

Algoritmusok és adatszerkezetek II.

Kupacok

Szegedi Tudományegyetem



Fapacok (Treaps)

Emlékeztető

n kulcsból álló **véletlen** építésű bináris keresőfa h magasságának **várható értéke** $\log n$

- Adverzaliális műveleti sorrend mellett azonban n magas is lehet

Ötlet

A keresőfa,-és kupactulajdonságot egyidejűleg követeljük meg

- 1 Keresőfa tulajdonság biztosítja a kulcsok $O(h)$ kereshetőségét
- 2 Kupactulajdonság miatt h **várható értékben** $\log n$



Fapacok (Treaps)

Emlékeztető

n kulcsból álló **véletlen** építésű bináris keresőfa h magasságának **várható értéke** $\log n$

- Adverzaliális műveleti sorrend mellett azonban n magas is lehet

Ötlet

A keresőfa,-és kupactulajdonságot egyidejűleg követeljük meg

- 1 Keresőfa tulajdonság biztosítja a kulcsok $O(h)$ kereshetőségét
- 2 Kupactulajdonság miatt h **várható értékben** $\log n$
 - A kupactulajdonság ne az eltárolt kulcsokra, hanem egy **véletlenszerűen** generált kiegészítőinformációra teljesüljön!



Kupacok

Felhasználásuk

- 1 Prioritási sor megvalósításánál fontos, hogy a minimális/maximális kulcsot hatékonyan tudjuk visszaadni
- 2 Szintén fontos művelet egy adott kulcs értékének módosítása



Kupacok

Felhasználásuk

- 1 Prioritási sor megvalósításánál fontos, hogy a minimális/maximális kulcsot hatékonyan tudjuk visszaadni
- 2 Szintén fontos művelet egy adott kulcs értékének módosítása

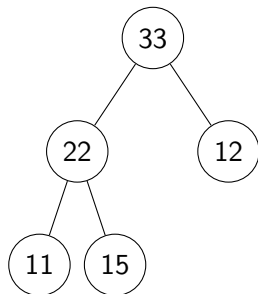
Kupactulajdonság

Azt mondjuk, hogy egy fa rendelkezik a minimum (maximum) kupactulajdonsággal, ha minden p csúcsának minden q fiára

- $q = Nil$ vagy
- $p.kulcs < q.kulcs$ ($p.kulcs > q.kulcs$)



Példa maximum bináris kupacra



Beszúr(40)

0	1	2	3	4	5
–	33	22	12	11	15

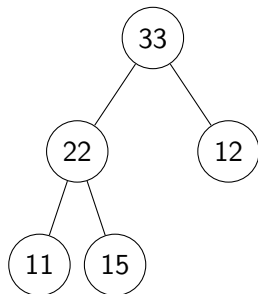
Bináris kupac

Teljes bináris fa, melyre teljesül a kupactulajdonság.

⇒ mivel legfeljebb egy belső pontnak lehet 2-nél kevesebb fia, így egyszerűen egy tömbbel implementálhatjuk

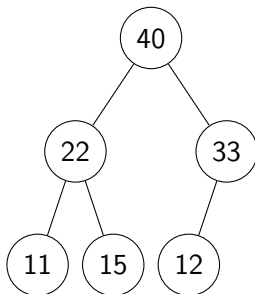


Példa maximum bináris kupacra



0	1	2	3	4	5
–	33	22	12	11	15

Beszúr(40)



0	1	2	3	4	5	6
–	40	22	33	11	15	12

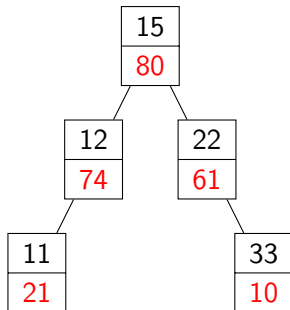
Bináris kupac

Teljes bináris fa, melyre teljesül a kupactulajdonság.

⇒ mivel legfeljebb egy belső pontnak lehet 2-nél kevesebb fia, így egyszerűen egy tömbbel implementálhatjuk



Fapac példa



- A kulcsok keresőfa tulajdonság szerint helyezkednek el
- A véletlen felépítést az **extra adattag** eredményezi
- A kiegyensúlyozott fáknál megszokott módon állítjuk helyre a megkövetelt tulajdonságokat (pl. (Beszúr(27, 100)))



Vissza a kupacokhoz

n elemű kupacban hogy keresnénk meg a maximális elemet?
És egy adott kulcs rákövetkezőjét?
Hogy egyesítenénk egy n és egy m kulcsból álló kupacot?



Vissza a kupacokhoz

n elemű kupacban hogy keresnénk meg a maximális elemet? $O(1)$

És egy adott kulcs rákövetkezőjét? $O(n)$

Hogy egyesítenénk egy n és egy m kulcsból álló kupacot? $O(n + m)$

Kérdés

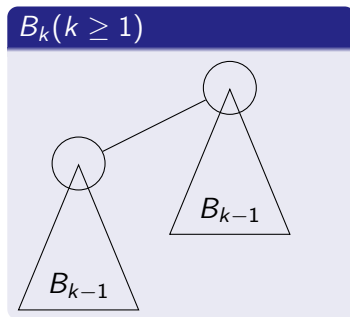
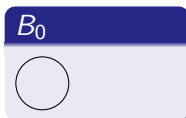
Lehetne hatékonyabban is?



Binomiális fa

Definíció

B_k binomiális fa egy rekurzív rendezett fa, amely két összekapcsolt B_{k-1} binomiális fából áll; az egyik fa gyökercsúcsa a másik fa gyökercsúcsának legbaloldali gyereke



Binomiális fákkal kapcsolatos állítások

Lemma

Ha B_k binomiális fa, akkor az alábbi állítások teljesülnek:

- ❶ 2^k csúcsa van
- ❷ i -edik mélységében pontosan $\binom{k}{i}$ csúcs van ($i = 0, 1, \dots, k$)
- ❸ a gyökércsúcs fokszáma k , melynek gyerekeit balról jobbra megszámozva $k - 1, k - 2, \dots, 0$ -al, i -dik gyereke egy B_i részfa gyökércsúcsa.



Binomiális fákkal kapcsolatos állítások

Lemma

Ha B_k binomiális fa, akkor az alábbi állítások teljesülnek:

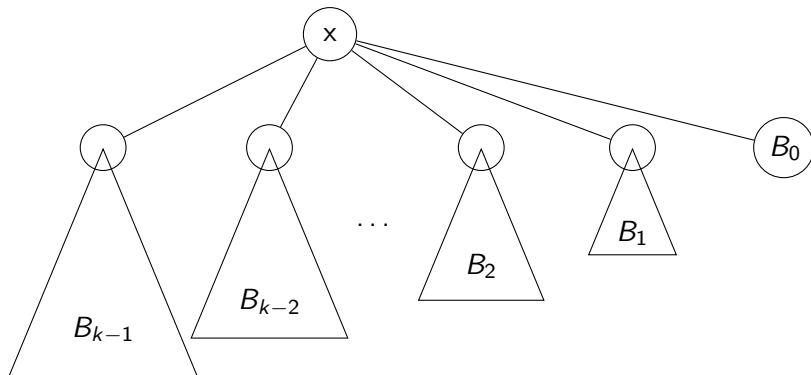
- ❶ 2^k csúcsa van
- ❷ i -edik mélységében pontosan $\binom{k}{i}$ csúcs van ($i = 0, 1, \dots, k$)
- ❸ a gyökeres csúcs fokszáma k , melynek gyerekeit balról jobbra megszámozva $k - 1, k - 2, \dots, 0$ -al, i -dik gyereke egy B_i részfa gyökeres csúcsa.

Következmény

n csúcsú binomiális fa minden csúcsának fokszáma legfeljebb $\log n$



Binomiális fák struktúrája



Binomiális kupac

Definíció

Egy H binomiális kupac binomiális fák olyan halmaza, amely

- 1 H minden binomiális fájára rendelkezik a minimumkupac (vagy maximumkupac) tulajdonsággal
- 2 H -ban nincsenek azonos fokszámmal rendelkező binomiális fák.



Binomiális kupac

Definíció

Egy H binomiális kupac binomiális fák olyan halmaza, amely

- 1 H minden binomiális fájára rendelkezik a minimumkupac (vagy maximumkupac) tulajdonsággal
- 2 H -ban nincsenek azonos fokszámmal rendelkező binomiális fák.

Következmény (előző lemma+2. tulajdonság)

n csúcsú binomiális kupac legfeljebb $\lfloor \log n \rfloor + 1$ binomiális fából áll



Binomiális kupac

Definíció

Egy H binomiális kupac binomiális fák olyan halmaza, amely

- 1 H minden binomiális fájára rendelkezik a minimumkupac (vagy maximumkupac) tulajdonsággal
- 2 H -ban nincsenek azonos fokszámmal rendelkező binomiális fák.

Következmény (előző lemma+2. tulajdonság)

n csúcsú binomiális kupac legfeljebb $\lfloor \log n \rfloor + 1$ binomiális fából áll

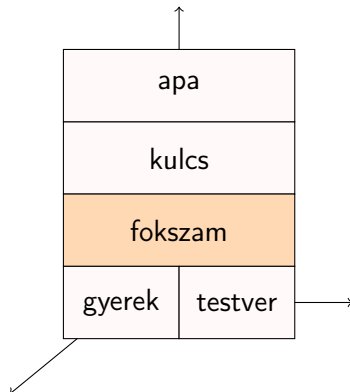
Az előző következmény másképp

A gyökercsúcsok fokszámainak halmaza $a \subseteq \{0, 1, \dots, \lfloor \log n \rfloor\}$



Binomiális kupacok implementációja

```
class Node {  
    Object kulcs;  
    Node *apa;  
    int fokszam;  
    Node *gyerek;  
    Node *testver;  
}
```

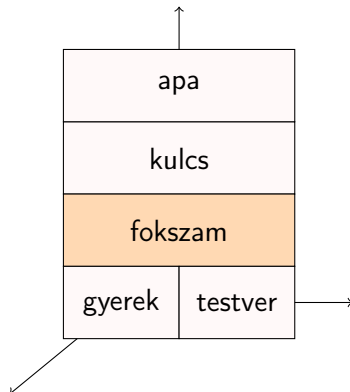


Binomiális kupacok implementációja

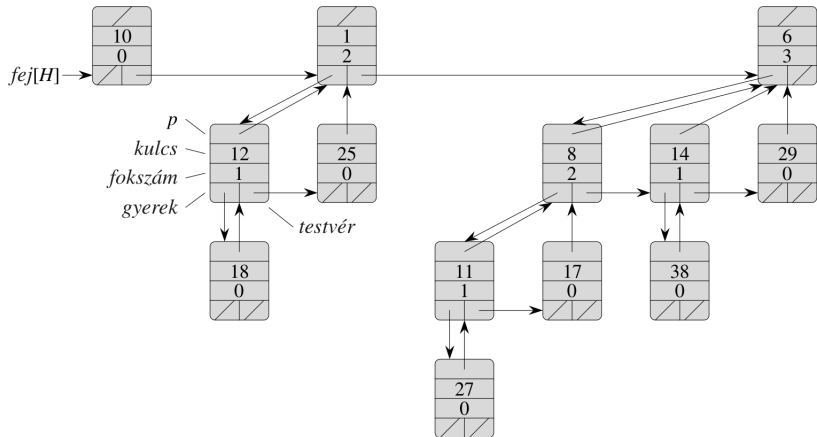
```
class Node {
    Object kulcs;
    Node *apa;
    int fokszam;
    Node *gyerek;
    Node *testver;
}
```

Megjegyzés

Balgyerek, jobbtestvér ábrázolást használunk



Binomiális kupacok szerveződése



Forrás: CLRS: Új algoritmusok 19.3 ábrája



Minimális kulcs keresése

```
BINOMIÁLISKUPACBANMIN(H) {  
    y = Nil  
    x = H.fej //gyökérlista kezdőeleme  
    min = Inf  
  
    while (x != Nil) {  
        if (x.kulcs < min) {  
            min = x.kulcs  
            y = x  
        }  
        x = x.testver  
    }  
    return y  
}
```



Minimális kulcs keresése

```
BINOMIÁLISKUPACBANMIN(H) {  
    y = Nil  
    x = H.fej //gyökérlista kezdőeleme  
    min = Inf  
  
    while (x != Nil) {  
        if (x.kulcs < min) {  
            min = x.kulcs  
            y = x  
        }  
        x = x.testver  
    }  
    return y  
}
```

n kulcs esetén $O(\log n)$



Kupacok egyesítése

- H_1, H_2 bináris kupacok nem egyesíthetők hatékonyan, binomiális kupacra azonban $O(\log n)$ algoritmus adható
- Alapötlet
 - Fokszám szerint nemcsökkenő sorrendben fűzzük össze a H_1 -ben és H_2 -ben található binomiális fákat
 - Legfeljebb $\log n_1 + 1 + \log n_2 + 1 \leq 2 \log n + 1 = O(\log n)$ hosszú listát kapunk
 - 2 darab f fokszámú binomiális fából egy darab $f + 1$ fokszámú binomiális fa hozható létre (ennek ideje $O(1)$)
 - Számoljuk föl az összefűzött gyökérlistában a megegyező fokszámú binomiális fákat



Kupacba történő beszúrás

Észrevétel

A beszúrás két binomiális kupac egyesítéseként fogható föl, ahol az egyik binomiális kupacot alkotó egyedüli binomiális fa B_0 .



Kupacba történő beszúrás

Észrevétel

A beszúrás két binomiális kupac egyesítéseként fogható föl, ahol az egyik binomiális kupacot alkotó egyedüli binomiális fa B_0 .

Példa

$$B_0 - B_2 - B_3 + B_0 - B_1 \Rightarrow$$

$$B_0 - B_0 - B_1 - B_2 - B_3 \Rightarrow$$

$$B_1 - B_1 - B_2 - B_3 \Rightarrow$$

$$B_2 - B_2 - B_3 \Rightarrow$$

$$B_4$$



Minimális kulcsú csúcs kivágása

Észrevételek

- A minimális kulcsnak a gyökérlistában kell lennie $\Rightarrow O(\log n)$
- B_k gyökérelemének eltávolítása után k darab szigorúan monoton csökkenő fokszámú binomiális fára „hullik szét”

Ötlet

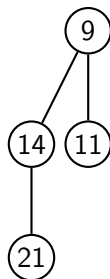
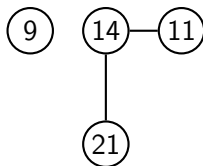
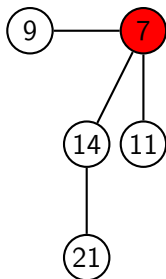
- A minimális kulcs eltávolítása után kapott k binomiális fát „fűzzük össze” egy binomiális kupaccá, és azt egyesítsük az eredeti kupaccal



Minimális kulcsú csúcs kivágása – példa

Észrevételek

- A minimális kulcsnak a gyökérlistában kell lennie $\Rightarrow O(\log n)$
- B_k gyökérelemének eltávolítása után k darab szigorúan monoton csökkenő fokszámú binomiális fára „hullik szét”



Csúcsban kulcsának csökkentése/csúcs törlése

Kulcs csökkentése

- Az adott csúcsban tárolt kulcsot csökkentjük a kívánt értékre



Csúcsban kulcsának csökkentése/csúcs törlése

Kulcs csökkentése

- Az adott csúcsban tárolt kulcsot csökkentjük a kívánt értékre
→ bináris kupacoknál megszokott módon javítsunk

Kulcs törlése

- A törölni kívánt csúcsot kulcsát alkalmasan kicsire választjuk



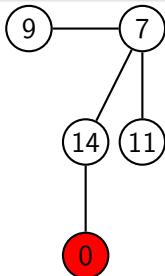
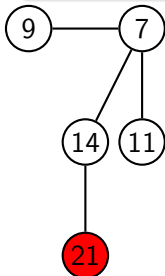
Csúcsban kulcsának csökkentése/csúcs törlése

Kulcs csökkentése

- Az adott csúcsban tárolt kulcsot csökkentjük a kívánt értékre
→ bináris kupacoknál megszokott módon javítsunk

Kulcs törlése

- A törölni kívánt csúcsot kulcsát alkalmasan kicsire választjuk
→ vágjuk ki a minimális kulcsot



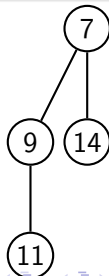
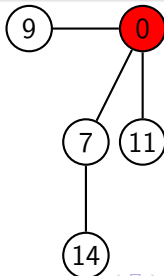
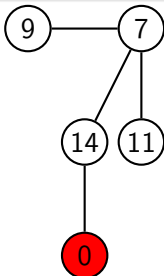
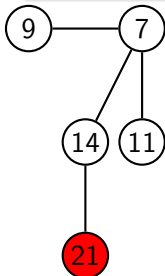
Csúcsban kulcsának csökkentése/csúcs törlése

Kulcs csökkentése

- Az adott csúcsban tárolt kulcsot csökkentjük a kívánt értékre
→ bináris kupacoknál megszokott módon javítsunk

Kulcs törlése

- A törölni kívánt csúcsot kulcsát alkalmasan kicsire választjuk
→ vágjuk ki a minimális kulcsot



Bináris vs. binomiális kupac

Kupacműveletek legrosszabb esetbeli viselkedése

Művelet	Bináris	Binomiális
MIN-KERES	$O(1)$	$O(\log n)$
MIN-KIVÁG	$O(\log n)$	$O(\log n)$
BESZÚR	$O(\log n)$	$O(\log n)^1$
KULCSOTCSÖKKENT	$O(\log n)$	$O(\log n)$
EGYESÍT	$O(n)$	$O(\log n)$

¹amortizált költségben $O(1)$



Összegzés

- Kupacokkal prioritási sorokat valósíthatunk meg hatékonyan
- Tetszőleges kulcs hatékony keresését nem támogatja
- Ha egyesíteni is akarunk kupacokat, akkor a binomiális kupac jobb választás
 - Igaz ekkor a MIN-KERES hatékonyságán bukunk

