

二次元数学能力测试

Gnoliyil

2013 年 3 月 6 日

本试卷分 A, B, C 三组, 满分 1000 分. A 组 10 题, 满分 100 分; B 组 12 题, 满分 200 分; C 组 13 题, 满分 700 分. 题目难度逐级升高.

A 组

1. (出自 *Angel Beats!* 第 5 话) 对 20 欧姆的电阻加 3V 的电压, 流过的电流是多少安培?

(5 分)

2. (出自 *K-ON!*) 像 -8 这样的比 0 小的数叫做 . 符号 “ $-$ ” 叫做 , 符号 “ $+$ ” 叫做 .

(6 分)

3. (出自 *K-ON!*) 将以下数字按照从小到大的顺序排列:

$$+0.7 \quad -3 \quad -\frac{1}{2} \quad +5 \quad +\frac{3}{4} \quad -\frac{3}{4} \quad 0 \quad -2.$$

解) _____ (10 分)

4. (出自 *Another* 第 1 话) 求绝对值大于等于 2 且小于等于 5 的整数的个数. (8 分)

5. (出自 *K-ON!*) 计算下列式子:

(甲) $(-3) + 4$;

(乙) $10 + (-8)$;

(丙) $53 + (-72)$;

(丁) $(-9) - (-10)$;

(戊) $(-3) + 5$;

(己) $(-\frac{2}{3}) - (-\frac{4}{5})$;

$$\begin{array}{ll}
 \text{(庚)} (-0.7) - (-2.8); & \text{(辛)} \frac{9}{4} + (-\frac{1}{3});^{\text{注 } 1} \\
 \text{(壬)} (-102) - (-83). & (18 \text{ 分})
 \end{array}$$

6. (出自 *Another* 第 1 话) 以下整式中, 是二次式的是: [答]()

$$\begin{array}{ll}
 \text{(甲)} -5 \times x \times y; & \text{(乙)} a \times a \times b \times b; \\
 \text{(丙)} 3 \times x - x \times y + y \times y; & \text{(丁)} 2 \times a + b; \\
 \text{(戊)} (-1) \times x \times x + x \times y \times y; & \text{(己)} a \times a \times b + b \times c - 2.
 \end{array}
 \quad (5 \text{ 分})$$

7. (出自 *K-ON!*) 整理以下多项式中的同类项:

$$\begin{array}{ll}
 (1) -2x + 3y + x^2 + 5x - y; & \\
 (2) p^3q + pq^2 - 2p^2 - q^3 - 3p^3q + 4q^3 + 5. & (10 \text{ 分})
 \end{array}$$

8. (出自 *K-ON!*) 对以下式子进行因式分解:

$$\begin{array}{ll}
 (1) x^2 + 13x + 30; & \\
 (2) 2x^2 + 7x + 3. & (10 \text{ 分})
 \end{array}$$

9. (出自《日常》第 3 话) 解以下方程:

$$\begin{array}{ll}
 (1) x - 7 = -4; & \\
 (2) x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}; & \\
 (3) 6x + 5 = 23; & \\
 (4) 2x + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; & \\
 (5) 8x + \frac{3}{4} = -16. & (20 \text{ 分})
 \end{array}$$

10. (出自《日常》第 3 话) 以下关于 x 的方程的解为 2, 求 a 的值:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} 2x + 3a = 7; & \\
 \text{(b)} x + 4 = 4a - 3x. & (8 \text{ 分})
 \end{array}$$

B 组

1. (出自《化物语》) 作出以下函数的图象:

$$(1) y = -\sqrt{2x-4} + 1;$$

$$(2) y = -\sqrt{-x+2}. \quad (20 \text{ 分})$$

2. (出自《冰菓》第 6 话) 求函数 $y = x^2 + x + 1 (0 \leq x \leq 3)$ 的值域, 并在坐标平面中标出. (10 分)

3. (出自 *ef - the first tale*) 已知 x 满足 $\log_2(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(3-x) \leq 0$, 则 x 的取值范围是 $\boxed{\text{甲}} < x \leq \boxed{\text{乙}}$ ^{注 2}. (20 分)

4. (出自《少年同盟》第 6 话) 求 $A(x) = 3x^3 + 4x^2 - x + 1$ 被 $B(x) = x^2 - x - 1$ 所除得到的余式. (10 分)

5. (出自《少年同盟》第 6 话) 求 $C(x) = x^3 - x^2 + x - 4$ 被 $x-1$ 和 $x+2$ 所除得的余数之差. (10 分)

6. (出自《日常》第 3 话) 求三边长分别为 $a=4, b=3, c=2$ 的三角形 $\triangle ABC$ 的面积. (20 分)

7. (出自《日常》第 3 话) 在四面体 $ABCD$ 中, $AB = AC = AD = 5, BC = CD = DB = 6$, M 为 BC 的中点, 求 $\triangle AMD$ 的面积. (20 分)

8. (出自《日常》第 3 话) 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, $AB = 5, BC = 4, CD = 4, \angle B = 60^\circ$. 求四边形 $ABCD$ 的面积 S . (20 分)

9. (出自《我的朋友很少》第 11 话) 已知 $2^n = 2\alpha + \beta, (-3)^n = -3\alpha + \beta$. 求 α, β .^{注 3} (20 分)

10. (出自《魔法少女小圆》第 10 话) 已知

$$f(x) = \frac{4x + \sqrt{4x^2 - 1}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1}},$$

^{注 2} 该题中的 $\log_2(x-1)$ 是根据前后文情况脑补的.

^{注 3} 实在找不到更多信息了, 只能将此题弱化.

求 $f(1) + f(2) + \cdots + f(60)$ 的值. (25 分)

11. (出自《女仆咖啡厅》第 4 话) 方程 $x^3 - 3x^2 + bx - 2 = 0$ 存在一个根 $x = 1 + i$, 求 b 的值. (15 分)

12. (出自《我的朋友很少》第 11 话) 已知存在数列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$, $k \times k$ 的任意矩阵 A 和单位矩阵 E . 若对于任意 $n \in \mathbf{N}$, 都有 $\alpha_n A + \beta_n E = A^n$, 求 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 的通项公式. (25 分)

C 组

1. (出自《女仆咖啡厅》第 4 话) 请填写以下空白:

已知 a 是正实数, 函数 $f(x) = \frac{1}{8}x^2, g(x) = -x^2 + 3ax - 2a^2$. $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 所代表的曲线分别记为 C_1, C_2 .

(a) 设 C_1, C_2 的交点为 P , 点 P 的坐标为 $\left(\frac{\text{甲}}{\text{乙}}a, \frac{\text{丙}}{\text{丁}}a^2\right)$. 曲线 C_1 在 P 点处的切线的方程为

$$y = \frac{\text{戊}}{\text{己}}ax - \frac{\text{庚}}{\text{辛}}a^2.$$

(b) C_1, x 轴和直线 $x = 2$ 所围成的图形的面积为 $\frac{\text{壬}}{\text{癸}}$. C_2 与 x 轴的交点坐标分

别为 $\frac{\text{子}}{\text{丑寅}}$. C_2 与 x 轴所围成图形的面积为 $\frac{\text{卯}}{\text{辰}}a^3$. (30 分)

2. (出自 *Angel Beats!* 第 5 话) 某一声源发出声音的频率为 f_0 , 声音在空气中传播速度为 v . 声源现向静止的观测者运动, 运动速率为 u . 求观测者所听到的声音频率. (10 分)

3. (出自 *ef - the first tale*) 设 a, b 为满足 $a + b = 1$ 的整数. 曲线 $y = x^3 + bx^2, y = ax^2 + abx$ 所围成的部分的面积记为 S , 求 S 的最小值. (40 分)

4. (出自《女仆咖啡厅》第 4 话) 已知 a, b, c 是定值, 函数

$$f(x) = \int_0^x (t^2 + at + b)dt + c$$

在 $x = -1$ 和 $x = 2$ 处取得极值, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线与 x 轴的交点坐标为 $(-1, 0)$. 求 a, b, c 的值, 并作出函数 $f(x)$ 的图象. ^{注 4} (40 分)

5. (出自《女仆咖啡厅》第 4 话) 圆内接三角形 ABC 的边 BC 与圆在 A 点处的切线相交于 P 点. 已知 $BC = 5, AP = 6$, 求 CP 的长度. (10 分)

6. (出自《我女友与青梅竹马的惨烈修罗场》第 7 话) 已知抛物线 $C_1: y = x^2, C_2: y = (x - a)^2 + b (a \neq 0), C: y = p(x - q)^2 + r (p \neq 1)$, 已知 C 与 C_1 仅有一个交点 $P_1(x_1, y_1)$, C 与 C_2 只有一个交点 $P_2(x_2, y_2)$, 且 $x_1 \neq x_2$. 试用 a 和 b 表示出直线 P_1P_2 的斜率. ^{注 5} (60 分)

7. (出自《魔法少女小圆》第 10 话) 已知 p 是质数, $n \in \mathbf{N}$, 求证: $p | (1 + n)^p - n^p - 1$. (60 分)

8. (出自《魔法少女小圆》第 1 话) 已知 a 被 14 除余 6, b 被 14 除余 1, 方程

$$x^2 - 2ax + b = 0$$

存在整数根, 求方程的根 x 被 14 除所得的余数. (50 分)

9. (出自《魔法少女小圆》第 1 话) 求所有整数对 (a, b) , 使得 $a^3 + a^2 - 1 = (a - 1)^b$. (60 分)

10. (出自《魔法少女小圆》) 斐波那契数列 $\{f_n\}$ 定义如下:

$$f_n = \begin{cases} 1 & n = 1, 2; \\ f_{n-1} + f_{n-2} & n > 2. \end{cases}$$

其通项公式为:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

由只有数字 0 和 1 的自然数组成的数列 $\{X_n\}$ 定义如下:

(i) $X_1 = 1$;

^{注 4} 该题系日本弘前大学平成 19 年度入学试验数学科目问题 2.

^{注 5} 该题系 1992 年日本东北大学入学试验数学试题.

- (ii) 将 X_n 中所有的数字 0 替换为 “1”, 将所有的数字 1 替换为 “10” 所得到的数字, 即为 X_{n+1} 的值.

例如, $X_1 = 1, X_2 = 10, X_3 = 101, X_4 = 10110, X_5 = 10110101, \dots$

- (1) 求 X_n 的位数 a_n .

- (2) 求 X_n 中数字 “01” 所出现的次数 b_n .

例如, $b_1 = 0, b_2 = 0, b_3 = 1, b_4 = 1, b_5 = 3, \dots$ ^{注 6} (50 分)

11. (出自《天降之物》第 3 话) 已知关于函数 $y(x)$ 的微分方程

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n,$$

且 $y(0) = 1, \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0$. 回答以下问题:

- (i) 求当 $n = 0$ 时微分方程的解.
- (ii) 令 $y = \frac{z}{x}$, 通过解关于 z 的微分方程, 求出 $n = 1$ 时方程的解.
- (iii) 已知除了 $n = 0, n = 1$ 之外, 存在整数 n , 使该方程的解为

$$y = (1 + ax^2)^m.$$

求出整数 n 和常数 m, a 的值.

- (iv) 求当 x 趋近于 0 时关于 x 的幂级数展开式, 并求出 x^4 项的系数. ^{注 7} (100 分)

12. (出自《天降之物》第 3 话) 回答关于以下 3×3 矩阵的问题:

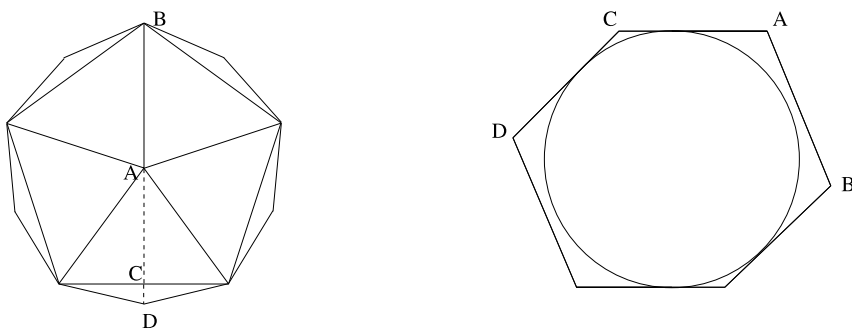
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- (i) 求 A 的特征值和特征向量.

^{注 6} 该题系东京大学 1992 年度入学试验数学试题 (文系) 问题 3.

^{注 7} 该题及以下二题系东京大学 1992 年度入学试验一般教育科目数学试题.

图 1: 第13题图



(ii) 求矩阵方程

$$A^3 + aA^2 + bA = cE = 0$$

的系数 a, b, c . 式中的 E 为 3 行 3 列的单位矩阵, 0 为零矩阵. 使用以上结果, 求 $A^5 - 6A^3 - 4A^2 + 18E$ 的值.

(iii) 对于三维向量空间 R^3 中的向量 \vec{x} , 写出不能用式子

$$\vec{x} = (A - E)\vec{y}$$

所表示的向量 \vec{y} 的一般形式.

(90 分)

13. (出自《天降之物》第 3 话) 我们使用以下方法求由边长为 a 的正三角形构成的正二十面体的体积. 左图为正 20 面体从顶点 A 向中心 O 看去时所得到的平面图, 右图为沿平面 ABC 切割正二十面体所得的剖面图, 其内切球的截面也已画出.

(i) 利用恒等式 $(\cos \theta + i \sin \theta)^5 = \cos 5\theta + i \sin 5\theta$ (i 为虚数单位), 用含 $\cos \theta$ 的多项式来表达 $\cos 5\theta$.

(ii) 利用以上结果求 $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ 的值.

(iii) 求正二十面体内切球的半径.

(iv) 求正二十面体内切球的体积.

(100 分)