آمار و احتمال ۱

فصل هفتم

توابع احتمال پیوسته

چگالی · یکنواخت · نمایی · پواسون و زمان انتظار

هدف فصل

مدل‌سازی متغیرهایی که هر مقدار در یک بازه را می‌گیرند

پیوند با فصل قبل

فصل قبل: متغیرهای گسسته با مقادیر شمارا

بسیاری از متغیرهای واقعی می‌توانند هر مقداری در یک بازه بگیرند:

زمان انتظار · وزن · طول · هزینه · بازده

> برای این متغیرها از توزیع‌های احتمال **پیوسته** استفاده می‌شود.

بخش اول: چیت‌شیت فصل

چگالی · یکنواخت · نمایی

متغیر تصادفی پیوسته

می‌تواند در یک بازه، هر مقدار حقیقی را بگیرد.

مثال‌ها: زمان انتظار · مدت پاسخ‌گویی · وزن بسته · عمر دستگاه · بازده · زمان تحویل · دمای انبار

> بین ۴ و ۵ دقیقه ممکن است ۴٫۲، ۴٫۲۷ یا ۴٫۲۷۱ باشد — از نظر نظری بی‌نهایت مقدار در بازه وجود دارد.

گسسته در برابر پیوسته

ویژگی	گسسته	پیوسته
ایجاد	معمولاً شمارش	معمولاً اندازه‌گیری
مقادیر	محدود یا شمارا	بی‌نهایت در یک بازه
نمونه	تعداد مشتریان	زمان انتظار
$P(X = x)$	ممکن است مثبت	برابر صفر
ابزار	تابع جرم	تابع چگالی

تعداد تماس در یک ساعت ← گسسته · فاصله میان دو تماس ← پیوسته

تابع چگالی احتمال

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

خود $f(x)$ معمولاً **احتمال نیست.**

احتمال = مساحت زیر منحنی در یک بازه.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

احتمال در توزیع پیوسته = مساحت زیر چگالی روی بازهٔ موردنظر

احتمال یک نقطه و ارتفاع چگالی

برای متغیر پیوسته:

$$P(X = a) = 0$$

معنا: نقطه مساحت ندارد — نه اینکه مشاهدهٔ a غیرممکن است.

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \leq X \leq b) \\ &= P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) \end{aligned}$$

$f(x)$ می‌تواند > 1 باشد — فقط مساحت کل باید ۱ باشد.

تابع توزیع تجمعی

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

اگر F مشتق‌پذیر باشد: $f(x) = F'(x)$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$
$$P(X > x) = 1 - F(x)$$

ویژگی‌ها:

$0 \leq F \leq 1$

نزولی نمی‌شود

در سمت چپِ خیلی دور، به صفر نزدیک می‌شود. در $-\infty$ به صفر نزدیک می‌شود.

در سمت راستِ خیلی دور، به یک نزدیک می‌شود. در $+\infty$ به ۱ نزدیک می‌شود.

تابع بقا

$$S(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$$

کاربردها:

- عمر دستگاه بیش از یک زمان مشخص
- انتظار بیش از حد تعیین‌شده
- دیرتر تحویل‌شدن سفارش
- ادامهٔ اشتراک بعد از یک زمان مشخص

یافتن ثابت چگالی

اگر $f(x) = cx$ برای $0 \leq x \leq 2$ (و صفر در خارج):

$$\int_0^2 cx\,dx = 1$$

از شرط مساحت کل، c را پیدا کنید؛ سپس احتمال هر بازه را محاسبه کنید.

امید و واریانس پیوسته

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)}$$

تبدیل خطی و صدک

اگر $Y = a + bX$:

$$E(Y) = a + bE(X) \qquad Var(Y) = b^2 Var(X) \qquad SD(Y) = |b| SD(X)$$

صدک p: $F(x_p) = p$ · میانه: $F(Me) = 0.5$

اگر صدک ۹۰ زمان پاسخ = ۸ دقیقه، حدود ۹۰٪ پاسخ‌ها در ۸ دقیقه یا کمتر انجام می‌شوند.

توزیع یکنواخت پیوسته

همهٔ بازه‌های هم‌طول در $[a, b]$ هم‌شانس‌اند

مفهوم و چگالی یکنواخت

$$X \sim U(a,b)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

نمودار چگالی در $[a,b]$ یک مستطیل با ارتفاع $1/(b-a)$ است.

$$P(c \le X \le d) = \frac{d-c}{b-a}$$

مثال – تحویل بین ۲ تا ۶ ساعت:

$$P(3 \le X \le 5) = \frac{5-3}{6-2} = 0.5$$

CDF و شاخص‌های یکنواخت

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$SD(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \qquad x_p = a + p(b-a)$$

میانگین وسط بازه است · توزیع متقارن

چه زمانی یکنواخت مناسب است؟

- متغیر فقط در یک بازهٔ مشخص قرار گیرد
- دلیلی برای محتمل‌تر بودن بخشی از بازه نباشد
- بازه‌های هم‌طول احتمال برابر داشته باشند

کاربرد: زمان تصادفی شروع · خطای گردکردن · انتخاب تصادفی در فاصله · مدل مقدماتی زمان تحویل

> اگر مقادیر نزدیک مرکز محتمل‌تر باشند ← یکنواخت مناسب نیست.

توزیع نمایی

زمان انتظار تا رخداد بعدی در فرایند پواسون

مفهوم توزیع نمایی

$X \sim Exp(\lambda)$

نمونه‌ها: زمان تا مشتری بعدی · تماس بعدی · خرابی قطعه · فاصلهٔ دو سفارش · خسارت بعدی

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

λ = نرخ متوسط رخداد در واحد زمان (مثبت)

اگر نرخ ورود ۴ مشتری/ساعت ← $\lambda = 4$ بر ساعت

CDF، بقا و احتمال بازه

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad S(x) = e^{-\lambda x} \qquad (x \geq 0)$$

$$P(a < X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad SD(X) = \frac{1}{\lambda}$$

در نمایی، میانگین و SD از نظر عددی برابرند (هر دو واحد زمان).

نرخ و زمان متوسط – و هماهنگی واحد

نرخ ۶ تماس/ساعت:

$$E(X) = \frac{1}{6} \text{ ساعت} = 10 \text{ دقیقه}$$

نرخ بیشتر ← فاصلهٔ زمانی متوسط کمتر

اگر زمان بر حسب دقیقه باشد:

- زمان را به ساعت تبدیل کنید، یا
- نرخ را به $6/60 = 0.1$ تماس/دقیقه تبدیل کنید

اشتباه در واحدها از رایج‌ترین خطاهای مسائل نمایی است.

خاصیت بی‌حافظگی

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

اگر تاکنون رخدادی رخ نداده، زمان سپری‌شده توزیع انتظار باقی‌مانده را تغییر نمی‌دهد.

> برای عمر واقعی همهٔ قطعات مناسب نیست — فرسایش ← نرخ خرابی ثابت نیست ← ممکن است از نمایی پیروی نکند.

صدک نمایی و ارتباط با پواسون

$$x_p = \frac{-\ln(1-p)}{\lambda} \qquad Me = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

توزیع راست‌چوله: معمولاً $Me < E(X)$

در فرایند پواسون با نرخ λ:

- تعداد رخدادها در بازه ← **پواسون**
- زمان تا رخداد بعدی ← **نمایی**

> کلید انتخاب: سؤال دربارهٔ **تعداد** است یا **زمان** میان رخدادها؟

یکنواخت یا نمایی؟

ویژگی	یکنواخت	نمایی
دامنه	$[a, b]$ محدود	از ۰ تا ∞
شکل چگالی	ثابت	کاهشی
کاربرد	بازه‌های هم‌شانس	زمان تا رخداد بعدی
پارامتر	a, b	λ
بی‌حافظگی	ندارد	دارد

ترجمهٔ عبارات و خطاهای رایج

عبارت	نمایش
حداکثر x	$F(x)$
بیشتر از x	$1 - F(x)$
بین a و b	$F(b) - F(a)$
زمان تا رخداد بعدی	نمایی
تعداد رخداد در بازه	پواسون
همهٔ نقاط بازه هم‌شانس	یکنواخت

خطاهای رایج: $f(x)$ به‌عنوان احتمال نقطه · فراموش‌کردن $P(X = x) = 0$ · اشتباه پواسون ↔ نمایی · ناسازگاری واحد · تعمیم بی‌حافظگی به همهٔ عمرها

چک‌لیست حل مسائل پیوسته

1. متغیر و واحد را تعریف کنید
2. دامنه را مشخص کنید
3. چگالی یا توزیع مناسب را شناسایی کنید
4. ثابت مجهول ← مساحت کل = 1
5. عبارت → بازهٔ احتمالی
6. انتگرال یا CDF
7. در نمایی: نرخ و زمان هم‌واحد
8. تعداد رخداد یا زمان انتظار؟
9. امید / واریانس / صدک در صورت نیاز
10. تفسیر مدیریتی با واحد درست

بخش دوم: سؤالات چهارگزینه‌ای

ارزیابی چگالی، یکنواخت، نمایی و ارتباط با پواسون

سؤال ۱

کدام گزینه یک متغیر تصادفی پیوسته است؟

الف) تعداد مشتریان در صف

ب) تعداد کالاهای معیوب

ج) زمان انتظار مشتری

د) تعداد پرداخت‌های ناموفق

سؤال ۲

برای یک متغیر تصادفی پیوسته، مقدار $P(X = 5)$ کدام است؟

الف) صفر

ب) یک

ج) همیشه ۰/۵

د) برابر f(5) است

سؤال ۳

کدام شرط برای یک تابع چگالی معتبر ضروری است؟

الف) مقدار تابع در تمام نقاط کمتر از یک باشد.

ب) مساحت کل زیر منحنی برابر یک باشد.

ج) تابع حتماً خطی باشد.

د) تابع فقط مقادیر صحیح بگیرد.

سؤال ۴

اگر $F(4) = 0.3$ و $F(8) = 0.75$ باشد، مقدار $P(4 < X \leq 8)$ کدام است؟

الف) ۰٫۳۰

ب) ۰٫۴۵

ج) ۰٫۷۵

د) ۱٫۰۵

سؤال ۵

اگر $X \sim U(2, 10)$ باشد، میانگین X کدام است؟

الف) ۴

ب) ۵

ج) ۶

د) ۸

سؤال ۶

اگر $X \sim U(0, 20)$ باشد، احتمال قرارگرفتن X بین ۵ و ۱۰ چقدر است؟

الف) ۰٫۲۰

ب) ۰٫۲۵

ج) ۰٫۵۰

د) ۰٫۷۵

سؤال ۷

کدام مسئله معمولاً با توزیع نمایی مدل‌سازی می‌شود؟

الف) تعداد تماس‌ها در یک ساعت

ب) زمان تا تماس بعدی

ج) تعداد فروش‌ها در ۲۰ تماس

د) تعداد کالاهای معیوب در نمونهٔ بدون جایگذاری

سؤال ۸

اگر نرخ ورود مشتریان ۵ نفر در ساعت باشد، میانگین زمان انتظار تا مشتری بعدی چقدر است؟

الف) ۵ ساعت

ب) یک ساعت

ج) ۰/۲ ساعت

د) ۲۵ ساعت

سؤال ۹

اگر $X \sim Exp(\lambda)$ باشد، مقدار $P(X > x)$ کدام است؟

الف) $1 - e^{-\lambda x}$

ب) $e^{-\lambda x}$

ج) λx

د) $1/\lambda$

سؤال ۱۰

خاصیت بی‌حافظگی توزیع نمایی چه می‌گوید؟

الف) زمان سپری‌شده، توزیع زمان انتظار باقی‌مانده را تغییر نمی‌دهد.

ب) تمام زمان‌ها در یک بازه احتمال برابر دارند.

ج) احتمال یک مقدار دقیق مثبت است.

د) نرخ رخداد با گذشت زمان حتماً افزایش می‌یابد.

سؤال ۱۱

اگر میانگین تعداد تماس‌ها در ساعت ۶ باشد، نرخ نمایی بر حسب دقیقه کدام است؟

الف) ۶

ب) ۱

ج) ۰/۱

د) ۰/۶

سؤال ۱۲

کدام ارتباط میان پواسون و نمایی درست است؟

الف) پواسون زمان انتظار و نمایی تعداد رخدادها را مدل می‌کند.

ب) پواسون تعداد رخدادها و نمایی زمان انتظار را مدل می‌کند.

ج) هر دو فقط برای داده‌های یکنواخت استفاده می‌شوند.

د) هیچ ارتباطی میان آن‌ها وجود ندارد.

بخش سوم: سؤال تشریحی چندبخشی

مدیریت زمان انتظار و ظرفیت یک مرکز خدمات مالی

داده‌های مسئله

زمان شروع بررسی آنلاین

بین ۱۰ تا ۳۰ دقیقه · همهٔ زمان‌های بازه هم‌شانس ← یکنواخت

تماس‌های پشتیبانی

میانگین ۶ تماس/ساعت · فرایند پواسون ← زمان تا تماس بعدی نمایی

زمان رسیدگی

$$f(x) = cx, \quad 0 \le x \le 4$$

(ساعت) · خارج بازه صفر

بخش الف: شناخت متغیرهای پیوسته

1. سه متغیر برای: زمان شروع بررسی · زمان تا تماس بعدی · زمان رسیدگی
2. چرا هر سه پیوسته‌اند؟
3. دامنهٔ مقادیر ممکن هر متغیر
4. چرا $P(\text{دقیقاً ۱۵ دقیقه}) = 0$؟
5. تفاوت «دقیقاً ۱۵ دقیقه» با «بین ۱۴ و ۱۶ دقیقه»

بخش ب: یکنواخت زمان شروع بررسی

$X \sim U(10, 30)$ بر حسب دقیقه

1. تابع چگالی
2. تابع توزیع تجمعی
3. $P(X < 15)$
4. $P(12 \leq X \leq 20)$
5. $P(X > 25)$
6. میانگین، واریانس، SD
7. صدک ۹۰ — محاسبه و تفسیر

بخش ج: تابع چگالی زمان رسیدگی

$$f(x) = cx, \qquad 0 \le x \le 4$$

1. مقدار c از شرط مساحت کل
2. نامنفی بودن تابع حاصل
3. CDF
4. $P(X < 2)$
5. $P(1 \le X \le 3)$
6. $P(X > 3)$
7. $E(X)$
8. $E(X^2)$، واریانس، SD

بخش د: نمایی — زمان تا تماس بعدی

T = زمان تا تماس بعدی · نرخ ۶ در ساعت

1. λ بر حسب ساعت
2. نرخ بر حسب دقیقه
3. میانگین زمان تا تماس بعدی (دقیقه)
4. $P(T < 5)$
5. $P(T > 15)$
6. $P(5 < T \leq 10)$
7. میانه
8. صدک ۹۰ — محاسبه و تفسیر

بخش هـ: خاصیت بی‌حافظگی

فرض: ۱۰ دقیقه گذشته و هنوز تماسی وارد نشده است.

1. $P(\text{حداقل ۵ دقیقه دیگر بدون تماس})$
2. مقایسه با $P(\text{انتظار} > 5)$ از ابتدای دوره
3. بی‌حافظگی چگونه استفاده شده؟
4. چرا نمی‌توان این خاصیت را بدون بررسی برای زمان خدمت یا عمر همهٔ تجهیزات به کار برد؟

بخش و: ارتباط پواسون و نمایی

با نرخ ۶ تماس در ساعت:

1. توزیع مناسب تعداد تماس‌ها در ۳۰ دقیقه
2. پارامتر آن
3. $P(\text{هیچ تماس در ۳۰ دقیقه})$ با پواسون
4. همان احتمال با نمایی (زمان تا تماس بعدی)
5. چرا دو روش باید یکسان باشند؟
6. تفاوت متغیر تصادفی در دو مدل

بخش ز: ارزیابی تعهد سطح خدمت

تعهدها:

- حداقل ۸۰٪ پرونده‌ها در ۲۵ دقیقه یا کمتر وارد بررسی شوند
- $P(\text{انتظار تماس} > 20 \text{ دقیقه}) < 10\%$
- حداقل ۷۵٪ پرونده‌ها در کمتر از ۳ ساعت رسیدگی شوند

برای هر تعهد: احتمال واقعی · قابل تحقق؟ · فاصله با هدف · پیشنهاد عملیاتی

بخش ح: تصمیم مدیریتی نهایی

گزارش کوتاه برای مدیر عملیات:

1. میانگین و صدک ۹۰ زمان شروع بررسی
2. مقایسهٔ میانگین، میانه و صدک ۹۰ زمان تا تماس بعدی
3. $P(\text{رسیدگی} > 3 \text{ ساعت})$
4. ارزیابی تعهدهای سطح خدمت
5. توزیع یا تابع هر بخش از تحلیل
6. حداقل دو پیشنهاد برای ظرفیت، پاسخ‌گویی یا نحوهٔ اعلام تعهد

سپاس از توجه شما