

Algoritmusok és adatszerkezetek II.

Bináris keresőfák és műveleteik

Szegedi Tudományegyetem



- 2 db ZH (ápr. 9. és máj. 7.): 40-40 pont (min. 18 pont/ZH)
- Kvízek: 4 darab 5-5 pontos Coospace kvíz (min. 0 pont)
- Pluszpontok (minimumba nem számítanak bele)
- Javítás: a nagy ZH-k bármelyike javítható az utolsó előadáson



- 2 db ZH (ápr. 9. és máj. 7.): 40-40 pont (min. 18 pont/ZH)
- Kvízek: 4 darab 5-5 pontos Coospace kvíz (min. 0 pont)
- Pluszpontok (minimumba nem számítanak bele)
- Javítás: a nagy ZH-k bármelyike javítható az utolsó előadáson

Gyakorlati jegy

[0–51) pont	elégtelen (1)
[51–66) pont	elégséges (2)
[66–76) pont	közepes (3)
[76–86) pont	jó (4)
[86– ∞) pont	jeles (5)



- Coospace-en az előadás színterében lesznek közzétéve (de a gyakorlati teljesítés részét képezik)
- Közzététel: febr. 26., márc. 19, ápr. 16, ápr. 30
- Beadási határidő: ápr. 9, máj. 14 az előadás kezdetéig
- 3 kitöltés/kvíz, amelyek közül a legjobbat vesszük figyelembe



- Coospace-en az előadás színterében lesznek közzétéve (de a gyakorlati teljesítés részét képezik)
- Közzététel: febr. 26., márc. 19, ápr. 16, ápr. 30
- Beadási határidő: ápr. 9, máj. 14 az előadás kezdetéig
- 3 kitöltés/kvíz, amelyek közül a legjobbat vesszük figyelembe
- Tesztenként a 10 leggyorsabb hibátlan kitöltőnek pluszpont jár



- A gyakorlat sikeres teljesítése esetén kollokvium tehető
- 10 db 5 pontos elméleti és gyakorlati kiskérdéssel
- Pluszpontok (minimumba nem számítanak bele)
- Elővizsga az utolsó előadáson (vizsgaalkalomnak számít)



- A gyakorlat sikeres teljesítése esetén kollokvium tehető
- 10 db 5 pontos elméleti és gyakorlati kiskérdéssel
- Pluszpontok (minimumba nem számítanak bele)
- Elővizsga az utolsó előadáson (vizsgaalkalomnak számít)

Kollokviumi jegy

[0–25) pont	elégtelen (1)
[26–32) pont	elégséges (2)
[32–38) pont	közepes (3)
[38–44) pont	jó (4)
[44– ∞) pont	jeles (5)



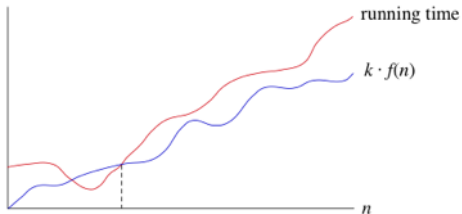
A félév során érintett főbb témakörök

- Kiegyensúlyozott és augmentált keresőfák
- Binomiális és Fibonacci kupacok
- Geometriai algoritmusok
- Számelméleti algoritmusok
- Mintaillesztő algoritmusok



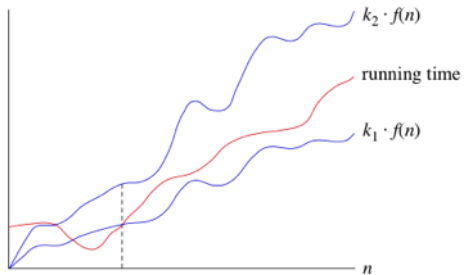
- Ajánlott irodalom
 - Thomas H. Cormen – Charles E. Leiserson – Ronald L. Rivest – Clifford Stein: **Új algoritmusok**. Kiadó: SCOLAR
- [Hackerrank versenyek](#)
- [Algoritmusok vizualizációja](#)



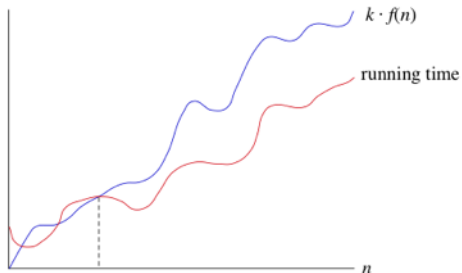


<https://www.desmos.com/calculator/t8paytwq1w>





Ismétlés — Aszimptotikus jelölések: O



Kérdés

Hatékony-e az az algoritmus, amelyik futási ideje n méretű inputra *legalább* $O(n \log n)$?



(beugratós) Kérdés

Hatékony-e az az algoritmus, amelyik futási ideje n méretű inputra *legalább* $O(n \log n)$?

Másképp szólva, mit tudunk arról az algoritmusról, amelynek futási ideje $\Omega(1)$?



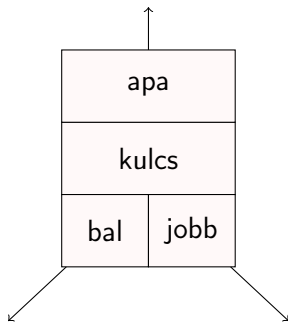
- Egy olyan "megengedő" kétszeresen láncolt lista, ahol az elemek (egy helyett) két elemhez is kapcsolódhatnak

Láncolt lista



Bináris fa implementációja

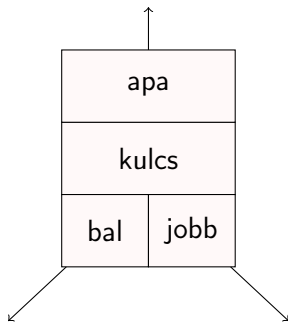
```
class Node {  
    Object kulcs;  
    Node* apa;  
    Node* bal;  
    Node* jobb;  
}
```




```
class Node {  
    Object kulcs;  
    Node* apa;  
    Node* bal;  
    Node* jobb;  
}
```

Megjegyzés

2 mutatóval és egy segédbittel (bal fiú-e az adott csúcs) is megvalósítható lenne



- Inorder/preorder/posztorder bejárások
- Legegyszerűbb megvalósításuk rekurzióval történik
 - Jó azonban tudni, hogy **rekurzió nélkül is megtehető mindez**

```
void inorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    inorder(x.bal)  
    print(x.kulcs)  
    inorder(x.jobb)  
}
```



- Inorder/preorder/posztorder bejárások
- Legegyszerűbb megvalósításuk rekurzióval történik
 - Jó azonban tudni, hogy **rekurzió nélkül is megtehető mindez**

```
void inorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    inorder(x.bal)  
    print(x.kulcs)  
    inorder(x.jobb)  
}
```

```
void preorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    print(x.kulcs)  
    preorder(x.bal)  
    preorder(x.jobb)  
}
```



- Inorder/preorder/posztorder bejárások
- Legegyszerűbb megvalósításuk rekurzióval történik
 - Jó azonban tudni, hogy **rekurzió nélkül is megtehető mindez**

```
void inorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    inorder(x.bal)  
    print(x.kulcs)  
    inorder(x.jobb)  
}
```

```
void preorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    print(x.kulcs)  
    preorder(x.bal)  
    preorder(x.jobb)  
}
```

```
void postorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    postorder(x.bal)  
    postorder(x.jobb)  
    print(x.kulcs)  
}
```



- Olyan bináris fa, amelynek minden belső csúcsának 2 fia van

Fában lévő kulcsok száma

A fa i -edik szintjén 2^i csúcs található



- Olyan bináris fa, amelynek minden belső csúcsának 2 fia van

Fában lévő kulcsok száma

A fa i -edik szintjén 2^i csúcs található

\Rightarrow a fában $n = \sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$ csúcsot találhatók^a

Állítás: h magas fában $O(2^h)$ csúcs található



- Olyan bináris fa, amelynek minden belső csúcsának 2 fia van

Fában lévő kulcsok száma

A fa i -edik szintjén 2^i csúcs található

\Rightarrow a fában $n = \sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1}$ csúcsot találhatók^a

Állítás: h magas fában $O(2^h)$ csúcs található

Megfordítva: n csúcsból álló fa magassága $\Omega(\log n)$

^abizonyítás teljes indukcióval



Keresőfa tulajdonság

A fa minden x csúcsára teljesül, hogy

- $x.bal.kulcs < x.kulcs$ (amennyiben $x.bal! = nil$)
- $x.kulcs < x.jobb.kulcs$ (amennyiben $x.jobb! = nil$)

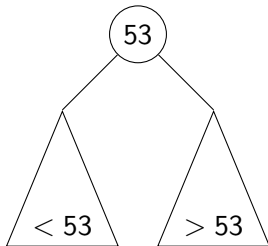


Keresőfa tulajdonság

A fa minden x csúcsára teljesül, hogy

- $x.bal.kulcs < x.kulcs$ (amennyiben $x.bal! = nil$)
- $x.kulcs < x.jobb.kulcs$ (amennyiben $x.jobb! = nil$)

< rendezés tranzitivitásából adódóan



```
FÁBANKERES(x, k) {  
    if x == nil or k == x.kulcs  
        return x  
  
    if k < x.kulcs  
        FÁBANKERES(x.bal, k)  
    else  
        FÁBANKERES(x.jobb, k)  
}
```



```
FÁBANKERES(x, k) {  
    if x == nil or k == x.kulcs  
        return x  
  
    if k < x.kulcs  
        FÁBANKERES(x.bal, k)  
    else  
        FÁBANKERES(x.jobb, k)  
}
```

h magas fa esetén $O(h)$



Elem beszúrása bináris keresőfába

- Keresőfa tulajdonság fenntartása mellett **levélként** szúrunk be
- h magas fa esetén $O(h)$ idejű

Példa

Beszúr(7)



Elem törlése bináris keresőfából



- 3 esetet különböztetünk meg x csúcs törlése kapcsán
 - ① x -nek nincs gyereke
 - x apjának az x -re vonatkozó mutatóját *nil*-re állítjuk
 - ② x -nek pontosan egy gyereke van
 - x apját "átkötjük" x egyedüli fiához
 - ③ x -nek 2 gyereke van
 - x -et megelőzőjével (bal oldali részfájának maximális elemével) helyettesítjük
- h magas fa esetén $O(h)$ idejű

