

2013 Multi-University Training Contest 10

ftiasch

August 22, 2013

Sum



$$S(k) = \binom{N-1}{k-1} \implies \sum_{k=1}^N S(k) = \sum_{k=1}^N \binom{N-1}{k-1} = 2^{N-1}$$

- ▶ **组合证明** $S(k)$ 是“把 $(k-1)$ 个木板放进 $(N-1)$ 个间隔的方案数”；所以 $\sum_{k=1}^N S(k)$ 是“把木板放进 $(N-1)$ 个间隔的方案数”

► $2^N \bmod (10^9 + 7)$ for $N = 10^{1000000}$?

- ▶ $2^N \bmod (10^9 + 7)$ for $N = 10^{1000000}$?
- ▶ 由费马小定理,

$$2^N \equiv 2^{N \bmod (10^9 + 6)} \pmod{10^9 + 7}$$

Sum

时间复杂度 $O(\log N + \log \log N)$

- ▶ Why “Y”?

- ▶ Why “Y”?
- ▶ 长得像:)

- ▶ 枚举 “Y” 的中心 u
- ▶ A, B, C 分别属于 3 棵不同的子树

- ▶ 枚举 “Y” 的中心 u
- ▶ A, B, C 分别属于 3 棵不同的子树
- ▶ 假设 u 的子树大小分别是 s_1, s_2, \dots, s_m
- ▶ 方案数是

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq m} s_i \cdot s_j \cdot s_k = \frac{(\sum s_i)^3 - 3(\sum s_i)(\sum s_i^2) + 2 \sum s_i^3}{6}$$

- ▶ 枚举 “Y” 的中心 u
- ▶ A, B, C 分别属于 3 棵不同的子树
- ▶ 假设 u 的子树大小分别是 s_1, s_2, \dots, s_m
- ▶ 方案数是

$$\sum_{1 \leq i < j < k \leq m} s_i \cdot s_j \cdot s_k = \frac{(\sum s_i)^3 - 3(\sum s_i)(\sum s_i^2) + 2 \sum s_i^3}{6}$$

- ▶ 有点麻烦:(

- ▶ 让我们愉快地补集转换吧
- ▶ 假设路径 P 按顺序经过 A, B, C 且 $A < C$, 枚举 B
- ▶ A, C 分别属于 2 棵不同的子树

- ▶ 让我们愉快地补集转换吧
- ▶ 假设路径 P 按顺序经过 A, B, C 且 $A < C$, 枚举 B
- ▶ A, C 分别属于 2 棵不同的子树
- ▶ 假设 B 的子树大小分别是 s_1, s_2, \dots, s_m
- ▶ 方案数是

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} s_i \cdot s_j = \frac{(\sum s_i)^2 - \sum s_i^2}{2}$$

时间复杂度 $O(N)$

Answer

- ▶ 世界观（点）权是 1 或 2 的环套内向树，判断长度是 d 的路径是否存在

Answer

- ▶ 世界观（点）权是 1 或 2 的环套内向树，判断长度是 d 的路径是否存在
- ▶ 对于 $d > 0$ ，当且仅当

$$(C_1 = C_2 = \cdots = C_N = 2) \wedge (d \equiv 1 \pmod{2})$$

无解

- ▶ 证明？

Answer

- ▶ 世界观（点）权是 1 或 2 的环套内向树，判断长度是 d 的路径是否存在
- ▶ 对于 $d > 0$ ，当且仅当

$$(C_1 = C_2 = \cdots = C_N = 2) \wedge (d \equiv 1 \pmod{2})$$

无解

- ▶ 证明？
- ▶ 若有 1，从 1 出发不断扩展直到 $\geq d$ 。如果是 $d+1$ 则去掉开始的 1

时间复杂度 $O(N + Q)$

- ▶ 栈 A, B维护光标之前（之后）的序列

I x A.push(x)

D A.pop()

L B.push(A.pop())

R A.push(B.pop())

- ▶ 对于栈 A 中的每个元素，额外维护前缀和，以及前缀和的最大值

- ▶ 栈 A, B维护光标之前（之后）的序列

I x A.push(x)

D A.pop()

L B.push(A.pop())

R A.push(B.pop())

- ▶ 对于栈 A 中的每个元素，额外维护前缀和，以及前缀和的最大值
- ▶ （我猜）Splay Tree 会退化成上述结构，大概可以通过

时间复杂度 $O(Q)$

Flow

- ▶ 如果解是树？

Flow

- ▶ 如果解是树?
- ▶ 递归构造
 - ▶ 令 $f^* = \min_{a \neq b} F_{a,b}$
 - ▶ 令 $A = \{v_0\} \cup \{v : F_{v,v_0} > f^*\}$, $B = \{v : F_{v,v_0} = f^*\}$.
 - ▶ 若 $B = \emptyset$, 失败
 - ▶ 若 $\exists (a \in A, b \in B) F_{a,b} > f^*$, 失败
 - ▶ 递归构造 A, B
 - ▶ 取 $a^* \in A, b^* \in B$, 加边 (a^*, b^*) , 容量是 f^*

Flow

- ▶ 如果解是树?
- ▶ 递归构造
 - ▶ 令 $f^* = \min_{a \neq b} F_{a,b}$
 - ▶ 令 $A = \{v_0\} \cup \{v : F_{v,v_0} > f^*\}$, $B = \{v : F_{v,v_0} = f^*\}$ 。
 - ▶ 若 $B = \emptyset$, 失败
 - ▶ 若 $\exists (a \in A, b \in B) F_{a,b} > f^*$, 失败
 - ▶ 递归构造 A, B
 - ▶ 取 $a^* \in A, b^* \in B$, 加边 (a^*, b^*) , 容量是 f^*
- ▶ 一定存在解是树 \implies Gomory-Hu tree

时间复杂度 $O(N^3)$

Game

- ▶ 设 $win(i, x, y)$ 表示当前可以买的物品是 i , 先手有 x 元, 后手有 y 元时, 先手是否必胜



$$win(i, x, y) \iff \exists j((j > i) \wedge (x \geq s_i - s_j) \wedge \neg win(j, y, x - s_i + s_j))$$

- ▶ 其中 $s_i = C_i + C_{i+1} + \dots + C_N$

Game

- ▶ 设 $win(i, x, y)$ 表示当前可以买的物品是 i , 先手有 x 元, 后手有 y 元时, 先手是否必胜



$$win(i, x, y) \iff \exists j((j > i) \wedge (x \geq s_i - s_j) \wedge \neg win(j, y, x - s_i + s_j))$$

- ▶ 其中 $s_i = C_i + C_{i+1} + \cdots + C_N$
- ▶ 注意到 $x + y = A + B - s_1 + s_i$, 即 $win(i, x) := win(i, x, y)$

Game

- ▶ $\text{win}(i, x) \implies \text{win}(i, x + 1)$
- ▶ 设 $m(i) = \min\{x : \text{win}(i, x)\}$, 则 $\neg \text{win}(i, x) \iff x \leq m(i) - 1$

Game

- ▶ $\text{win}(i, x) \implies \text{win}(i, x + 1)$
- ▶ 设 $m(i) = \min\{x : \text{win}(i, x)\}$, 则 $\neg \text{win}(i, x) \iff x \leq m(i) - 1$
- ▶ 令 $D = A + B - s_1 + s_i$
- ▶

$$\begin{aligned} & m(i) \\ &= \min\{x : \exists j((j > i) \wedge (x \geq s_i - s_j) \wedge \neg \text{win}(j, D - x))\} \\ &= \min\{x : \exists j((j > i) \wedge (x \geq s_i - s_j) \wedge D - x \leq m(j) - 1)\} \\ &= \min\{\max\{s_i - s_j, D - m(j) + 1\} : j > i\} \\ &= \min\{\max\{s_i - s_j, A + B - s_1 + s_i - m(j) + 1\} : j > i\} \\ &= s_i + \min\{\max\{-s_j, A + B - s_1 - m(j) + 1\} : j > i\} \end{aligned}$$

- ▶ 只要测试 $A \geq m(1)$

时间复杂度 $O(N)$

Count

- ▶ 世界观 $10^9 \times 10^9$ 的点阵，有 K 个黑点，求至少含有 1 个黑点的矩形数量
- ▶ \iff 不含黑点的矩形数量

Count

- ▶ 世界观 $10^9 \times 10^9$ 的点阵，有 K 个黑点，求至少含有 1 个黑点的矩形数量
- ▶ \iff 不含黑点的矩形数量
- ▶ $10^3 \times 10^3$?
- ▶ 枚举矩形的下底，设 h_i 表示第 i 列最多向上扩展（不包含黑点）的长度，共有

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \min\{h_i, h_{i+1}, \dots, h_j\}$$

种

- ▶ 单调队列 $O(N)$

- ▶ $10^9 \times 10^3$?
- ▶ 注意到

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \min\{h_i, h_{i+1}, \dots, h_j\} = \sum_{i=1}^N h_i \cdot k_i$$

，其中 k_i 由 $\{h_1, h_2, \dots, h_N\}$ 的相对大小关系决定

- ▶ 而对于空行， $h'_i = h_i + 1$ ， $\{h_i\}$ 和 $\{h'_i\}$ 的相对关系相同，只需计算出 $\{k_i\}$ 后一起处理

- ▶ $10^9 \times 10^3$?
- ▶ 注意到

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N \min\{h_i, h_{i+1}, \dots, h_j\} = \sum_{i=1}^N h_i \cdot k_i$$

，其中 k_i 由 $\{h_1, h_2, \dots, h_N\}$ 的相对大小关系决定

- ▶ 而对于空行， $h'_i = h_i + 1$ ， $\{h_i\}$ 和 $\{h'_i\}$ 的相对关系相同，只需计算出 $\{k_i\}$ 后一起处理
- ▶ $10^9 \times 10^9$?
- ▶ 对列进行离散化

时间复杂度 $O(K^2)$

Convex

- ▶ 仅当 3 点共线时，凸包形状（可能）发生变化
- ▶ 若点 i, j, k 共线，即

$$(P_i(t) - P_j(t)) \times (P_i(t) - P_k(t)) = 0$$

是关于 t 的 2 次方程，至多 2 解

- ▶ 事件点 $O(N^3)$

Convex

- ▶ 仅当 3 点共线时, 凸包形状 (可能) 发生变化
- ▶ 若点 i, j, k 共线, 即

$$(P_i(t) - P_j(t)) \times (P_i(t) - P_k(t)) = 0$$

是关于 t 的 2 次方程, 至多 2 解

- ▶ 事件点 $O(N^3)$
- ▶ 若 $t \in [a, b]$ 时, 凸包由点 i_1, i_2, \dots, i_k 组成, 则

$$S(t) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq k} P_{i_j}(t) \times P_{i_{(j+1) \bmod k}}(t)$$

是关于 t 的 2 次函数, 积分是 3 次函数

时间复杂度 $O(N^4 \log N)$

Rectangle

- ▶ 世界观 $10^9 \times 10^9$ 的点阵，初始点权都是 1，对矩形 R_i 的点：
 - ▶ 求和，记为 v_i
 - ▶ 权值增加 v_i
- ▶ 方案总数 $\sum_{i=1}^N v_i \cdot (X_{i2} - X_{i1} + 1) \cdot (Y_{i2} - Y_{i1} + 1)$

- ▶ 分治操作，考虑前一半增加的权值对后一半求和的贡献
- ▶ 类似矩形面积并，离线线段树维护

时间复杂度 $O(N^2 \log N)$