Algoritmusok és adatszerkezetek II.

Geometriai algoritmusok

Szegedi Tudományegyetem

Alapfogalmak

Definíció

A $P_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$ pontot $P_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ és $P_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ pontok **konvex kombináció**jának nevezzük, amennyiben $x_3 = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$, valamint $y_3 = (1-\alpha)y_1 + \alpha y_2$ teljesül valamely $0 \leq \alpha \leq 1$-ra

Definíció

$\overline{P_1P_2}$ szakasz a P_1 és P_2 pontokból konvex kombinációinak halmaza

Megjegyzés

Ha a pontok sorrendje is számít, irányított szakaszról beszélünk, és $\overrightarrow{P_1P_2}$ módon jelöljük

$\vec{\mathbf{p}}$-vel $\overrightarrow{OP}$-t, vagyis az O origóból a P-be menő irányított szakaszt (vektort) jelöljük

A keresztszorzat

$P_1 \times P_2$ keresztszorzata

$$\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = P_1 \times P_2 = -P_2 \times P_1$$

Megjegyzés

A keresztszorzat valójában háromdimenziós fogalom: egy $\overrightarrow{\mathbf{p_1}}$-re és $\overrightarrow{\mathbf{p_2}}$-re merőleges, velük jobbsodrású rendszert alkotó vektor, melynek hossza $|x_1 y_2 - x_2 y_1|$.

A keresztszorzat

$P_1 \times P_2$ keresztszorzata

$$\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = P_1 \times P_2 = -P_2 \times P_1$$

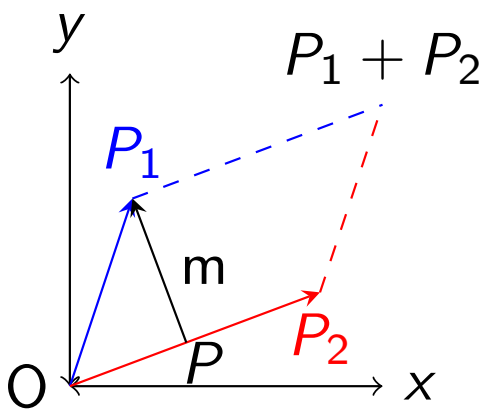
Megjegyzés

A keresztszorzat valójában háromdimenziós fogalom: egy $\overrightarrow{\mathbf{p_1}}$-re és $\overrightarrow{\mathbf{p_2}}$-re merőleges, velük jobbsodrású rendszert alkotó vektor, melynek hossza $|x_1 y_2 - x_2 y_1|$.
Más megfogalmazásban $\overrightarrow{\mathbf{p_1}} \times \overrightarrow{\mathbf{p_2}} = \|\overrightarrow{\mathbf{p_1}}\|\|\overrightarrow{\mathbf{p_2}}\|\sin(\theta)\hat{\mathbf{n}}$, ahol θ a $\overrightarrow{\mathbf{p_1}}$ és $\overrightarrow{\mathbf{p_2}}$ által bezárt szög, valamint $\hat{\mathbf{n}} \perp \overrightarrow{\mathbf{p_1}}$ és $\hat{\mathbf{n}} \perp \overrightarrow{\mathbf{p_2}}$

Forgásirány

Keresztszorzat mint előjeles terület

$P_1 \times P_2$ megadja az O, P_1, P_2, $P_1 + P_2$ koordinátákkal rendelkező paralelogramma előjeles területét



- $\mathbf{P_1 \times P_2 < 0 \Rightarrow P_1}$**-ből jobbra fordulva érjük el** $\mathbf{P_2}$**-t**
- $P_1 \times P_2 > 0 \Rightarrow P_1$-ből balra fordulva érjük el P_2-t
- $P_1 \times P_2 = 0 \Rightarrow P_1$ és P_2 kollineáris

Merre fordul a következő szakasz?

- $\overline{P_0P_1}$ és $\overline{P_1P_2}$ szakaszokat folyamatosan bejárva merre kell fordulni P_1 pontban?
- Az előzőekben lényegében az origó viselkedett P_0-ként

Merre fordul a következő szakasz?

- $\overline{P_0P_1}$ és $\overline{P_1P_2}$ szakaszokat folyamatosan bejárva merre kell fordulni P_1 pontban?
- Az előzőekben lényegében az origó viselkedett P_0-ként

Ötlet: tegyünk úgy, mintha P_0 lenne az origó

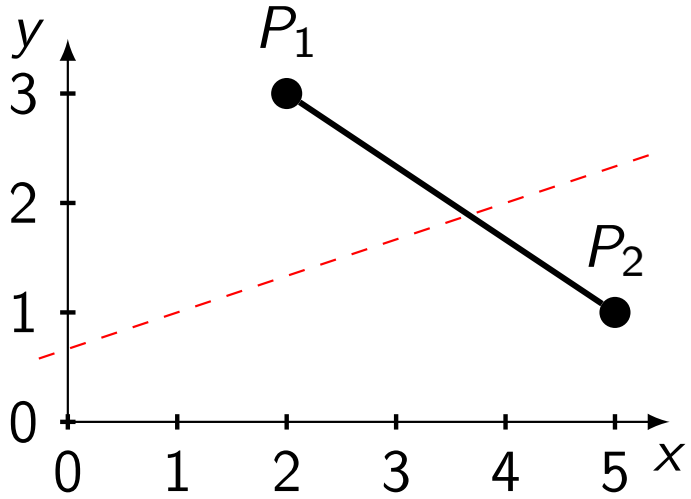
$$(P_1 - P_0) \times (P_2 - P_0) = \det\left(\begin{bmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix}\right)$$

- Szemléletesen: P_1-ből és P_2-ből P_0-t kivonva P_0 központúvá tesszük a koordinátarendszerünket

Szakasz átfogása

Átfogó szakasz

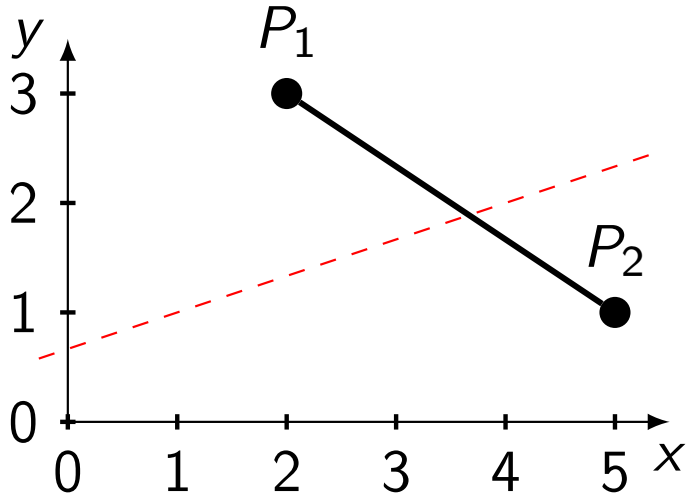
Egy $\overline{P_1P_2}$ szakasz átfog egy egyenest, ha a P_1 pont az egyenes egyik oldalára, P_2 pont pedig a másik oldalára esik



Szakasz átfogása

Átfogó szakasz

Egy $\overline{P_1P_2}$ szakasz átfog egy egyenest, ha a P_1 pont az egyenes egyik oldalára, P_2 pont pedig a másik oldalára esik



Átfedés meglétének eldöntése

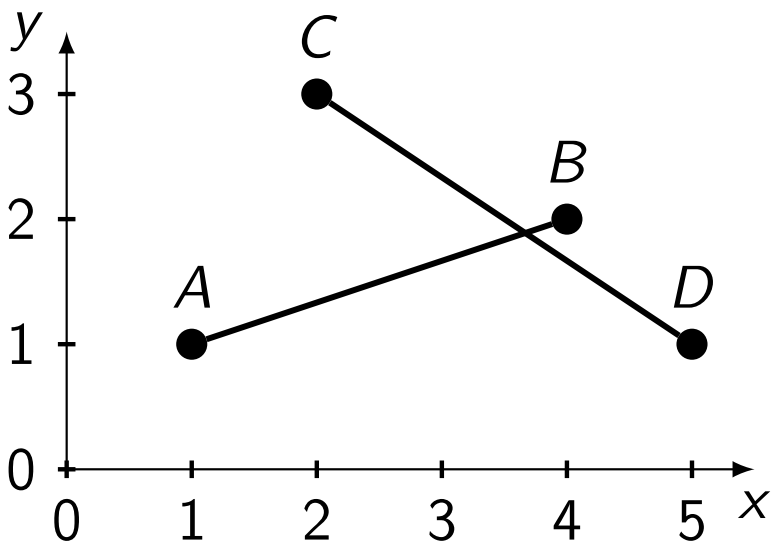
Egy (kevéssé hatékony) lehetőség, ha az egyenes egyenletét kiszámolva döntünk P_1 és P_2 relatív helyzetéről

Támaszkodjunk helyette a forgásirányokra!

Egymást metsző szakaszok

Szükségesség

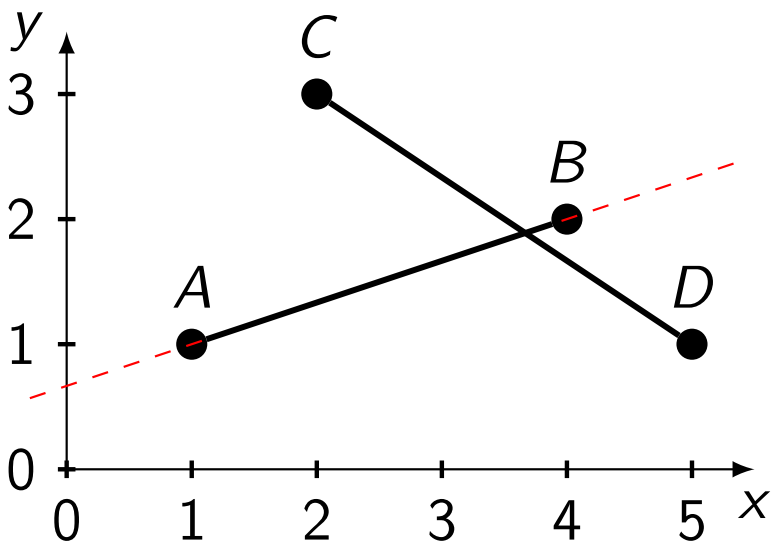
$\overline{CD}$ úgy metszheti $\overline{AB}$ szakaszt, ha $\overline{CD}$ átfogja az $\overline{AB}$ szakaszra illeszkedő egyenest.

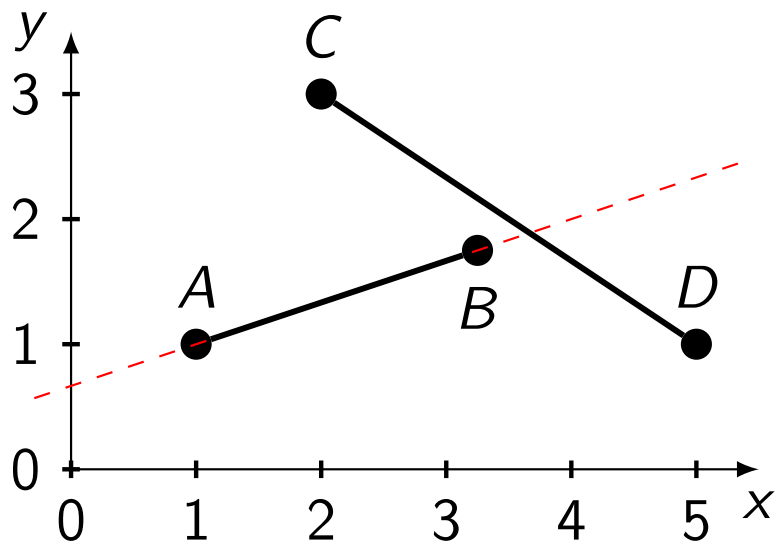


Egymást metsző szakaszok

Szükségesség

$\overline{CD}$ úgy metszheti $\overline{AB}$ szakaszt, ha $\overline{CD}$ átfogja az $\overline{AB}$ szakaszra illeszkedő egyenest.





Metszés vizsgálata

```
Forgásirány(P1, P2, P3) {
    return (P2.x-P1.x)*(P3.y-P1.y) - (P3.x-P1.x)*(P2.y-P1.y)
}

MetszőSzakaszok(A, B, C, D) {
    d1 = Forgásirány(A, B, C)
    d2 = Forgásirány(A, B, D)
    d3 = Forgásirány(C, D, A)
    d4 = Forgásirány(C, D, B)
    return d1 * d2 < 0 és d3*d4 < 0
}
```

Metszés vizsgálata

```
Forgásirány(P1, P2, P3) {
    return (P2.x-P1.x)*(P3.y-P1.y) - (P3.x-P1.x)*(P2.y-P1.y)
}

MetszőSzakaszok(A, B, C, D) {
    d1 = Forgásirány(A, B, C)
    d2 = Forgásirány(A, B, D)
    d3 = Forgásirány(C, D, A)
    d4 = Forgásirány(C, D, B)
    return d1 * d2 < 0 és d3*d4 < 0
}
```

Ezzel csak „valódi” metszéseket találunk meg, a szakaszra illeszkedő végpontú szakaszt nem kezeltük így

Metsző szakaszpár keresése

- Adott szakaszok n elemű halmaza, és tudni szeretnénk, hogy van-e köztük egymást metsző szakaszpár
- Nyers erővel $\binom{n}{2} = O(n^2)$
- Bizonyos egyszerűsítő feltételezések mellett $O(n \log(n))$ is megoldható
  - y tengellyel párhuzamos szakaszokat nem kezelünk
  - Adott szakaszok között nincs 3 egy pontban metsző

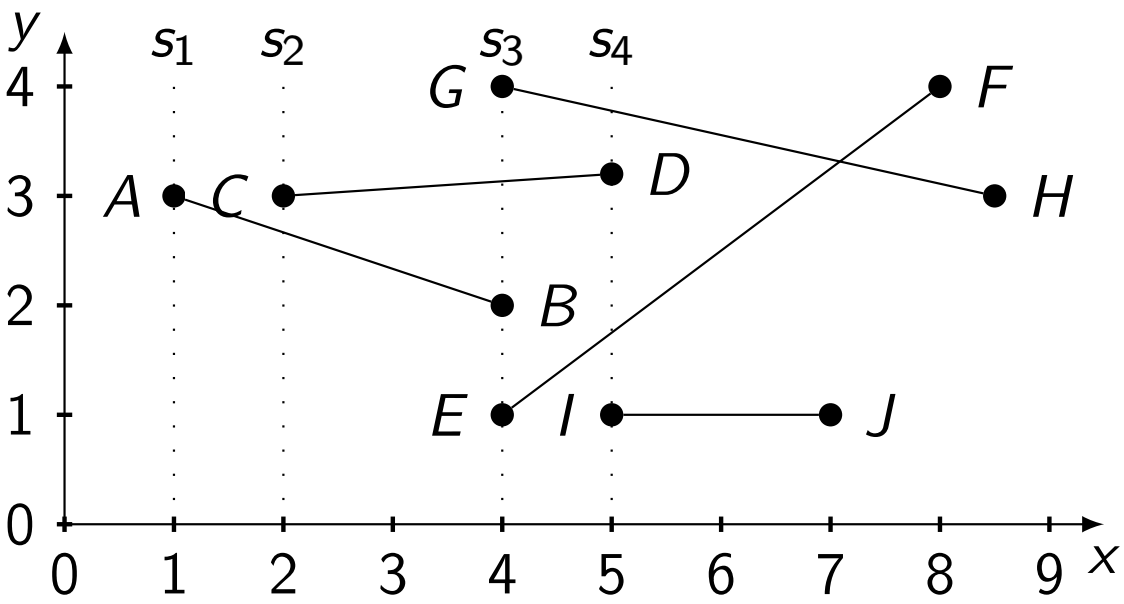
Metsző szakaszpár keresése – söprés

Söprés

Söprés során egy képzeletbeli függőleges *söprő egyenes* halad át geometriai objektumok halmazán (általában balról jobbra)

Két szakasz összehasonlítása adott x koordináta mentén

s_1 szakasz fölötte van s_2-nek x-nél ($s_1 \succ_x s_2$), ha s_1 y-koordinátája nagyobb s_2 y-koordinátájánál adott x-koordináta mentén.



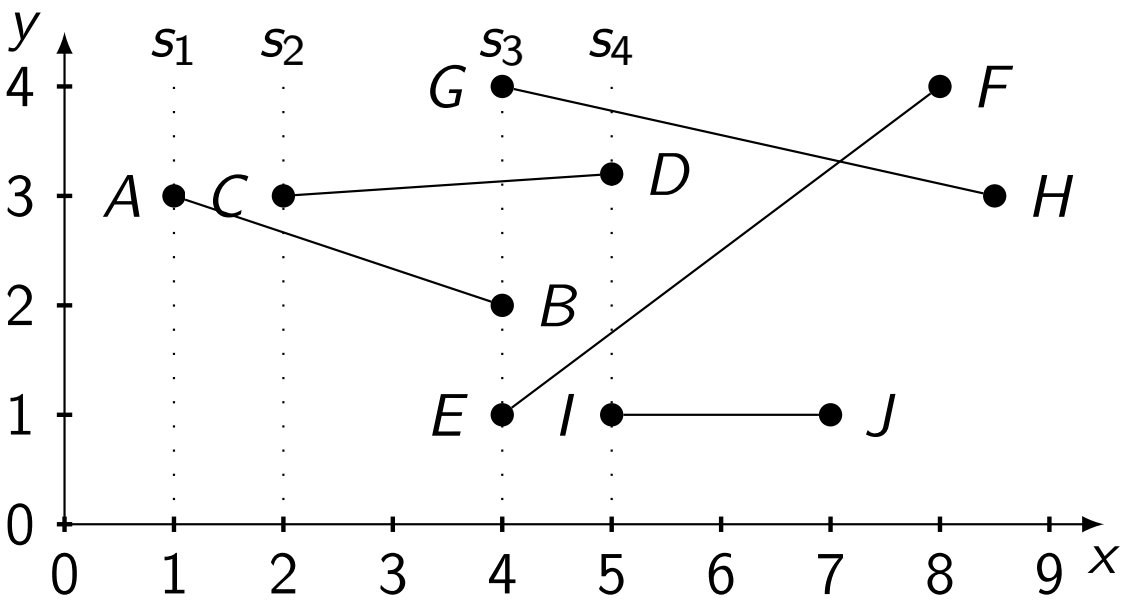
Metsző szakaszpár keresése – söprés

Söprés

Söprés során egy képzeletbeli függőleges *söprő egyenes* halad át geometriai objektumok halmazán (általában balról jobbra)

Két szakasz összehasonlítása adott x koordináta mentén

s_1 szakasz fölötte van s_2-nek x-nél ($s_1 \succ_x s_2$), ha s_1 y-koordinátája nagyobb s_2 y-koordinátájánál adott x-koordináta mentén.



Példák

$\overline{GH} \succ_4 \overline{EF}$, de $\overline{EF} \succ_8 \overline{GH}$

Szakaszpár metszése a söprő egyenes szemszögéből

- Bármely adott x értékre a $\succ_x$ reláció az x-nél lévő söprő egyenest metsző szakaszok teljes rendezése

Kulcsészrevétel

Ha $\exists$ egymást metsző szakaszpár $\Rightarrow \exists$ söprő egyenes, mely mentén való rendezés esetén azok egymás után következnek

- A söprő egyenes mozgatása
  - Elég a szakaszvégpontokban a be,-és kilépő szakaszok alapján összehasonlításokat végezni
- Kétféle adathalmazt kell kezelni a keresés során
  - Söprő egyenes állapotleírása
  - Esetpontok rendezett listája

Szakaszpár metszése – állapotleírás és esetpontok

- A söprő egyenes állapotleírása a szakaszok adott egyenes menti $\succ$ teljes rendezési reláció szerinti rendezését tartalmazza
- A söprő egyenes állapotleírásában változás csak esetpontokban (=szakaszvégpontokban) történik
- Esetpontok rendezése
  - Kovertikális (azonos x-koordinátájú) szakaszvégpontok esetén a bal/belépő végpontokat a jobb/kilépő végpontok elé soroljuk
- Elegendő azt vizsgálni csupán, hogy a
  - belépő szakaszok metszik-e megelőzőjüket/rákövetkezőjüket
  - kilépő szakaszok megelőzője és rákövetkezője metszi-e egymást

Szakaszpár metszése – állapotleírás és esetpontok

- A söprő egyenes állapotleírása a szakaszok adott egyenes menti $\succ$ teljes rendezési reláció szerinti rendezését tartalmazza
- A söprő egyenes állapotleírásában változás csak esetpontokban (=szakaszvégpontokban) történik
- Esetpontok rendezése
  - Kovertikális (azonos x-koordinátájú) szakaszvégpontok esetén a bal/belépő végpontokat a jobb/kilépő végpontok elé soroljuk
- Elegendő azt vizsgálni csupán, hogy a
  - belépő szakaszok metszik-e megelőzőjüket/rákövetkezőjüket
  - kilépő szakaszok megelőzője és rákövetkezője metszi-e egymást

Fontos

A mindenkori állapotleírást kiegyensúlyozott keresőfában tároljuk

Metsző szakaszpár keresése

```
VAN-E-METSZŐ-SZAKASZPÁR(S) { // T az állapotleírás fája
  L = S-beli szakaszvégpontok rendezett listája
  for p in L
  do
    if p egy s szakasz bal végpontja {
      BESZÚR(T,s)
      if MEGELŐZ(T,s) vagy RÁKÖVET(T,s) metszi s-et {
        return IGAZ
      }
    }
    if p egy s szakasz jobb végpontja {
      if MEGELŐZ(T,s) metszi RÁKÖVET(T,s)-t {
        return IGAZ
      }
      TÖRÖL(T,s)
  return HAMIS
}
```

Metsző szakaszpár keresésének futási ideje

- Állapotleírás T kiegyensúlyozott fájának létrehozása $O(1)$
- Szakaszvégpontok rendezése $O(n \log n)$
- `for` ciklus "hossza" legfeljebb $2n = O(n)$
- Megelőz, illetve Rákövet metódusok végrehajtása $O(\log n)$

Metsző szakaszpár keresésének futási ideje

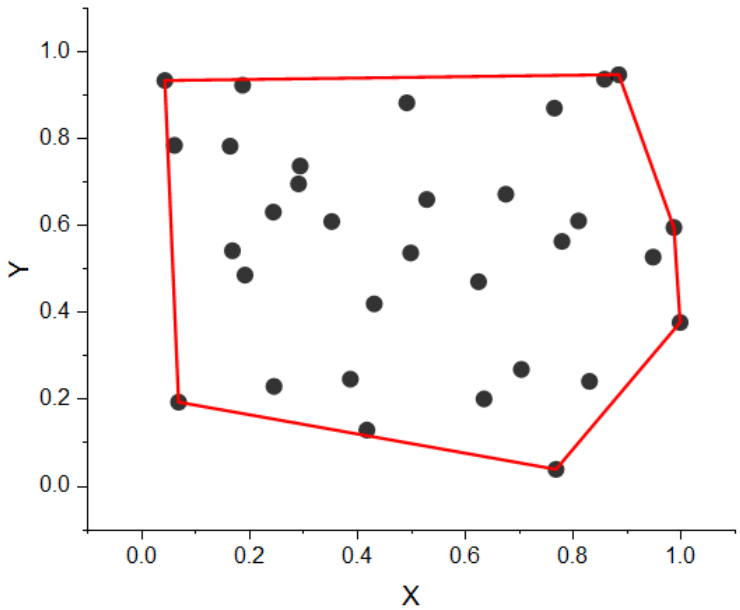
- Állapotleírás T kiegyensúlyozott fájának létrehozása $O(1)$
- Szakaszvégpontok rendezése $O(n \log n)$
- `for` ciklus "hossza" legfeljebb $2n = O(n)$
- Megelőz, illetve Rákövet metódusok végrehajtása $O(\log n)$

$\Rightarrow$ Összességében $O(n \log n)$

Konvex burok definíciója

Konvex burok

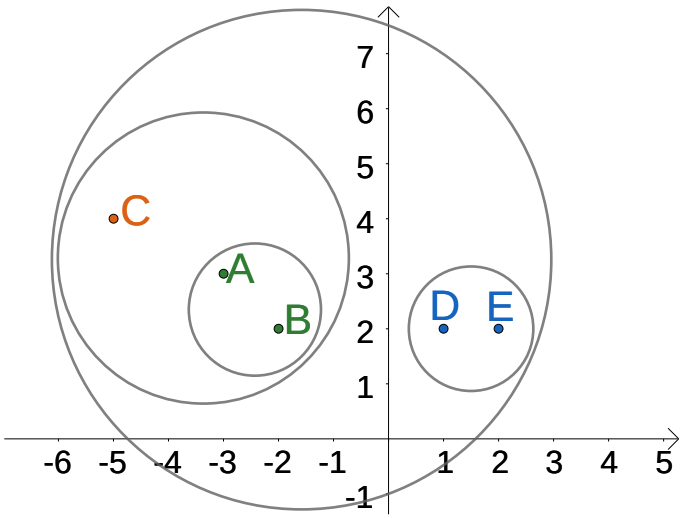
Q ponthalmaz konvex burka az a legkisebb P konvex poligon, amelyre Q minden pontja vagy P határán van, vagy a belsejében.

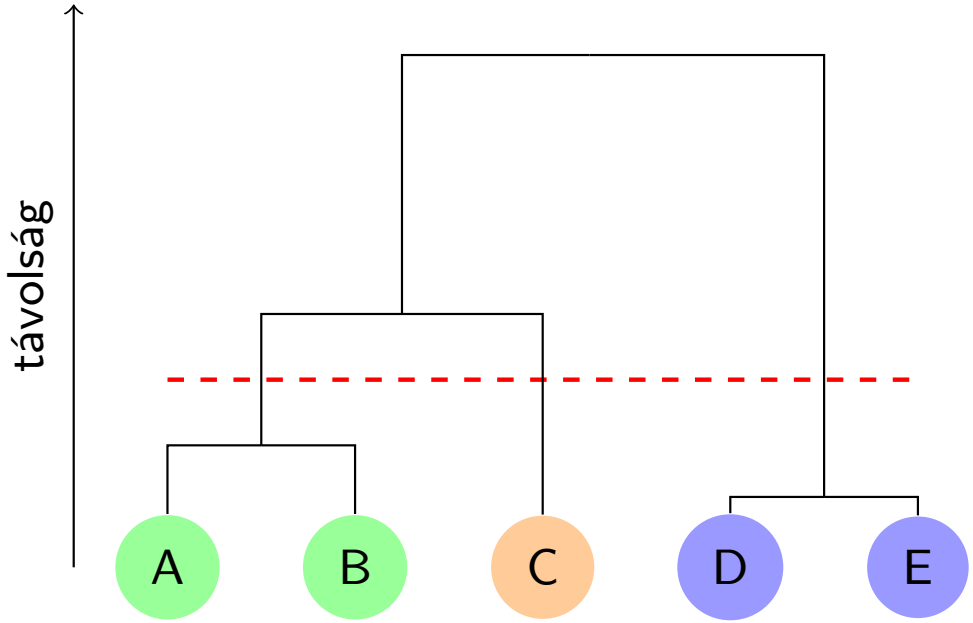


Q konvex burkát CH(Q)-val jelöljük.
$CH(Q) \subseteq Q$ pontjait Q **extrém pont**jainak.
Jelöljük a továbbiakban $|Q|$-t n-nel.

CH gyakorlati felhasználása

- Objektumok ütközésének elkerülése: vegyük akadályok koordinátáit, ezek CH-a képezze az elkerülendő régiót
- Agglomeratív klaszterezés: gépi tanuló eljárás, melynek célja vektorokkal leírt megfigyelések homogén részsokaságainak kialakítása





Konvex burok meghatározásának elvi algoritmusa

Tétel

P pont csak abban az esetben extrém pontja Q-nak, ha az a Q-ból kialakítható háromszögek mindegyikén kívül esik, vagy annak egy csúcsa.

- Egy csúcs extrém voltának eldöntése $\binom{n-1}{3} = O(n^3)$
- Mivel n csúcs van, így az elvi algoritmus $O(n^4)$ futási idejű

Konvex burok meghatározása hatékonyan

- Különféle megközelítések léteznek
  1. Növekményes módszer: "balról jobbra" számítjuk ki a CH-t
  2. Oszd-meg-és-uralkodj: CH számítása a pontok részhalmazára, majd ezek egyesítése
  3. Eltávolító és kereső módszer
- n pont esetében többnyire $O(n \log n)$ futási idejű algoritmusok, de vannak $O(nh)$, illetve $O(n \log h)$ algoritmusok is[1]

[1] h a CH-ban lévő csúcsok száma

Konvex burok meghatározása hatékonyan

- Különféle megközelítések léteznek
  1. Növekményes módszer: "balról jobbra" számítjuk ki a CH-t
  2. Oszd-meg-és-uralkodj: CH számítása a pontok részhalmazára, majd ezek egyesítése
  3. Eltávolító és kereső módszer
- n pont esetében többnyire $O(n \log n)$ futási idejű algoritmusok, de vannak $O(nh)$, illetve $O(n \log h)$ algoritmusok is[1]

Megjegyzés

Egy $O(nh)$ algoritmusnak nyilván csak $h < \log n$ esetén van haszna

[1] h a CH-ban lévő csúcsok száma

Konvex burok – Graham-féle pásztázás

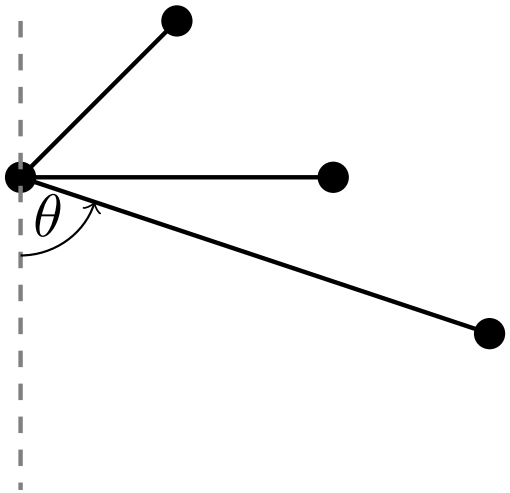
```
Graham-pásztázás(S) {
  P0 = minimális x-koordinátájú Q-beli pont (több ilyen
  esetén válasszuk az y-koordináta szerint is minimálisat)
  P = PolárszögSzerintRendez(Q)
  S = VermetLétesít()
  Verembe(P0, S)
  Verembe(P1, S)
  Verembe(P2, S)
  for i=3 to m {
    while Legfelső-alatti(S), Legfelső(S) és Pi nem
          fordul balra {
      Veremből(S)
    }
    Verembe(Pi, S)
  }
  return S
}
```

Polárszög szerinti rendezés

Pontok helyzetének polárkoordinátákkal történő megadása

P pontot (x, y) koordinátapár helyett egy referenciaponttól vett távolság és egy referenciairánnyal bezárt szög párosaként adjuk meg

- A refereciaponttól számított $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eltérések szerinti sorrend adja a pontok polárszög szerinti rendezését
  - Azonos hányadossal rendelkező pontok közül azt soroljuk előbbre, amelyik a referenciaponthoz közelebb található[2]



Megjegyzés

A valóságban a vektor hosszának és forgásszögének kiszámítása költséges és numerikusan sem jó ötlet (`sqrt` és szögfüggvény miatt)

[2] Kivéve, ha $\Delta x = 0$, mert akkor a másodlagos rangsorolást fordítva végezzük

Polárszög szerinti rendezés a gyakorlatban

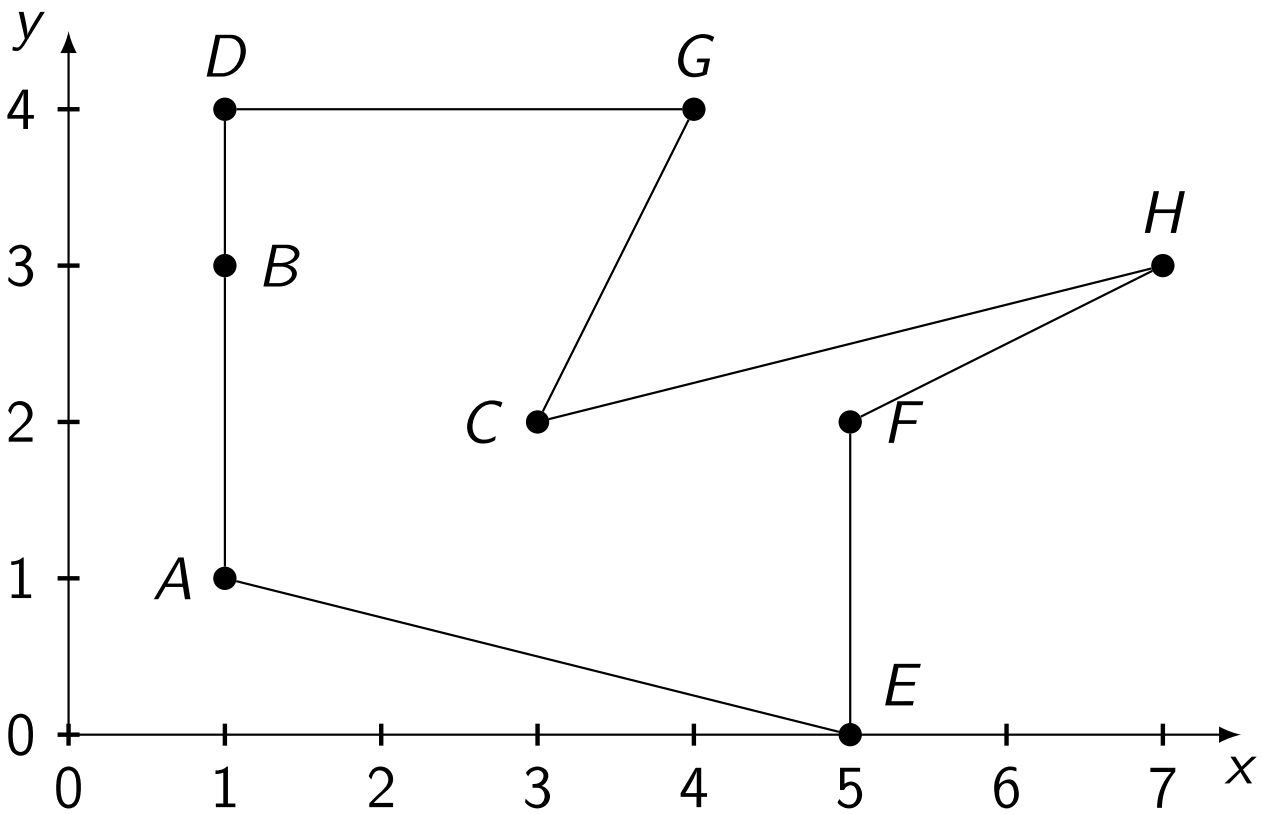
- Numerikus hibák mérséklése és a 0-val való osztás elkerülésére
  - a forgásszöget a pontszorzattal számoljuk
  - a vektor hossza helyett a négyzetét számoljuk
    - Emlékeztetőül: $\|\vec{p}\|_2 = \|\overrightarrow{OP}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} P[i]^2}$
  - Bármilyen összehasonlító rendezést (pl. gyorsrendezés) tudunk használni a forgásirányokra támaszkodva

`pontok` lista rendezése `R` referenciapont mentén

```
Collections.sort(pontok, (A, B) ->
  return (int) Math.signum(FORGÁSIRÁNY(R, A, B));
);
```

Zárt nem metsző poligon

- A pontokat a polárszöges rendezés sorrendjében összekötve megkapjuk a pontok által alkotott zárt, nem metsző poligont

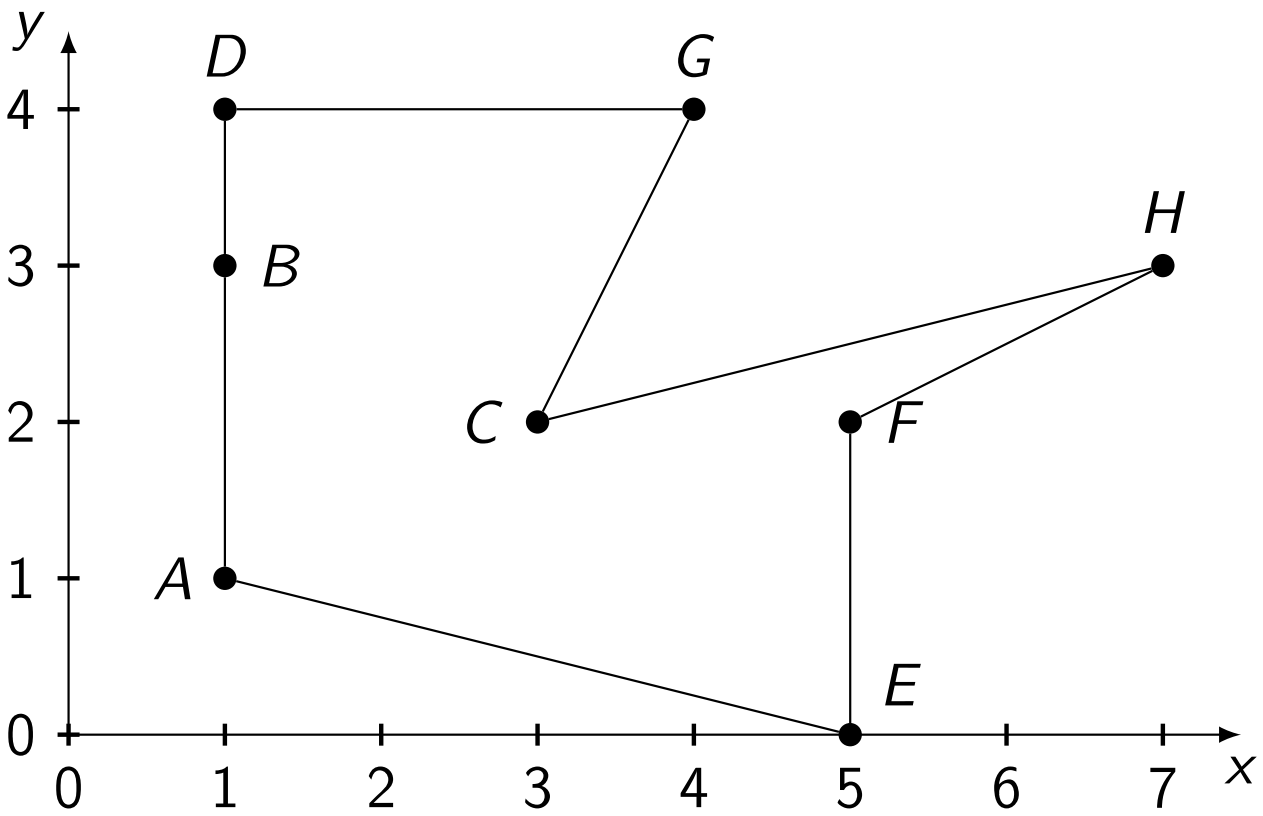


A rendezés

1. A
2. E
3. F
4. H
5. C
6. G
7. D
8. B

Zárt nem metsző poligon

- A pontokat a polárszöges rendezés sorrendjében összekötve megkapjuk a pontok által alkotott zárt, nem metsző poligont



A rendezés

1. A
2. E
3. F
4. H
5. C
6. G
7. D
8. B

A pontok polárszög szerinti rendezésével nyert sorrendben történő összekötése nem feltétlen eredményez konvex poligont

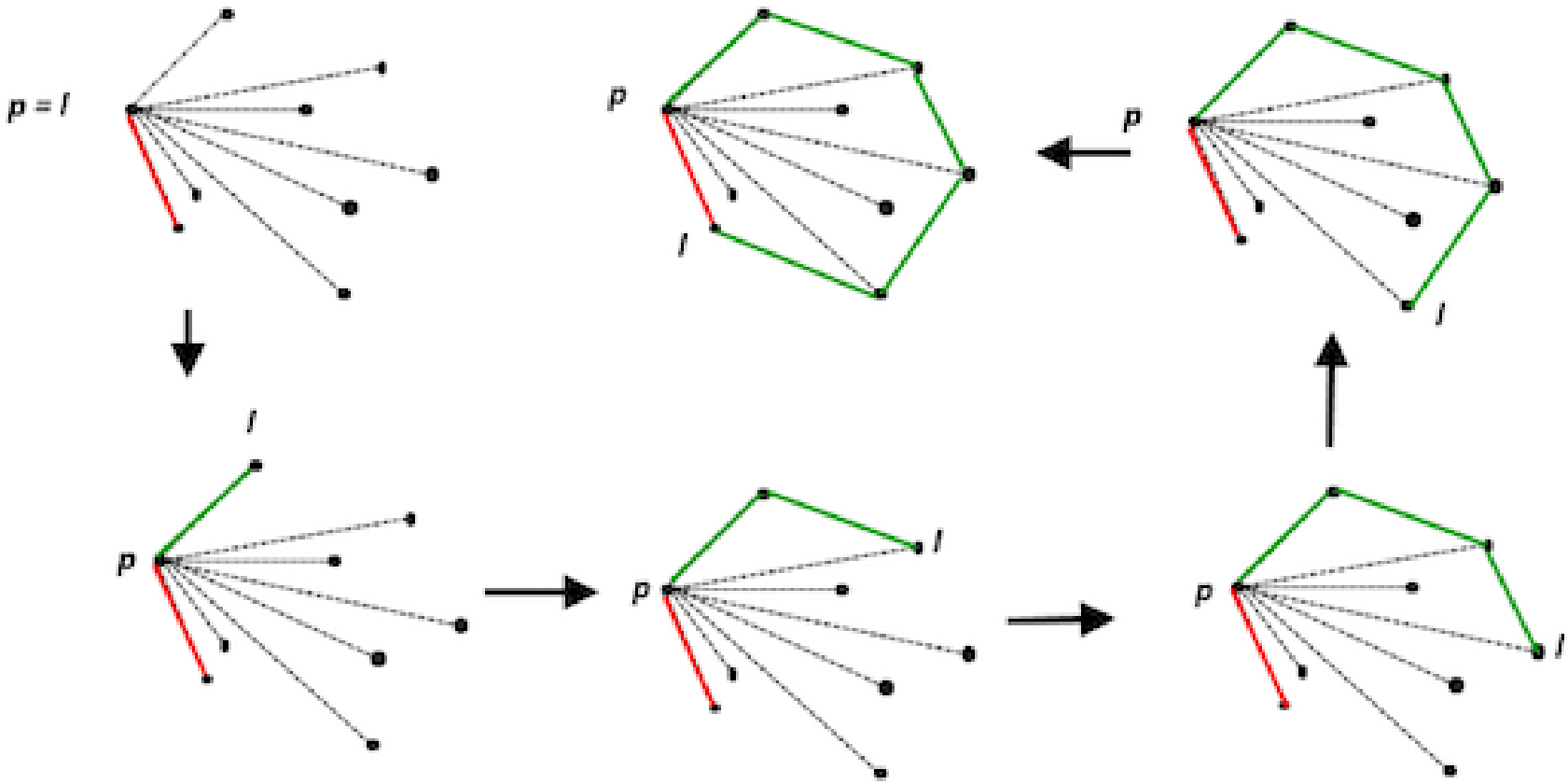
Graham-féle pásztázás példa

- Kezdetben: $S = [A, E, F]$
  1. Forgásirány(E,F,H), Veremből(S), Forgásirány(A,E,H), Verembe(S, H)
  2. Forgásirány(E,H,C), Verembe(S, C)
  3. Forgásirány(H,C,G), Veremből(S), Forgásirány(E,H,G), Verembe(S, G)
  4. Forgásirány(H,G,D), Verembe(S,D)
  5. Forgásirány(G,D,B), Verembe(S,B)
- Végezetül: $S = [A, E, H, G, D, B]$

CH meghatározása Jarvis meneteléssel

- Ajándékcsomagolás elvén működik $O(nh)$ időben
- Kezdésnek válasszuk ki a legbaloldalibb pontot
- Amíg vissza nem érünk a kezdőpontba, válasszuk ki a legutolsónak választott ponttól leginkább balra eső pontot (vagyis azt a pontot, amelytől minden további ponthoz jobbra fordulásra van szükség)
- A Jarvis-féle menetelés folyamatosan bővíti CH(Q)-t (egy iterációban $O(n)$ próbát tesz), "vakvágányoktól mentes"
  - A Graham-féle pásztázás minden csúcsot potenciálisan CH(Q)-beliként kezel

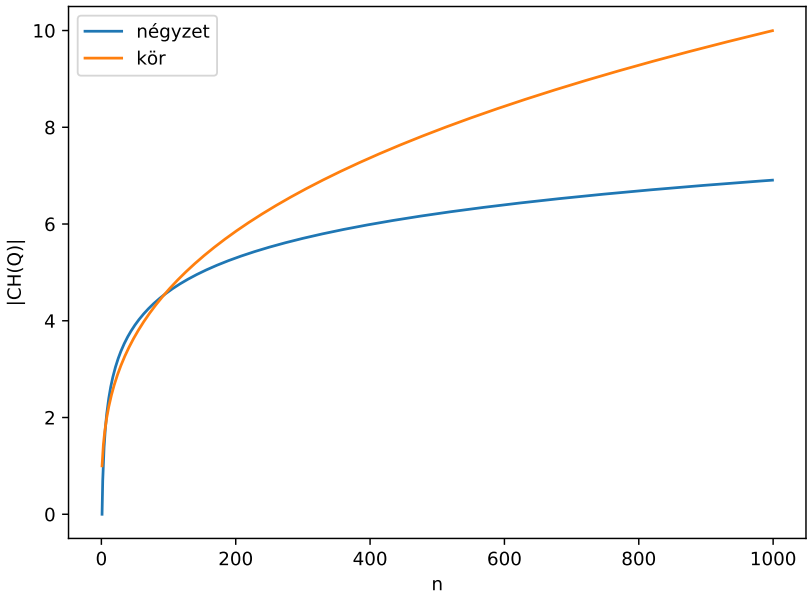
Jarvis menetelése illusztrálva

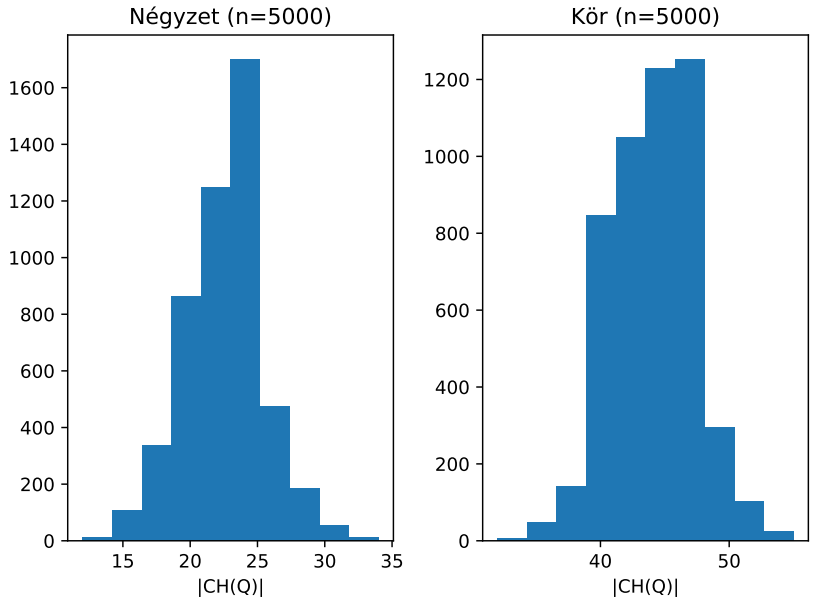


The execution of jarvis's March

CH(Q) várható mérete

- Négyzeten/körlapon 2d-ben **véletlenszerűen** elhelyezkedő ponthalmaznak átlagosan $O(\log n)/O(n^{1/3})$ elemű a CH-ja





Ne feledjük!

Legrosszabb esetben $CH(Q) = n$ is teljesülhet

Legtávolabbi pontpár megtalálása

- n elemű ponthalmazban találjuk meg azon (P_i, P_j) pontpárt, melyek a legtávolabb fekszenek egymástól
  - P_i és P_j pontok távolságát euklideszi értelemben véve $d(P_i, P_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$
- Nyers erővel ez is $\binom{n}{2} = O(n^2)$ összehasonlítás lenne

Észrevétel

A ponthalmaz legtávolabbi pontpárja a CH-on található csúcspárok valamelyike kell legyen

A legtávolabbi pontpár a CH-on lesz

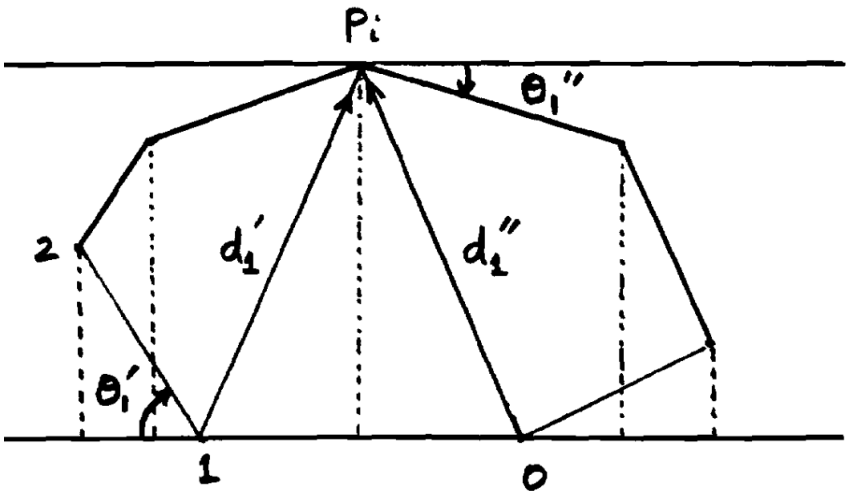
- Az észrevétel indirekt módon bizonyítható
  - Tegyük föl, hogy P_i és P_j pontok közötti távolság maximális, és $P_i \in CH(Q), P_j \notin CH(Q)$
  - Vegyünk egy P_i középpontú $\|\overline{P_iP_j}\|$ sugarú gömböt $\Rightarrow$ egyetlen $P_k \in Q$ pont sem eshet a gömbön kívül

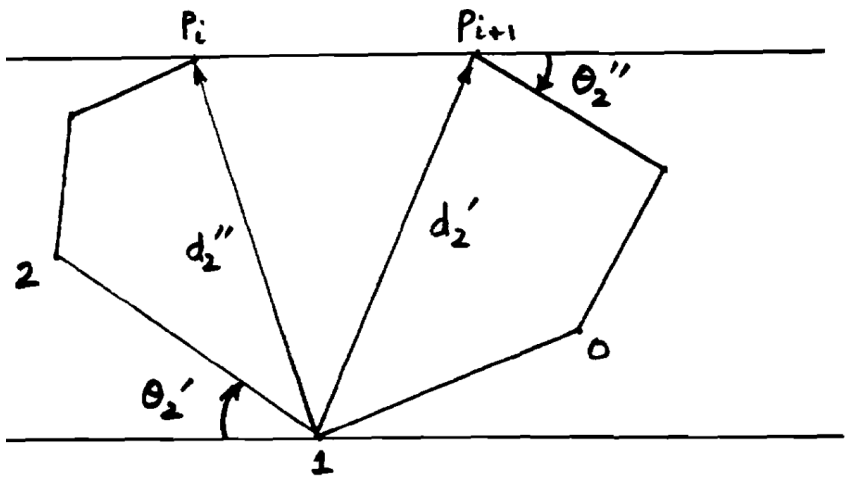
A legtávolabbi pontpár a CH-on lesz

- Az észrevétel indirekt módon bizonyítható
  - Tegyük föl, hogy P_i és P_j pontok közötti távolság maximális, és $P_i \in CH(Q), P_j \notin CH(Q)$
  - Vegyünk egy P_i középpontú $\|\overline{P_iP_j}\|$ sugarú gömböt
    $\Rightarrow$ egyetlen $P_k \in Q$ pont sem eshet a gömbön kívül, máskülönben nem (P_i, P_j) alkotná a legtávolabbi pontpárt
    $\Rightarrow P_j \in CH(Q)$, ami viszont ellentmondás

Legtávolabbi pontpár megtalálása – forgatásos söprés

- Átellenes (párhuzamos egyenesekre illeszkedő) csúcsokat keresünk, és ezeket görgetjük végig: $O(h)$





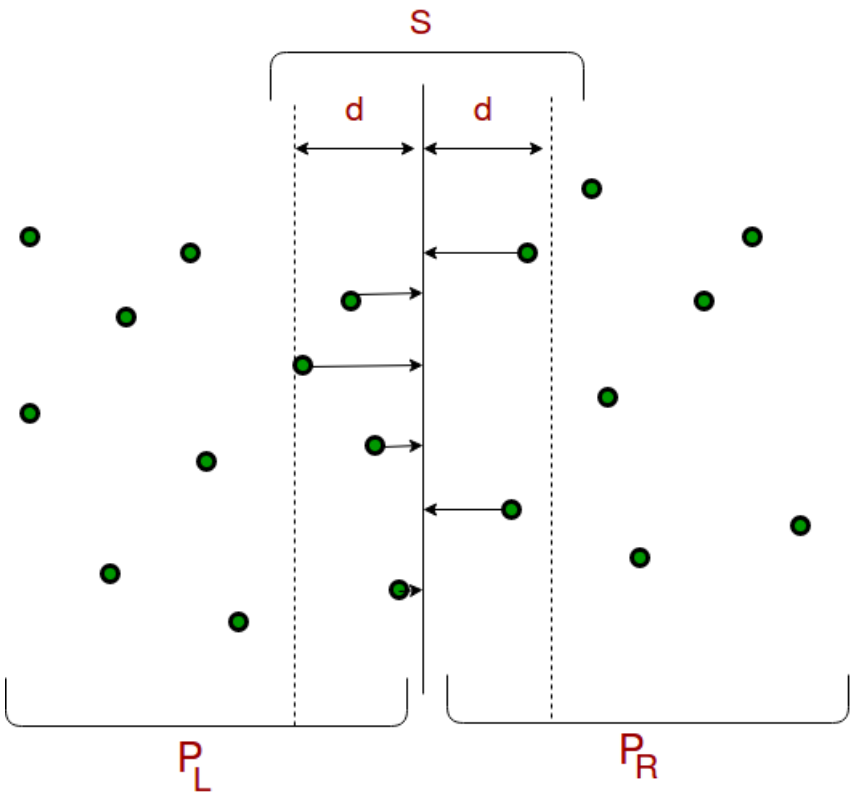
Legközelebbi pontpár megtalálása

- Adott n elemű P ponthalmazra mi az a $(P_i, P_j) \in P \times P$ pontpár, ami a legközelebb helyezkedik el egymáshoz?
- Nyers erővel szintén $\binom{n}{2} = O(n^2)$
- Oszd meg és uralkodj eljárással $O(n \log(n))$ is megoldható

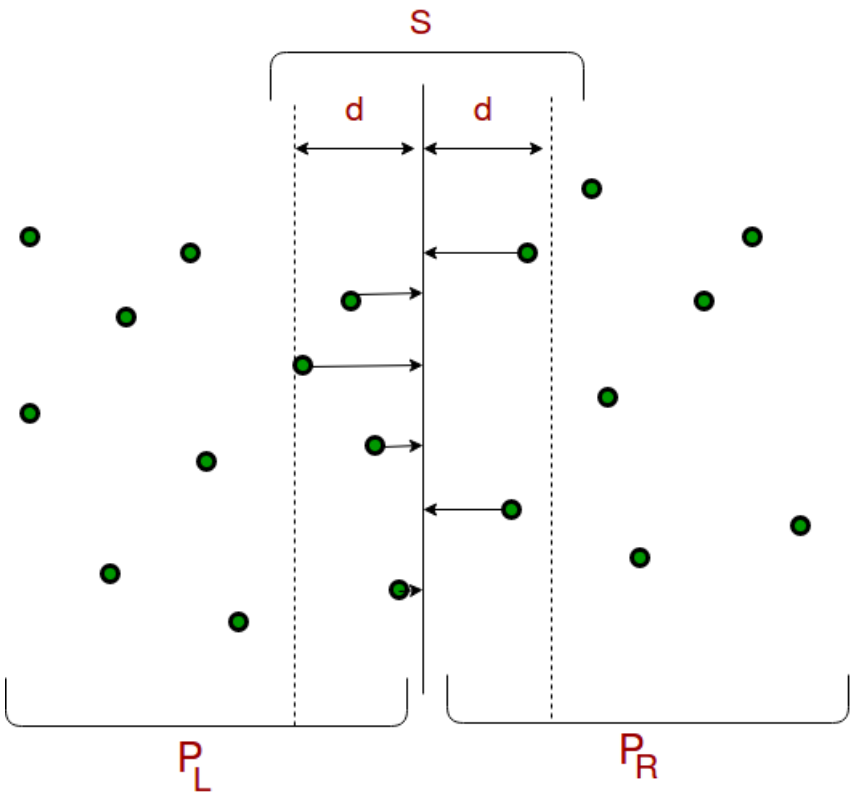
Legközelebbi pontpár megtalálása – oszd meg és uralkodj

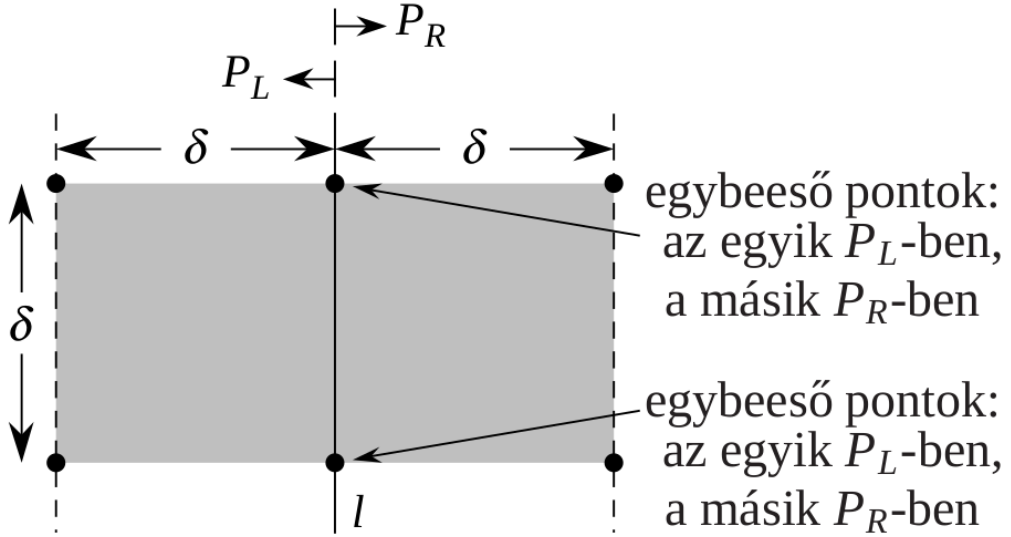
- Ha legfeljebb 3 pont maradt, akkor használjuk a nyers erő módszerét
- Egyébként hajtsuk végre a következőket
  - Vegyük azt az l egyenest, ami két egyenlő részre vágja a pontokat (P_L és P_R)
  - A P_L és P_R-beli pontok közül rekurzívan határozzuk meg a legközelebbi pontpár közötti távolságot $d = \min(d_L, d_R)$
  - Döntsük el, hogy találni-e olyan (P_i, P_j) pontpárt, melyre $P_i \in P_L$ és $P_j \in P_R$, továbbá távolságuk $d' < d$

Legközelebbi pontpár megtalálása – illusztráció



Legközelebbi pontpár megtalálása – illusztráció





Jó hír

Elegendő az y koordináta alapján vett rendezés szerinti 7 rákövetkező ponttal összevetni az S-beli pontokat

Legközelebbi pontpár megtalálásának hatékonysága

- A pontok x és y koordináta szerinti előrendezésével kezdünk $O(n \log n)$
- A rekurzív lépés során $T(n) = 2 * T(\frac{n}{2}) + O(n)$ művelet
  - Előrendezés nélkül a rekurzív lépés $T(n) = 2 * T(\frac{n}{2}) + O(n \log n)$ műveletigényű lenne, a teljes eljárás mester módszerrel kapott műveletigénye pedig $O(n \log^2 n)$-re nőne
- Az eljárás több szempontból is hasonlít az összefésülő rendezés működéséhez

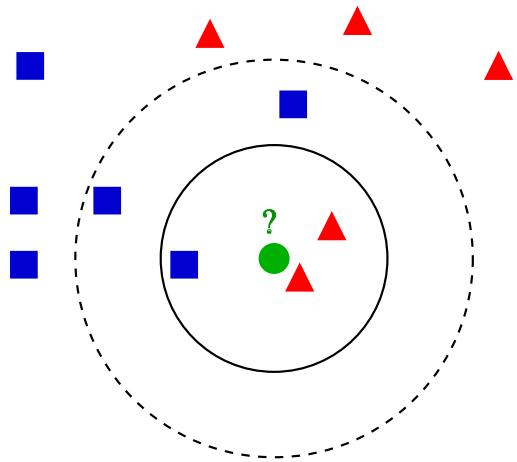
Legközelebbi szomszéd(ok) meghatározása

Probléma

Adott ponthoz találjuk meg a hozzá legközelebb eső ponto(ka)t

Felhasználása

Gépi tanulás: k-legközelebbi osztályozó, klaszterező eljárások



k-d fák hatékonysága

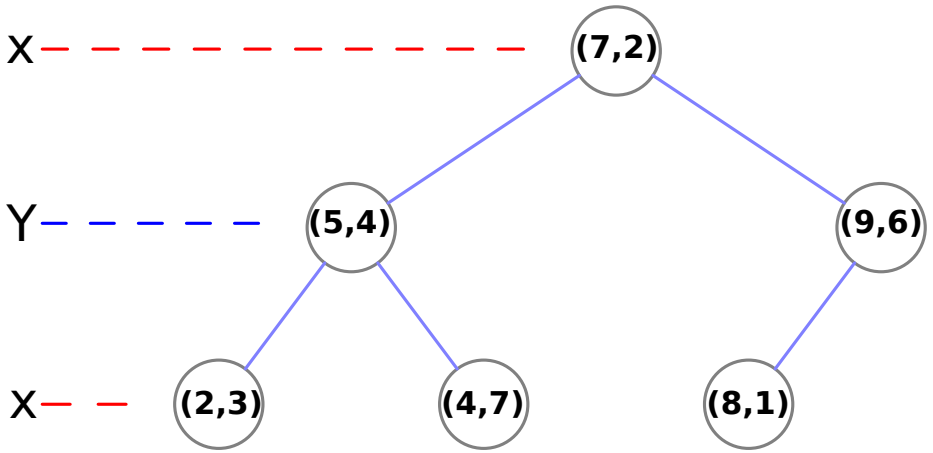
k-d fák

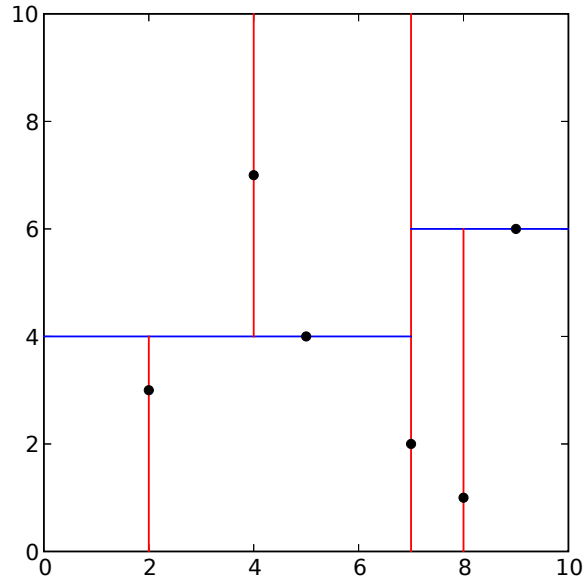
n pont esetén a k-d fák fő műveletei átlagos esetben $O(n \log n)$ műveletigényűek

- Hatékonysága statikus ponthalmaz esetén garantált
- Egy k-d fa módosítása (beszúrás/törlés) a kiegyensúlyozottságának megtartása mellett nem triviális

k-d fák illusztrációja

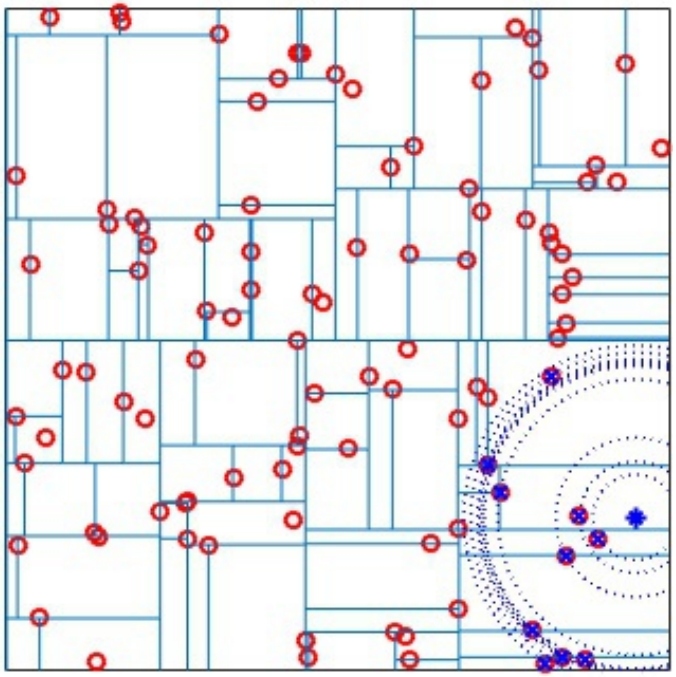
- A fa minden szintje a pontok váltakozó koordináták mentén történő megfelezését szolgálják (egyéb stratégiák is léteznek)
  - A fa egy csúcsa ossza ketté a részfában található pontokat az adott szintre vonatkozó dimenzió mentén
  - A fa kiegyensúlyozott lesz, mivel a részfák olyan féltereket definiálnak, amelyeket a mediánok mentén hozunk létre





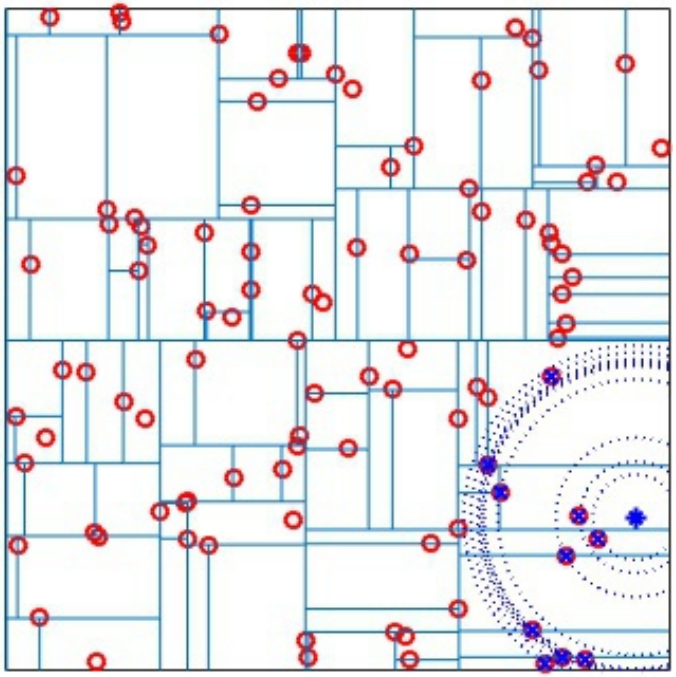
k-d fában való keresés

- Keressük meg azt a régiót, ahova a lekérdezett pont esik
- Nem garantált, hogy a legközelebbi pont ebben a régióban lesz



k-d fában való keresés

- Keressük meg azt a régiót, ahova a lekérdezett pont esik
- Nem garantált, hogy a legközelebbi pont ebben a régióban lesz
  - Viszont az azon belüli legkisebb távolság alapján sok régió esélytelenné válik a legközelebbi pont tartalmazására nézve



Összefoglalás

- A geometriai algoritmusok számos gyakorlati probléma (pl. gépi tanulás) megoldása során felmerülnek
- A numerikus hibák (egy része) kiküszöbölhető ForgásIrány használatával
- Nagy méretű inputok esetén fontos, hogy a négyzetes (vagy annál is rosszabb) futási idejű algoritmusoknál hatékonyabbakat használjunk