Algoritmusok és adatszerkezetek II.

Sztring,-és számelméleti algoritmusok

Szegedi Tudományegyetem

Mintaillesztés problémája

$T = [t_0 t_1 \dots t_n]$ input tartalmazza-e a $P = [p_0 p_1 \dots p_m]$ mintát?
Ha igen, mely inputpozíció(k)tól/eltolási érték(ek)től kezdődően?
Tipikusan $n \gg m$

Mintaillesztés problémája

$T = [t_0 t_1 \dots t_n]$ input tartalmazza-e a $P = [p_0 p_1 \dots p_m]$ mintát?
Ha igen, mely inputpozíció(k)tól/eltolási érték(ek)től kezdődően?
Tipikusan $n \gg m$

Példa

Hányszor szerepel az `'orosz'` szó a *Háború és béke* c. műben?

Nyers erőt használva legrosszabb esetben $O(mn)$ vizsgálat kell
Milyen hatékonyabb módszerek vannak?

- Mintaillesztés automatával
- Knuth-Morris-Prat
- **Rabin-Karp algoritmus**

Véges állapotú automaták

Automata alatt egy $M = (Q, q_0, A, \Sigma, \delta)$ rendezett ötöst értünk, ahol

- Q a lehetséges állapotok halmaza
- q_0 a kezdőállapot
- $A \subseteq Q$ a végállapotok halmaza
- Σ egy véges ábécé
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ az állapotátmenet-függvény

Mintaillesztés véges állapotú automatákkal

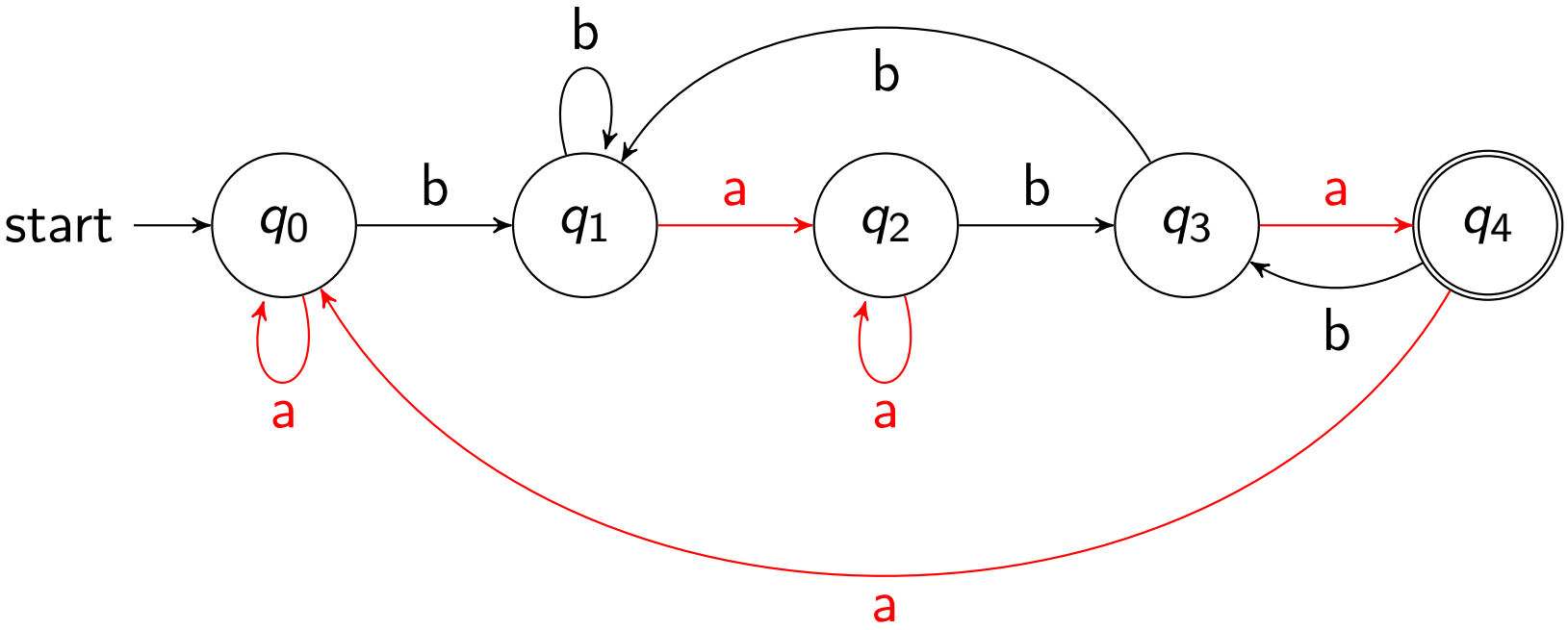
- Q-t válasszk $\{q_0, q_1, \ldots q_m\}$-nak
- q_i állapot jelentése: az input aktuális pozíciójáig a minta első i karaktere illeszkedik
- q_m állapotba elérve elmondható, hogy megtaláltuk a $P = [p_0 p_1 \ldots p_m]$ minta egy T-beli előfordulását

$P = baba$ minta felismerését végző véges automata

Az állapotátmenet-függvény táblázatos formában

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
a	q_0	$\mathbf{q_2}$	q_0	$\mathbf{q_4}$	q_0
b	$\mathbf{q_1}$	q_1	$\mathbf{q_3}$	q_1	q_3

Kitöltése és tárolása egyaránt $O(m|\Sigma|)$ költségű



Knuth-Morris-Pratt (KMP) algoritmus

A véges automatával történő feldolgozás korlátai

Előfeldolgozás gyanánt ki kell tölteni egy $m|\Sigma|$ méretű táblázatot (és persze tárolni is kell azt)

Knuth-Morris-Pratt (KMP) algoritmus

A véges automatával történő feldolgozás korlátai

Előfeldolgozás gyanánt ki kell tölteni egy $m|\Sigma|$ méretű táblázatot (és persze tárolni is kell azt)

Észrevételek

1. Ha $P = aab$ minta illeszkedett az input i-edik pozíciójára, akkor az $i + 1$ pozíciótól kezdődően biztos nem beszélhetünk illeszkedésről
2. Ha $P = aaa$ minta nem illeszkedett az input i-edik pozíciójára, akkor az $i + 1$ pozíciótól kezdődően biztos nem beszélhetünk illeszkedésről

Jelölések

- P_i jelölje P-nek az i hosszúságú prefixét (kezdőszeletét), azaz pl. $\mathrm{P}_3 = bab$, $\mathrm{P}_1 = b$, illetve $\mathrm{P}_0 = \epsilon$ (ϵ az üres szót jelöli)

Jelölések

- $\mathtt{P}_i$ jelölje $\mathtt{P}$-nek az i hosszúságú prefixét (kezdőszeletét), azaz pl. $\mathtt{P}_3 = bab$, $\mathtt{P}_1 = b$, illetve $\mathtt{P}_0 = \epsilon$ (ϵ az üres szót jelöli)
- $\mathtt{X} \sqsupset \mathtt{Y}$ jelölje azt, ha $\mathtt{X}$ sztring szuffixe $\mathtt{Y}$-nak (azaz $\mathtt{Y}$ végződése maga $\mathtt{X}$)

Példa

$\underline{aaba} \sqsupset cac\underline{aaba}$, ugyanakkor $\underline{aaba} \not\sqsupset cac\underline{aabb}$

Megjegyzés: Az $\mathtt{Y} \sqsupset \mathtt{Y}$, valamint az $\epsilon \sqsupset \mathtt{Y}$ relációk triviálisan teljesülnek minden $\mathtt{Y}$-ra.

Prefixfüggvény

- $\pi : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$ $P = [p_1 \ldots p_m]$ minta prefixfüggvénye, ha $\pi[q] = \max\{k : k < q \wedge \mathrm{P}_k \sqsupset \mathrm{P}_q\}$
- Azaz $\pi[q]$ megadja P azon leghosszabb (q-nál rövidebb) prefixének hosszát, ami valódi szuffixe $\mathrm{P}_q = [p_0 \ldots p_q]$-nak
- Értelmezése: ha **nem sikerül továbbillesszük** a mintát az inputra, az **legalább** mely állapotig vet minket vissza

Prefixfüggvény

- $\pi : \{1, 2, \ldots, m\} \to \{0, 1, \ldots, m-1\}$ $P = [p_1 \ldots p_m]$ minta prefixfüggvénye, ha $\pi[q] = \max\{k : k < q \wedge \mathrm{P}_k \sqsupset \mathrm{P}_q\}$
- Azaz $\pi[q]$ megadja P azon leghosszabb (q-nál rövidebb) prefixének hosszát, ami valódi szuffixe $\mathrm{P}_q = [p_0 \ldots p_q]$-nak
- Értelmezése: ha **nem sikerül továbbillesszük** a mintát az inputra, az **legalább** mely állapotig vet minket vissza

Példa

$T = abaababababaca$ inputban keressük a $P = abababababca$ mintát

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P[i]$	a	b	a	b	a	b	a	b	c	a
$\pi[i]$	0	0	1	2	3	4	5	6	0	1

Rabin-Karp algoritmus

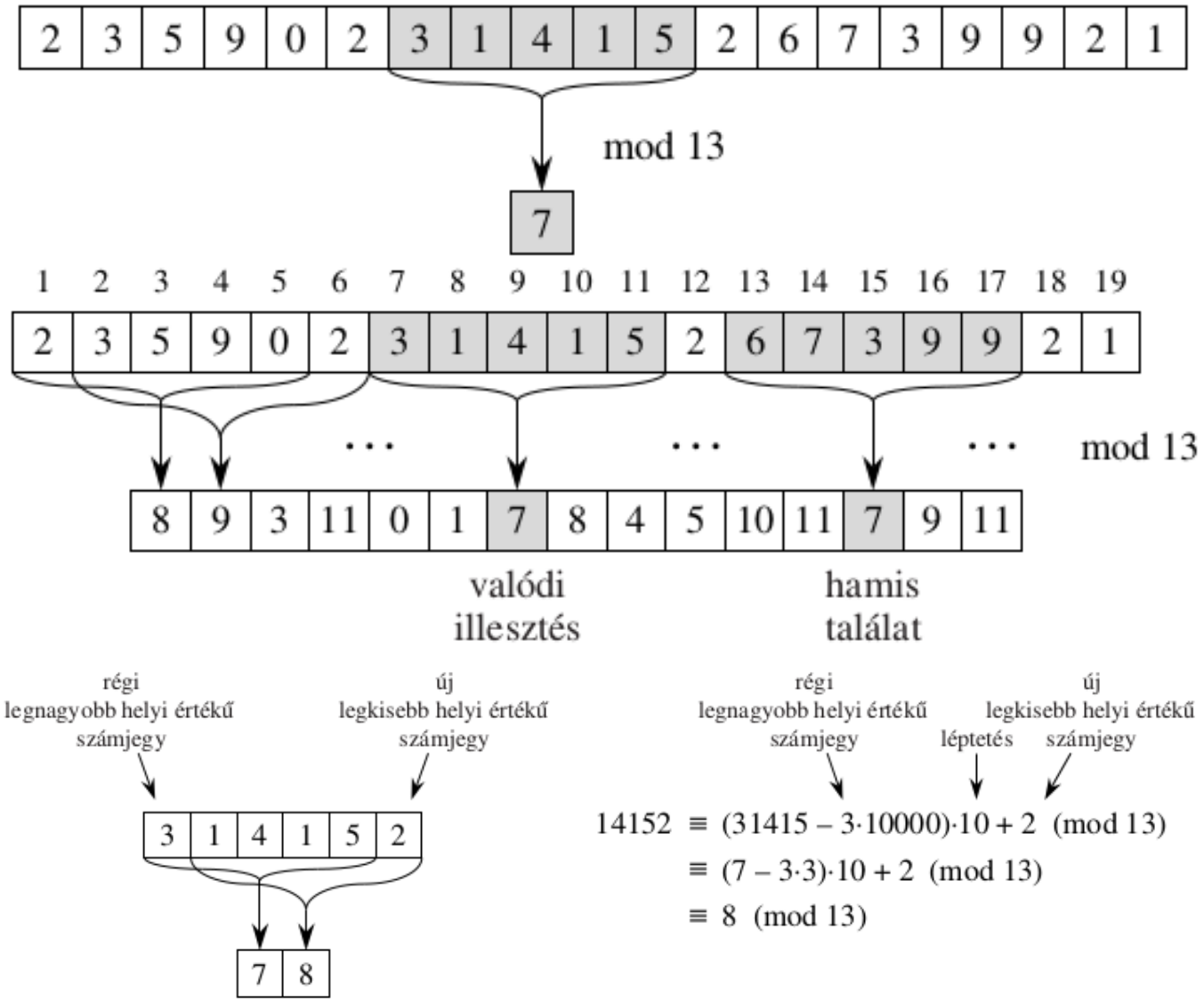
Az egyszerűség kedvéért a mintára és az inputra tekintsünk 10-es számrendszerbeli számokként

Alapötlet

P mintára alkalmazzunk egy $h_q(x) = x \mod q$ hasítófüggvényt.
T-nek csak azon $S = [t_j]_{j=i}^{i+m-1}$ részsztringjei egyezhetnek meg P-vel, melyekre $h_q(S) = h_q(P)$
$h_q(S) = h_q(P)$ természetesen csak szükségességi feltételt támaszt

Rabin-Karp algoritmus illusztráció (Forrás: CLRS 32.5 ábra)

$P = 31415, h_q(x) = x \mod 13$



Rabin-Karp – a hasítófüggvény csúsztatása

Észrevétel

h_q-nak az input minden indexén kezdődő kiszámítása költséges

Rabin-Karp – a hasítófüggvény csúsztatása

Észrevétel

h_q-nak az input minden indexén kezdődő kiszámítása költséges

A hatékonyság záloga

Ahogy abc és bcd számpárral teljesül

$$bcd = 10 * (abc - 100 * a) + d$$

egyenlőség, hasonlóan igaz

$$h_q(bcd) = h_q(10 * (h_q(abc) - h_q(100) * a) + d)$$

összefüggés is.

Kis kitérő: Bloom filterek

- Probabilisztikus adatszerkezet a Keres műveletre nézve
- Implementációja: (egyenletesen szóró) h hasítófüggvény és egy (kezdetben csupa 0) bitvektor
  - x elem beszúrásakor a bitvektor $h(x)$ indexét 1-re állítjuk
  - x elem keresésnél ha a bitvektor $h(x)$ indexe 1, akkor azt mondjuk, hogy x-et tartalmazza a bloom filterünk
    - Hamis elutasítás soha nem teszünk, ugyanakkor hamis pozitív választ adhatunk
- Hatékonysága függ h hasítófüggvénytől, valamint az eltárolt elemek számától (ami kihat a bitvektor kitöltöttségére)
- Linkek: Bloom filter demo és Guava API

Mintaillesztés főbb megközelítései

Algoritmus	Előfeldolgozás	Illesztés[1]
Nyers erő	0	$O(mn)$
Rabin-Karp	$\Theta(m)$	$O(mn)$
Véges automata	$O(m\|\Sigma\|)$	$\Theta(n)$
Knuth-Morris-Prat	$\Theta(m)$	$\Theta(n)$

- Rabin-Karp a nyers erő módszerének kiterjesztéseként tekinthető
- KMP pedig a véges automatákkal való illesztés egy hatékonyabb verziója

[1] legrosszabb eset

A moduláris hatványozás

Alapprobléma: Mi az $a^b \mod n$ kifejezés értéke?

Gyakorlati jelentőség: titkosító eljárások (pl. RSA) használata során szükségünk lehet ilyen számítások elvégzésére

Már viszonylag kis b-re is rengeteg bitműveletet kell elvégezzünk

A moduláris hatványozás

Alapprobléma: Mi az $a^b \mod n$ kifejezés értéke?

Gyakorlati jelentőség: titkosító eljárások (pl. RSA) használata során szükségünk lehet ilyen számítások elvégzésére

Már viszonylag kis b-re is rengeteg bitműveletet kell elvégezzünk

Példa – Mi lesz $7^{560} \mod 561$ értéke? Avagy

$$1798466729205729065772587222245603360838566081370073425616126361443960897695529556655491359956040756080966911621011841135459725266382550047840553113905985423059583570970823912250610774332816201171300138264486062817086659379316597967367552530749773664710631469233738652235015321857530762927108874018017743927794756795105563119669819528260254870572046992619139736642578579937440451434475311215405742159698029610038720861638609917020355065913128470296742603625091567459651360 01 \mod 561 = ?$$

Moduláris hatványozás

```
MODULÁRIS-HATVÁNYOZÓ(a, b, n){
   c = 0
   d = 1
   B = [bk ... b1 b0]
   for (i=k; k >=0; --k) {
      c = 2*c
      d = (d*d) mod n
      if (B[i] == 1) {
         c = c+1
         d = (d*a) mod n
      }
   }
   return d
}
```

Megjegyzések

1. b-nek k bites bináris alakja B
2. c csak egy segédváltozó

Moduláris hatványozás

```
MODULÁRIS-HATVÁNYOZÓ(a, b, n){
   c = 0
   d = 1
   B = [bk ... b1 b0]
   for (i=k; k >=0; --k) {
      c = 2*c
      d = (d*d) mod n
      if (B[i] == 1) {
         c = c+1
         d = (d*a) mod n
      }
   }
   return d
}
```

Megjegyzések

1. b-nek k bites bináris alakja B
2. c csak egy segédváltozó

Kérdés

- Mi lesz d és c értéke a for ciklus első végrehajtása után?

Moduláris hatványozás

```
MODULÁRIS-HATVÁNYOZÓ(a, b, n){
    c = 0
    d = 1
    B = [bk ... b1 b0]
    for (i=k; k >=0; --k) {
        c = 2*c
        d = (d*d) mod n
        if (B[i] == 1) {
            c = c+1
            d = (d*a) mod n
        }
    }
    return d
}
```

Megjegyzések

1. b-nek k bites bináris alakja B
2. c csak egy segédváltozó

Kérdés

- Mi lesz d és c értéke a for ciklus első végrehajtása után?

Műveletigény

Ha a, b és n k biten elfér, mindez $O(k)$ aritmetikai műveletet és $O(k^3)$ bitműveletet jelent

A moduláris hatványozás működése

- Az algoritmus for ciklusában minden egyes iteráció megkezdése előtt a c és d változók értékeire teljesül, hogy:
  1. c változó értéke megegyezik a $[b_k \dots b_{i+1}]$ bináris értékkel
  2. $d = a^c \mod n$
- A fenti ciklusinvariáns teljesül, megmarad és befejeződik $\rightarrow$

Moduláris hatványozás példa

$7^{560} mod 561 = ?$

$a = 7, b = 560, n = 561$ $(B = [1000110000])$

i	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
b_i	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
c	1	2	4	8	17	35	70	140	280	560
d	7	49	157	526	160	241	298	166	67	**1**