MOwNiT - Lab1

Wojciech Dróżdż

March 2022

1 Zadanie

Wyznaczyć wartości funkcji $f(x) = sqrt(x^2 + 1) - 1,\ g(x) = x^2/(sqrt(x^2 + 1) + 1)$ argumentu $x = 8^{-1}, 8^{-2}, 8^{-3}, ...$ Sprawdzić, czy wyznaczone wartości dla obu funkcji (matematycznie tożsamych) sa takie same i spróbować uzasadnić ewentualne różnice. Jak obliczać z kolei wartości dla dużych argumentów (np. x bliskiego najwiekszej liczbie typu double) ?

2 Wstep

Obie funkcje sa matematycznie tożsame, natomiast różnia sie one sposobem zapisu. Oznacza to, że wybrany jezyk programowanie bedzie inaczej określał kolejność działań.

3 Metodologia Testów

Do testów został użyty jezyk *C++* w standardzie 23. Przeprowadzono testy na liczbach typu *float, double, long double.* Test polega na przeprowadzeniu serii obliczeń w petli dla malejacych wartości i sprawdzeniu różnicy w wynikach obliczeń wzgledem danych wejściowych x funkcji *f(x), g(x).*

4 Wyniki Testów

4.1 Testy dla wartości float

x	**f(x)**	**g(x)**	**wspólne cyfry**
1	0.41421353816986083984	0.41421353816986083984	38
0.125	0.0077822208404541015625	0.0077822185121476650238	7
0.015625	0.0001220703125	0.00012206286191940307617	7
0.001953125	1.9073486328125e-06	1.9073468138230964541e-06	5
0.000244140625	0	2.98023223876953125e-08	-2

4.2 Testy dla wartości double

x	**f(x)**	**g(x)**	**wspólne cyfry**
1	0.414213562373095	0.414213562373095	15
0.125	0.00778221853731864	0.00778221853731871	15
0.015625	0.000122062862828676	0.000122062862828759	15
0.001953125	1.9073468138231e-06	1.90734681382657e-06	11
0.000244140625	2.98023219436061e-08	2.98023219436061e-08	14
3.0517578125e-05	4.65661287307739e-10	4.65661287199319e-10	8
3.814697265625e-06	7.27595761418343e-12	7.27595761415696e-12	10
4.76837158203125e-07	1.13686837721616e-13	1.1368683772161e-13	12
5.96046447753906e-08	1.77635683940025e-15	1.77635683940025e-15	13
7.45058059692383e-09	0	2.77555756156289e-17	-2
9.31322574615479e-10	0	4.33680868994202e-19	-2
1.16415321826935e-10	0	6.7762635780344e-21	-2
1.45519152283669e-11	0	1.05879118406788e-22	-2
1.81898940354586e-12	0	1.65436122510606e-24	-2
2.27373675443232e-13	0	2.58493941422821e-26	-2

4.3 Testy dla wartości long double

x	**f(x)**	**g(x)**	**wspólne cyfry**
1	0.414213562373095	0.414213562373095	18
0.125	0.00778221853731871	0.00778221853731871	19
0.015625	0.000122062862828759	0.000122062862828759	19
0.001953125	1.90734681382657e-06	1.90734681382657e-06	15
0.000244140625	2.98023219436061e-08	2.98023219436061e-08	14
3.0517578125e-05	4.65661287199319e-10	4.65661287199319e-10	18
3.814697265625e-06	7.27595761418343e-12	7.27595761415696e-12	10
4.76837158203125e-07	1.13686837721616e-13	1.1368683772161e-13	12
5.96046447753906e-08	1.77635683940025e-15	1.77635683940025e-15	13
7.45058059692383e-09	2.77555756156289e-17	2.77555756156289e-17	16
9.31322574615479e-10	4.33680868994202e-19	4.33680868994202e-19	17
1.16415321826935e-10	0	6.7762635780344e-21	-2
1.45519152283669e-11	0	1.05879118406788e-22	-2
1.81898940354586e-12	0	1.65436122510606e-24	-2
2.27373675443232e-13	0	2.58493941422821e-26	-2

5 Wnioski z testów

Dla wartości typu float tylko pierwsze 3 wartości można uznać za identyczne w jej kontekście (przyjmuje sie że dokładność wartości float w jezyku *C++* wynosi 7 miejsc po przecinku. Kolejny wynik jest różny, a nastepnie wartość *f(x)* zeruje sie i liczby dla kolejnych iteracji sa różne.

Podobna sytuacja ma miejsce dla wartości typu double. Po 9 iteracjach wartość funkcji *f(x)* zeruje sie. Biorac pod uwage przyjmowana dokładność typu double wynoszaca 15 miejsc po przecinku wartości sa identyczne tylko dla pierwszych trzech wartości
Wartość typu long double zeruje sie dopiero po 11 iteracjach. Utrzymuje ona również wiecej wspólnych cyfr po przecinku niż wartość double.

6 Powód różnic w wynikach dla tożsamych funkcji

We wstepnych iteracjach różnice w wynikach wynikaja z innej liczby operacji, jakie musi wykonać program dla $f(x)\ i\ g(x)$ Po kilku iteracjach zaczyna brakować bitów do reprezentacji mantysy dla x, wtedy wyrażenia x^2+1 we wzorach sprowadzaja sie do 1, w tym momencie $f(x) = 0$, a $g(x) = (x^2)/2$

7 Obliczanie Wartości Dla Bardzo Dużych Liczb

Podczas liczenia wartości podanych funkcji przy wartościach x bliskich limitom wielkości typu *double* z dużym prawdopodobieństwem zostanie napotkany bład spowodowany niemożliwościa wykonania operacji x^2, spowodowany wyjściem wyniku poza zakres. W takiej sytuacji można wprowadzić funkcje $f'(x)$ o postaci:

$$f'(x) = sqrt(x^2) - 1$$
$$f'(x) = x - 1$$

Cechy pierwiastkowania sprawia, że powstały w wyniku zamiany funkcji bład jest pomijalny. Przykładowo dla $x = 10^{10}$ i $x = 10^{30}$:

$$\begin{aligned} sqrt((10^{10})^2) - sqrt((10^{10})^2 + 1) &= -5 * 10^{-11} \\ sqrt((10^{30})^2) - sqrt((10^{30})^2 + 1) &= -5 * 10^{-31} \end{aligned}$$