Algoritmusok és adatszerkezetek II.

Kupacok

Szegedi Tudományegyetem

Fapacok (Treaps)

Emlékeztető

n kulcsból álló **véletlen** építésű bináris keresőfa h magasságának **várható értéke** $\log n$

- Adverzaliális műveleti sorrend mellett azonban n magas is lehet

Ötlet

A keresőfa,-és kupactulajdonságot egyidejűleg követeljük meg

1. Keresőfa tulajdonság biztosítja a kulcsok $O(h)$ kereshetőségét
2. Kupactulajdonság miatt h **várható értékben** $\log n$

Fapacok (Treaps)

Emlékeztető

n kulcsból álló **véletlen** építésű bináris keresőfa h magasságának **várható értéke** $\log n$

- Adverzaliális műveleti sorrend mellett azonban n magas is lehet

Ötlet

A keresőfa,-és kupactulajdonságot egyidejűleg követeljük meg

1. Keresőfa tulajdonság biztosítja a kulcsok $O(h)$ kereshetőségét
2. Kupactulajdonság miatt h **várható értékben** $\log n$
   - A kupactulajdonság ne az eltárolt kulcsokra, hanem egy **véletlenszerűen** generált kiegészítőinformációra teljesüljön!

Kupacok

Felhasználásuk

1. Prioritási sor megvalósításánál fontos, hogy a minimális/maximális kulcsot hatékonyan tudjuk visszaadni
2. Szintén fontos művelet egy adott kulcs értékének módosítása

Kupacok

Felhasználásuk

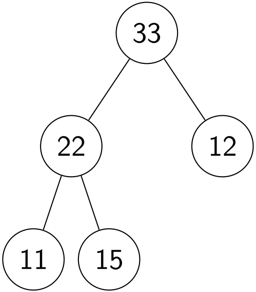
1. Prioritási sor megvalósításánál fontos, hogy a minimális/maximális kulcsot hatékonyan tudjuk visszaadni
2. Szintén fontos művelet egy adott kulcs értékének módosítása

Kupactulajdonság

Azt mondjuk, hogy egy fa rendelkezik a minimum (maximum) kupactulajdonsággal, ha minden p csúcsának minden q fiára

- $q = Nil$ vagy
- $p.kulcs < q.kulcs$ ($p.kulcs > q.kulcs$)

Példa maximum bináris kupacra



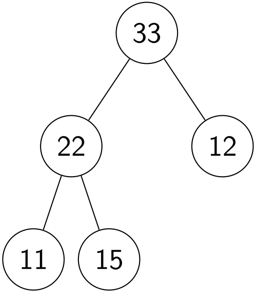
Beszúr(40)

0	1	2	3	4	5
–	33	22	12	11	15

Bináris kupac

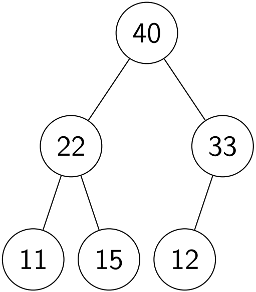
Teljes bináris fa, melyre teljesül a kupactulajdonság.
$\Rightarrow$ mivel legfeljebb egy belső pontnak lehet 2-nél kevesebb fia, így egyszerűen egy tömbbel implementálhatjuk

Példa maximum bináris kupacra



0	1	2	3	4	5
–	33	22	12	11	15

Beszúr(40)

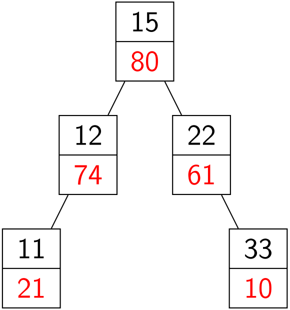


0	1	2	3	4	5	6
–	40	22	33	11	15	12

Bináris kupac

Teljes bináris fa, melyre teljesül a kupactulajdonság.
$\Rightarrow$ mivel legfeljebb egy belső pontnak lehet 2-nél kevesebb fia, így egyszerűen egy tömbbel implementálhatjuk

Fapac példa



- A kulcsok keresőfa tulajdonság szerint helyezkednek el
- A véletlen felépítést az extra adattag eredményezi
- A kiegyensúlyozott fáknál megszokott módon állítjuk helyre a megkövetelt tulajdonságokat (pl. (Beszúr(27, 100)))

Vissza a kupacokhoz

n elemű kupacban hogy keresnénk meg a maximális elemet?
És egy adott kulcs rákövetkezőjét?
Hogy egyesítenénk egy n_1 és egy n_2 kulcsból álló kupacot?

Vissza a kupacokhoz

n elemű kupacban hogy keresnénk meg a maximális elemet? $O(1)$
És egy adott kulcs rákövetkezőjét? $O(n)$
Hogy egyesítenénk egy n_1 és egy n_2 kulcsból álló kupacot? $O(n_1 + n_2)$

Kérdés

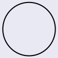
Lehetne hatékonyabban is?

Binomiális fa

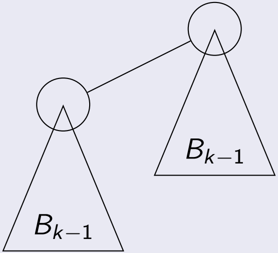
Definíció

B_k binomiális fa egy rekurzív rendezett fa, amely két összekapcsolt B_{k-1} binomiális fából áll; az egyik fa gyökércsúcsa a másik fa gyökércsúcsának legbaloldalibb gyereke

B_0



$B_k (k \geq 1)$



Binomiális fákkal kapcsolatos állítások

Lemma

Ha B_k binomiális fa, akkor az alábbi állítások teljesülnek:

1. 2^k *csúcsa van*
2. i*-edik mélységében pontosan* $\binom{k}{i}$ *csúcs van* $(i = 0, 1, \ldots, k)$
3. *a gyökércsúcs fokszáma* k*, melynek gyerekeit balról jobbra megszámozva* $k-1, k-2, \ldots, 0$*-al,* i*-dik gyereke egy* B_i *részfa gyökércsúcsa.*

Binomiális fákkal kapcsolatos állítások

Lemma

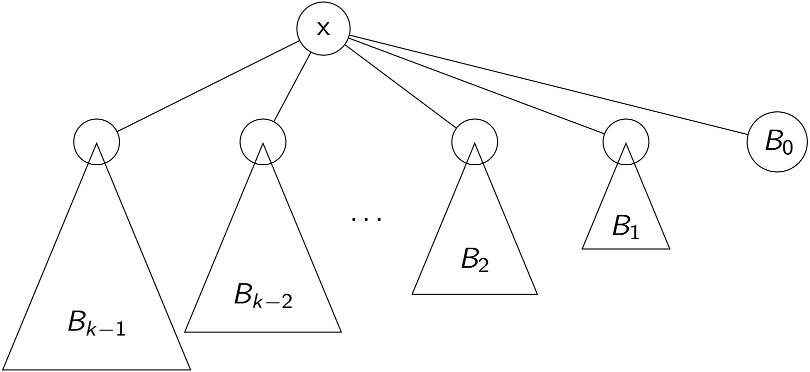
Ha B_k binomiális fa, akkor az alábbi állítások teljesülnek:

1. 2^k *csúcsa van*
2. *i-edik mélységében pontosan $\binom{k}{i}$ csúcs van ($i = 0, 1, \ldots, k$)*
3. *a gyökércsúcs fokszáma k, melynek gyerekeit balról jobbra megszámozva $k-1, k-2, \ldots, 0$-al, i-dik gyereke egy B_i részfa gyökércsúcsa.*

Következmény

n csúcsú binomiális fa minden csúcsának fokszáma legfeljebb $\log n$

Binomiális fák struktúrája



Binomiális kupac

Definíció

Egy H binomiális kupac binomiális fák olyan halmaza, amely

1. H minden binomiális fájára rendelkezik a minimumkupac (vagy maximumkupac) tulajdonsággal
2. H-ban nincsenek azonos fokszámmal rendelkező binomiális fák.

Binomiális kupac

Definíció

Egy H binomiális kupac binomiális fák olyan halmaza, amely

1. H minden binomiális fájára rendelkezik a minimumkupac (vagy maximumkupac) tulajdonsággal
2. H-ban nincsenek azonos fokszámmal rendelkező binomiális fák.

Következmény (előző lemma+2. tulajdonság)

n csúcsú binomiális kupac legfeljebb $\lfloor \log n \rfloor + 1$ binomiális fából áll

Binomiális kupac

Definíció

Egy H binomiális kupac binomiális fák olyan halmaza, amely

1. H minden binomiális fájára rendelkezik a minimumkupac (vagy maximumkupac) tulajdonsággal
2. H-ban nincsenek azonos fokszámmal rendelkező binomiális fák.

Következmény (előző lemma+2. tulajdonság)

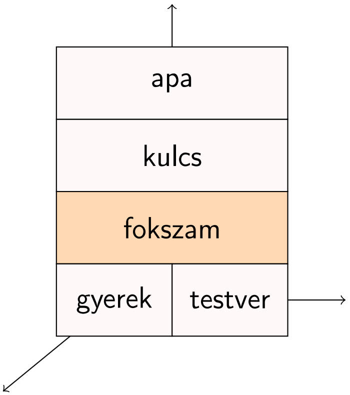
n csúcsú binomiális kupac legfeljebb $\lfloor \log n \rfloor + 1$ binomiális fából áll

Az előző következmény másképp

A gyökércsúcsok fokszámainak halmaza a $\subseteq \{0, 1, \ldots, \lfloor \log n \rfloor\}$

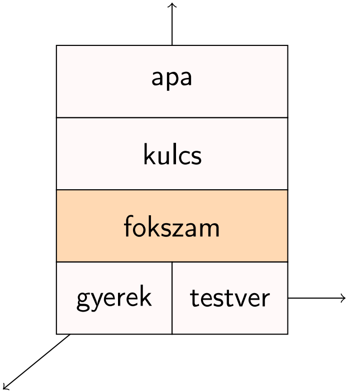
Binomiális kupacok implementációja

```
class Node {
    Object kulcs;
    Node *apa;
    int fokszam;
    Node *gyerek;
    Node *testver;
}
```



Binomiális kupacok implementációja

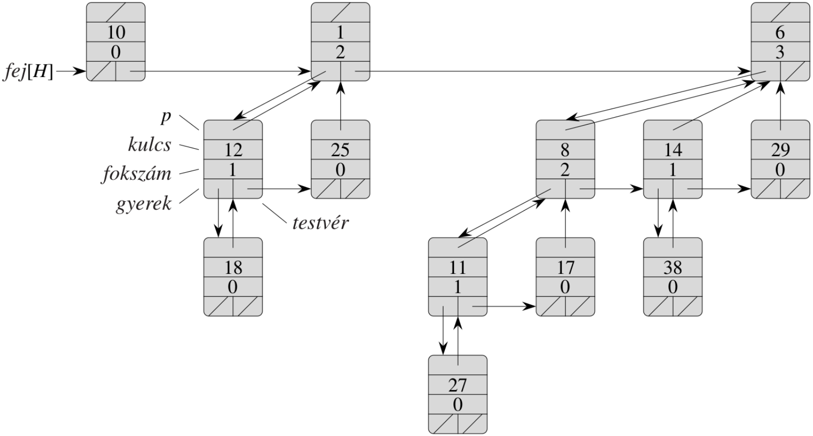
```
class Node {
    Object kulcs;
    Node *apa;
    int fokszam;
    Node *gyerek;
    Node *testver;
}
```



Megjegyzés

Balgyerek, jobbtestvér ábrázolást használunk

Binomiális kupacok szerveződése



Forrás: CLRS: Új algoritmusok 19.3 ábrája

Minimális kulcs keresése

```
BinomiálisKupacbanMin(H) {
  y = Nil
  x = H.fej //gyökérlista kezdőeleme
  min = Inf

  while (x != Nil) {
     if (x.kulcs < min) {
        min = x.kulcs
        y = x
     }
     x = x.testver
  }
  return y
}
```

Minimális kulcs keresése

```
BinomiálisKupacbanMin(H) {
  y = Nil
  x = H.fej //gyökérlista kezdőeleme
  min = Inf

  while (x != Nil) {
     if (x.kulcs < min) {
        min = x.kulcs
        y = x
     }
     x = x.testver
  }
  return y
}
```

n kulcs esetén $O(\log n)$

Kupacok egyesítése

- H_1, H_2 bináris kupacok nem egyesíthetők hatékonyan, binomiális kupacra azonban $O(\log n)$ algoritmus adható
- Alapötlet
  - Fokszám szerint nemcsökkenő sorrendben fűzzük össze a H_1-ben és H_2-ben található binomiális fákat
    - Legfeljebb $\log n_1 + 1 + \log n_2 + 1 \leq 2 \log n + 1 = O(\log n)$ hosszú listát kapunk
  - 2 darab f fokszámú binomiális fából egy darab $f + 1$ fokszámú binomiális fa hozható létre (ennek ideje $O(1)$)
  - Számoljuk föl az összefűzött gyökérlistában a megegyező fokszámú binomiális fákat

Kupacba történő beszúrás

Észrevétel

A beszúrás két binomiális kupac egyesítéseként fogható föl, ahol az egyik binomiális kupacot alkotó egyedüli binomiális fa B_0.

Kupacba történő beszúrás

Észrevétel

A beszúrás két binomiális kupac egyesítéseként fogható föl, ahol az egyik binomiális kupacot alkotó egyedüli binomiális fa B_0.

Példa

$B_0 - B_2 - B_3 + B_0 - B_1 \Rightarrow$
$B_0 - B_0 - B_1 - B_2 - B_3 \Rightarrow$
$B_1 - B_1 - B_2 - B_3 \Rightarrow$
$B_2 - B_2 - B_3 \Rightarrow$
B_4

Minimális kulcsú csúcs kivágása

Észrevételek

- A minimális kulcsnak a gyökérlistában kell lennie $\Rightarrow O(\log n)$
- B_k gyökérelemének eltávolítása után k darab szigorúan monoton csökkenő fokszámú binomiális fára „hullik szét''

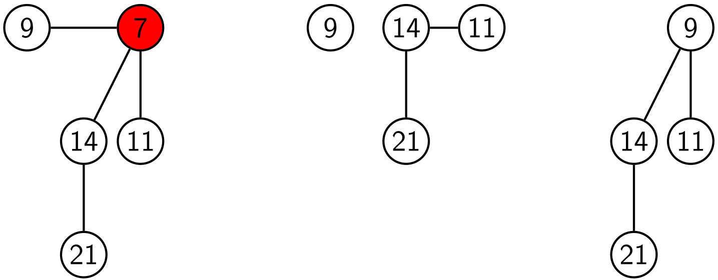
Ötlet

- A minimális kulcs eltávolítása után kapott k binomiális fát „fűzzük össze'' egy binomiális kupaccá, és azt egyesítsük az eredeti kupaccal

Minimális kulcsú csúcs kivágása – példa

Észrevételek

- A minimális kulcsnak a gyökérlistában kell lennie $\Rightarrow O(\log n)$
- B_k gyökérelemének eltávolítása után k darab szigorúan monoton csökkenő fokszámú binomiális fára „hullik szét”



Csúcsban kulcsának csökkentése/csúcs törlése

Kulcs csökkentése

- Az adott csúcsban tárolt kulcsot csökkentsük a kívánt értékre

Csúcsban kulcsának csökkentése/csúcs törlése

Kulcs csökkentése

- Az adott csúcsban tárolt kulcsot csökkentsük a kívánt értékre $\rightarrow$ bináris kupacoknál megszokott módon javítsunk

Kulcs törlése

- A törölni kívánt csúcsot kulcsát alkalmasan kicsire választjuk

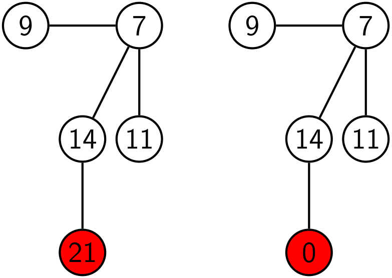
Csúcsban kulcsának csökkentése/csúcs törlése

Kulcs csökkentése

- Az adott csúcsban tárolt kulcsot csökkentsük a kívánt értékre $\rightarrow$ bináris kupacoknál megszokott módon javítsunk

Kulcs törlése

- A törölni kívánt csúcsot kulcsát alkalmasan kicsire választjuk $\rightarrow$ vágjuk ki a minimális kulcsot



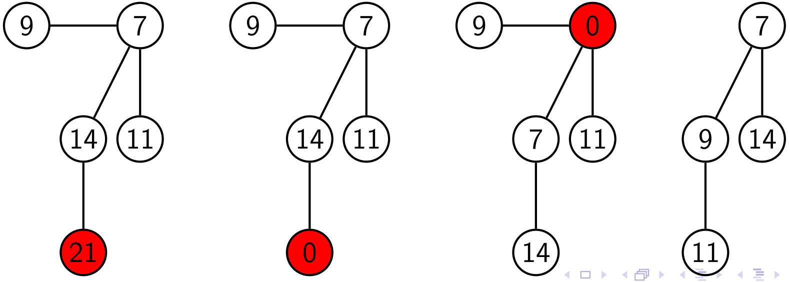
Csúcsban kulcsának csökkentése/csúcs törlése

Kulcs csökkentése

- Az adott csúcsban tárolt kulcsot csökkentsük a kívánt értékre $\rightarrow$ bináris kupacoknál megszokott módon javítsunk

Kulcs törlése

- A törölni kívánt csúcsot kulcsát alkalmasan kicsire választjuk $\rightarrow$ vágjuk ki a minimális kulcsot



Bináris vs. binomiális kupac

Kupacműveletek legrosszabb esetbeli viselkedése

Művelet	Bináris	Binomiális
MIN-KERES	$O(1)$	$O(\log n)$
MIN-KIVÁG	$O(\log n)$	$O(\log n)$
BESZÚR	$O(\log n)$	$O(\log n)$ [1]
KULCSOTCSÖKKENT	$O(\log n)$	$O(\log n)$
EGYESÍT	$O(n)$	$O(\log n)$

[1] amortizált költségben $O(1)$

Összegzés

- Kupacokkal prioritási sorokat valósíthatunk meg hatékonyan
- Tetszőleges kulcs hatékony keresését nem támogatja
- Ha egyesíteni is akarunk kupacokat, akkor a binomiális kupac jobb választás
  - Igaz ekkor a MIN-KERES hatékonyságán bukunk