

最大最小值滤波中值滤波类似：首先要**排序**周围像素和中心像素值，然后将中心像素值与最小和最大像素值比较，如果比最小值小，则替换中心像素为最小值，如果中心像素比最大值大，则替换中心像素为最大值。

Kernel矩阵为3X3的最大最小值滤波如下：

123	124	108
122	150	98
112	135	144

排序以后为：

98 , 108 , 112 , 122 ,

123 , 124 , 135 , 144

中心像素为：150

最大最小值滤波以后，中心

像素值为：**144**



第五章 图像变换

为了有效和快速地对图像进行处理和分析，常常需要将原定义在图像空间的图像以某种形式转换到另外一些空间中，并利用这些空间的**特有性质**方便地进行一定的加工，最后**再转换回图像空间**以得到所需的处理效果

变换是双向的，或者说需要双向的变换。在图像处理中，一般将从图像空间向其他空间的变换称为**正变换**，而将从其他空间向图像空间的变换称为**反变换**或逆变换。

5.1 傅里叶变换

是许多其它图像变换的基础；并讨论一些与其它变换共有的相关性质。

5.2 沃尔什变化和哈达码变换

只需要做加减法，运算简单。

5.3 离散余弦变换

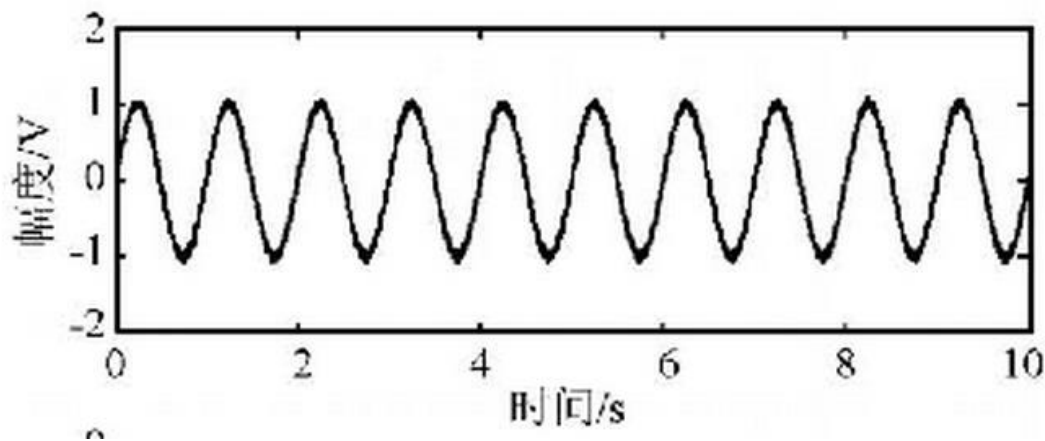
可借助傅里叶变换的实数部分计算，在图像压缩领域应用广泛。

5.4 霍特林变换

基于图像的统计特征。基于霍特林变换的主分量分析技术是图像模式识别中的重要技术。

重要概念的理解：

- ◆ 图像的频率指什么？
- ◆ 如何定量测量图像的空间频率？



传统的信号处理领域的时变信号



第五章 图像变换

图像频率？



图像频率的物理意义？

图像可以看做是一个定义为二维平面上的信号，该信号的幅值对应于像素的灰度，如果我们仅仅考虑图像上某一行像素，则可以将之视为一个定义在一维空间上信号，这个信号在形式上与传统的信号处理领域的时变信号是相似的。只不过是一个是定义在空间域上的，而另一个是定义在时间域上的。



第五章 图像变换

图像的**频率**又称为**空间频率**，它是**表征图像中灰度变化剧烈程度的指标**，是**图像在平面空间上的梯度**。

例如：大面积的沙漠的图像，由于灰度值分布平坦，其低频成分就较强，而高频成分较弱；而对于沟壑纵横的卫星图片这类具有快速空间变化的图像来说，其高频成分会相对较强，低频则较弱（注意，是相对而言）。



第五章 图像变换

如何定量地测量图像的空间频率？

最为常用的方法就是二维傅里叶变换。图像经过二维傅里叶变换后会形成与图像等大的复数矩阵，取其幅值形成幅度谱，取其相位形成相位谱。

图像的频率能量分布主要体现在幅度谱中。通常习惯将低频成分放在幅度谱的中央，而将高频成分放在幅度谱边缘。



第五章 图像变换

大多数自然图像的频率成分的能量与频率的平方成反比。所以从绝对数值上看，低频能量通常是要高于高频能量的，这一规则也称为**power law**，它的出现是源于自然图像的尺度不变性（scale invariance）：很多文献中被解释为从不同的距离观察同样的自然场景，获得的图像的幅度谱是基本相同的。

除了**傅里叶变换**外，正弦变换、余弦变换、Gabor变换、**小波变换**也可以用来对图像频率分布进行定量测量。目前小波变换是研究的另外一个热点，它不但能够反映频率能量的分布，同时还保留了图像特征的空间分布特性。



第五章 图像变换

第一节 傅里叶变换

通过傅里叶变换将图像从空间变换到频率空间，从而可利用傅里叶频谱特征进行图像处理。

Fourier theory讲的是？！

任何信号（如图像信号）都可以表示成一系列正弦信号的叠加，在图像领域就是将图像brightness variation作为正弦变量。

比如下图的正弦模式可在单傅里叶中由三个分量编码：频率 f 、幅值 A 、相位 γ 这三个value描述正弦图像中的所有信息。

1. Frequency



在空间域上可由亮度调节，例如左边的frequency比右边的frequency低。

2. Magnitude

sin函数的幅值用于描述对比度，或者说是图像中最明和最暗的峰值之间的差。（一个负幅值表示一个对比逆转，即明暗交换。）

2. Phase（相位）

相位表示相对于原始波形，这个波形的偏移量（左or右）



第五章 图像变换

第一节 傅里叶变换

什么是变换编码？

是进行一种函数变换，首先将空域图像信号映射变换到另一个正交矢量空间（变换域或频域），产生一系列变换系数，然后对这些变换系数进行处理编码。

如，将灰度空域信号变换到频域信号，因为灰度图像大部分信号都是低频信号，在频域中信号的能量较集中，再进行采样、编码，就可以压缩数据。

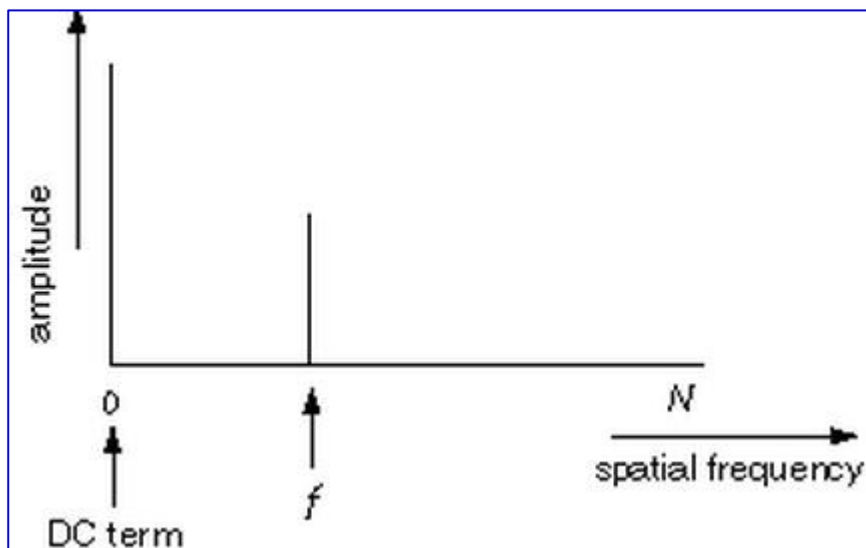


第五章 图像变换

第一节 傅里叶变换

具体地，一个傅里叶变换编码是一系列正弦曲线的编码，他们的频率从0开始（即没有调整，相位为0、平均亮度处），到尼奎斯特频率（即数字图像中可被编码的最高频率，它和像素大小、resolution有关）。

傅里叶变换同时将图像中所有频率进行编码：一个只包含一个频率 f_1 的信号在频谱上横坐标 f 为 f_1 的点处绘制一个单峰值，峰值高度等于对应的振幅amplitude，或者正弦曲线信号的高度。



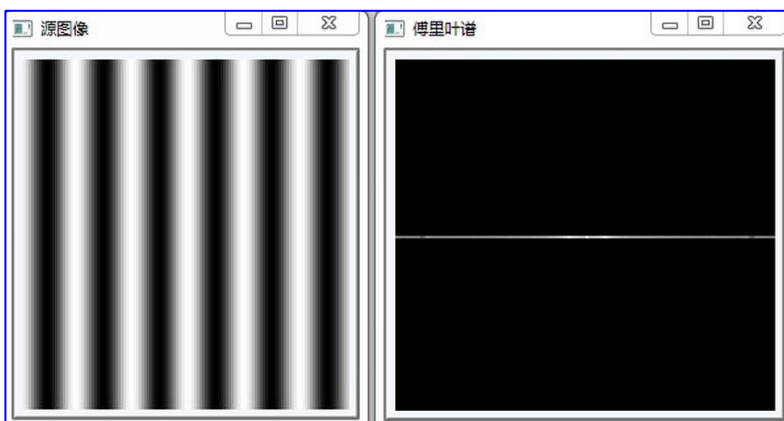
DC term直流信号对应于频率为0的点，表示整幅图像的平均亮度，如果直流信号 $DC=0$ 就表示整幅图像平均亮度的像素点个数=0，可推出灰度图中，正弦曲线在正负值之间交替变化，但是由于灰度图中没有负值，所以所有的真实图像都有一个正的DC term。



第五章 图像变换

第一节 傅里叶变换

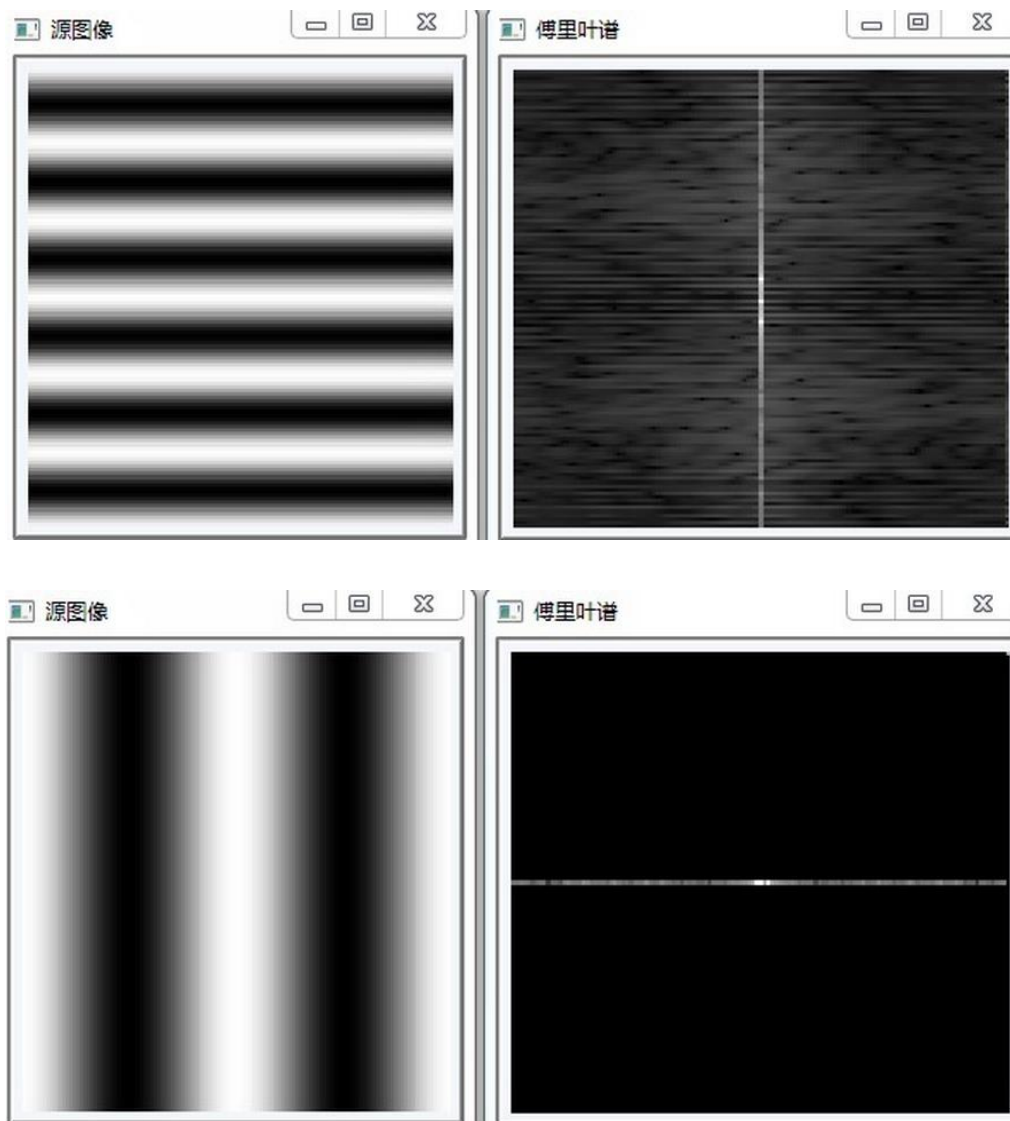
上面讲的是一维信号，一个二维傅里叶变换是一维傅里叶变换在每一个行扫描线和列扫描线上的傅里叶变换的叠加。



傅里叶谱图上的每一个像素点都代表一个频率值，幅值由像素点亮度编码而得。最中心的亮点是指直流分量，**傅里叶谱图中越亮的点，对应于灰度图中对比越强烈（对比度越大）的点。**

由于每一列扫描线上没有变化，所以相应的fourier spectrum上行向量为0，每一行扫描线上有contrast，所以有频率幅值。

第一节 傅里叶变换



频率比上面的小，相应的亮点比上幅图也集中。



第五章 图像变换

第一节

傅里叶变换

傅里叶变换的物理意义？！

在实际中有非常明显的物理意义，设 f 是一个能量有限的模拟信号，则其傅立叶变换就表示 f 的谱。

从纯粹的数学意义上看，傅立叶变换是将一个函数转换为一系列周期函数来处理的。

从物理效果看，傅立叶变换是将图像从空间域转换到频率域，其逆变换是将图像从频率域转换到空间域。换句话说，傅立叶变换的物理意义是将图像的灰度分布函数变换为图像的频率分布函数。



第五章 图像变换

第一节

傅里叶变换

傅立叶变换以前，图像（未压缩的位图）是由对在连续空间（现实空间）上的采样得到一系列点的集合，我们习惯用一个二维矩阵表示空间上各点，则图像可由 $z=f(x,y)$ 来表示。由于空间是三维的，图像是二维的，因此空间中物体在另一个维度上的关系就由梯度来表示，这样我们可以通过观察图像得知物体在三维空间中的对应关系。

为什么要提梯度？ 因为实际上对图像进行二维傅立叶变换得到频谱图，就是图像梯度的分布图，当然频谱图上的各点与图像上各点并不存在一一对应的关系，即使在不移频的情况下也是没有。



第五章 图像变换

第一节

傅里叶变换

傅立叶频谱图上我们看到的明暗不一的亮点，实际上是图像上某一点与邻域点梯度的大小，也即该点的频率的大小（可以这么理解，图像中的低频部分指低梯度的点，高频部分相反）。

一般来讲，梯度大则该点的亮度强，否则该点亮度弱。这样，通过观察傅立叶变换后的频谱图，我们首先就可以看出图像的能量分布，如果频谱图中暗的点数更多，那么实际图像是比较柔和的（因为各点与邻域梯度相对较小），反之，如果频谱图中亮的点数多，那么实际图像一定是尖锐的，边界分明且边界两边像素差异较大。



第五章 图像变换

第一节

傅里叶变换

对频谱移频到原点以后，可以看出图像的频率分布是以原点为圆心，对称分布的。

将频谱移频到圆心除了可以清晰地看出图像频率分布以外，可以分离出有周期性规律的干扰信号，比如正弦干扰。从一副带有正弦干扰、移频到原点的频谱图上，可以看出除了中心以外还存在以某一点为中心，对称分布的亮点集合，**这个集合就是干扰噪音产生的，这时可以很直观的通过在该位置放置带阻滤波器消除干扰。**



第五章 图像变换

第一节

傅里叶变换

傅里叶变换的进一步说明：

图像中的每个点通过傅里叶变换都成了谐波函数的组合，也就有了频率，这个频率则是在这一点上所有产生这个灰度的频率之和，也就是说**傅里叶变换可以将这些频率分开来**。

当想除去图像背景时，只要去掉背景频率就可以了。

很多在时域看似不可能做到的数学操作，在频域相反很容易。尤其是从某条曲线中去除一些特定的频率成分，这在工程上称为滤波，是信号处理最重要的概念之一，只有在频域才能轻松的做到。



第五章 图像变换

第二节 沃尔什和哈达玛变换

Walsh; Hadamard

1923年，美国数学家J.L Walsh提出walsh函数。函数展开有三种：Walsh序的Walsh函数，佩利序的Walsh函数，哈达玛序的Walsh函数。

Walsh变换压缩效率低，所以实际使用并不多。但它快速，因为计算只需加减和偶尔的右移操作。

Walsh和Hadamard变换密切相关但又有所不同。



1. 沃尔什变换

(1) 1-D沃尔什变换

沃尔什变换是一种可分离变换。当 $N = 2^n$ 时，变换核为：

$$g(x, u) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}$$

离散沃尔什变换 $W(u)$ 为：

$$W(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}$$

$b_k(z)$ 是 z 的二进制表达中的第 k 位。

例如 $n=3$ ，则对 $z=6$ (1102)，有 $b_0(z)=0$ ， $b_1(z)=1$ ， $b_2(z)=1$ 。



1. 沃尔什变换

(1) 1-D沃尔什变换

由沃尔什变换核组成的矩阵是一个对称矩阵并且其行和列正交。这些性质表明反变换核与正变换核只差1个常数 $1/N$ ，即：

$$h(x, u) = \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x) b_{n-1-i}(u)}$$

所以离散沃尔什反变换为：

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} W(u) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x) b_{n-1-i}(u)}$$



1. 沃尔什变换

(1) 2-D沃尔什变换

2-D的沃尔什正变换核和反变换核由以下2式给出：

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x) b_{n-1-i}(u) + b_i(y) b_{n-1-i}(v)]}$$

$$h(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x) b_{n-1-i}(u) + b_i(y) b_{n-1-i}(v)]}$$

这2个核完全相同，所以下面2式给出的2-D沃尔什正变换和反变换也具有相同形式：

$$W(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x) b_{n-1-i}(u) + b_i(y) b_{n-1-i}(v)]}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} W(u, v) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x) b_{n-1-i}(u) + b_i(y) b_{n-1-i}(v)]}$$



2. 哈达码变换

哈达码变换也是一种可以分离的变换。

2-D的哈达码正变换核和反变换核由以下2式给出：

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)]}$$

$$h(x, y, u, v) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)]}$$

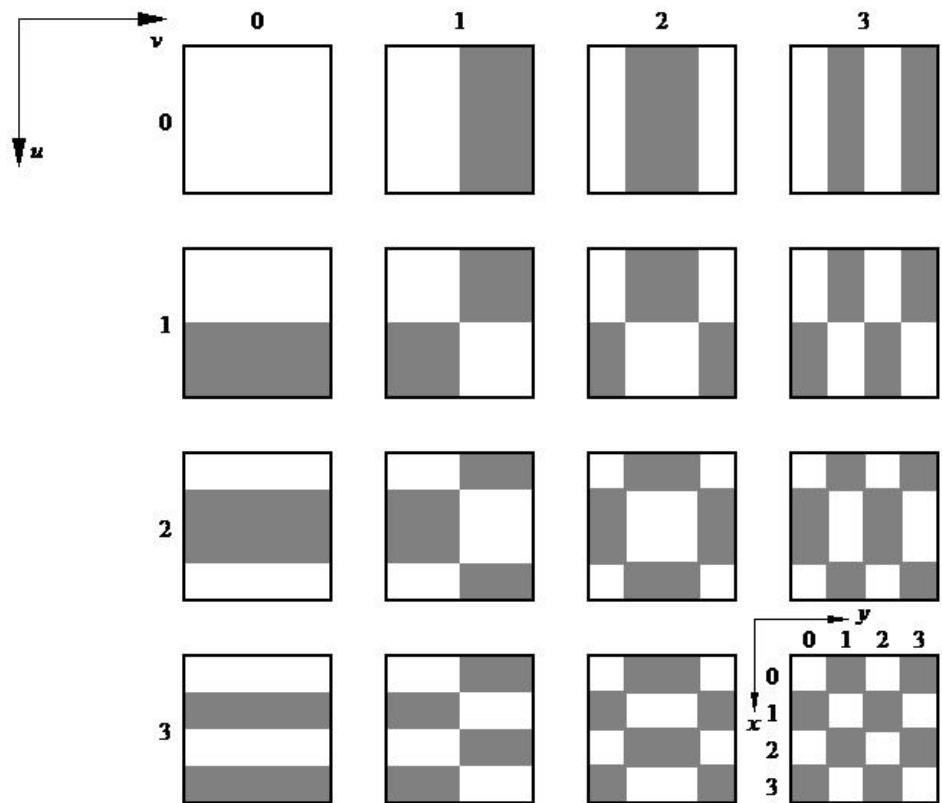
其中指数上的求和是以2为模的，这两个核完全相同，所以下面2式给出的2-D哈达码正变换和反变换也具有相同形式：

$$W(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} W(u, v) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}$$

第五章 图像变换

第二节 沃尔什和哈达玛变换



当 $N = 4$ 时的哈达玛基本函数的图示