

Algoritmusok és adatszerkezetek II.

Augmentált keresőfák

Szegedi Tudományegyetem



Bináris keresőfák műveletei

- h magas és n csúcsból álló bináris keresőfa esetén a Keres, Beszúr, Töröl műveletek $O(h)$ időben végrehajthatók
- x csúcs rangja: a fában tárolt kulcsok között x hanyadik helyen áll $<$ szerint
- Hogy keresnénk meg egy bináris keresőfa r rangú elemét?
- Hogyan határoznánk meg egy bináris keresőfa x csúcsának rangját?



Bináris keresőfák műveletei

- h magas és n csúcsból álló bináris keresőfa esetén a Keres, Beszúr, Töröl műveletek $O(h)$ időben végrehajthatók
- x csúcs rangja: a fában tárolt kulcsok között x hanyadik helyen áll $<$ szerint
- Hogy keresnénk meg egy bináris keresőfa r rangú elemét?
- Hogyan határoznánk meg egy bináris keresőfa x csúcsának rangját?

Általános ötlet

A fapontokban tárolt extra adattagok hozzásegíthetnek minket új műveletek hatékony ($O(h)$ idejű) végrehajtásához



Új műveletek – adott rangú kulcs meghatározása

- Cél: $r \leq n$ ranggal rendelkező elem megtalálása a fában
- Naiv (de működő) elgondolás: elkezdem bejárni a fát $<$ szerinti sorrendben, és megállok az r -ediknek érintett csúcsnál



Új műveletek – adott rangú kulcs meghatározása

- Cél: $r \leq n$ ranggal rendelkező elem megtalálása a fában
- Naiv (de működő) elgondolás: elkezdem bejárni a fát $<$ szerinti sorrendben, és megállok az r -ediknek érintett csúcsnál
- $O(h)$ helyett $\Theta(r)$ idejű algoritmus
 - Kiegyensúlyozott fa és kellően nagy r estében pedig $r \gg h$



Új műveletek – adott kulcs rangjának meghatározása

- Naiv elgondolás: elkezdem bejárni a fát $<$ szerinti sorrendben, és megállok, ha x kulcsot érintem
- A válasz az x megtalálásáig érintett kulcsok száma
- $O(h)$ helyett $O(n)$ idejű algoritmus



Új műveletek – adott kulcs rangjának meghatározása

- Naiv elgondolás: elkezdem bejárni a fát $<$ szerinti sorrendben, és megállok, ha x kulcsot érintem
- A válasz az x megtalálásáig érintett kulcsok száma
- $O(h)$ helyett $O(n)$ idejű algoritmus

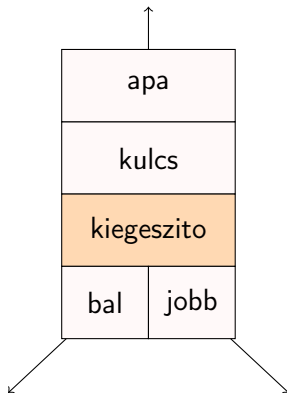
A megoldás

Minden csúcs tároljon el kiegészítő információt magáról!



Rendezett-minta fa implementációja

```
class Node {  
    Object kulcs;  
    int kiegészito;  
    Node* apa;  
    Node* bal;  
    Node* jobb;  
}
```

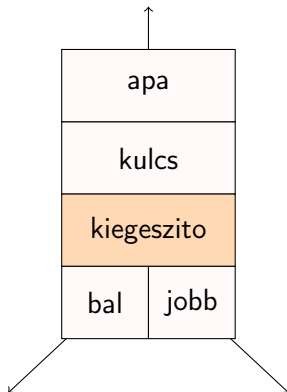


Rendezett-minta fa implementációja

```
class Node {  
    Object kulcs;  
    int kiegészito;  
    Node* apa;  
    Node* bal;  
    Node* jobb;  
}
```

Megjegyzés

A kiegészítő információ legyen az adott gyökerű részfa mérete (benne található kulcsok száma). Üres fa kiegészítő információja 0.



Adott rangú kulcs keresése

```
RANGKERES(x, i) {  
    r = x.bal.kiegeszito + 1  
  
    if (i < r) {  
        RANGKERES(x.bal, i)  
    } elseif (i > r) {  
        RANGKERES(x.jobb, i - r)  
    } else {  
        return x  
    }  
}
```

h magas fa esetén $O(h)$



Adott kulcs rangjának meghatározása

```
RANGMEGHATÁROZ(x) {  
    r = 0  
    y = x  
    while (y != nil) {  
        if (x.kulcs >= y.kulcs) {  
            r = r + y.bal.kiegeszito + 1  
        }  
        y = y.apa  
    }  
    return r  
}
```

Szövegesen

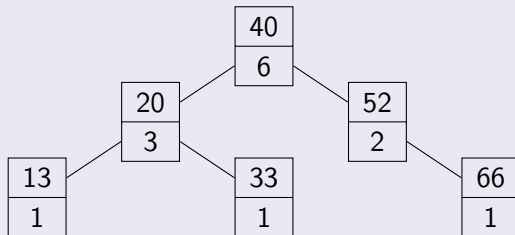
x -től a gyökérig lépkedve azon y gyökerű részfák gyökérelemeinek rangjait összegezzük, melyekre $x.kulcs \geq y.kulcs$



A kiegészítő információk fenntartása

- A csúcsokban tárolt kiegészítő információknak mindig naprakészeknek kell legyenek

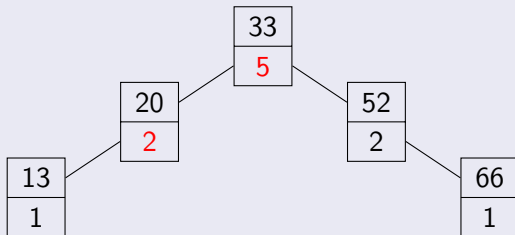
Példa: Töröl(40)



A kiegészítő információk fenntartása

- A csúcsokban tárolt kiegészítő információknak mindig naprakészeknek kell legyenek

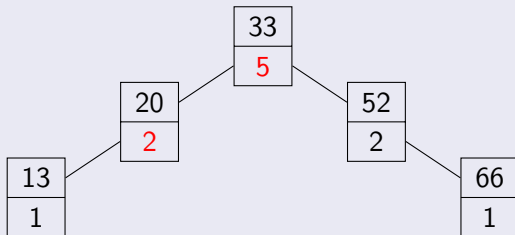
Példa: Töröl(40)



A kiegészítő információk fenntartása

- A csúcsokban tárolt kiegészítő információknak mindig naprakészeknek kell legyenek

Példa: Töröl(40)



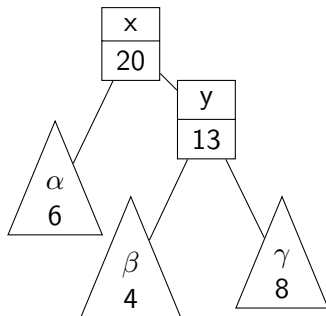
Észrevétel

Épp ezért nem a csúcsok rangjára tekintünk közvetlenül kiegészítő információként (hiszen azt költséges lehet aktualizálni)



Új művelet – Forgatás

- A keresőfákat forgatásokkal fogjuk tudni kiegyensúlyozni

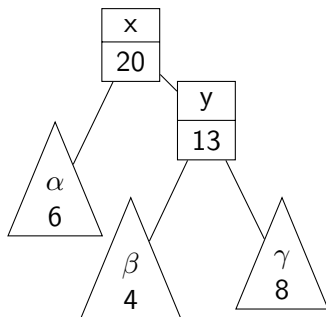
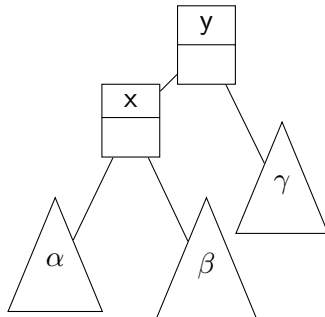


(a) x körüli balra forgatás előtt



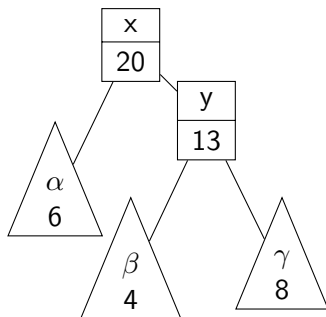
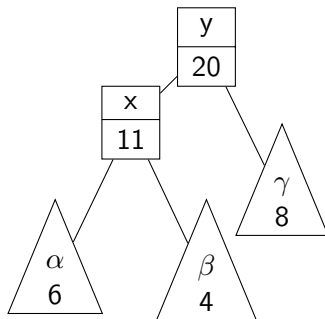
Új művelet – Forgatás

- A keresőfákat forgatásokkal fogjuk tudni kiegyensúlyozni

(a) x körüli balra forgatás előtt(b) x körüli balra forgatás után

Új művelet – Forgatás

- A keresőfákat forgatásokkal fogjuk tudni kiegyensúlyozni

(a) x körüli balra forgatás előtt(b) x körüli balra forgatás után

A kiegészítő információ fenntartása

- Beszúrás esetén: a beszúrás helyétől a gyökéig menően a kiegészítő információk inkrementálása ($O(h)$)
- Törlés esetén: a kieső csúcstól a gyökéig menően a kiegészítő információk dekrementálása ($O(h)$)
- x körüli forgatás esetén ($O(1)$)
 - $y.kiegeszito = x.kiegeszito$
 - $x.kiegeszito = x.bal.kiegeszito + y.bal.kiegeszito + 1$, azaz α -beli és β -beli csúcsok száma $+1$



Intervallumfák

Az intervallumfa sajátosságai

- A csúcsok $[a; f]$ intervallumokat tárolnak
 - a és f az intervallum alsó,-és felső végpontjait jelöli
 - $a \leq f$ feltehető
- $<$ rendezést az intervallumok kezdőpontja szerint értelmezzük
 - $[1; 4] < [5; 6]$
 - $[1; 4] < [3; 5]$
 - $[1; 4] < [2; 3]$



Intervallumfák

Az intervallumfa sajátosságai

- A csúcsok $[a; f]$ intervallumokat tárolnak
 - a és f az intervallum alsó,-és felső végpontjait jelöli
 - $a \leq f$ feltehető
- $<$ rendezést az intervallumok kezdőpontja szerint értelmezzük
 - $[1; 4] < [5; 6]$
 - $[1; 4] < [3; 5]$
 - $[1; 4] < [2; 3]$

Speciális művelet: átfedő intervallum keresése

El akarjuk tudni dönteni, hogy a fa tartalmaz-e valamely $I = [i_a; i_f]$ intervallummal átfedő intervallumot.

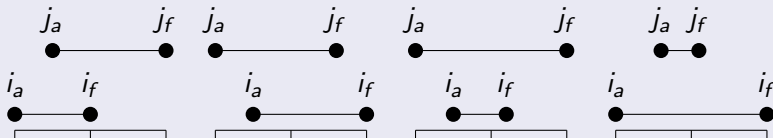
I és J intervallumok átfednek $\Leftrightarrow i_a \leq j_f$ és $i_f \geq j_a$



Intervallum trichotómia

- Az alábbi állítások közül pontosan egy teljesül bármely (I, J) intervallumpárra
 - a $I \cap J \neq \emptyset$, azaz I és J intervallumok átfedik egymást
 - b $i_a > j_f$
 - c $i_f < j_a$

Illusztráció – 1. eset



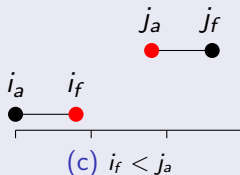
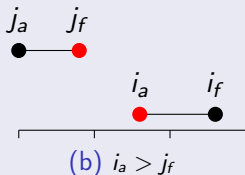
(a) Átfedő I és J



Intervallum trichotómia

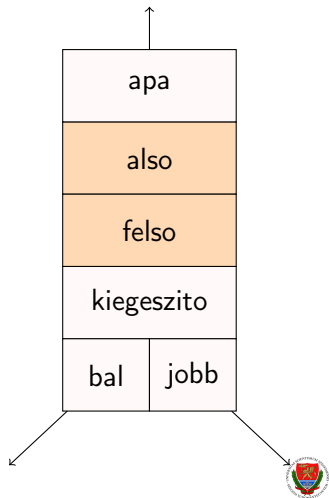
- Az alábbi állítások közül pontosan egy teljesül bármely (I, J) intervallumpárra
 - a $I \cap J \neq \emptyset$, azaz I és J intervallumok átfedik egymást
 - b $i_a > j_f$
 - c $i_f < j_a$

Illusztráció – 2. és 3. eset



Intervallumfa implementációja

```
class Node {  
    int also;  
    int felso;  
    int kiegészito;  
    Node* apa;  
    Node* bal;  
    Node* jobb;  
}
```

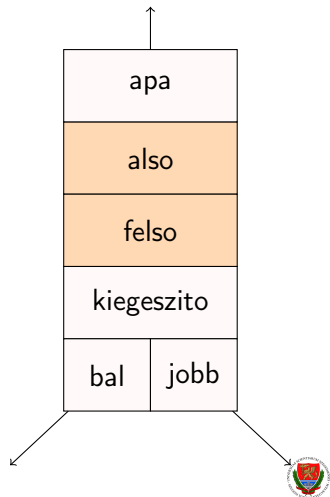


Intervallumfa implementációja

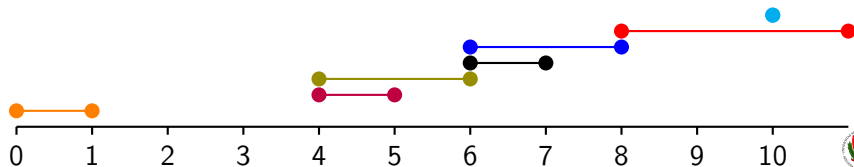
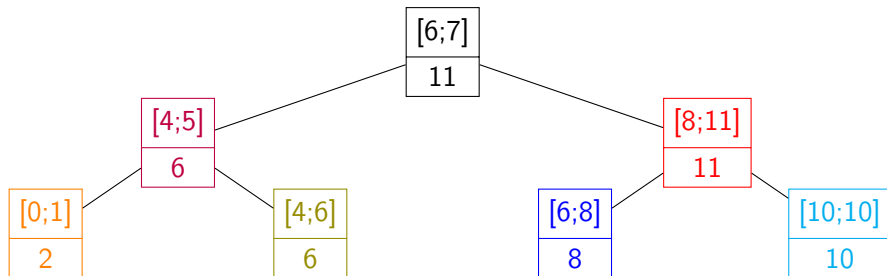
```
class Node {  
    int also;  
    int felso;  
    int kiegészito;  
    Node* apa;  
    Node* bal;  
    Node* jobb;  
}
```

Ötlet

A kiegészítő információ legyen az adott gyökerű részfában található maximális felső végpont



Intervallumfa – példa



Átfedő intervallum keresése x gyökerű részében

```
ÁTFEDŐKERES(x, i) {  
    while (x != nil) {  
        if (i.also <= x.felso és i.felso >= x.also) {  
            return x    // átfedést találtunk  
        }  
        if (x.bal != nil és x.bal.kiegeszito >= i.also) {  
            x = x.bal    // folytassuk balra a keresést  
        } else {  
            x = x.jobb    // folytassuk jobbra a keresést  
        }  
    }  
    return nil    // nem találtunk átfedő intervallumot  
}
```



Átfedő intervallum keresésének helyessége

Tétel

Az ÁtfedőKeres(x, i) minden végrehajtása csak abban az esetben tér vissza nil -l-lel, ha az x gyökerű intervallumfában nem található i -vel átfedő intervallum.



Átfedő intervallum keresésének helyessége – jobbra lépés

- Akkor lépünk jobbra, ha
 - Nincs bal részfa, vagy
 - Van bal részfa, de még a legnagyobb felső végpont is elmarad i intervallum alsó végpontjától (trichotómia b) esete)



Átfedő intervallum keresésének helyessége – jobbra lépés

- Akkor lépünk jobbra, ha
 - Nincs bal részfa, vagy
 - Van bal részfa, de még a legnagyobb felső végpont is elmarad i intervallum alsó végpontjától (trichotómia b) esete)
- ⇒ jobbra lépéskor a bal részfában biztosan nincs átfedés



Átfedő intervallum keresésének helyessége – jobbra lépés

- Akkor lépünk jobbra, ha
 - Nincs bal részfa, vagy
 - Van bal részfa, de még a legnagyobb felső végpont is elmarad i intervallum alsó végpontjától (trichotómia b) esete)
- ⇒ jobbra lépéskor a bal részében biztosan nincs átfedés

Összegezve

Vagy fogunk jobbra lépve átfedő intervallumot találni, vagy balra lépve se találtunk volna



Átfedő intervallum keresésének helyessége – balra lépés

- Előfordulhat-e, hogy x -nél balra menve nem találunk i -vel átfedő intervallumot, jobbra menve azonban találhatnánk?

¹ $x.bal$ az x csúcs bal fiát a gyökeréül tudó részfát jelöli



Átfedő intervallum keresésének helyessége – balra lépés

- Előfordulhat-e, hogy x -nél balra menve nem találunk i -vel átfedő intervallumot, jobbra menve azonban találhatnánk?
 - Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy előfordulhat ilyen
 - Balra mentünk, tehát $\exists y \in x.bal^1$, melyre $y.felso > i.also$

¹ $x.bal$ az x csúcs bal fiát a gyökeréül tudó részfát jelöli



Átfedő intervallum keresésének helyessége – balra lépés

- Előfordulhat-e, hogy x -nél balra menve nem találunk i -vel átfedő intervallumot, jobbra menve azonban találhatnánk?
 - Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy előfordulhat ilyen
 - Balra mentünk, tehát $\exists y \in x.bal^1$, melyre $y.felso > i.also$
 - Feltetésünk szerint $x.bal$ -ban nincs i -vel átfedő intervallum \rightarrow trichotómia c) esete

¹ $x.bal$ az x csúcs bal fiát a gyökeréül tudó részfat jelöli



Átfedő intervallum keresésének helyessége – balra lépés

- Előfordulhat-e, hogy x -nél balra menve nem találunk i -vel átfedő intervallumot, jobbra menve azonban találhatnánk?
 - Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy előfordulhat ilyen
 - Balra mentünk, tehát $\exists y \in x.bal^1$, melyre $y.felso > i.also$
 - Feltevésünk szerint $x.bal$ -ban nincs i -vel átfedő intervallum \rightarrow trichotómia c) esete $\rightarrow y.also > i.felso$
 - A keresőfa-tulajdonságból adódóan pedig $\forall y' \in x.jobb$ esetében $y'.also > y.also$ teljesül

¹ $x.bal$ az x csúcs bal fiát a gyökeréül tudó részfat jelöli



Átfedő intervallum keresésének helyessége – balra lépés

- Előfordulhat-e, hogy x -nél balra menve nem találunk i -vel átfedő intervallumot, jobbra menve azonban találhatnánk?
 - Indirekt bizonyítás: tegyük fel, hogy előfordulhat ilyen
 - Balra mentünk, tehát $\exists y \in x.bal^1$, melyre $y.felso > i.also$
 - Feltevésünk szerint $x.bal$ -ban nincs i -vel átfedő intervallum \rightarrow trichotómia c) esete $\rightarrow y.also > i.felso$
 - A keresőfa-tulajdonságból adódóan pedig $\forall y' \in x.jobb$ esetében $y'.also > y.also$ teljesül
 - Tehát $\forall y' \in x.jobb$ az i intervallumra nézve c)-típusú (vele át nem fedő) lehet csupán

Összegezve

Ha balra lépve nem sikerül átfedő intervallumot találjunk, akkor jobbra lépve se találhattunk volna

¹ $x.bal$ az x csúcs bal fiát a gyökeréül tudó részfat jelöli



Összegzés

- Adicionális adattagok bevezetésével újfajta kérdések hatékony megválaszolása válhat lehetővé
- Adatszerkezetek kibővítésének fő lépései
 - 1 Alap-adatszerkezet megválasztása (nem csak bináris keresőfa)
 - 2 Alap-adatszerkezet kiegészítő információjának kijelölése
 - 3 Kiegészítő információjának **hatékony** fenntarthatóságának igazolása
 - 4 Új hatékony műveletek kifejlesztése

