

4. Gölge Fiyat Kavramı ve Duyarlılık Analizleri:

4.1. Gölge Fiyat Kavramı

Gölge fiyatlar doğrusal programlama modellerinde kısıtlarla açıklanan kaynakların bizim için ne kadar değerli olduklarını gösterirler. Şimdi bir örnek üzerinde gölge fiyat kavramını anlamaya çalışalım.

Örnek 14: Ayakkabı İmalathanesi

Bir aile şirketi sahip olduğu atölyede Erkek ve Bayan ayakkabıları üretmektedir. ayakkabılar imalathanedeki işçiler tarafından elle hazırlanmaktadır. Atölyede günde 8 saat çalışan 5 adet işçi bulunmaktadır. Firma bir çift erkek ayakkabısını 1 saatte imal ederken, bayan ayakkabısında bu süre 2 saat olmaktadır. İmal edilen her ayakkabı bir kalıp makinesinde bekletilerek satışa hazır hale getirilmektedir. Firmanın elinde 24 saat aralıksız çalışabilecek 5 adet kalıp makinesi mevcuttur. Erkek ayakkabıları 4 saat ve bayan ayakkabıları 3 saat kalıpta beklemelidirler.

Erkek ayakkabısı için satış fiyatının 40TL ve bayan ayakkabısı için 50TL olduğu dikkate alınır;

- Karı maksimize edecek doğrusal programlama modelini kurunuz.
- Grafik yöntemle soruyu çözünüz ve çözümü yorumlayınız.
- Simpleks yöntemle soruyu çözünüz.
- Eğer yeni bir işçi gelip size bir saat boyunca ayakkabı imalatında yardımcı olabileceğini söylerse, bu kişiye en fazla ne kadar ödemeye razı olursunuz.
- Eğer komşu ayakkabı atölyesinden size boşta olan kalıp makinesini kiralama teklifi gelirse, bu kalıp makinesi için en fazla ne kadar saatlik kiralama bedeli ödeyebilirsiniz.

Öncelikle doğrusal programlama modelini kuralım. Soruda firma tarafından ne kadar erkek ve bayan ayakkabısı üretileceği başlangıçta bilinemediğinden karar değişkenleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

E: Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken erkek ayakkabısı miktarı

B: Karı maksimize etmek için üretilmesi gereken bayan ayakkabısı miktarı

Amaç fonksiyonu değerlerini de satış miktarları ile yazabiliriz.

$$Z_{max} = 40E + 50B$$

Firma için iki farklı kısıt söz konusudur. Üretim işçilerinin çalışma saatlerine bağlı üretim işçiliği kapasite kısıtı ve kalıp makinesinin kapasite kısıtı ayrı ayrı olarak ifade edilmelidir.

Firmada günde 8 saat çalışan 5 işçi var ise, bu durumda toplam $8 \times 5 = 40$ saat toplam günlük işçilik kapasitesi söz konusudur. Diğer taraftan günde 24 saat çalışan 5 kalıp makinesi de toplam $5 \times 24 = 120$ kalıp/saat kalıplama kapasitesine tekabül etmektedir. Bu değerlerde dikkate alınarak kısıt denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$E + 2B \leq 40$$

$$4E + 3B \leq 120$$

Pozitiflik şartı da eklendiğinde modelin son hali aşağıdaki gibi olur.

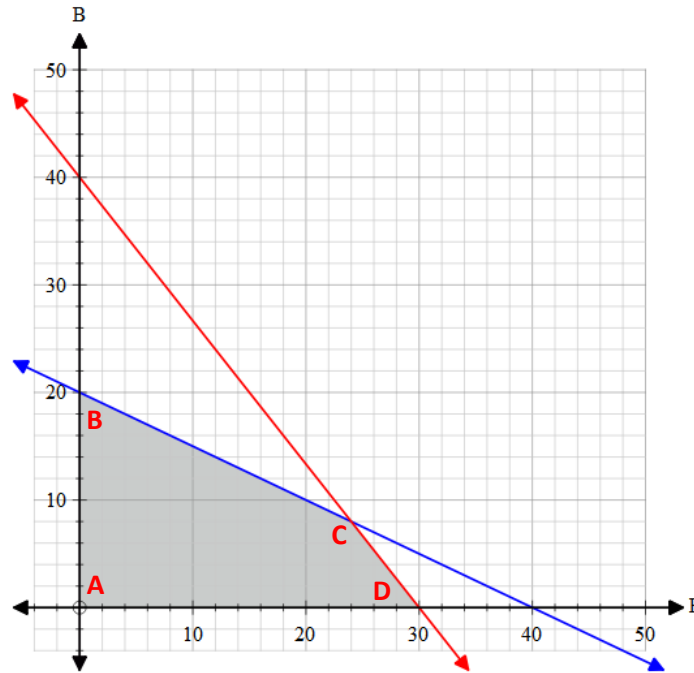
$$Z_{max} = 40E + 50B$$

$$E + 2B \leq 40$$

$$4E + 3B \leq 120$$

$$E, B \geq 0$$

Model tamamlandığına göre artık grafik çözümüne geçebiliriz.



ABCD dörtgeninin köşe noktaları aşağıdaki gibi belirlenmiş ve amaç fonksiyonu değerleri karşısına yazılmıştır.

Uç Nokta	Amaç Değeri
A(0, 0)	$Z_{max} = 40 * 0 + 50 * 0 = 0$ (Minimum)
B(0, 20)	$Z_{max} = 40 * 0 + 50 * 20 = 1000$
C(24, 8)	$Z_{max} = 40 * 24 + 50 * 8 = 1360$ (Maksimum)
D(30, 0)	$Z_{max} = 40 * 30 + 50 * 0 = 1200$

Sorunun çözümüne göre 24 çift erkek ayakkabısı ve 8 çift bayan ayakkabısı üretilirse günlük satış hasılatı 1360TL ile maksimuma ulaşır.

Şimdi ise soruyu simpleks yöntemle çözelim Simpleks çözümlemesine öncelikle modelin standart halini yazarak başlayalım.

Birinci ve ikinci kısıtlar küçük eşit şeklinde yazıldığından sadece S artık değişkenleri ile standartlaştırma yapılması yeterlidir. Bu koşullarda modelin standart hali aşağıdaki gibi olacaktır.

$$Z_{max} = 40E + 50B + 0S_1 + 0S_2$$

$$E + 2B + S_1 = 40$$

$$4E + 3B + S_2 = 120$$

$$E, B, S_1, S_2 \geq 0$$

Şimdi ise simpleks tabloları sırasıyla gösterelim.

	c_j	40	50	0	0		
c_j		E	B	S_1	S_2	STS	MO
0	S_1	1	2	1	0	40	20
0	S_2	4	3	0	1	120	40
Z_j		0	0	0	0	0	
$c_j - Z_j$		40	50	0	0		

	c_j	40	50	0	0		
c_j		E	B	S_1	S_2	STS	MO
50	B	1/2	1	1/2	0	20	40
0	S_2	5/2	0	-3/2	1	60	24
Z_j		25	50	25	0	1000	
$c_j - Z_j$		15	0	-25	0		

	c_j	40	50	0	0		
c_j		E	B	S_1	S_2	STS	MO
50	B	0	1	4/5	-1/5	8	
40	E	1	0	-3/5	2/5	24	
Z_j		40	50	16	6	1360	
$c_j - Z_j$		0	0	-16	-6		

Simpleks çözümle de grafik çözümle bulduğumuz sonucu doğruladık.

Yeni bir işçi geldiğinde ne kadar ödeyebiliriz !!!

Diyelim ki işçi bizim için 1 saat çalışacak. Bu bir saatin bizim için değeri nedir. Öğrenmek aslında çok da zor değil. Yapılması gereken sağ taraf sabitini ilgili kısıtta bir birim arttırıp amaç fonksiyonunda bize ne kadar artı değer oluşturduğuna bakmaktır. Bu işlem sırasında çözüm adımlarını tekrar baştan uygulamak gerekir.

Gölge fiyat olarak adlandırılan aslında kaynağın değerini belirten bu değeri son simpleks tablodan okuyabiliriz. Son simpleks tabloda kaynak değişkenlerinin (ki bu soruda S_1 ve S_2) görece katkı satırı değeri gölge fiyatlarını vermektedir.

Gölge fiyat, kaynağın değerinin bir birim arttığı durumda amaç fonksiyonunun değerinin ne kadar artabileceğinin göstergesidir.

Şimdi tablodan bu değerleri okuyalım. S_1 değişkeni için 16 birim gölge fiyatı okunabilir. Yani eğer sağ taraf sabitini 1 birim arttırsak, amaç değeri 16 birim artar. Bir başka deyişle sağ tarafa sabiti 40 dan 41 e yükseldiğinde amaç değeri de 1360 dan 1376 ya yükselecektir. Bu açıdan bakılırsa yeni işe alınan bir işçiye saatlik en fazla bu değer kadar, yani 16 TL ödemek mantıklı olacaktır.

Benzer şekilde ikinci kaynaktaki bir birim artışın değeri 6 TL olduğundan, komşu atölyeye en fazla bu miktarda bir ödeme saatlik olarak yapılmalıdır.

Eğer kısıtlarımız çeşitlenirse, yani büyük eşit ve eşit kısıtları geldiğinde maksimizasyon sorularında gölge fiyat nasıl yorumlanır. Bir örnekle bu durumu inceleyelim.

Örnek 15: Maksimizasyon Gölge Fiyat

Aşağıda doğrusal programlama modeli ve son simpleks tablosu verilen model için gölge fiyatları belirleyiniz ve bu değerleri yorumlayınız.

$$Z_{max} = 60x_1 + 43x_2$$

$$3x_1 + x_2 \geq 9$$

$$3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	c_j	60	43	0	-M	-M	0	
c_j		x_1	x_2	S_1	A_1	A_2	S_3	STS
60	x_1	1	0	-2/3	2/3	-1/3	0	2
43	x_2	0	1	1	-1	1	0	3
0	S_3	0	0	4/3	4/3	-5/3	1	2
Z_j		60	43	3	-3	23	0	249
$c_j - Z_j$		0	0	-3	-M+3	-M-23	0	

Gölge fiyat yorumları görece katkı satırındaki değerler üzerinden yapılır. Bu yorumu yapmadan hangi değişkenler sayesinde kısıtların değerlendirileceğini belirleyelim.

Gölge fiyat yorumları yapılırken, model standartlaştırılırken eklenen değişkenlerde birim matris oluşturanları dikkate alınır. Bu durumda modelin standart halini yazmak uygun olacaktır.

$$Z_{max} = 60x_1 + 43x_2 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$

$$3x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 9$$

$$3x_1 + 2x_2 + A_2 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + S_3 = 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Yukarıdaki standart hal incelendiğinde birinci kısıtta A_1 , ikinci kısıtta A_2 ve üçüncü kısıtta S_3 +1 katsayılı olduğundan, birim matrisi oluşturan değişkenlerdir ve gölge fiyat yorumlarında bu değişkenleri görece katkı ($c_j - Z_j$) değerleri dikkate alınır.

Maksimizasyon sorularında görece katkı sütunu değerlerinin 0 veya negatif olması beklenir. Gölge fiyat yorumlarında da bu durum dikkate alınır. Yani eğer bir değişkenin gölge fiyat değeri negatif ise bu durumda istenen durum (negatif görece katkı satırı) oluşacağından amaç fonksiyonu istenen şekilde artacaktır. Eğer maksimizasyon sorularında bu değerler pozitif olursa istenenin tersine bir durum oluşacağından gölge fiyatı da olumsuz yönde davranacaktır. Yani bir birimlik sağ tarafı sabiti artışı, amaç fonksiyonunu gölge fiyat değeri kadar düşürür.

Kural: Maksimizasyon sorularında negatif gölge fiyatı söz konusu ise, bir birimlik sağ taraf sabiti artışı amaç fonksiyonunu gölge fiyat kadar artar. Eğer pozitif gölge fiyatı söz konusu ise bu durumda bir birimlik sağ taraf sabiti artışı amaç fonksiyonu değerini gölge fiyat düşürür.

Örneği incelemeye dönersek; öncelikle birinci kısıt için gölge fiyatlara bakalım. Birinci kısıtta kaynağı betimleyen değişken A_1 olacaktır. A_1 için görece katkı değeri ise $-M+3$ olarak karşımıza çıkmaktadır. Gölge fiyatı yorumlarında M değeri dikkate alınmaz. Bu durumda gölge fiyatı değeri +3 olarak karşımıza çıkmaktadır. Maksimizasyon sorularında + değerli gölge fiyatları amaç değerini düşürür. Bir başka deyişle birinci kaynak sağ taraf sabiti 9 dan 10 yükseltirirse amaç değeri de 249 dan 246 ya düşer.

İkinci kaynak için ise kullanacağımız değişken A_2 olacaktır. M değeri dikkate alınmadan gölge fiyatı okunursa -23 değeri ile karşı karşıya kalırız. Negatif gölge fiyat amaca olumlu katkı yapar. Yani ikinci kaynak eğer 12 birimden 13 birime yükseltirirse amaç değeri de 249 dan $249+23=272$ değerine yükselir.

Son olarak inceleyeceğimiz üçüncü kısıt ise S_3 değişkeni ile gösterilmektedir. Bu değişken çözümde olduğundan, bol bir kaynaktır. Yani kaynakta kullanılmayan kapasiteler mevcuttur. Bu durumdaki bir kaynağın gölge fiyatı 0 dır, ki tablodan da bu durum açıkça görülmektedir.

Genel olarak soruyu yorumlamak istiyorsak, eğer firma daha fazla kazanmak istiyorsa birinci kaynağın kapasitesi azaltma veya ikinci kaynağın kını arttırma yolunu tercih edebilir. Ayrıca firma yine üçüncü kaynaktaki atıl kapasite kadar kaynağı azaltarak tasarrufa gidebilir.

Minimizasyon sorularında gölge fiyatların nasıl okunduğunu inceleyelim.

Örnek 16: Minimizasyonda Gölge Fiyat

Aşağıda doğrusal programlama modeli ve son simpleks çözüm tablosu verilen soru için gölge fiyatlarını belirleyiniz ve yorumlayınız.

$$Z_{min} = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$

$$x_2 - x_3 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	c_j	3	2	1	0	M	0	M	
c_j		x_1	x_2	x_3	S_1	A_1	S_2	A_3	STS
2	x_2	1	1	0	-2	2	0	-1	2
0	S_2	-1	0	0	3	-3	1	2	2
1	x_3	0	0	1	1	-1	0	1	2
Z_j		2	2	1	-3	3	0	-1	6
$c_j - Z_j$		1	0	0	3	M-3	0	M+1	

Minimizasyon sorularında yorum mantığı aynıdır. Fakat göreceli katkı satırı farklılığı ve amaç fonksiyonun yönü yorumu değiştirir. Bu tip sorularda göreceli katkı satırı değerlerinin pozitif olması beklenir. Bu duruma uyan gölge fiyatlar amaca iyi yönde katkı yapar ve amaç fonksiyonu değerini düşürürler. Uymayan gölge fiyatlar ise amaç fonksiyonu ile ters yönde katkı yaparlar.

Kural: Minimizasyon sorularında gölge fiyat pozitif ise, amaç fonksiyonu sağ taraf sabitinin her bir birim artışında gölge fiyat kadar düşer. Eğer gölge fiyat negatif ise amaç fonksiyonu ters yönde hareket ederek gölge fiyat kadar yükselir.

Sorudaki tabloya bakarak bu durumu yorumlayalım. Kısıtlar sırası ile Büyük eşit, küçük eşit ve eşitlik şeklinde olduğundan, yine sırası ile A_1 , S_2 ve A_3 değişkenlerini dikkate almak doğru olacaktır.

Birinci kısıtta A_1 değişkeninin gölge fiyatı göreceli katkı satırından M dikkate alınmadan -3 olarak okunur. Bu değer istenildiği gibi pozitif olmadığından amaç fonksiyonuna zıt hareket eder. Yani eğer sağ taraf sabiti bir birim arttırılırsa amaç değeri de 3 birim yükselecektir.

İkinci kısıtta ise bol kaynak durumu söz konusudur. Yani gölge fiyatı 0 olan bu kısıtta sağ taraf sabitini arttırmak veya azaltmak bir şeyi değiştirmez.

Üçüncü kısıtta ise görece katkı satırında M dikkate alınmadığında değer +1 olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu durum istenen bir durum olduğundan amaç fonksiyonu istenen şekilde aşağı çekilebilir. Yani eğer üçüncü kaynakta bir birim artış gerçekleştirirsek, amaç değeri de 1 birim düşecektir.

Gölge fiyatlarında dikkat edilmesi gereken nokta sağ taraf sabitlerinin çözümü bozmadan ne ölçüde değişebileceğidir. Çünkü çözüm değişir ise gölge fiyatları geçerliliğini kaybeder, yani yeniden hesaplanmaları gerekir. Bazı durumlarda kaynak 1 birim arttırmaya dahi izin vermeyebilir. Bu gibi durumlarda kaynakların artış ve azalışa ne kadar duyarlı oldukları incelenmelidir. Bu inceleme “Duyarlılık Analizleri” adı altında değerlendirilecektir.

KISAYOL:

Gölge fiyatlar görece katkı ($c_j - Z_j$) satırında pozitif ise (M dikkate alınmadan), amaç değerini düşürür. Eğer Negatif ise amaç değerini yükseltirler.

Maksimizasyon sorularında yükselme istendiğinden negatif işaretliler olumlu katkı yaparken, Minimizasyon sorularında düşme istendiğinden pozitif işaretliler amaca olumlu katkı yaparlar.

4.2. Duyarlılık Analizleri:

Duyarlılık analizleri sağ taraf sabitlerindeki değişimler ve amaç fonksiyonu katsayılarındaki değişimler olarak iki farklı başlıkta dersimiz içerisinde incelenecektir.

Sağ Taraf Sabitlerindeki Değişmeler:

Gölge fiyat konusunu incelerken özellikle belirtildiği gibi, kaynak değerleri azaltılabilir ve arttırılabilir fakat bu değişimlerin sınırları olmalıdır. “Hangi aralıkta gölge fiyat değerleri bizim için değerlidir” sorusuna cevap verebilmek için sağ taraf sabitleri için duyarlılık analizleri yapılmalıdır.

Örnek 15: (Devam)

Aşağıda doğrusal programlama modeli ve son simpleks tablosu verilen sorunun sağ taraf sabitlerinin hangi aralıkta değişebileceğini sorgulayınız.

$$Z_{max} = 60x_1 + 43x_2$$

$$3x_1 + x_2 \geq 9$$

$$3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	c_j	60	43	0	-M	-M	0	
c_j		x_1	x_2	S_1	A_1	A_2	S_3	STS
60	x_1	1	0	-2/3	2/3	-1/3	0	2
43	x_2	0	1	1	-1	1	0	3
0	S_3	0	0	4/3	4/3	-5/3	1	2
Z_j		60	43	3	-3	23	0	249
$c_j - Z_j$		0	0	-3	-M+3	-M-23	0	

Sağ taraf sabitlerine sırası ile b_1, b_2 ve b_3 diyelim. Öncelikle b_1 için aralık belirlemeye çalışalım.

Sağ taraf sabitlerinde aralık belirleme olayı oldukça kolaydır. Öncelikle son simpleks tabloda, incelenecek kaynağa ait birim matris değişkeni minimum oran hesabı yapılır. İlk kaynakta birim matrise dahil olan değer, büyük eşit kısıtı olduğundan A_1 değişkenidir. Bu değişkene ait minimum oranı aşağıdaki gibi hesaplayalım.

A_1	STS	Minimum Oran
2/3	2	$2 / (2/3) = 3$
-1	3	$3 / (-1) = -3$
4/3	2	$2 / (4/3) = 1,5$

Bulunan minimum oran değerlerinin her biri sağ taraf sabitinden çıkarılır.

$$9 - 3 = 6$$

$$9 - (-3) = 12$$

$$9 - (1,5) = 7,5$$

Bu değerlerden STS değerinden aşağıda olanlarından b_1 değerinin büyük, yukarıda olanlarından küçük olacağı far edilir.

$$b_1 \geq 6$$

$$b_1 \geq 7,5$$

$$b_1 \leq 12$$

b_1 değeri hem 6 dan, hem de 7,5 den büyükse sadece 7,5 den büyük olması dikkate alınır ve aralık değeri aşağıdaki gibi düzgün yazılır.

$$7,5 \leq b_1 \leq 12$$

Benzer şekilde aşağıdaki tabloda b_2 için hesaplamalar verilmiştir. Eşitlik halinde yazılan bu kısıt için kullanılan değişkenin A_2 olduğuna dikkat ediniz.

A_2	STS	Minimum Oran	Sınırlar	Sınır İfadesi
-1/3	2	$2 / (-1/3) = -6$	$12 - (-6) = 18$	$b_2 \leq 18$
1	3	$3 / (1) = 3$	$12 - 3 = 9$	$b_2 \geq 9$
-5/3	2	$2 / (-5/3) = -1,2$	$12 - (-1,2) = 13,2$	$b_2 \leq 13,2$

Tablodaki değerler dikkate alındığında b_2 sağ taraf sabitinin aralık değerleri aşağıda verilmiştir.

$$9 \leq b_2 \leq 13,2$$

Son kısıtın sağ taraf değişimini de inceleyelim. Son kısıt için S_3 değişkeni dikkate alınmaktadır. Çünkü bu kısıtta +1 katsayılı değişken S_3 değişkenidir.

A_2	STS	Minimum Oran	Sınırlar	Sınır İfadesi
0	2	$2 / 0 = \text{Tanımsız}$	-	-
0	3	$3 / 0 = \text{Tanımsız}$	-	-
1	2	$2 / 1 = 2$	$10 - 2 = 8$	$b_2 \geq 8$

Yukarıdaki tablodan da görüleceği üzere sadece kaynağın alt tarafında bir kısıtlama vardır. Yani kaynak 8 değerinin altına düşemez, düşerse çözüme giren değişkenler değişmelidir. Fakat yukarı doğru bir sınırlama yoktur. Tabloya dikkat edilirse üçüncü kısıtın bir bol kaynak durumunda olduğu, yani atıl kapasiteye sahip olduğu görülmektedir. Atıl kapasitesi olan bir kaynağı ne kadar yükseltirseniz yükseltin çözüme etkisi olmaz.

Şimdi bu değerleri gölge fiyatları ile birlikte ele alalım. Örneğin birinci kaynağın gölge fiyatı +3 yani amaca ters hareket etmekte. Bu durumda kaynak değeri 9 değerinden 7,5 değerine çekilerek $3 \times 1,5 = 4,5$ birimlik bir iyileştirme gerçekleştirilebilir. Sonuçta $249 + 4,5 = 253,5$ amaç değerine ulaşılabilir.

İkinci kaynak için incelersek 12 olan değeri 13,2 değerine yükselttiğimizde kaynak değeri -23 olduğunda (amaca ter değil) $1,2 \times 23 = 27,6$ birimlik bir iyileştirme amaç fonksiyonunda gerçekleştirilebilir. Bu durumda amaç değeri $249 + 27,6 = 276,6$ değerine kadar ulaşabilir.

Üçüncü kaynakta ise gölge fiyat sıfırdır. Bu kaynağı biz çözümü değiştirmeden istediğimiz kadar arttırmakla beraber ancak 2 birimlik bir azalışla 8 değerine indirebiliriz. Daha fazla indiğinde çözüm değişir.

Amaç Fonksiyonundaki Katsayılar da Değişmeler:

Bir değişken çözümden çıkmayana kadar katsayı değeri arttırılabilir veya azaltılabilir. Örneğin bir ürünün satış fiyatı, çok fazla yükseltirirse bu durumda daha düşük fiyatlı ürünler yerine bu ürün tercih edilecektir, benzer şekilde çok fazla fiyat düşüşü ise ürünün artık üretilmemesi kararını doğurabilir. O zaman hangi fiyat (veya maliyet) aralığında değişken çözümde kalmaya devam edebilir belirlenmesi gerekir.

Bir değişkenin çözümden çıkması ancak ve ancak başka bir değişkenin göreceli katkı değerinin amaca pozitif katkısı olduğu durumda gerçekleşebilir. Bu ifadeyi aşağıdaki soru ile pekiştirelim.

Örnek 15: (Devam)

Aşağıda doğrusal programlama modeli ve son simpleks tablosu verilen sorunun amaç fonksiyonu katsayılarının hangi aralıkta değişebileceğini sorgulayınız.

$$Z_{max} = 60x_1 + 43x_2$$

$$3x_1 + x_2 \geq 9$$

$$3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	c_j	60	43	0	-M	-M	0	
c_j		x_1	x_2	S_1	A_1	A_2	S_3	STS
60	x_1	1	0	-2/3	2/3	-1/3	0	2
43	x_2	0	1	1	-1	1	0	3
0	S_3	0	0	4/3	4/3	-5/3	1	2
Z_j		60	43	3	-3	23	0	249
$c_j - Z_j$		0	0	-3	-M+3	-M-23	0	

Soruda öncelikle hangi değişkenlerin çözüme alınabileceğini belirleyerek çözüme başlarız. Simpleks çözüm yöntemi kuralı gereği hiçbir yapay değişken (A_1, A_2) çözüme giremez. S_3 değişkeni de çözümde olduğundan bizim için problem oluşturmaz. Burada dikkat edilmesi gereken S_1 değişkenidir. Bu değişken ancak ve ancak göreceli katkı satırı pozitif olduğunda çözüme girecektir. (Soru maksimizasyon olduğundan) Bu durumda önce x_1 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısını sorgulayalım.

x_1 değişkeninin amaç fonksiyonu değerine c_1 diyelim. Bu değer S_1 değişkeninin $c_j - Z_j$ satırı sıfırdan küçük olduğu takdirde çözümde kalacaktır. Bu durumu aşağıdaki gibi yazabiliriz.

c_j		S_1
c_1	x_1	-2/3
43	x_2	1
0	S_3	4/3
Z_j		$c_1 * \left(-\frac{2}{3}\right) + 43 * 1 + 0 * \frac{4}{3}$
$c_j - Z_j$		$0 - \left[c_1 * \left(-\frac{2}{3}\right) + 43\right]$

S_1 değişkeninin çözüme girmemesi için $c_j - Z_j \leq 0$ olmalıdır.

$$0 - \left[c_1 * \left(-\frac{2}{3}\right) + 43\right] \leq 0$$

$$\frac{2c_1}{3} - 43 \leq 0$$

$$c_1 \leq 64,5$$

c_1 için başka bir kısıtlayıcı söz konusu değildir. Yani c_1 değeri 64,5 değerini aştığında çözüm değişirken, değeri 0 dahi olsa çözümü etkilemeyecektir.

Şimdi benzer şekilde x_2 değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısındaki değişimleri inceleyelim. x_2 değişkeni için amaç fonksiyonu katsayısı c_2 olsun.

c_j		S_1
60	x_1	$-2/3$
c_2	x_2	1
0	S_3	$4/3$
Z_j		$60 * -\frac{2}{3} + c_2 * 1 + 0 * \frac{4}{3}$
$c_j - Z_j$		$0 - (c_2 - 40)$

S_1 değişkeninin çözüme girmemesi için $c_j - Z_j \leq 0$ olması gerekliliği dikkate alındığında aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$0 - [c_2 - 40] \leq 0$$

$$c_2 \geq 40$$

c_2 değeri içinde tek bir kısıtlayıcı vardır oda bu değerin 40 dan fazla olması gerekliliğidir.

Başka bir soruda bu durumu pekiştirelim.

Örnek 1: Çamaşır Makinesi (Devam)

Çamaşır makinesi sorusunun son simpleks tablosu aşağıda verilmiştir. Amaç fonksiyonu katsayılarının duyarlılığını araştırınız.

	c_j	6	7	0	0	0	
c_j		ÇM	KM	S_1	S_2	S_3	STS
7	KM	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	20
6	ÇM	1	0	$-1/4$	$3/4$	0	30
0	S_3	0	0	-1	-1	1	200
Z_j		6	7	2	1	0	320
$c_j - Z_j$		0	0	-2	-1	0	

Soruda çözümde olmayan S_1 ve S_2 değişkenlerinin çözüme girme ihtimalleri söz konusudur. Öncelikle ÇM için c_1 katsayısı değişim aralığını inceleyelim.

c_j		S_1	S_2
7	KM	$1/2$	$-1/2$
c_1	ÇM	$-1/4$	$3/4$
0	S_3	-1	-1
Z_j		$7 * \frac{1}{2} + c_1 * -\frac{1}{4} + 0 * -1$	$7 * -\frac{1}{2} + c_1 * \frac{3}{4} + 0 * -1$
$c_j - Z_j$		$0 - [\frac{7}{2} - \frac{c_1}{4}]$	$0 - [\frac{3c_1}{4} - \frac{7}{2}]$

S_1 ve S_2 değişkenlerinin çözüme girmemesi için $c_j - Z_j \leq 0$ olması gerekliliği dikkate alınarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

$$0 - \left[\frac{7}{2} - \frac{c_1}{4} \right] \leq 0 \implies c_1 \leq 14$$

$$0 - \left[\frac{3c_1}{4} - \frac{7}{2} \right] \leq 0 \implies c_1 \geq 4,67$$

İfadeleri birleştirip birlikte ifade edersek aşağıdaki gibi bir aralık bulunur.

$$4,67 \leq c_1 \leq 14$$

Bu aralığın yorumu ise Çamaşır Makinesinin fiyatı 4,67 ile 14 TL arasında oldukça çözüm değişmez, yani her iki makineden de üretmeye devam ederiz. Büyük ihtimalle 14TL yi aşan fiyatlarda çamaşır makinesi tek başına üretilecek, 4,67TL altındaki değerlerde ise çamaşır makinesi üretiminden vazgeçilecektir.

Benzer şekilde Kurutma makinesi içinde duyarlılık analizi gerçekleştirelim.

c_j		S_1	S_2
c_2	KM	1/2	-1/2
6	ÇM	-1/4	3/4
0	S_3	-1	-1
Z_j		$c_2 * \frac{1}{2} + 6 * -\frac{1}{4} + 0 * -1$	$c_2 * -\frac{1}{2} + 6 * \frac{3}{4} + 0 * -1$
$c_j - Z_j$		$0 - \left[\frac{c_2}{2} - \frac{3}{2} \right]$	$0 - \left[\frac{9}{2} - \frac{c_2}{2} \right]$

S_1 ve S_2 değişkenlerinin çözüme girmemesi için $c_j - Z_j \leq 0$ olması gerekir.

$$0 - \left[\frac{c_2}{2} - \frac{3}{2} \right] \leq 0 \implies c_2 \geq 3$$

$$0 - \left[\frac{9}{2} - \frac{c_2}{2} \right] \leq 0 \implies c_2 \leq 9$$

İfadeleri birleştirerek aşağıdaki aralığı buluruz.

$$3 \leq c_2 \leq 9$$

Bu ifadenin yorumu da benzer şekilde kurutma makinesinin fiyatı 3 ila 9 lirası arasında değiştiğinde çözüm aynı kalır, yani her iki makineden de üretilir. Fakat fiyat 9 un üstüne çıkarsa kurutma makinesi tek başına üretilebilirken, 3TL altına düştüğünde ise tamamen üretim hattı çamaşır makinesi üzerine kurulabilir.

ÇALIŞMA SORULARI

SORU 1:

$$Z_{\min} = 5X_1 + 2X_2$$

$$\text{Kısıtlar: } X_1 - X_2 \geq 3$$

$$2X_1 + 3X_2 \geq 5$$

$$\text{Pozitiflik Şartı: } X_1, X_2 \geq 0$$

Yukarıdaki DP modelinin simpleks metot ile çözülmesi durumunda aşağıdaki son simpleks tabloya ulaşılmıştır.

		x1	x2	S1	S2	A1	A2	
	Cj	5	2	0	0	M	M	Çözüm
S2	0	0	-5	-2	1	2	-1	1
X1	5	1	-1	-1	0	1	0	3
	Cj-Zj	0	7	5	0	-5+M	M	15

- Her iki Kaynağın gölge fiyatını yorumlayınız.
- Her iki kaynak için Sağ taraf sabitlerinin duyarlılık analizini gerçekleştiriniz?
- Birinci Karar değişkeni için amaç fonksiyonu katsayısı değişim aralığını belirleyiniz?

$GF_1 = 5$ yani bir birim artışta amaç fonksiyonu 5 birim artar (GF işareti negatif)

$GF_1 = 0$ (ikinci kaynaktaki artışın amaç fonksiyonu üzerinde etkisi yoktur)

$$b_1 \text{ için duyarlılık aralığı } \frac{5}{2} \leq b_1$$

$$b_2 \text{ için duyarlılık aralığı } b_1 \leq 6$$

$$c_1 \text{ için duyarlılık aralığı } 0 \leq c_1$$

SORU 2: Aşağıdaki matematiksel modeli ve son simpleks tabloyu dikkate alarak soruları cevaplayınız.

$$\begin{aligned} Z_{min} \quad & 4x_1 + 3x_2 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

		c_j						
		4	3	0	0	M	M	
		x_1	x_2	S_1	S_2	A_2	A_3	
TD	c_j	-	-	-	-	-	-	STS
S_1	0	0	0	1	-1/4	-1/4	-5/4	9/2
x_2	3	0	1	0	-3/4	3/4	-1/4	9/2
x_1	4	1	0	0	1/2	-1/2	1/2	3
Z_j		4	3	0	-1/4	1/4	5/4	51/2
$c_j - Z_j$		0	0	0	1/4	M-1/4	M-5/4	

a. Modelin Standart formunu yazınız (10 Puan)

$$Z_{min} \quad 4x_1 + 3x_2 + S_1 + S_2 + MA_2 + MA_3$$

$$4x_1 + 3x_2 + S_1 = 30$$

$$x_1 + 2x_2 - S_2 + A_2 = 12$$

$$3x_1 + 2x_2 + A_3 = 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

b. Gölge Fiyatları belirleyip, yorumlayınız. (20 Puan)

Birinci kaynak için gölge fiyatı 0 dır. Çünkü kaynak bol bir kaynaktır. Kullanılmayan 4,5 birimlik bir boşluk vardır.

İkinci kaynak -1/4 gölge fiyatı değerine sahiptir. Soru Minimizasyon olduğundan bu kaynak ters hareket eder. Yani 1 birim kaynak arttırımı, amacı 0,25 birim arttırır.

Üçüncü kaynak -5/4 değerine sahiptir. Soru Minimizasyon olduğundan bu kaynak ters hareket eder. Yani 1 birim kaynak arttırımı, amacı 1,25 birim arttırır.

c. x_1 için amaç fonksiyonu değerinin değişim aralığını belirleyiniz. (10 Puan)

Burada çözüme girme ihtimali olan sadece S_2 değişkeni vardır. Bu değişken dikkate alındığında;

$$c_j - Z_j \geq 0$$

$$0 - \left[\left(0 * -\frac{1}{4} \right) + \left(3 * -\frac{3}{4} \right) + \left(c_1 * \frac{1}{2} \right) \right] \geq 0$$

$$\frac{c_1}{2} \leq -\frac{9}{4}$$

$$c_1 \leq 4,5$$

d. İkinci kısıt için değişim aralığını belirleyiniz. Bu değişim aralığında amaç değeri nasıl değişir. (10 Puan)

A_1	STS	Minimum Oran	Değer	Kısıtlama
-1/4	9/2	$(9/2)/(-1/4) = -18$	$12 - (-18) = 30$	$b_2 \leq 30$
3/4	9/2	$(9/2)/(3/4) = 6$	$12 - 6 = 6$	$b_2 \geq 6$
-1/2	3	$(3)/(-1/2) = -6$	$12 - (-6) = 18$	$b_2 \leq 18$

Kısıtlamaları ortak çözersek, $6 \leq b_2 \leq 18$ sonucu bulunur.

SORU 3: Aşağıdaki matematiksel modeli ve son simpleks tabloyu dikkate alarak soruları cevaplayınız.

$$\begin{aligned} Z_{\min} & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 & \geq 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 8 \\ 4x_1 + 2x_3 & = 12 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{aligned}$$

		c_j							STS
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	A_1	A_3	
TD	c_j	-	-	-	-	-	-	-	
x_3	5	0	4/5	1	-2/5	0	2/5	3/10	2/5
S_2	0	0	3	0	0	1	0	1/2	2
x_1	4	1	-2/5	0	1/5	0	-1/5	-1/8	14/5
Z_j		4	-12/5	5	-14/5	0	6/5	8	
$c_j - Z_j$		0	27/5	0	14/5	0	M-(6/5)	M-8	66/5

a. Modelin Standart formunu yazınız

$$Z_{\min} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - S_1 + S_2 + MA_1 + MA_2$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 - S_1 + A_1 = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + S_2 = 8$$

$$4x_1 + 2x_3 + A_3 = 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

b. Gölge Fiyatları belirleyip, yorumlayınız

$$GF_1 = 6/5 \text{ (negatif - yani bir birim artışta amaç fonksiyonu 1,2 birim artar)}$$

$$GF_2 = 0 \text{ (ikinci kaynaktaki artışın amaç fonksiyonu üzerinde etkisi yoktur)}$$

$$GF_3 = 8 \text{ (negatif - yani bir birim artışta amaç fonksiyonu 8 birim artar)}$$

c. x_1 için amaç fonksiyonu değerinin değişim aralığını belirleyiniz

Burada çözüme girme ihtimali olan sadece S_1 değişkeni vardır. Bu değişken dikkate alındığında;

$$c_1 \text{ için duyarlılık aralığı } 10 \geq c_1$$

d. Üçüncü kısıt için değişim aralığını belirleyiniz. Bu değişim aralığında amaç değeri nasıl değişir.

A_3	STS	Minimum Oran	Değer	Kısıtlama
3/10	2/5	1,33	$12 - (1,33) = 10,67$	$b_3 \geq 10,67$
1/2	2	4	$12 - 4 = 8$	$b_3 \geq 8$
-1/8	14/5	22,4	$12 - (-22,4) = 34,4$	$b_3 \leq 34,4$

Kısıtlamaları ortak çözersek, $10,67 \leq b_3 \leq 34,4$ sonucu bulunur.

Soru 4: Aşağıda bir doğrusal programlama modelinin optimum tablosu (Son Simpleks) verilmiştir.

Cj		3	4	0	0	M	M	
Cj		X ₁	X ₂	S ₁	S ₂	A ₂	A ₃	STS
3	X ₁	1	0	1/2	0	0	-1/2	10
4	X ₂	0	1	-1/2	0	0	3/2	30
0	S ₂	0	0	-1/2	1	-1	7/2	20
Zj		3	4	-1/2	0	0	9/2	150
Cj-Zj		0	0	1/2	0	M	M-(9/2)	

a. Aşağıda soruya ait model verilmiştir. Modeldeki boş bırakılan kısımları (Min veya Maks, Amaç Fonksiyonu Katsayıları ve kısıtların eşitsizlik ifadeleri) son Simpleks tablodan yorumlayarak tamamlayınız. Modelin Standart formunu yazınız. **(7 Puan)**

$$\begin{array}{lll}
 Z_{\min} = \dots X_1 + \dots X_2 & Z_{\min} = 3X_1 + 4X_2 & Z_{\min} = 3X_1 + 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_2 + MA_3 \\
 3X_1 + X_2 \dots 60 & 3X_1 + X_2 \leq 60 & 3X_1 + X_2 + S_1 = 60 \\
 2X_1 + 3X_2 \dots 90 & 2X_1 + 3X_2 \geq 90 & 2X_1 + 3X_2 - S_2 + A_2 = 90 \\
 X_1 + X_2 \dots 40 & X_1 + X_2 = 40 & X_1 + X_2 + A_3 = 40 \\
 X_1, X_2 \geq 0 & X_1, X_2 \geq 0 & X_1, X_2, S_1, S_2, A_2, A_3 \geq 0
 \end{array}$$

b. Matematiksel modelin ikiz (Dual) modelini yazınız ve çözümünü son simpleks tablodan okuyunuz. **(7 Puan)**

$$\begin{array}{ll}
 Z_{\max} = -60Y_1 + 90Y_2 + 40Y_3 & Y_1 = \text{Gölge Fiyat 1} = 1/2 = 0,5 \\
 -3Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \leq 3 & Y_2 = \text{Gölge Fiyat 2} = 0 \\
 -Y_1 + 3Y_2 + Y_3 \leq 4 & Y_3 = \text{Gölge Fiyat 3} = 9/2 = 4,5 \\
 Y_1 \leq 0, \quad Y_2 \geq 0 \text{ ve } Y_3: \text{Serbest} & Z_{\max} = 150
 \end{array}$$

c. Birinci kısıta ait sağ taraf sabitinin (b_1) duyarlılık aralığını belirleyiniz. **(6 Puan)**

A2	STS	M.O	Sınırlar
1/2	10	20	60 - (20) = 40
-1/2	30	-60	60 - (-60) = 120
-1/2	20	-40	60 - (-40) = 100

$$40 \leq b_1 \leq 100$$

Soru 5: Aşağıda bir doğrusal programlama modelinin optimum tablosu (Son Simpleks) verilmiştir.

Cj		12	15	0	0	M	0	M	
Cj		x1	x2	s1	s2	a2	s3	a3	STS
0	s1	0,00	0,00	1,00	1/4	-1/4	1/8	-1/8	50,00
15	x2	0,00	1,00	0,00	-1/2	1/2	1/4	-1/4	20,00
12	x1	1,00	0,00	0,00	1/4	-1/4	-3/8	3/8	30,00
Zj		12,00	15,00	0,00	-9/2	9/2	-3/4	3/4	
Cj-Zj		0,00	0,00	0,00	9/2	M-9/2	3/4	M-3/4	660,00

a. Aşağıda soruya ait model verilmiştir. Modeldeki boş bırakılan kısımları (Min veya Maks, Amaç Fonksiyonu Katsayıları ve kısıtların eşitsizlik ifadeleri) son Simpleks tablodan yorumlayarak tamamlayınız. Modelin Standart formunu yazınız. **(7 Puan)**

$$\begin{aligned}
 Z_{\min} &= \dots X_1 + \dots X_2 & Z_{\min} &= 12X_1 + 15X_2 & Z_{\min} &= 12X_1 + 15X_2 + 0S_1 + 0S_2 + MA_2 + MA_3 \\
 X_1 + X_2 &\dots 100 & X_1 + X_2 &\leq 100 & X_1 + X_2 + S_1 &= 100 \\
 2X_1 + 3X_2 &\dots 120 & 2X_1 + 3X_2 &\geq 120 & 2X_1 + 3X_2 - S_2 + A_2 &= 120 \\
 4X_1 + 2X_2 &\dots 160 & 4X_1 + 2X_2 &\geq 160 & 4X_1 + 2X_2 - S_3 + A_3 &= 160 \\
 X_1, X_2 &\geq 0 & X_1, X_2 &\geq 0 & X_1, X_2, S_1, S_2, A_2, A_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

b. Matematiksel modelin ikiz (Dual) modelini yazınız ve çözümünü son simpleks tablodan okuyunuz. **(7 Puan)**

$$\begin{aligned}
 Z_{\max} &= -100Y_1 + 120Y_2 + 160Y_3 & Y_1 &= \text{Gölge Fiyat 1} = 0 \\
 -Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 &\leq 12 & Y_2 &= \text{Gölge Fiyat 2} = 4,5 \\
 -Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 &\leq 15 & Y_3 &= \text{Gölge Fiyat 3} = 0,75 \\
 Y_1 &\leq 0, \quad Y_2 \text{ ve } Y_3 &\geq 0 & Z_{\max} = 660
 \end{aligned}$$

c. İkinci kısıta ait sağ taraf sabitinin (b_2) duyarlılık aralığını belirleyiniz. **(6 Puan)**

A2	STS	M.O	Sınırlar	
-1/4	50	-200	$120 - (-200) = 320$	$80 \leq b_2 \leq 240$
1/2	20	40	$120 - 40 = 80$	
-1/4	30	-120	$120 - (-120) = 240$	

SORU 6: Aşağıda verilen model ve son simpleks tablo için soruları uygun şekilde cevaplayınız.

$$\begin{aligned}
 &Z_{\min} 45x_1 \\
 &+ 36x_2 \\
 &3x_1 + 4x_2 \\
 &\geq 32 \\
 &2x_1 + x_2 = 13 \\
 &4x_1 - x_2 \leq 12 \\
 &x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

		c_j	45	36	0	M	M	0	
			x_1	x_2	S_1	A_1	A_2	S_3	STS
36	x_2		0	1	-2/5	2/5	-3/5	0	5
45	x_1		1	0	1/5	-1/5	4/5	0	4
0	S_3		0	0	-6/5	6/5	-19/5	1	1
Z_j			45	36	-29/5	29/5	72/5	0	
$c_j - Z_j$			0	0	29/5	M-29/5	M-72/5	0	360

a) Primal modelin dualini alınız. (6 Puan)

Temel Minimum Dönüşümü	Dual Model	
$Z_{\min} 45x_1 + 36x_2$ $3x_1 + 4x_2 \geq 32 \rightarrow Y_1$ $2x_2 + x_3 \geq 13 \rightarrow Y_2$ $-4x_1 + x_2 \geq -12 \rightarrow Y_3$ $x_1, x_2 \geq 0$	$Z_{\max} 32Y_1 + 13Y_2 - 12Y_3$ $3Y_1 + 2Y_2 - 4Y_3 \leq 45$ $4Y_1 + Y_2 + Y_3 \leq 36$	Pozitiflik Şartı $Y_1 \geq 0$ $Y_2: \text{Sınırlandırılmamış}$ $Y_3 \leq 0$

b)Gölge Fiyatlarını Belirleyip Yorumlayınız. (7 Puan)

Birinci Kaynak Gölge Fiyat	İkinci Kaynak Gölge Fiyat	Üçüncü Kaynak Gölge Fiyat
Gölge Fiyat = 29/5 \rightarrow 5,4	Gölge Fiyat = 72/5 \rightarrow 14,4	Gölge Fiyat = 0
STS 32 bir birim artarsa Z amaç değeri 5,4 birim artar (Negatif İşaretten Dolayı) 32 \rightarrow 33 / 360 \rightarrow 365,4	STS 13 bir birim artarsa Z amaç değeri 14,4 birim artar (Negatif İşaretten Dolayı) 13 \rightarrow 14 / 360 \rightarrow 374,4	STS 12 bir birim artarsa Z amaç değeri değişmez 12 \rightarrow 13 / 360 \rightarrow 360

c) Birinci kaynak için sağ taraf sabiti değişim aralığını belirleyiniz. (6 Puan)

A_1	STS	Min.Oran		
2/5	5	5/(2/5)=12,5	32-12,5=19,5	$b_1 \geq 19,5$
-1/5	4	4/(-1/5)=-20	32-(-20)=52	$b_1 \leq 52$
6/5	1	1/(6/5)=0,83	32-0,83=31,17	$b_1 \geq 31,17$

$$31,17 \leq b_1 \leq 52$$

d) x_2 değişkeni amaç fonksiyonu katsayısı için değişim aralığını belirleyiniz. (6 Puan)

S1 sütunu için $c_j - Z_j$ değeri sıfırdan büyük olduğu sürece çözüm bozulmaz.

$$c_j - Z_j \geq 0 \implies 0 - \left(c_2 * -\frac{2}{5} + 45 * \frac{1}{5} + 0 * -\frac{6}{5} \right) \geq 0$$

$$\frac{2c_2}{5} - 9 \geq 0 \implies c_2 \geq 22,5$$

Soru 7: Aşağıda bir doğrusal programlama problemine ait matematiksel model ve simpleks çözümünde yer alan son tablo verilmiştir. Model ve Son tabloyu dikkate alarak sorunun şıklarını çözünüz?

$$Z_{\max} 15X_1 + 12X_2$$

$$2X_1 + X_2 \leq 100$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 120$$

$$3X_1 + 4X_2 \leq 300$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

C_j		15	12	0	0	-M	0	
		X_1	X_2	S_1	S_2	A_2	S_3	
TD	C_j	-	-	-	-	-		STS
S_2	0	0	0	6/5	1	-1	1	60
X_1	15	1	0	4/5	0	0	-1/5	20
X_2	12	0	1	-3/5	0	0	2/5	60
Z_j		15	12	24/5	0	0	9/5	
$C_j - Z_j$		0	0	-24/5	0	-M	-9/5	1020

a) Verilen Primal Modelin dualini alınız.

Primal Model	Temel Maksimum	Dual Model
$Z_{\max} 15X_1 + 12X_2$	$Z_{\max} 15X_1 + 12X_2$	$Z_{\min} 100Y_1 - 120Y_2 + 300Y_3$
$2X_1 + X_2 \leq 100$	$2X_1 + X_2 \leq 100$ (Y_1)	$2Y_1 - 3Y_2 + 3Y_3 \geq 15$
$3X_1 + 2X_2 \geq 120$	$-3X_1 - 2X_2 \leq -120$ (Y_2)	$Y_1 - 2Y_2 + 4Y_3 \geq 12$
$3X_1 + 4X_2 \leq 300$	$3X_1 + 4X_2 \leq 300$ (Y_3)	Y_1 ve $Y_3 \geq 0$
$X_1, X_2 \geq 0$	$X_1, X_2 \geq 0$	$Y_2 \leq 0$

b) Her üç kaynak için gölge fiyatları belirleyiniz ve kısaca yorumlayınız.

Birinci Kısıt Gölge Fiyat	İkinci Kısıt Gölge Fiyat	Üçüncü Kısıt Gölge Fiyat
$GF_1 = 24/5 = 4,80$	$GF_2 = 0$ (M dikkate alınmaz)	$GF_3 = 9/5 = 1,80$
100 → 101 olurken	120 → 121 olurken	300 → 301 olurken
Amaç	Amaç	Amaç
1020 → 1020+4,80	1020 değişmez	1020 → 1020+1,80
= 1024,80 olur		= 1021,80 olur

c) Birinci kısıta ait sağ taraf sabiti (b_1) için duyarlılık analizini gerçekleştiriniz.

Birinci kısıt için S_1 sütununda minimum oran hesaplanmalı

S_1	STS	Min.Oran		
6/5	60	$60 / (6/5) = 50$	$100 - 50 = 50$	$b_1 \geq 50$
4/5	20	$20 / (4/5) = 25$	$100 - 25 = 75$	$b_1 \geq 75$
-3/5	60	$60 / (-3/5) = -100$	$100 - (-100) = 200$	$b_1 \leq 200$

$$75 \leq b_1 \leq 200$$

d) X_1 değişkenine ait amaç fonksiyonu katsayısı (C_1) için duyarlılık analizini gerçekleştiriniz

$$S_1 \text{ sütunundan } C_j - Z_j \leq 0 \rightarrow 0 - (0 * (6/5) + C_1 * (4/5) + 12 * (-3/5)) \leq 0 \rightarrow C_1 \geq 9$$

$$S_3 \text{ sütunundan } C_j - Z_j \leq 0 \rightarrow 0 - (0 * (1) + C_1 * (-1/5) + 12 * (2/5)) \leq 0 \rightarrow C_1 \leq 24$$

$$9 \leq C_1 \leq 24$$

Soru 8: Aşağıda bir doğrusal programlama problemine ait matematiksel model ve simpleks çözümünde yer alan son tablo verilmiştir. Model ve Son tabloyu dikkate alarak sorunun şıklarını çözünüz?

Z_{\max}	$15X_1+20X_2$	M=100		15	20	0	0	-M	0	
$2X_1+3X_2 \leq 70$	x1			x2	s1	s2	a2	s3	STS	
$5X_1+3X_2 \geq 120$	20	x2	0	1	1	0	0	-2		10
$X_1+X_2 \leq 30$	15	x1	1	0	-1	0	0	3		20
$X_1, X_2 \geq 0$	0	s2	0	0	-2	1	-1	9		10
		Zj	15	20	5	0	-0	5		500
		Cj-Zj	0	0	-5	0	-M	-5		

a) Verilen Primal Modelin dualini alınız. (7 Puan)

Primal Model	Temel Maksimum	Dual Model
Z_{\max}	$15X_1+20X_2$	Z_{\min}
$2X_1+3X_2 \leq 70$	$2X_1+3X_2 \leq 70$ (Y_1)	$2Y_1-5Y_2+Y_3 \geq 15$
$5X_1+3X_2 \geq 120$	$-5X_1-3X_2 \leq -120$ (Y_2)	$3Y_1-3Y_2+Y_3 \geq 20$
$X_1+X_2 \leq 30$	$X_1+X_2 \leq 30$ (Y_3)	Y_1 ve $Y_3 \geq 0$
$X_1, X_2 \geq 0$	$X_1, X_2 \geq 0$	$Y_2 \leq 0$

b) Her üç kaynak için gölge fiyatları belirleyiniz ve kısaca yorumlayınız. (6 Puan)

Birinci Kısıt Gölge Fiyat	İkinci Kısıt Gölge Fiyat	Üçüncü Kısıt Gölge Fiyat
$GF_1 = 5$	$GF_2 = 0$ (M dikkate alınmaz)	$GF_3 = 5$
$70 \rightarrow 71$ olurken	$120 \rightarrow 121$ olurken	$30 \rightarrow 31$ olurken
Amaç	Amaç	Amaç
$500 \rightarrow 500 + 5$	500 değişmez	$500 \rightarrow 500 + 5$
$= 505$ olur		$= 505$ olur

c) Birinci kısıta ait sağ taraf sabiti (b_1) için duyarlılık analizini gerçekleştiriniz.

Birinci kısıt için S_1 sütununda minimum oran hesaplanmalı

S_1	STS	Min.Oran		
1,00	10	$10 / (1) = 10$	$70-10=60$	$b_1 \geq 60$
-1,00	20	$20 / (-1) = -20$	$70-(-20)=90$	$b_1 \leq 90$
-2,00	10	$10 / (-2) = -5$	$70-(-5)=75$	$b_1 \leq 75$

$$60 \leq b_1 \leq 75$$

d) X_2 değişkenine ait amaç fonksiyonu katsayısı (C_2) için duyarlılık analizini gerçekleştiriniz.

$$S_1 \text{ sütunundan } C_j - Z_j \leq 0 \rightarrow 0 - (C_2 * (1) + 15 * (-1) + 0 * (-2)) \leq 0 \rightarrow C_2 \geq 15$$

$$S_3 \text{ sütunundan } C_j - Z_j \leq 0 \rightarrow 0 - (C_2 * (-2) + 15 * (3) + 0 * (9)) \leq 0 \rightarrow C_2 \leq 22,5$$

$$15 \leq C_2 \leq 22,5$$

Soru 9: Aşağıda bir doğrusal programlama problemine ait matematiksel model ve simpleks çözümünde yer alan son tablo verilmiştir. Model ve Son tabloyu dikkate alarak sorunun şıklarını çözünüz?

$$Z_{\max} 20X_1 + 27X_2$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 95$$

$$4X_1 + 7X_2 \geq 220$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 105$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

		20	27	0	0	-M	0	
		x1	x2	s1	s2	a2	s3	STS
20	x1	1	0	3/5	0	0	-2/5	15
27	x2	0	1	-2/5	0	0	3/5	25
0	s2	0	0	-2/5	1	-1	13/5	15
	Zj	20	27	6/5	0	0	41/5	
	Cj-Zj	0	0	-6/5	0	-M	-41/5	975

a) Verilen Primal Modelin dualini alınız. (6 Puan)

Temel Maksimum	Dual Model
$Z_{\max} 20X_1 + 27X_2$	$Z_{\min} 95Y_1 - 220Y_2 + 105Y_3$
$3X_1 + 2X_2 \leq 95 \rightarrow Y_1$	$3Y_1 - 4Y_2 + 2Y_3 \geq 20$
$-4X_1 - 7X_2 \leq -220 \rightarrow Y_2$	$2Y_1 - 7Y_2 + 3Y_3 \geq 27$
$2X_1 + 3X_2 \leq 105 \rightarrow Y_3$	$Y_1, Y_3 \geq 0 \text{ ve } Y_2 \leq 0$
$X_1, X_2 \geq 0$	

b) Her üç kaynak için gölge fiyatları belirleyiniz ve kısaca yorumlayınız. (6 Puan)

Birinci Kısıt Gölge Fiyat	İkinci Kısıt Gölge Fiyat	Üçüncü Kısıt Gölge Fiyat
$GF_1 = 6/5 = 1,2$	$GF_2 = 0$ (M dikkate alınmaz)	$GF_3 = 41/5 = 8,2$
$95 \rightarrow 96$ olurken	$220 \rightarrow 221$ olurken	$105 \rightarrow 106$ olurken
Amaç	Amaç	Amaç
$975 \rightarrow 975 + 1,2$	975 değişmez	$975 \rightarrow 975 + 8,2$
$= 976,2$ olur		$= 983,2$ olur

c) Birinci kısıta ait sağ taraf sabiti (b_1) için duyarlılık analizini gerçekleştiriniz. (6 Puan)

S ₁	STS	Min.Oran		
3/5	15	$15 / (3/5) = 25$	$95 - 25 = 70$	$b_1 \geq 70$
-2/5	25	$25 / (-2/5) = -62,5$	$95 - (-62,5) = 157,5$	$b_1 \leq 157,5$
-2/5	15	$15 / (-2/5) = -37,5$	$95 - (-37,5) = 132,5$	$b_1 \leq 132,5$

$$70 \leq b_1 \leq 132,5$$

d) X_1 değişkenine ait amaç fonksiyonu katsayısı (C_1) için duyarlılık analizini gerçekleştiriniz. (7 Puan)

$$S_1 \text{ sütunundan } C_j - Z_j \leq 0 \rightarrow 0 - (C_2 * (3/5) + 27 * (-2/5) + 0 * (-2/5)) \leq 0 \rightarrow C_2 \geq 18$$

$$S_3 \text{ sütunundan } C_j - Z_j \leq 0 \rightarrow 0 - (C_2 * (-2/5) + 27 * (3/5) + 0 * (13/5)) \leq 0 \rightarrow C_2 \leq 40,5$$

$$18 \leq C_2 \leq 40,5$$

Soru 10: Aşağıda bir doğrusal programlama modelinin optimum tablosu (Son Simpleks) verilmiştir.

		Cj							STS
		12	7	0	0	-M	0	-M	
Cj		x1	x2	s1	s2	a2	s3	a3	
12	x1	1	0	-2	0	-7	3	-3	10
0	s2	0	0	-5/2	1	1	3	-3	24
7	x2	0	1	5	0	12	-9/2	9/2	15
Zj		12	7	11	0	0	9/2	-9/2	225
Cj-Zj		0	0	-11	0	-M	-9/2	-M+9/2	

a. Sorunun modeli aşağıdaki gibi ise bu durumda gölge fiyatları bularak amaç değerini ne şekilde etkileyeceğini hesaplayınız. **(8 Puan)**

	Gölge Fiyat 1= 11	Gölge Fiyat 2 = 0	Gölge Fiyat 3= 4,5
$Z_{max} 12x_1 + 7x_2$			
$4x_1 + 3x_2 \leq 100$	100 → 101	90 → 91	55 → 56
$3x_1 + 5x_2 \geq 90$	225 → 236	225 → 225	225 → 220,5
$x_1 + 3x_2 \geq 55$	Amacı artırır.	Amaç değişmez.	Amacı azaltır.
$x_1, x_2 \geq 0$			

b. x_1 değişkeni amaç fonksiyonu katsayısı için (C_1) duyarlılık aralığını belirleyiniz ve yorumlayınız. **(8 Puan)**

S1 çözüme girerse $C_j - Z_j \geq 0$ olmalı

$$0 - \left(C_1 * -2 + 0 * -\frac{5}{2} + 7 * 5 \right) \leq 0$$

$$2C_1 - 35 \leq 0$$

$$C_2 \leq 17,5$$

S3 çözüme girerse $C_j - Z_j \geq 0$ olmalı

$$0 - (C_1 * 3 + 0 * 3 + 7 * -9/2) \leq 0$$

$$-3C_1 + 31,5 \leq 0$$

$$C_1 \geq 10,5$$

$$10,5 \leq C_1 \leq 17,5$$

c. Birinci kısıta ait sağ taraf sabitinin (b_1) duyarlılık aralığını belirleyiniz. **(8 Puan)**

S2	STS	M.O	Sınırlar	$97 \leq b_2 \leq 105$
-2	10	-5	$100 - (-5) = 105$	
-5/2	24	-9,6	$100 - (-9,6) = 109,6$	
5	15	3	$100 - 3 = 97$	

d. Firma eğer sadece birinci kaynağa yatırım yapmayı düşünüyor ise bu durumda firmanın toplam kazancı en fazla nereye kadar yükselebilir. Soruyu a ve c şıklarında yer alan bilgilere göre cevaplayınız. **(6 Puan)**

Birinci kaynağı gölge fiyatı 11 dir ve amaç ile aynı yönde (amacı arttırıcı) etki göstermektedir. Eğer firma ikinci kaynağın sağ taraf sabitini (kapasitesini) artırırsa karı yükselir. C şığında yer alan bilgiye göre firma 100 den 105 e kadar sağ taraf sabitini değiştirebilmektedir. Bu durumda toplam kazanç 1 birimde 11 birim artarsa 5 birim artışta $5 * 11 = 55$ birim artabilir.

$225 + 55 = 280$ TL toplam kar elde edebilecek şekilde birinci kısıta yatırım yapılabilir.

Soru 11: Aşağıda bir doğrusal programlama modelinin optimum tablosu (Son Simpleks) verilmiştir.

Cj		9	5	0	0	-M	0	-M	
Cj		x1	x2	s1	s2	a2	s3	a3	STS
9	x1	1	0	-2	0	-5	4	-3	24
0	s2	0	0	-3/2	1	1	5/2	1	36
5	x2	0	1	6	0	9	-6	4	18
Zj		9	5	12	0	0	6	-7	
Cj-Zj		0	0	-12	0	-M	-6	-M+7	306

a. Sorunun modeli aşağıdaki gibi ise bu durumda gölge fiyatları bularak amaç değerini ne şekilde etkileyeceğini hesaplayınız. **(8 Puan)**

	Gölge Fiyat 1= 12	Gölge Fiyat 2 = 0	Gölge Fiyat 3= 7
$Z_{max} 9x_1 + 5x_2$			
$2x_1 + 4x_2 \leq 120$	120 → 121	120 → 121	90 → 91
$5x_1 + 2x_2 \geq 120$	306 → 318	306 → 306	306 → 299
$3x_1 + x_2 \geq 90$	Amacı artırır.	Amaç değişmez.	Amacı azaltır.
$x_1, x_2 \geq 0$			

b. x_1 değişkeni amaç fonksiyonu katsayısı için (C_1) duyarlılık aralığını belirleyiniz ve yorumlayınız. **(8 Puan)**

S1 çözüme girerse $C_j - Z_j \geq 0$ olmalı

$$0 - \left(C_1 * -2 + 0 * -\frac{3}{2} + 5 * 6 \right) \leq 0$$

$$2C_1 - 30 \leq 0$$

$$C_2 \leq 15$$

S3 çözüme girerse $C_j - Z_j \geq 0$ olmalı

$$0 - \left(C_1 * 4 + 0 * \frac{5}{2} + 5 * -6 \right) \leq 0$$

$$-4C_1 + 30 \leq 0$$

$$C_1 \geq 7,5$$

$$7,5 \leq C_1 \leq 15$$

c. Birinci kısıta ait sağ taraf sabitinin (b_1) duyarlılık aralığını belirleyiniz. **(8 Puan)**

<u>S2</u>	<u>STS</u>	<u>M.O</u>	<u>Sınırlar</u>
-2	24	-12	$120 - (-48) = 132$
-3/2	36	-24	$120 - (-24) = 144$
6	18	3	$120 - 3 = 117$

$$117 \leq b_2 \leq 132$$

d. Firma eğer sadece birinci kaynağa yatırım yapmayı düşünüyor ise bu durumda firmanın toplam kazancı en fazla nereye kadar yükselebilir. **(6 Puan)**

Birinci kaynağı gölge fiyatı 12 dir ve amaç ile aynı yönde (amacı arttırıcı) etki göstermektedir. Eğer firma ikinci kaynağın sağ taraf sabitini (kapasitesini) artırırsa karı yükselir. C şıkkında yer alan bilgiye göre firma 120 den 132 ye kadar sağ taraf sabitini değiştirebilmektedir. Bu durumda toplam kazanç 1 birimde 12 birim artarsa 12 birim artışta $12*12=144$ birim artabilir.

$306 + 12*12 = 450$ TL toplam kar elde edebilecek şekilde birinci kısıta yatırım yapılabilir.