$\theta_{MLE} = \arg\max_{\theta} \sum \log P(x;|\theta)$

1- (I) a-

$\theta_{MAP} = \arg\max_{\theta} P(x|\theta) P(\theta) = \arg\max_{\theta} \sum \log P(x;|\theta) P(\theta)$

اگر متغیر $P(\theta)$ را ثابت اشتباه ... سراسری Prior علامت استفاده نکنیم MAP، MLE یکی می شوند.

b - در صورتی که data ها conditionally independent باشند.

(II)

a) $f(x_k;\theta) = \theta \exp(-\theta x_k)$ $x_k \geq 0$ $\theta > 0$

$$L(\theta) = \prod_{q=1}^{Q} f(x_q|\theta) = \prod \theta \exp(-\theta x_q) = \theta^Q \exp\left(-\theta \sum_1^Q x_q\right)$$

$$\frac{dL}{d\theta} = Q\theta^{Q-1} \exp(-\theta \sum x_q) - \theta^Q \sum x_q \exp(-\theta \sum x_q)$$

$$= \exp(-\theta \sum x_q)\left(Q\theta^{Q-1} - \theta^Q \sum x_q\right)$$

$$\frac{dL}{d\theta} = 0 \longrightarrow Q\theta^{Q-1} = \theta^Q \sum x_q \Rightarrow \theta = \frac{Q}{\sum_1^Q x_q}$$

b) $f(x_k;\theta) = \frac{x_k}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\theta^2}\right)$

$$L(\theta) = \prod_{q=1}^{Q} f(x_q|\theta) = \prod \frac{x_q}{\theta^2} \exp\left(-\frac{x_q^2}{2\theta^2}\right)$$

$$= \theta^{-2Q} \prod x_q \exp\left(-\frac{\sum x_q^2}{2\theta^2}\right)$$

$$\longrightarrow \ln(L) = \ln(\prod x_q) - 2Q \ln\theta + \left(-\frac{1}{2\theta^2} \sum x_q^2\right)$$

$$\longrightarrow \frac{d\ln(L)}{d\theta} = -\frac{2Q}{\theta} + \sum \frac{x_q^2}{\theta^3}$$

$$= 0 \longrightarrow -2Q\theta^2 + \sum x_q^2 = 0 \longrightarrow \theta = \sqrt{\frac{\sum x_q^2}{2Q}}$$

c) $f(x_u; \theta) = \sqrt{\theta}\, x_u^{\sqrt{\theta}-1}$

$L(\theta) = \prod f(x_q | \theta) = \prod \sqrt{\theta}\, x_q^{\sqrt{\theta}-1} = \theta^{\frac{Q}{2}} \prod x_q^{\sqrt{\theta}-1}$

$\rightarrow \ln(L(\theta)) = \frac{Q}{2} \ln(\theta) + (\sqrt{\theta}-1) \sum \ln(x_q)$

$\dfrac{d \ln(L)}{d\theta} = \dfrac{Q}{2\theta} - \dfrac{1}{\sqrt{\theta}} \sum \ln(x_q) = 0 \rightarrow \sqrt{\theta} = \dfrac{Q}{2 \sum \ln(x_q)}$

.2

a) $L(\theta) = \prod f(x|\theta)$

$L(\theta) = 0 \leftarrow f(x|\theta) = 0 \leftarrow \theta < \max(D)$ اگر

هـ در غیر این صورت $L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n$

برای اینکه $L(\theta)$ بیشترین مقدار شود لازم است که θ کمترین مقدار شود.

و این کمترین مقدار نباید کمتر از $\max(D)$ باشد چراکه $L(\theta)=0$ می‌شود

پس $\theta = \max(D)$ بهترین است.

نمودار مربوط در فایل <u>2.b.png</u> ضمیمه شده است

از آنجایی که احتمال تابعی یکنواخت است، تناوبی ندارد و همه مشاهدات یکسان است

$P(x | \mu, \Sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^D |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$ .3

$P(\mu|x) = \dfrac{P(x|\mu) P(\mu)}{P(x)} \rightarrow L(\mu) = \prod_{q=1}^{Q} \dfrac{P(x_q|\mu) P(\mu)}{P(x_q)}$

$= \prod_0^Q \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^D |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_q-\mu)^T \Sigma^{-1}(x_q-\mu)\right) \times \prod \dfrac{1}{P(x_q)} \times (P(\mu))^Q$

$= \left(\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^D |\Sigma|}}\right)^Q \times \prod \dfrac{1}{P(x_q)} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum (x_q-\mu)^T \Sigma^{-1}(x_q-\mu)\right)$

$\times \left[\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^D |\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mu-\mu_\circ)^T \Sigma^{-1}(\mu-\mu_\circ)\right)\right]^Q$

$\ln(L(\mu)) = -Q \ln\left((2\pi)^D |\Sigma|\right) + \sum -\ln(P_x) - \frac{1}{2}\sum\left[(x_q-\mu)^T \Sigma^{-1}(x_q-\mu)\right]$

$+ Q \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^D |\Sigma_\circ|}}\right) + Q\left[-\frac{1}{2}(\mu-\mu_\circ)^T \Sigma^{-1}(\mu-\mu_\circ)\right]$

$\dfrac{d \ln(L(\mu))}{d\mu} = -\frac{1}{2}\dfrac{d}{d\mu}\left[\sum (x_q-\mu)^T \Sigma^{-1}(x_q-\mu)\right] - \dfrac{Q}{2}\dfrac{d}{d\mu}\left[(\mu-\mu_\circ)^T \Sigma^{-1}(\mu-\mu_\circ)\right]$

$\rightarrow \dfrac{d \ln(L)}{d\mu} = 0 \rightarrow \mu = ? \rightarrow P(\mu|x) = \cdots$

۴ـ کدهای مربوط به این سال در پرسش Q4 هراه این نایل ارسال شماست.
و تمرین ها به صورت زیر بدست آمده اند.

a.

i	1	2	3	4
P	0.252	0.248	0.250	0.250
μ	0.99	1.3	2.0	3.29
σ	0.01	0.12	0.04	0.02

b.

i	1	2
P	0.252	0.748
μ	1.00	2.23
σ	0.01	0.79

c.

i	1	2	3
P	0.25	0.24	0.51
μ	0.99	1.3	2.6
σ	0.01	0.11	0.66

d.

i	1	2	3	4
P	0.250	0.249	0.251	0.250
μ	0.99	1.41	2.00	3.30
σ	0.01	0.12	0.05	0.02
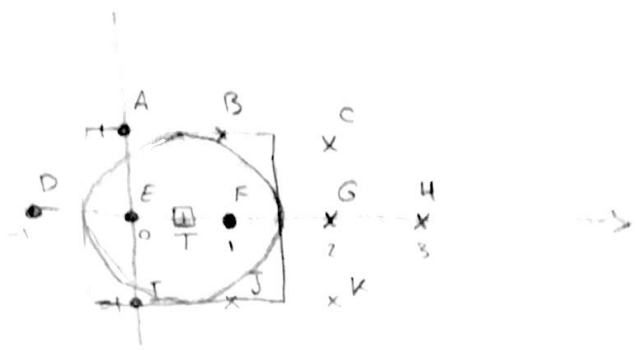
a. i. $h_N = 2$

Point	A	B	E	F	I	J
class	2	1	2	2	2	1

$\implies T \in$ class 2

ii. $r_N = 1$

Point	F	E
	2	2

$\implies T \in$ class 2

b.

Point	A	B	E	F	I	J
distance	1,1	1,1	0,5	0,5	1,1	1,1
class	2	1	2	2	2	1

$\{E, F, x\} \rightarrow T \in$ class 2

$x \in \{A, B, I, J\}$

ii

Point	A	B	E	F	I	J
distance	1	1	0,5	0,5	1	1
class	2	1	2	2	2	1

$\implies T \in$ class 2.