Algoritmusok és adatszerkezetek II.

Geometriai algoritmusok

Szegedi Tudományegyetem

Alapfogalmak

Definíció

A $P_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$ pontot $P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ és $P_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ pontok **konvex kombináció**jának nevezzük, amennyiben $x_3 = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$, valamint $y_3 = (1-\alpha)y_1 + \alpha y_2$ teljesül valamely $0 \le \alpha \le 1$-ra

Definíció

$\overline{P_1 P_2}$ szakasz a P_1 és P_2 pontokból konvex kombinációinak halmaza

Megjegyzés

Ha a pontok sorrendje is számít, irányított szakaszról beszélünk, és $\overrightarrow{P_1 P_2}$ módon jelöljük

$\vec{p}$-vel $\overrightarrow{OP}$-t, vagyis az O origóból a P-be menő irányított szakaszt (vektort) jelöljük

A keresztszorzat

$P_1 \times P_2$ keresztszorzata

$$\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1y_2 - x_2y_1 = P_1 \times P_2 = -P_2 \times P_1$$

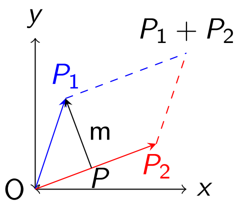
Megjegyzés

A keresztszorzat valójában háromdimenziós fogalom: egy $\overrightarrow{p_1}$-re és $\overrightarrow{p_2}$-re merőleges, velük jobbsodrású rendszert alkotó vektor, melynek hossza $|x_1y_2 - x_2y_1|$.

Forgásirány

Keresztszorzat mint előjeles terület

$P_1 \times P_2$ megadja az O, P_1, P_2, $P_1 + P_2$ koordinátákkal rendelkező paralelogramma előjeles területét



- $\mathbf{P_1 \times P_2 < 0 \Rightarrow P_1}$**-ből jobbra fordulva érjük el** $\mathbf{P_2}$**-t**
- $P_1 \times P_2 > 0 \Rightarrow P_1$-ből balra fordulva érjük el P_2-t
- $P_1 \times P_2 = 0 \Rightarrow P_1$ és P_2 kollineáris

Merre fordul a következő szakasz?

- $\overline{P_0 P_1}$ és $\overline{P_1 P_2}$ szakaszokat folyamatosan bejárva merre kell fordulni P_1 pontban?
- Az előzőekben lényegében az origó viselkedett P_0-ként

Merre fordul a következő szakasz?

- $\overline{P_0 P_1}$ és $\overline{P_1 P_2}$ szakaszokat folyamatosan bejárva merre kell fordulni P_1 pontban?
- Az előzőekben lényegében az origó viselkedett P_0-ként

Ötlet: tegyünk úgy, mintha P_0 lenne az origó

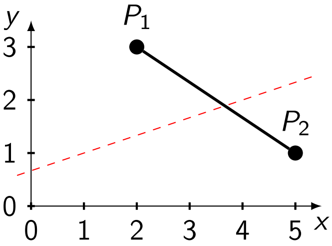
$$(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0) = \det\left(\begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix}\right)$$

- Szemléletesen: P_1-ből és P_2-ből P_0-t kivonva P_0 központúvá tesszük a koordinátarendszerünket

Szakasz átfogása

Átfogó szakasz

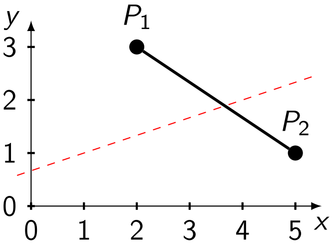
Egy $\overline{P_1 P_2}$ szakasz átfog egy egyenest, ha a P_1 pont az egyenes egyik oldalára, P_2 pont pedig a másik oldalára esik



Szakasz átfogása

Átfogó szakasz

Egy $\overline{P_1P_2}$ szakasz átfog egy egyenest, ha a P_1 pont az egyenes egyik oldalára, P_2 pont pedig a másik oldalára esik



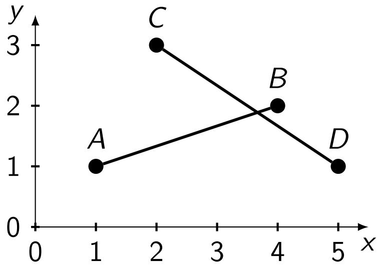
Átfedés meglétének eldöntése

Egy (kevéssé hatékony) lehetőség, ha az egyenes egyenletét kiszámolva döntünk P_1 és P_2 relatív helyzetéről
Támaszkodjunk helyette a forgásirányokra!

Egymást metsző szakaszok

Szükségesség

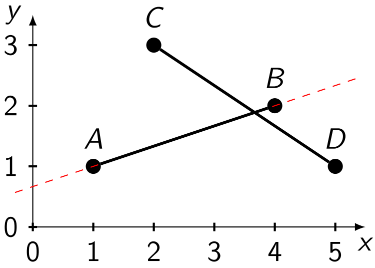
$\overline{CD}$ úgy metszheti $\overline{AB}$ szakaszt, ha $\overline{CD}$ átfogja az $\overline{AB}$ szakaszra illeszkedő egyenest.

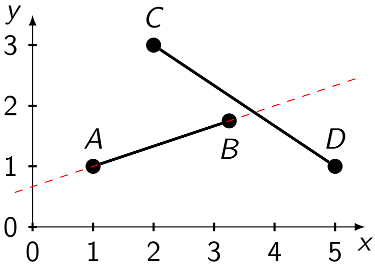


Egymást metsző szakaszok

Szükségesség

$\overline{CD}$ úgy metszheti $\overline{AB}$ szakaszt, ha $\overline{CD}$ átfogja az $\overline{AB}$ szakaszra illeszkedő egyenest.





Metszés vizsgálata

```
ForgásIrány(X, Y, Z) {
  return (Y-X)×(Z-X)
}

MetszőSzakaszok(A, B, C, D) {
  d1 =  ForgásIrány(A, B, C)
  d2 =  ForgásIrány(A, B, D)
  d3 =  ForgásIrány(C, D, A)
  d4 =  ForgásIrány(C, D, B)
  return d1 * d2 < 0 és d3*d4 < 0
}
```

Metszés vizsgálata

```
FORGÁSIRÁNY(X, Y, Z) {
   return (Y-X)×(Z-X)
}

METSZŐSZAKASZOK(A, B, C, D) {
   d1 =  FORGÁSIRÁNY(A, B, C)
   d2 =  FORGÁSIRÁNY(A, B, D)
   d3 =  FORGÁSIRÁNY(C, D, A)
   d4 =  FORGÁSIRÁNY(C, D, B)
   return d1 * d2 < 0 és d3*d4 < 0
}
```

Ezzel csak „valódi" metszéseket találunk meg, a szakaszra illeszkedő végpontú szakaszt nem kezeltük így