

紫荆花之恋

陈立杰

清华大学

2014 年 2 月 13 日

题目描述

往一个树里每次添上一个叶子节点。节点 i 有权值 r_i 。
每次操作后我们要询问有多少对 i, j 满足 $dist(i, j) \leq r_i + r_j$ 。
必须要求在线。

得分情况

60分：钟皓曦，王悦同，余行江，周子凯

50分：刘定峰等4人

40分：俞鼎力等7人

选手交流

数据分布

10%的数据, $n \leq 100$

又10%的数据, $n \leq 1000$

又20%的数据, $n \leq 100000$, 输入为一条链。

又10%的数据, $n \leq 100000$, 所有点 $r_i \leq 10$ 。

又10%的数据, $n \leq 100000$, 输入为随机生成的树。

又15%的数据, $n \leq 70000$ 。无限制。

又25%的数据, $n \leq 100000$ 。无限制。

数据1,2,3,4

每加入一个点，我们计算这个点跟之前的所有点有几对组合是合法的，依次更新答案。

从新加入的点开始dfs，计算答案。

复杂度 $O(n^2)$ 。

数据1,2

你问我支不支持你们得分，我当然支持，你们大老远赶过来比赛我怎么能不支持呢？

但是你说你只会floyd，我能怎么办，也给你10分喽。

每次加入新点之后暴力对新图跑floyd。

复杂度 $O(n^4)$ 。

数据5,6,7,8

令 i 点到1号点的有向距离为 d_i ，那么我们来考虑计算答案。

$$\text{dist}(i, j) = |d_i - d_j|。$$

我们不妨假定 $d_i \leq d_j$ 。

那么前者等价于 $d_j - d_i \leq r_i + r_j \Rightarrow d_j - r_j \leq r_i + d_i$ 。

然后统计一下就行了。

复杂度 $O(n \log n)$ 。

数据5,6,7,8

注意到我们需要一个结构支持插入和统计比某个数 x 小的数有几个。

由于时限大到令人感动，我们没有必要使用BST，使用一些更加好写的结构就可以了。

比如使用一大一小两个有序数组，每次插入就暴力插入小数组，小数组大小超过 \sqrt{n} ，就把小数组跟大数组合并起来再排序。询问就在两个数组里都二分。

复杂度 $O(n^{1.5} \log n)$ 。常数很小。

数据9,10,11,12

不妨以1点为根。

考虑点 u, v ，令他们的Lca为 L ，那

么 $dist(u, v) = dist(u, L) + dist(v, L)$ 。

那么 $dist(u, v) \leq r_u + r_v \Leftrightarrow dist(u, L) - r_u \leq r_v - dist(v, L)$ 。

对于新加入的点，如果我们枚举它跟之前的点的Lca，然后分别计算在这些情况下的答案，问题就变得容易了。

我们注意到，在9,10里，由于 r_i 小于10，所以两个点的距离最多是20。那么我们只要往上枚举20个祖先即可。

在11,12里，由于树是随机生成的，树高是 $O(\log n)$ 级别。

数据9,10,11,12

对每个点 i ，保存它所有子孙 u 的 $dist(u, i) - r_u$ ，和每个孩子的所有子孙的值。

那么对于一个询问我们就能计算出答案。

考虑更新的时候，在9,10中我们只需要更新往上的20个祖先。11,12中祖先数量是 $O(\log n)$ 的。

使用BST维护即可。

复杂度 $O(n \log^2 n)$ 。

100%的数据

如果是离线的情况，我们当然可以使用树的点分治来解决问题。

动态维护点分治。

分块

强制转在线转离线有一个通用办法就是：每一段时间重构一次，中间暴力。

我们不防每 \sqrt{n} 步就暴力重构一次我们的树的点分治结构。

那么每次插入我们需要 $O(\sqrt{n} + \log^2 n)$ 的复杂度。

需要重构 \sqrt{n} 次，每次重构 $O(n \log^2 n)$ ，总复杂度为 $O(n^{1.5} \log^2 n)$ 。

这显然不是最优的，我们可以每 $\sqrt{n} \log n$ 步重构一次，这样总复杂度为 $O(n^{1.5} \log n)$ 。

复杂度不能令人满意。

替罪羊树

我们不妨直接动态维护点分治的结构。

对于每个树的分治，要求它最大子树的大小不能超过 α 乘以它的大小。可以令 α 为0.9左右。

每次插入一个新点，找到它往上最高的不满足条件的祖先，将这个祖先所有的子孙暴力重新分治。

类似于替罪羊树，我们可以证明对于每个操作，平摊下来会重构 $O(\log n)$ 级别大小的子树。

那么总共的时间复杂度就是 $O(n \log^3 n)$ 。

为什么应该把 α 设大？