

# Algoritmusok és adatszerkezetek II.

## Bináris keresőfák és műveleteik

Szegedi Tudományegyetem



- 2 db ZH (ápr. 9. és máj. 7.): 40-40 pont (min. 18 pont/ZH)
- Kvízek: 4 darab 5-5 pontos Coospace kvíz (min. 0 pont)
- Pluszpontok (minimumba nem számítanak bele)
- Javítás: a nagy ZH-k bármelyike javítható az utolsó előadáson



- 2 db ZH (ápr. 9. és máj. 7.): 40-40 pont (min. 18 pont/ZH)
- Kvízek: 4 darab 5-5 pontos Coospace kvíz (min. 0 pont)
- Pluszpontok (minimumba nem számítanak bele)
- Javítás: a nagy ZH-k bármelyike javítható az utolsó előadáson

## Gyakorlati jegy

[ 0–51) pont	elégtelen (1)
[51–66) pont	elégséges (2)
[66–76) pont	közepes (3)
[76–86) pont	jó (4)
[86– $\infty$ ) pont	jeles (5)



- Coospace-en az előadás színterében lesznek közzétéve (de a gyakorlati teljesítés részét képezik)
- Közzététel: febr. 26., márc. 19, ápr. 16, máj. 14
- Beadási határidő: ápr. 9, máj. 14 az előadás kezdetéig
- 3 kitöltés/kvíz, amelyek közül a legjobbat vesszük figyelembe



- Coospace-en az előadás színterében lesznek közzétéve (de a gyakorlati teljesítés részét képezik)
- Közzététel: febr. 26., márc. 19, ápr. 16, máj. 14
- Beadási határidő: ápr. 9, máj. 14 az előadás kezdetéig
- 3 kitöltés/kvíz, amelyek közül a legjobbat vesszük figyelembe
- Tesztenként a 10 leggyorsabb hibátlan kitöltőnek pluszpont jár



- A gyakorlat sikeres teljesítése esetén kollokvium tehető
- 10 db 5 pontos elméleti és gyakorlati kiskérdéssel
- Pluszpontok (minimumba nem számítanak bele)
- Elővizsga az utolsó előadáson (vizsgaalkalomnak számít)



- A gyakorlat sikeres teljesítése esetén kollokvium tehető
- 10 db 5 pontos elméleti és gyakorlati kiskérdéssel
- Pluszpontok (minimumba nem számítanak bele)
- Elővizsga az utolsó előadáson (vizsgaalkalomnak számít)

## Kollokviumi jegy

[ 0–25) pont	elégtelen (1)
[26–32) pont	elégséges (2)
[32–38) pont	közepes (3)
[38–44) pont	jó (4)
[44– $\infty$ ) pont	jeles (5)



# A félév során érintett főbb témakörök

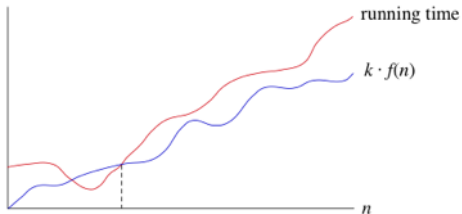
- Kiegyensúlyozott és augmentált keresőfák
- Binomiális és Fibonacci kupacok
- Geometriai algoritmusok
- Számelméleti algoritmusok
- Mintaillesztő algoritmusok





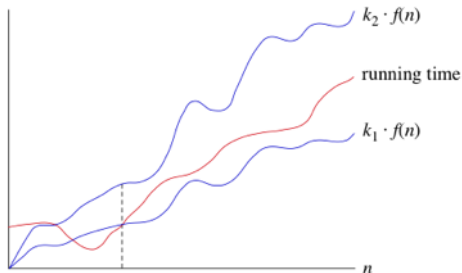
- Ajánlott irodalom
  - Thomas H. Cormen – Charles E. Leiserson – Ronald L. Rivest – Clifford Stein: **Új algoritmusok**. Kiadó: SCOLAR
- [Hackerrank versenyek](#)
- [Algoritmusok vizualizációja](#)

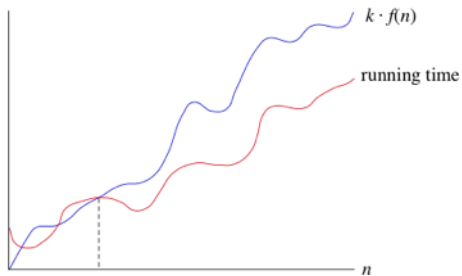




<https://www.desmos.com/calculator/t8paytwq1w>







## Kérdés

Hatékony-e az az algoritmus, amelyik futási ideje  $n$  méretű inputra *legalább*  $O(n \log n)$ ?



## (beugratós) Kérdés

Hatékony-e az az algoritmus, amelyik futási ideje  $n$  méretű inputra *legalább*  $O(n \log n)$ ?

Másképp szólva, mit tudunk arról az algoritmusról, amelynek futási ideje  $\Omega(1)$ ?



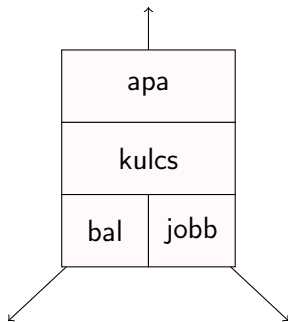
- Egy olyan "megengedő" kétszeresen láncolt lista, ahol az elemek (egy helyett) két elemhez is kapcsolódhatnak

## Láncolt lista



# Bináris fa implementációja

```
class Node {  
    Object kulcs;  
    Node* apa;  
    Node* bal;  
    Node* jobb;  
}
```



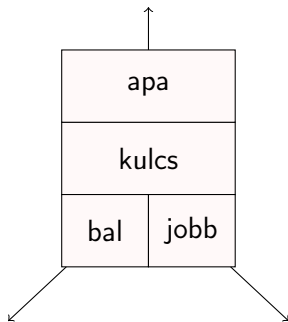


# Bináris fa implementációja

```
class Node {  
    Object kulcs;  
    Node* apa;  
    Node* bal;  
    Node* jobb;  
}
```

## Megjegyzés

2 mutatóval és egy segédbittel (bal fiú-e az adott csúcs) is megvalósítható lenne



- Inorder/preorder/posztorder bejárások
- Legegyszerűbb megvalósításuk rekurzióval történik
  - Jó azonban tudni, hogy **rekurzió nélkül is megtehető mindez**

```
void inorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    inorder(x.bal)  
    print(x.kulcs)  
    inorder(x.jobb)  
}
```



- Inorder/preorder/posztorder bejárások
- Legegyszerűbb megvalósításuk rekurzióval történik
  - Jó azonban tudni, hogy **rekurzió nélkül is megtehető mindez**

```
void inorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    inorder(x.bal)  
    print(x.kulcs)  
    inorder(x.jobb)  
}
```

```
void preorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    print(x.kulcs)  
    preorder(x.bal)  
    preorder(x.jobb)  
}
```



- Inorder/preorder/posztorder bejárások
- Legegyszerűbb megvalósításuk rekurzióval történik
  - Jó azonban tudni, hogy **rekurzió nélkül is megtehető mindez**

```
void inorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    inorder(x.bal)  
    print(x.kulcs)  
    inorder(x.jobb)  
}
```

```
void preorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    print(x.kulcs)  
    preorder(x.bal)  
    preorder(x.jobb)  
}
```

```
void postorder(x){  
    if(x==nil){return}  
    postorder(x.bal)  
    postorder(x.jobb)  
    print(x.kulcs)  
}
```



- Olyan bináris fa, amelynek minden belső csúcsának 2 fia van

Fában lévő kulcsok száma

A fa  $i$ -edik szintjén  $2^i$  csúcs található



- Olyan bináris fa, amelynek minden belső csúcsának 2 fia van

## Fában lévő kulcsok száma

A fa  $i$ -edik szintjén  $2^i$  csúcs található

$\Rightarrow$  a fában  $n = \sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1} - 1$  csúcsot találhatók<sup>a</sup>

**Állítás:**  $h$  magas fában  $O(2^h)$  csúcs található



- Olyan bináris fa, amelynek minden belső csúcsának 2 fia van

## Fában lévő kulcsok száma

A fa  $i$ -edik szintjén  $2^i$  csúcs található

$\Rightarrow$  a fában  $n = \sum_{i=0}^h 2^i = 2^{h+1}$  csúcsot találhatók<sup>a</sup>

**Állítás:**  $h$  magas fában  $O(2^h)$  csúcs található

**Megfordítva:**  $n$  csúcsból álló fa magassága  $\Omega(\log n)$

---

<sup>a</sup>bizonyítás teljes indukcióval



## Keresőfa tulajdonság

A fa minden  $x$  csúcsára teljesül, hogy

- $x.bal.kulcs < x.kulcs$  (amennyiben  $x.bal! = nil$ )
- $x.kulcs < x.jobb.kulcs$  (amennyiben  $x.jobb! = nil$ )



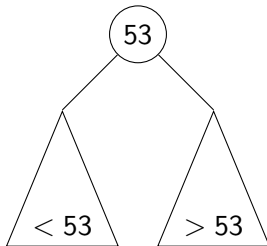


## Keresőfa tulajdonság

A fa minden  $x$  csúcsára teljesül, hogy

- $x.bal.kulcs < x.kulcs$  (amennyiben  $x.bal! = nil$ )
- $x.kulcs < x.jobb.kulcs$  (amennyiben  $x.jobb! = nil$ )

< rendezés tranzitivitásából adódóan



```
FÁBANKERES(x, k) {  
    if x == nil or k == x.kulcs  
        return x  
  
    if k < x.kulcs  
        FÁBANKERES(x.bal, k)  
    else  
        FÁBANKERES(x.jobb, k)  
}
```



```
FÁBANKERES(x, k) {  
    if x == nil or k == x.kulcs  
        return x  
  
    if k < x.kulcs  
        FÁBANKERES(x.bal, k)  
    else  
        FÁBANKERES(x.jobb, k)  
}
```

$h$  magas fa esetén  $O(h)$

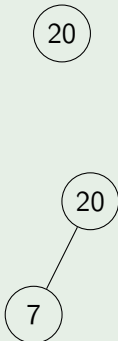


# Elem beszúrása bináris keresőfába

- A keresőfa tulajdonság fenntartása mellett levélként szúrunk be
- $h$  magas fa esetén  $O(h)$  idejű

## Példa

Beszúr(7)



# Elem törlése bináris keresőfából



- 3 esetet különböztetünk meg  $x$  csúcs törlése kapcsán
  - 1  $x$ -nek nincs gyereke
    - $x$  apjának az  $x$ -re vonatkozó mutatóját *nil*-re állítjuk
  - 2  $x$ -nek pontosan egy gyereke van
    - $x$  apját "átkötjük"  $x$  egyedüli fiához
  - 3  $x$ -nek 2 gyereke van
    - $x$ -et megelőzőjével (bal oldali részfájának maximális elemével) helyettesítjük
- $h$  magas fa esetén  $O(h)$  idejű

