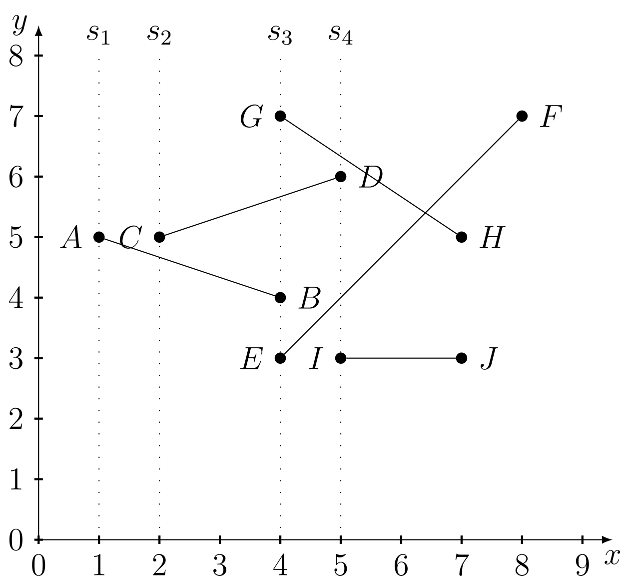
$\Rightarrow \overrightarrow{CD}$ szakaszhoz képest a B csúcs jobbra fordulva érhető el

I. és II. alapján kijelenthető, hogy az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakaszok metszik egymást

2. Döntsük el az $A = [0,4], B = [2,2]$, valamint a $C = [1,0], D = [3,3]$ végpontokkal adott szakaszokról, hogy metszik-e egymást?
I. $\overline{AB}$ átfogja-e $\overline{CD}$-t?
I/a) $\textsc{Forgásirány}(C, D, A) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-1 & 0-1 \\ 3-0 & 4-0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 8 + 3 > 0$
$\Rightarrow \overrightarrow{CD}$ szakaszhoz képest a A csúcs balra fordulva érhető el
I/b) $\textsc{Forgásirány}(C, D, B) = \det\left(\begin{bmatrix} 3-1 & 2-1 \\ 3-0 & 2-0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right) = 6 - 3 > 0$
$\Rightarrow \overrightarrow{CD}$ szakaszhoz képest a B csúcs balra fordulva érhető el
$\Rightarrow \overline{AB}$ nem fogja át a $\overline{CD}$-re illeszkedő egyenest, így $\overline{AB}$ nem is metszheti $\overline{CD}$-t.
3. Hatékony algoritmussal határozzuk meg, hogy az alábbi szakaszok között található-e egymást metsző szakaszpár!
$\overline{AB} = [(1,5),(4,4)]$ $\overline{CD} = [(2,5),(5,6)]$ $\overline{EF} = [(4,3),(8,7)]$ $\overline{GH} = [(4,7),(7,5)]$
$\overline{IJ} = [(5,3),(7,3)]$

Két szakasz összehasonlítása adott x koordináta mentén

s_1 szakasz fölötte van s_2-nek x-nél ($s_1 \succ_x s_2$), ha az s_1 szakasz y-koordinátája nagyobb az s_2 szakasz y-koordinátájánál az adott x koordináta mentén. Pl. $\overline{GH} \succ_4 \overline{EF}$.



Rendezzük a szakaszok végpontjait x-koordinátájuk szerint. A holtversenyeket a szakaszok kezdőpontjainak végpontjainak elé sorolásával döntsük el. Az esetleges további holtversenyeket a kisebb y-koordinátájú pontok nagyobbak elé sorolásával oldjuk föl. Eredmény: $A, C, E, G, B, I, D, J, H, F$

A szakaszokat tartalmazó kiegyensúlyozott (itt most AVL[1]) keresőfa állapotai a seprőegyenes (s_i) haladása szerint.

[1]Hf.:piros-fekete fával is végignézni

1. s_1 mentén

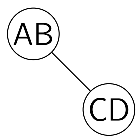
   (a) `Be(AB)`

   Metszi-e $\overline{AB}$ a fabeli megelőzőjét vagy rákövetkezőjét?

2. s_2 mentén

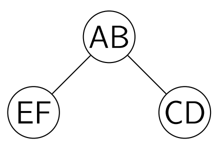
   (a) `Be(CD)`

   Metszi-e $\overline{CD}$ a fabeli megelőzőjét vagy rákövetkezőjét?

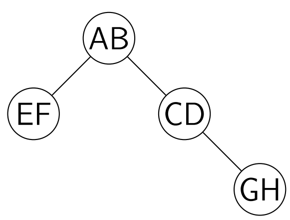
3. s_3 mentén

   (a) `Be(EF)`

   Metszi-e $\overline{EF}$ a fabeli megelőzőjét vagy rákövetkezőjét?

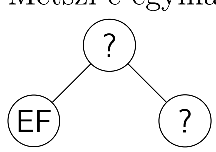
   (b) `Be(GH)`

   Metszi-e $\overline{GH}$ a fabeli megelőzőjét vagy rákövetkezőjét?

   (c) `Ki(AB)`

   Metszi-e egymást $\overline{AB}$ fabeli megelőzője és rákövetkezője?

4. s_4 mentén

   (a) `Be(IJ)`

   Metszi-e $\overline{IJ}$ a fabeli megelőzőjét vagy rákövetkezőjét?

   (a) `Ki(CD)`

   Metszi-e egymást $\overline{CD}$ fabeli megelőzője és rákövetkezője?

4. Határozzuk meg a (1,2), (1,4), (3,3), (4,6), (5,0), (5,3), (5,5), (7,5) pontok konvex burkát Graham-féle pásztázással, illetve Jarvis meneteléssel!

Graham-féle pásztázás

I. lépés: csúcsok polárszög szerinti rendezése: A,E,F,C,H,G,D,B.
II. lépés: a konvex burok csúcsait nyilvántartó verem fenntartása.

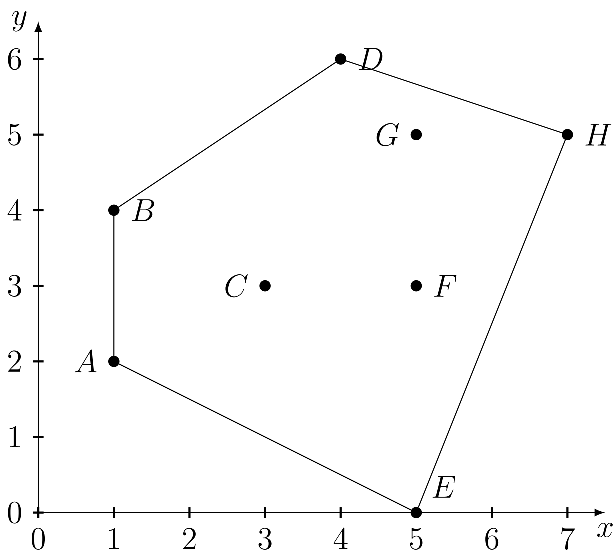
1. S_0=[A,E,F] (ekkor még nem kell forgásirányt számoljunk)
2. ForgásIrány(E,F,C) S_1=[A,E,F,C]
3. ForgásIrány(F,C,H), ForgásIrány(E,F,H), ForgásIrány(A,E,H) S_2=[A,E,H]
4. ForgásIrány(E,H,G) S_3=[A,E,H,G]
5. ForgásIrány(H,G,D), ForgásIrány(E,H,D) S_4=[A,E,H,D]
6. ForgásIrány(H,D,B) S_5=[A,E,H,D,B]

Jarvis menetelés

I. lépés: legyen P a legbaloldalibb x-koordinátájú pont (a pontok $O(n \log n)$-es rendezésére nincs szükség)
II. lépés: amíg vissza nem érünk az elsőnek kiválasztott pontba
  válasszuk ki azt a Q pontot, amelyre ForgásIrány(P,R,Q)>0 minden R-re
  Adjuk hozzá Q-t a konvex burokhoz
  P=Q

1. iteráció	2. iteráció	3. iteráció	4. iteráció	5. iteráció
FI(A,A,B)=0	FI(B,A,C)=4	FI(D,A,E)=22	FI(H,A,A)=0	**FI(E,A,F)=-12**
FI(A,B,B)=0	FI(B,B,C)=0	FI(D,B,E)=20	FI(H,B,A)=12	FI(E, B, A)=8
FI(A,C,B)=4	FI(B,C,C)=0	FI(D,C,E)=9	FI(H,C,A)=0	FI(E, C, A)=8
FI(A,D,B)=6	**FI(B,D,C)=-7**	FI(D,D,E)=0	FI(H,D,A)=15	FI(E, D, A)=22
FI(A,E,B)=8	FI(B,E,D)=20	FI(D,E,E)=0	**FI(H,E,A)=-24**	FI(E, E, A)=0
FI(A,F,B)=8	FI(B,F,D)=11	**FI(D,F,E)=-3**	FI(H,F,E)=6	FI(E, F, A)=12
FI(A,G,B)=8	FI(B,G,D)=5	**FI(D,G,F)=-2**	FI(H,G,E)=10	FI(E, G, A)=20
FI(A,H,B)=12	FI(B,H,D)=9	**FI(D,H,G)=-2**	FI(H,H,E)=0	FI(E, H, A)=24
$B \in CH$	$D \in CH$	$H \in CH$	$E \in CH$	$A \in CH$

1. táblázat. Jarvis menetelése során kiszámított forgásirányok



5. Döntsük el az előző feladat ponthalmazához tartozó zárt nemmetsző poligonjához képest az $I = (6, 4)$ pont belül vagy kívül helyezkedik-e el!

A zárt nem metsző poligon a csúcsok polárszög szerinti rendezésének sorrendjében való összekötésével megkaphatjuk. Válasszunk egy garantáltan poligonon kívüli K pontot, és vizsgáljuk $\overline{IK}$-nak a poligon oldalaival való metszéspontjainak az m számát.