۹۹۱۳۰۰۳ تمرین ۱ بیدار اعتماد.

۱-

$$A-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\ln(\sqrt{n})+O(1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

★ براساس تعریف ln داریم:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}=\ln(n)+C$$

$$\star\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\ln(2n)-\frac{1}{2}\ln(n)+C=\ln(2n)-\ln(\sqrt{n})+C$$

$$=\ln\left(\frac{2n}{\sqrt{n}}\right)+C=\boxed{\ln(2\sqrt{n})}+\boxed{C}$$

$$\Longrightarrow\ln(2\sqrt{n})+C=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)}$$

$$\xrightarrow[\ln(\sqrt{n})]{}\ln(2\sqrt{n})+C-\ln(\sqrt{n})=\ln\left(\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)+C=\ln(2)+C$$

$$\Longrightarrow\ln(2)+C\subset O(C)\subset O(1)$$

$$\Longrightarrow\ln(2\sqrt{n})+C-\ln(\sqrt{n})=\ln(\sqrt{n})+O(1)-\ln(\sqrt{n})$$

$$\Longrightarrow\ln(2\sqrt{n})+C=\ln(\sqrt{n})+O(1)\Longrightarrow\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\ln(\sqrt{n})+O(1)}$$

Scanned with CamScanner

B. $\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}) = O(n\sqrt{n})$

$$\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}) = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dots+\sqrt{n} \leqslant \sum_{i=1}^{n}(\sqrt{n}) = (n\sqrt{n})$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}) = g(n) \\ n\sqrt{n} = f(n) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{where for all } n>n_0]{\text{exists } n_0} g(n) \leqslant 1 \times f(n)$$

$g(n) = O(f(n))$: Big O - notation پس براساس تعریف O_c *

$$\rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{i}) = O(n\sqrt{n})}$$

۲-)

- $2^{\log_2(n)}$: $2^{\log_2(n)} = y \Rightarrow \log_2\left(2^{\log_2(n)}\right) = \log_2 y$

$$= \log_2(n) \times \underbrace{\log_2 2}_{1} = \log_2 y \rightarrow \underline{n = y = 2^{\log(n)}}$$

$$\rightsquigarrow 2^{\log n} = n = O(n)$$

- $(\log(n))^{\log n} \xrightarrow{\text{لگ نتیجه}} \log\left((\log n)^{\log n}\right) = \log n \log\log n$

$$= \log n^{\log\log n} \longrightarrow n^{\log(\log n)} = (\log(n))^{\log n}$$

- $\underset{\text{ثابت}}{e}^{n} \Rightarrow O(e^{n}) \subset O(c^{n})$

$$-\ 4^{\log(n)} = (2^2)^{\log(n)} = 2^{2\log(n)} = 2^{\log(n)} \times 2^{\log(n)} = n^2$$

$$4^{\log(n)} = n^2 \longrightarrow O\left(4^{\log(n)}\right) \in O\left(n^c\right)$$

$$-\ (n+1)!_e \qquad O(c^n) < O(n!)$$

درنتیجه خواهیم داشت :

$$2^{\log(n)} < 4^{\log(n)} < \left(\log(n)\right)^{\log(n)} < e^n < (n+1)!_e$$

تحلیل ریاضی سؤال ۳ :

$$\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n}\sum_{j=1}^{\log n}\sum_{k=1}^{\log n} 1 = \frac{n}{2}\log^2(n) \in \Theta\left(n\log^2(n)\right)$$

۴-

الف) برای امید ریاضی ما نیاز به یک مدلسازی و بررسی قابل محاسبه و دقیق داریم

طبیعتاً اولین راهی که به ذهن می رسد بررسی همه حالات ممکن برای اشتراک تولد است

اما واضح است که این راه به دلیل تعدد حالات قابل محاسبه نیست

* از طرفی می دانیم که $E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$

اگر به بررسی هر فرد به صورت جدا بپردازیم می توان ادعا کنیم که احتمال اینکه یک فرد خاص با حداقل یک نفر تاریخ تولد یکسان داشته باشد بر اساس اصل متمم به شکل زیر است :

احتمال یکی نبودن دو نفر A و B : $\frac{365}{365}\times\left(\frac{364}{365}\right) = \frac{364}{365}$

احتمال یکی نبودن تولد A با n نفر دیگر : $\left(\frac{364}{365}\right)^{49} \longrightarrow$ حداقل یک نفر مشترک با A : $\left(1-\left(\frac{364}{365}\right)^{49}\right)$

حال با توجه به (*) می توانیم ادعا کنیم :

مجموع احتمال اشتراک تولد هر نفر با حداقل یک نفر = امید ریاضی اشتراک تولد حداقل ۲ نفر

$$\rightarrow E(X) = \underbrace{\left(1-\left(\frac{364}{365}\right)^{49}\right) + \left(1-\left(\frac{364}{365}\right)^{49}\right) + \cdots}_{\text{۵۰ تا}}$$

$$\rightarrow E(X) = 50 \cdot \left(1-\left(\frac{364}{365}\right)^{49}\right) \simeq 6{,}289$$

ب) می دانیم هر روز ۳ حالت دارد:

۱- هیچ تولد X ۲- ۱ تولد Y ۳- بیش از ۱ تولد Z

* امید ریاضی هر ۳ : $\sum E(U) = \sum_{i=1}^{365} 1 = 365 = \sum E(Z) + \sum E(X) + \sum E(Y)$

** $\sum E(X) = \sum_{i=1}^{365} \left(\frac{364}{365}\right)^{50} = 365 \left(\frac{364}{365}\right)^{50}$

*** $\sum E(Y) = \sum_{i=1}^{365} \left(50 \times \frac{1}{365} \times \left(\frac{364}{365}\right)^{49}\right) = 50 \left(\frac{364}{365}\right)^{49}$

$$\sum (E(Z)) = 365 - 365\left(\frac{364}{365}\right)^{50} - 50\left(\frac{364}{365}\right)^{49}$$

$$\simeq \boxed{3.075}$$