

试题 A: 平方和

本题总分：5 分

【问题描述】

小明对数位中含有 2、0、1、9 的数字很感兴趣，在 1 到 40 中这样的数包括 1、2、9、10 至 32、39 和 40，共 28 个，他们的和是 574，平方和是 14362。注意，平方和是指将每个数分别平方后求和。

请问，在 1 到 2019 中，所有这样的数的平方和是多少？

【答案提交】

这是一道结果填空的题，你只需要算出结果后提交即可。本题的结果为一个整数，在提交答案时只填写这个整数，填写多余的内容将无法得分。

提示：如果你编写程序计算，发现结果是负的，请仔细检查自己的程序，不要怀疑考场的编程软件。

试题 B: 数列求值

本题总分：5 分

【问题描述】

给定数列 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, \dots ，从第 4 项开始，每项都是前 3 项的和。求第 20190324 项的最后 4 位数字。

【答案提交】

这是一道结果填空题，你只需要算出结果后提交即可。本题的结果为一个 4 位整数（提示：答案的千位不为 0），在提交答案时只填写这个整数，填写多余的内容将无法得分。

试题 C: 最大降雨量

本题总分：10 分

【问题描述】

由于沙之国长年干旱，法师小明准备施展自己的一个神秘法术来求雨。

这个法术需要用到他手中的 49 张法术符，上面分别写着 1 至 49 这 49 个数字。法术一共持续 7 周，每天小明都要使用一张法术符，法术符不能重复使用。

每周，小明施展法术产生的能量为这周 7 张法术符上数字的中位数。法术施展完 7 周后，求雨将获得成功，降雨量为 7 周能量的中位数。

由于干旱太久，小明希望这次求雨的降雨量尽可能大，请大最大值是多少？

【答案提交】

这是一道结果填空的题，你只需要算出结果后提交即可。本题的结果为一个整数，在提交答案时只填写这个整数，填写多余的内容将无法得分。

试题 D: 迷宫

本题总分：10 分

【问题描述】

下图给出了一个迷宫的平面图，其中标记为 1 的为障碍，标记为 0 的为可以通行的地方。

```
010000
000100
001001
110000
```

迷宫的入口为左上角，出口为右下角，在迷宫中，只能从一个位置走到这个它的上、下、左、右四个方向之一。

对于上面的迷宫，从入口开始，可以按 DRRURRDDDR 的顺序通过迷宫，一共 10 步。其中 D、U、L、R 分别表示向下、向上、向左、向右走。

对于下面这个更复杂的迷宫（30 行 50 列），请找出一条通过迷宫的方式，其使用的步数最少，在步数最少的前提下，请找出字典序最小的一个作为答案。请注意在字典序中 D<L<R<U。（如果你把以下文字复制到文本文件中，请务必检查复制的内容是否与文档中的一致。在试题目录下有一个文件 maze.txt，内容与下面的文本相同）

```
01010101001011001001010110010110100100001000101010
00001000100000101010010000100000001001100110100101
01111011010010001000001101001011100011000000010000
01000000001010100011010000101000001010101011001011
00011111000000101000010010100010100000101100000000
11001000110101000010101100011010011010101011110111
000110110101001001001010000001000101001110000000
```

```
1010000010100010011010101011110011000010000111010
001111000001010100001100010000001000101001100001001
11000110100001110010001001010101010101010001101000
00010000100100000101001010101110100010101010000101
1110010010100100100010000010101010100100100010100
00000010000000101011001111010001100000101010100011
10101010011100001000011000010110011110110100001000
10101010100001101010100101000010100000111011101001
10000000101100010000101100101101001011100000000100
101010010000000010100100001000100000100011110101001
00101001010101101001010100011010101101110000110101
11001010000100001100000010100101000001000111000010
00001000110000110101101000000100101001001000011101
10100101000101000000001110110010110101101010100001
001010000100001110101010000100010001001000100010101
101000010001100100010000101010010101011111010010
00000100101000000110010100101001000001000000000010
11010000001001110111001001000011101001011011101000
00000110100010001000100000001000011101000000110011
10101000101000100010001111100010101001010000001000
10000010100101001010110000000100101010001011101000
00111100001000010000000110111000000001000000001011
10000001100111010111010001000110111010101101111000
```

【答案提交】

这是一道结果填空的题，你只需要算出结果后提交即可。本题的结果为一个字符串，包含四种字母 D、U、L、R，在提交答案时只填写这个字符串，填写多余的内容将无法得分。

试题 E: RSA 解密

本题总分：15 分

【问题描述】

RSA 是一种经典的加密算法。它的基本加密过程如下。

首先生成两个质数 p, q ，令 $n = p \cdot q$ ，设 d 与 $(p-1) \cdot (q-1)$ 互质，则可找到 e 使得 $d \cdot e$ 除 $(p-1) \cdot (q-1)$ 的余数为 1。

n, d, e 组成了私钥， n, d 组成了公钥。

当使用公钥加密一个整数 X 时（小于 n ），计算 $C = X^d \bmod n$ ，则 C 是加密后的密文。

当收到密文 C 时，可使用私钥解开，计算公式为 $X = C^e \bmod n$ 。

例如，当 $p = 5, q = 11, d = 3$ 时， $n = 55, e = 27$ 。

若加密数字 24，得 $24^3 \bmod 55 = 19$ 。

解密数字 19，得 $19^{27} \bmod 55 = 24$ 。

现在你知道公钥中 $n = 1001733993063167141, d = 212353$ ，同时你截获了别人发送的密文 $C = 20190324$ ，请问，原文是多少？

【答案提交】

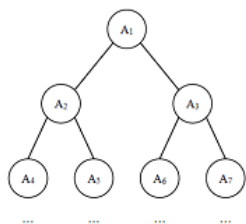
这是一道结果填空的题，你只需要算出结果后提交即可。本题的结果为一个整数，在提交答案时只填写这个整数，填写多余的内容将无法得分。

试题 F: 完全二叉树的权值

时间限制: 1.0s 内存限制: 256.0MB 本题总分: 15 分

【问题描述】

给定一棵包含 N 个节点的完全二叉树，树上每个节点都有一个权值，按从上到下、从左到右的顺序依次是 A_1, A_2, \dots, A_N ，如下图所示：



现在小明要把相同深度的节点的权值加在一起，他想知道哪个深度的节点权值之和最大？如果有多个深度的权值和同为最大，请你输出其中最小的深度。

注：根的深度是 1。

【输入格式】

第一行包含一个整数 N 。

第二行包含 N 个整数 A_1, A_2, \dots, A_N 。

【输出格式】

输出一个整数代表答案。

【样例输入】

```

7
1 6 5 4 3 2 1

```

【样例输出】

2

【评测用例规模与约定】

对于所有评测用例， $1 \leq N \leq 100000$ ， $-100000 \leq A_i \leq 100000$ 。

试题 G: 外卖店优先级

时间限制: 1.0s 内存限制: 256.0MB 本题总分: 20 分

【问题描述】

“饿了么”外卖系统中维护着 N 家外卖店，编号 $1 \sim N$ 。每家外卖店都有一个优先级，初始时 (0 时刻) 优先级都为 0。

每经过 1 个时间单位，如果外卖店没有订单，则优先级会减少 1，最低减到 0；而如果外卖店有订单，则优先级不减反加，每有一单优先级加 2。

如果某家外卖店某时刻优先级大于 5，则会被系统加入优先缓存中；如果优先级小于等于 3，则会被清除出优先缓存。

给定 T 时刻以内的 M 条订单信息，请你计算 T 时刻时有多少外卖店在优先缓存中。

【输入格式】

第一行包含 3 个整数 N 、 M 和 T 。

以下 M 行每行包含两个整数 ts 和 id ，表示 ts 时刻编号 id 的外卖店收到一个订单。

【输出格式】

输出一个整数代表答案。

【样例输入】

```
2 6 6
1 1
5 2
3 1
6 2
2 1
6 2
```

【样例输出】

1

【样例解释】

6 时刻时, 1 号店优先级降到 3, 被移除出优先缓存; 2 号店优先级升到 6, 加入优先缓存。所以是有 1 家店 (2 号) 在优先缓存中。

【评测用例规模与约定】

对于 80% 的评测用例, $1 \leq N, M, T \leq 10000$ 。

对于所有评测用例, $1 \leq N, M, T \leq 100000$, $1 \leq ts \leq T$, $1 \leq id \leq N$ 。

试题 H: 修改数组

时间限制: 1.0s 内存限制: 256.0MB 本题总分: 20 分

【问题描述】

给定一个长度为 N 的数组 $A = [A_1, A_2, \dots, A_N]$, 数组中有可能有重复出现的整数。

现在小明要按以下方法将其修改为没有重复整数的数组。小明会依次修改 A_2, A_3, \dots, A_N 。

当修改 A_i 时, 小明会检查 A_i 是否在 $A_1 \sim A_{i-1}$ 中出现过。如果出现过, 则小明会给 A_i 加上 1; 如果新的 A_i 仍在之前出现过, 小明会持续给 A_i 加 1, 直到 A_i 没有在 $A_1 \sim A_{i-1}$ 中出现过。

当 A_N 也经过上述修改之后, 显然 A 数组中就没有重复的整数了。

现在给定初始的 A 数组, 请你计算出最终的 A 数组。

【输入格式】

第一行包含一个整数 N 。

第二行包含 N 个整数 A_1, A_2, \dots, A_N 。

【输出格式】

输出 N 个整数, 依次是最终的 A_1, A_2, \dots, A_N 。

【样例输入】

```
5
2 1 1 3 4
```

【样例输出】

```
2 1 3 4 5
```

【评测用例规模与约定】

对于 80% 的评测用例， $1 \leq N \leq 10000$ 。

对于所有评测用例， $1 \leq N \leq 100000$ ， $1 \leq A_i \leq 1000000$ 。

试题 I: 糖果

时间限制: 1.0s 内存限制: 256.0MB 本题总分: 25 分

【问题描述】

糖果店的老板一共有 M 种口味的糖果出售。为了方便描述，我们将 M 种口味编号 $1 \sim M$ 。

小明希望能品尝到所有口味的糖果。遗憾的是老板并不单独出售糖果，而是 K 颗一包整包出售。

幸好糖果包装上注明了其中 K 颗糖果的口味，所以小明可以在买之前就知道每包内的糖果口味。

给定 N 包糖果，请你计算小明最少买几包，就可以品尝到所有口味的糖果。

【输入格式】

第一行包含三个整数 N 、 M 和 K 。

接下来 N 行每行 K 个整数 T_1, T_2, \dots, T_K ，代表一包糖果的口味。

【输出格式】

一个整数表示答案。如果小明无法品尝所有口味，输出 -1 。

【样例输入】

```
6 5 3
1 1 2
1 2 3
1 1 3
2 3 5
5 4 2
5 1 2
```

【样例输出】

2

【评测用例规模与约定】

对于 30% 的评测用例， $1 \leq N \leq 20$ 。

对于所有评测样例， $1 \leq N \leq 100$ ， $1 \leq M \leq 20$ ， $1 \leq K \leq 20$ ， $1 \leq T_i \leq M$ 。

试题 J: 组合数问题

时间限制: 1.0s 内存限制: 256.0MB 本题总分: 25 分

【问题描述】

给 n, m, k , 求有多少对 (i, j) 满足 $1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \min(i, m)$ 且 $C_i^j \equiv 0 \pmod k$, k 是质数。其中 C_i^j 是组合数, 表示从 i 个不同的数中选出 j 个组成一个集合的方案数。

【输入格式】

第一行两个数 t, k , 其中 t 代表该测试点包含 t 组询问, k 的意思与上文中相同。

接下来 t 行每行两个整数 n, m , 表示一组询问。

【输出格式】

输出 t 行, 每行一个整数表示对应的答案。由于答案可能很大, 请输出答案除以 $10^9 + 7$ 的余数。

【样例输入】

```
1 2
3 3
```

【样例输出】

```
1
```

【样例说明】

在所有可能的情况中, 只有 $C_2^1 = 2$ 是 2 的倍数。

【样例输入】

```
2 5
```

4 5
6 7

【样例输出】

0
7

【样例输入】

3 23
23333333 23333333
23333333 23333333
23333333 23333333

【样例输出】

851883128
959557926
680723120

【数据规模和约定】

对于所有评测用例， $1 \leq k \leq 10^8$, $1 \leq t \leq 10^5$, $1 \leq n, m \leq 10^{18}$ ，且 k 是质数。
评测时将使用 10 个评测用例测试你的程序，每个评测用例的限制如下：

| 评测用例编号 | t | n, m | k |
|----------|-------------|----------------|-------------|
| 1, 2 | ≤ 1 | ≤ 2000 | ≤ 100 |
| 3, 4 | $\leq 10^5$ | ≤ 2000 | ≤ 100 |
| 5, 6, 7 | ≤ 100 | $\leq 10^{18}$ | ≤ 100 |
| 8, 9, 10 | $\leq 10^5$ | $\leq 10^{18}$ | $\leq 10^8$ |