



从推算到最优估计：卡尔曼滤波

——信息工程中的数学建模与应用

您的姓名

your.email@university.edu.cn

信息与电子工程学院

信息工程专业
数学建模课程小组

2025 年 12 月 21 日





演讲提纲

- 1 提纲
- 2 背景引入
- 3 数学模型构建
- 4 核心算法
- 5 数值推演实例
- 6 工程应用与仿真
- 7 扩展卡尔曼滤波 (EKF)
- 8 前沿探索
- 9 结论
- 10 参考文献





章节导航

- 1 提纲
- 2 背景引入
- 3 数学模型构建
- 4 核心算法
- 5 数值推演实例
- 6 工程应用与仿真
- 7 扩展卡尔曼滤波 (EKF)
- 8 前沿探索
- 9 结论
- 10 参考文献





现实世界的困境：不确定性

在信息工程与控制领域，我们面临两个永恒的问题：

- **不准确的模型 (Process Noise) :**

- 摩擦力、风阻难以完美建模
- 积分误差随时间累积 (Dead Reckoning Drifting)

- **不准确的观测 (Measurement Noise) :**

- GPS 信号多径效应
- 传感器热噪声

核心问题

当我们既不能完全相信**推算**，也不能完全相信**观测**时，如何获知系统的**真实状态**？



卡尔曼滤波 (Kalman Filter) 的诞生

- **提出者:** Rudolf E. Kalman (1960)
- **核心论文:** *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*
- **本质:**
 - 并不是为了滤除某些频率 (不同于低通/高通滤波器).
 - 是一种**最优递归估计算法** (Optimal Recursive Estimator).
 - 在最小均方误差 (MMSE) 准则下, 对系统状态进行最优估计.
- **应用场景:** 阿波罗登月导航、雷达目标追踪、导弹制导、股市预测.



章节导航

- 1 提纲
- 2 背景引入
- 3 数学模型构建
- 4 核心算法
- 5 数值推演实例
- 6 工程应用与仿真
- 7 扩展卡尔曼滤波 (EKF)
- 8 前沿探索
- 9 结论
- 10 参考文献



1. 状态方程 (预测模型) 深度解析

$$x_k = \underbrace{Fx_{k-1}}_{\text{惯性演变}} + \underbrace{Bu_k}_{\text{控制输入}} + \underbrace{w_k}_{\text{过程噪声}}$$

(1)

- **惯性演变 (Fx_{k-1}):**
 - **含义:** 基于物理定律的自然推演. 如果没有外力和干扰, 系统下一刻应该在哪?
 - **举例:** 根据 “路程 = 速度 × 时间”, 由上一刻的位置和速度, 推算当前时刻的预计位置.
 - F (状态转移矩阵) 捕捉了这些确定性的物理规则.
- **控制输入 (Bu_k):**
 - **含义:** 由于我们对系统的干预 (Control) 所引起的状态改变.
 - **举例:** 司机踩下油门 (u_k), 通过车辆动力学模型 (B) 转化为加速度, 从而改变车辆的速度和位置.
- **过程噪声 (w_k):**
 - **含义:** 物理模型中未考虑到的现实扰动 (如侧风、路面打滑).

2. 观测方程 (测量模型) 深度解析

$$z_k = \underbrace{Hx_k}_{\text{理想观测}} + \underbrace{v_k}_{\text{测量噪声}}$$

- **理想观测 (Hx_k):**

- **含义:** 状态空间的映射与降维. 如果传感器完美无瑕, 它应该读到什么数值?
- **矩阵作用:** 系统状态 x 可能包含 [位置, 速度, 加速度] (3×1), 但 GPS 传感器 z 只能读取 [位置] (1×1).

- H (观测矩阵) 就是一个提取器: 例如 $[1 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} pos \\ vel \\ acc \end{bmatrix} = pos.$

- **测量噪声 (v_k):**

- **含义:** 传感器自身的 “不靠谱” 程度. 包括电子热噪声、量化误差或环境干扰.
- 我们假设它是白噪声, 服从 $N(0, R)$.



符号含义解析

符号	含义	维度
x_k	k 时刻的状态向量 (位置, 速度等)	$n \times 1$
F	状态转移矩阵 (物理规律)	$n \times n$
u_k	外部控制量 (如加速度输入)	$l \times 1$
z_k	k 时刻的观测向量 (传感器读数)	$m \times 1$
H	观测矩阵 (映射关系)	$m \times n$

关键假设: 噪声服从高斯分布 (Gaussian Distribution)

- 过程噪声 $w_k \sim N(0, Q)$
- 测量噪声 $v_k \sim N(0, R)$



章节导航

- 1 提纲
- 2 背景引入
- 3 数学模型构建
- 4 核心算法
- 5 数值推演实例
- 6 工程应用与仿真
- 7 扩展卡尔曼滤波 (EKF)
- 8 前沿探索
- 9 结论
- 10 参考文献





算法流程总览

卡尔曼滤波是一个“预测 (Predict) ——更新 (Update)”的循环过程.

Step 1: 预测
(根据上一刻状态, 猜这一刻在哪)

↓
Step 2: 计算卡尔曼增益
(决定信模型多一点, 还是信传感器多一点)

↓
Step 3: 更新
(结合观测值, 修正刚才的猜测)

第一阶段：时间更新 (预测)

在还未获得传感器数据之前，基于物理模型进行的**先验估计**：

1. 状态预测

$$\hat{x}_k^- = F\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (3)$$

注：上标 $-$ 表示先验 (A Priori) 估计.

2. 协方差预测 (误差传播)

$$P_k^- = FP_{k-1}F^T + Q \quad (4)$$

P 代表估计的不确定性. 加上 Q 表示预测过程引入了新的不确定性.



关键步骤：卡尔曼增益 (Kalman Gain) ——1. 思路篇

核心思想：不确定性的权衡

卡尔曼增益 K_k 的本质是一个**动态权衡因子 (Weighting Factor)**. 它时刻在问一个问题：

“现在的预测误差 (P_k^-) 和观测误差 (R), 哪一个更小?”

- **逻辑：**谁的方差小 (信息量大、更可信), 我就偏向谁.
- **动态性：**
 - 这不是一个固定的常数 (如互补滤波中的 $\alpha = 0.98$).
 - 它随时间变化, 每一次迭代都会根据上一次的置信度自动调整.

关键步骤：卡尔曼增益 (Kalman Gain) —— 2. 矩阵直觉篇

为什么公式里有那么多 H^T 和逆矩阵？

$$K_k = \underbrace{P_k^- H^T}_{\text{相关性}} \underbrace{(H P_k^- H^T + R)^{-1}}_{\text{归一化}}$$

- **空间投影问题：**
 - 状态误差 P_k^- 在**状态空间** (n 维).
 - 观测误差 R 在**测量空间** (m 维).
 - 我们不能直接把它们相加，必须把 P_k^- 投影到测量空间.
- $H P_k^- H^T$: 这是预测误差在**测量空间**的投影. 即 “如果在状态空间有这么多不确定性，对应到传感器读数上会有多大波动”.
- **分母求逆:** $(S)^{-1}$ 相当于除以 “总不确定性”.



关键步骤：卡尔曼增益 (Kalman Gain) ——3. 算法篇

3. 计算卡尔曼增益

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad (5)$$

复杂矩阵运算的直观类比：

假设是一维标量系统 ($H = 1$)：

$$K_k = \frac{P_k^-}{P_k^- + R}$$

含义解析：

- **分子** (P_k^-)：预测误差的方差.
- **分母** ($P_k^- + R$)：总误差 (预测 + 观测).
- **结果**：预测误差在总误差中的占比.



关键步骤：卡尔曼增益 (Kalman Gain) ——4. 效果篇

通过极限情况，我们可以清晰看到 K_k 的调节机制：

情况 A: 传感器极准 ($R \rightarrow 0$)

- 此时 $K_k \approx \frac{P}{P} = 1$ (最大).
- 状态更新变为：
 $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + 1 \cdot (z_k - \hat{x}_k^-) = z_k$
- **结论：**完全信任观测值，忽略模型预测.

情况 B: 模型极准 ($P_k^- \rightarrow 0$)

- 此时 $K_k \approx \frac{0}{0+R} = 0$ (最小).
- 状态更新变为：
 $\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + 0 \cdot (z_k - \hat{x}_k^-) = \hat{x}_k^-$
- **结论：**完全信任模型预测，忽略传感器波动.

第二阶段：完成测量更新

算出增益 K_k 后，我们就可以融合数据并更新系统信心.

4. 状态更新 (后验估计)

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k \underbrace{(z_k - H\hat{x}_k^-)}_{\text{残差 (Innovation)}} \quad (6)$$

最优估计 = 预测 + 修正量. 残差代表了“观测值与预测值的偏差”.

5. 协方差更新

$$P_k = (I - K_k H) P_k^- \quad (7)$$

更新系统的不确定性. 因为融合了新信息，通常 $P_k < P_k^-$ ，表示我们对系统的状态越来越有把握.



章节导航

- 1 提纲
- 2 背景引入
- 3 数学模型构建
- 4 核心算法
- 5 数值推演实例
- 6 工程应用与仿真
- 7 扩展卡尔曼滤波 (EKF)
- 8 前沿探索
- 9 结论
- 10 参考文献



场景设定：无人机悬停高度估计

场景：

- 我们想知道无人机的真实高度 x .
- 无人机正在悬停，理论上不动，但有风吹（过程噪声）.
- 使用气压计测量高度，但有误差（测量噪声）.

参数初始化 ($t = 0$):

- 初始估计 $\hat{x}_0 = 10m$.
- 初始不确定性 $P_0 = 5$ (不太确信).

系统参数:

- 状态转移 $F = 1$ (不动).
- 过程噪声 $Q = 1$.
- 测量噪声 $R = 4$ (传感器一般).
- 观测矩阵 $H = 1$ (直接测高度).

Step 1: 预测 (Prediction) @ t=1

还没看传感器，先根据物理规律猜.

1. 状态预测

$$\hat{x}_1^- = F\hat{x}_0 = 1 \times 10 = 10$$

(我猜它还在 10m 处)

2. 协方差预测

$$P_1^- = FP_0F^T + Q = 1 \times 5 \times 1 + 1 = 6$$

(如果不看传感器，不确定性从 5 增加到了 6，因为风在吹)

Step 2: 计算卡尔曼增益 @ t=1

现在传感器读数来了: $z_1 = 12m.$

3. 计算增益 K

$$K_1 = \frac{P_1^- H^T}{H P_1^- H^T + R} = \frac{6 \times 1}{1 \times 6 \times 1 + 4} = \frac{6}{10} = 0.6$$

解读:

- $K = 0.6$ 意味着我们把 **60%** 的信任给了观测值 (残差), **40%** 保留给预测值.
- 为什么信观测多一点? 因为预测误差方差 (6) 大于测量噪声方差 (4).



Step 3: 更新 (Update) @ t=1

融合预测和观测，得到最优结果。

4. 状态更新

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_1^- + K_1(z_1 - \hat{x}_1^-)$$

$$\hat{x}_1 = 10 + 0.6 \times (12 - 10) = 10 + 1.2 = \mathbf{11.2m}$$

5. 协方差更新

$$P_1 = (1 - K_1 H) P_1^- = (1 - 0.6) \times 6 = 0.4 \times 6 = \mathbf{2.4}$$

结果：

- 估计值 11.2m 介于 10m 和 12m 之间，偏向观测值。
- 不确定性从 6 骤降至 2.4。滤波让我们更自信了！



章节导航

- 1 提纲
- 2 背景引入
- 3 数学模型构建
- 4 核心算法
- 5 数值推演实例
- 6 工程应用与仿真
- 7 扩展卡尔曼滤波 (EKF)
- 8 前沿探索
- 9 结论
- 10 参考文献





仿真案例：一维小车位置追踪

场景假设：

- 小车做匀速运动，速度 $v = 1m/s$.
- 过程噪声 Q : 路面颠簸导致速度微小波动.
- 测量噪声 R : GPS 定位误差 $\pm 5m$.





仿真案例：一维小车位置追踪

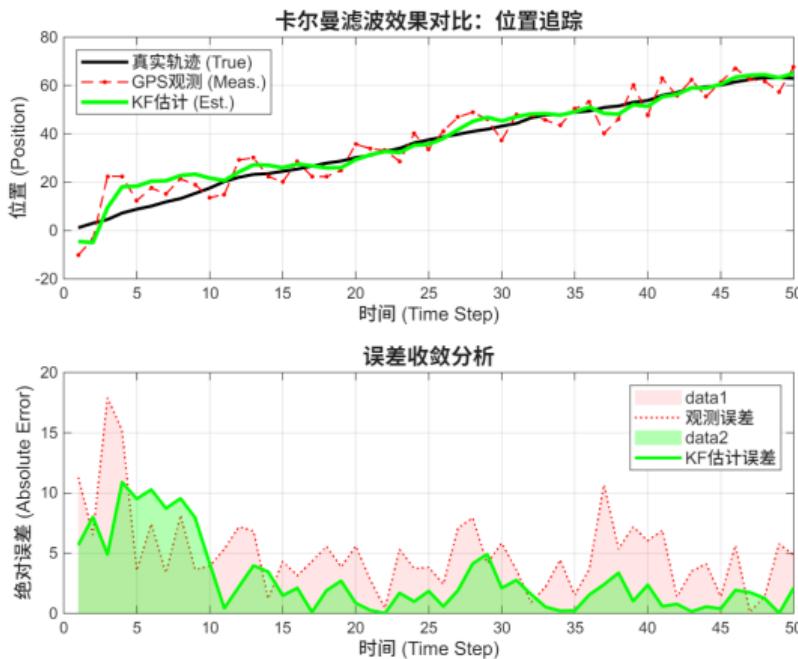


图: 利用 Matlab 模拟卡尔曼滤波

参数 Q 与 R 的调节策略

在信息工程实践中, F 和 H 通常由物理系统决定, 但 Q 和 R 是调试的关键.

信任模型 (Q 小, R 大)

- 滤波结果非常平滑
- 对突变反应滞后 (Lag)

信任观测 (Q 大, R 小)

- 紧跟观测值变化
- 引入较多噪声 (Noise)

结论: 调参本质上是在**响应速度与平滑度**之间做权衡.



进阶：多传感器融合 (Sensor Fusion)

卡尔曼滤波是多传感器融合的基石.

案例：无人机姿态解算

- **陀螺仪 (Gyro)**: 短时精度高, 长时有积分漂移.
- **加速度计 (Accel)**: 静态精度高, 动态噪声大.
- **融合方案**: 利用 Kalman Filter 融合两者数据.

$$\text{Optimal Angle} = K \cdot \text{Accel} + (1 - K) \cdot \text{Gyro}$$



章节导航

- 1 提纲
- 2 背景引入
- 3 数学模型构建
- 4 核心算法
- 5 数值推演实例
- 6 工程应用与仿真
- 7 扩展卡尔曼滤波 (EKF)
- 8 前沿探索
- 9 结论
- 10 参考文献





1. 线性系统的局限性

标准 KF 的致命弱点

标准卡尔曼滤波假设系统是**线性 (Linear)** 的：

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} \quad \text{和} \quad \mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k$$

然而，现实世界充满了**非线性**：

- **机器人运动**: $x_{new} = x_{old} + v \cdot \cos(\theta) \cdot \Delta t$ (包含三角函数)
- **雷达观测**: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (包含平方根)

问题: 高斯分布经过非线性变换后，**不再是高斯分布** (形状会扭曲)，导致标准 KF 的公式失效.



2. 解决思路：线性化 (Linearization)

既然非线性太难处理，我们能不能在**局部**把它看作线性的？

泰勒级数展开 (Taylor Series Expansion)

对于非线性函数 $f(x)$ ，我们在估计点 \hat{x} 附近做一阶展开：

$$f(x) \approx f(\hat{x}) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}}}_{\text{切线斜率}} \cdot (x - \hat{x}) \quad (8)$$

- 我们抛弃高阶项，只保留一阶导数。
- 用**切线**来近似**曲线**。



3. 核心工具：雅可比矩阵 (Jacobian Matrix)

在多维系统中，导数变成了**雅可比矩阵**. 它是 EKF 的核心.
假设状态转移函数为 $x_k = f(x_{k-1}, u_k)$, 则雅可比矩阵 F_k 为:

$$F_k = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

物理意义：描述了输入微小变化如何影响输出的每一个维度.



4. EKF 算法流程的变化 (对比 KF)

EKF 的步骤与 KF 几乎一样，区别在于**如何传递均值和如何传递协方差**.

步骤	标准 KF (线性)	扩展 KF (非线性)
状态预测	$x^- = Fx$	$x^- = f(x, u)$ (直接代入函数)
协方差预测	$P^- = FPF^T + Q$	$P^- = F_k P F_k^T + Q$ (用雅可比)
卡尔曼增益	$K = P^- H^T (\dots)^{-1}$	$K = P^- H_k^T (H_k P^- H_k^T + R)^{-1}$
状态更新	$x = x^- + K(z - Hx^-)$	$x = x^- + K(z - h(x^-))$



5. 经典案例：雷达追踪 (Radar Tracking)

状态向量 (直角坐标系):

$$x = [p_x, p_y, v_x, v_y]^T$$

(飞机的位置和速度)

观测向量 (极坐标系):

$$z = [\rho, \phi, \dot{\rho}]^T$$

(雷达测量的距离、角度、径向速度)

非线性观测函数 $h(x)$:

- 距离: $\rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$
- 角度: $\phi = \arctan(p_y / p_x)$

问题

p_x 和 p_y 是状态，但在观测方程里被平方和求根了。这就是典型的非线性！必须求雅可比矩阵 H_j .



6. 雷达雅可比矩阵的计算

我们需要对 $h(x)$ 求偏导数来得到 H_j :

$$H_j = \frac{\partial h}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial p_x} & \frac{\partial \rho}{\partial p_y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial p_x} & \frac{\partial \phi}{\partial p_y} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_x}{\sqrt{p_x^2+p_y^2}} & \frac{p_y}{\sqrt{p_x^2+p_y^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-p_y}{p_x^2+p_y^2} & \frac{p_x}{p_x^2+p_y^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

意义: 这个矩阵把**位置的不确定性** (直角坐标误差), 投影到了**观测的不确定性** (距离和角度误差) 上.



7. EKF 的优缺点分析

优点 (Why use it?)

- **事实标准**: 目前导航系统 (GPS/IMU 融合)、机器人定位 (SLAM) 的首选基础算法.
- **计算量适中**: 比粒子滤波 (Particle Filter) 快得多.

缺点 (Watch out!)

- **发散风险**: 如果线性化点选得不好 (初始估计太差), 泰勒展开误差会很大, 导致滤波器发散.
- **繁琐的雅可比**: 对于复杂的系统, 手算雅可比矩阵非常痛苦且容易出错.



8. 超越 EKF: 无迹卡尔曼滤波 (UKF)

当非线性极其严重时，EKF 的线性化误差无法接受。

UKF (Unscented Kalman Filter) 思路：

- 不去线性化函数 (不算雅可比).
- 而是**近似概率分布**.
- 选取几个关键点 (Sigma Points)，把它们扔进非线性函数里算一算，然后再算出新的均值和方差.

核心理念

“近似概率分布比近似非线性函数要容易得多。”

——Julier & Uhlmann



章节导航

- 1 提纲
- 2 背景引入
- 3 数学模型构建
- 4 核心算法
- 5 数值推演实例
- 6 工程应用与仿真
- 7 扩展卡尔曼滤波 (EKF)
- 8 前沿探索
- 9 结论
- 10 参考文献





1. 算法演进全景 (Based on Top Review)

卡尔曼滤波已发展为庞大的家族. 针对不同场景, 主流算法的特性对比如下¹:

算法	核心机制	优势 (Pros)	适用场景
Basic KF	线性递归最小二乘	计算极快, 线性最优	卫星导航, 稳态控制
EKF	泰勒展开线性化 (J)	工业标准, 适用性广	机器人定位 (SLAM)
UKF	无迹变换 (Sigma 点)	无需导数, 精度更高	复杂非线性系统
IMM	多模型概率交互	搞定机动目标 , 平滑切换	导弹/无人机追踪

¹Khodarahmi and Maihami, "A Review on Kalman Filter Models."



2. 突破瓶颈：混合模型 (Hybrid Models) 的诞生

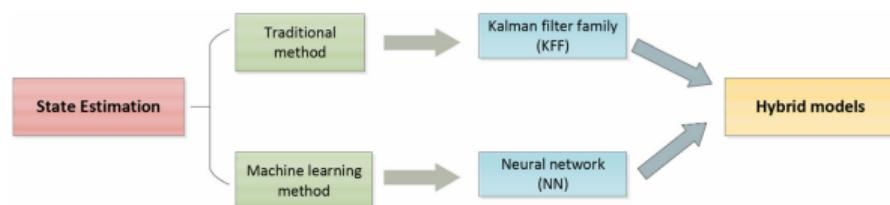


图: 状态估计技术融合路线图^a

为何要融合?

- **传统 KF:** 依赖精确物理模型，难以处理未知环境.
- **神经网络 (NN):** 强大的数据拟合能力，但缺乏物理约束.

融合的三种模式:

- ① **串联:** 互为预处理/后处理.
- ② **训练:** KF 优化 NN 权重.
- ③ **辅助 (Aided):** **NN 实时估计 KF 参数 (Q, R)**.

^aFeng et al., "A review."



深度思考：卡尔曼滤波 vs 机器学习

卡尔曼滤波 (KF)

“理性的物理学家”

- **驱动核心：**物理模型 (F, H) + 概率统计.
- **透明度：**白盒. 每一步都有明确物理含义，可解释性强.
- **优势：**小样本即可工作，不仅给结果，还给置信度 (P).
- **劣势：**模型必须已知且准确.

机器学习 (ML/NN)

“经验丰富的工匠”

- **驱动核心：**海量数据 + 拟合映射.
- **透明度：**黑盒. 内部权重难以解释.
- **优势：**能拟合极其复杂的非线性关系，无需懂物理机理.
- **劣势：**数据饥渴，对未见过的场景泛化能力弱.

融合的哲学：

用 KF 的逻辑框架约束 ML 的发散，用 ML 的拟合能力弥补 KF 的模型缺陷.



3. 落地应用：锂电池 SOC 状态估计

背景：SOC (State of Charge) 是电池管理系统的中心。估算错误会导致过充/过放，造成永久性损伤。

核心技术栈 (Tech Stack):

1. 非线性滤波 (NLKFs)

用于处理电池高度非线性的电压特性：

- EKF / AEKF (自适应扩展卡尔曼)
- UKF / AUKF (自适应无迹卡尔曼)

2. 在线参数辨识

实时更新电池模型参数 (如内阻)：

- RLS (递归最小二乘法)
- PRBM (多项式回归模型)

实验结论：在宽温域 (-5°C ~ 45°C) 测试中，以下组合表现最佳：

PRBM-AUKF & RLS-AUKF

* AUKF (*Adaptive UKF*) 展现了比传统 EKF 更高的精度和鲁棒性。²

²Hossain et al., “Kalman filtering techniques for the online model parameters and state of charge estimation of the Li-ion batteries.”



章节导航

- 1 提纲
- 2 背景引入
- 3 数学模型构建
- 4 核心算法
- 5 数值推演实例
- 6 工程应用与仿真
- 7 扩展卡尔曼滤波 (EKF)
- 8 前沿探索
- 9 结论
- 10 参考文献





总结

- ① **有效性:** 卡尔曼滤波利用了系统的**冗余信息**（模型预测 + 传感器观测），从而降低了整体的不确定性。
- ② **高效性:** 递归算法，只需存储上一刻状态，非常适合**嵌入式系统及实时控制**。
- ③ **局限性:**
 - 假设系统是线性的 (Linear).
 - 假设噪声是高斯的 (Gaussian).
- ④ **拓展:** 面对非线性系统，可以使用**扩展卡尔曼滤波 (EKF)**。



章节导航

- 1 提纲
- 2 背景引入
- 3 数学模型构建
- 4 核心算法
- 5 数值推演实例
- 6 工程应用与仿真
- 7 扩展卡尔曼滤波 (EKF)
- 8 前沿探索
- 9 结论
- 10 参考文献





参考文献 |

- [1] M. Khodarahmi and V. Maihami, "A review on kalman filter models," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 30, no. 1, pp. 727–747, Jan. 2023, Num Pages: 21 Place: Dordrecht Publisher: Springer Web of Science ID: WOS:000862515100001, ISSN: 1134-3060, 1886-1784. DOI: 10.1007/s11831-022-09815-7.
- [2] S. Feng, X. Li, S. Zhang, Z. Jian, H. Duan, and Z. Wang, "A review: State estimation based on hybrid models of kalman filter and neural network," *Systems Science & Control Engineering*, vol. 11, no. 1, p. 2173682, Dec. 31, 2023, Publisher: Taylor & Francis eprint: <https://doi.org/10.1080/21642583.2023.2173682>, ISSN: null. DOI: 10.1080/21642583.2023.2173682. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/21642583.2023.2173682> (visited on 12/14/2025).



参考文献 II

- [3] M. Hossain, M. E. Haque, and M. T. Arif, "Kalman filtering techniques for the online model parameters and state of charge estimation of the li-ion batteries: A comparative analysis," *Journal of Energy Storage*, vol. 51, p. 104174, Jul. 2022, Num Pages: 24 Place: Amsterdam Publisher: Elsevier Web of Science ID: WOS:000780338200006, ISSN: 2352-152X, 2352-1538. DOI: 10.1016/j.est.2022.104174.



谢谢大家!
Q & A

