

Упражнение: Комбинаторика, Вероятности и Статистика - Решения

1. Комбинаторика

а) Пресметнете броя на комбинациите:

1. $C_{10}^4 = 10 \dots (10 - 4 + 1) / 4! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 5040 / 24 = 210$

2. $C_6^2 = 6 \dots (6 - 2 + 1) / 2! = 6 \cdot 5 / 1 \cdot 2 = 30 / 2 = 15$

3. $C_{11}^5 = 11 \dots (11 - 5 + 1) / 5! = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 / 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 55\,440 / 120 = 462$

б) Колко са четирицифрените числа, в които се срещат само цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 и никоя цифра не се повтаря?

Решение: Първата цифра може да бъде избрана по 7 начина. Да изберем коя да е от дадените цифри, например 7. За останалите три цифри от числото имаме възможност да изберем една от цифрите 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Наредена тройка цифри може да се избере от 6 цифри по 6.5.4 начина. Тогава броят на всички разглеждани четирицифрени числа е **7.6.5.4 = 840**

в) Колко прави минават през 8 точки, никои 3 от които не лежат на 1 права?

Решение: $C_8^2 = 8 \cdot 7 / 1 \cdot 2 = 28$

г) Колко различни фиша могат да бъдат попълнени в играта 6 от 49?

Решение: Тъй като редът на попълването на числата в един фиш няма значение, то всеки фиш е една комбинация на 49 елемента от 6-ти клас.

$$C_{49}^6 = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$$

д) Колко 10-цифрени числа могат да се съставят, като всяка цифра се използва веднъж?

Решение:

$$P_{10} = n! = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800$$

$$P_9 = n! = 9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$$

$$P_{10} - P_9 = 3628800 - 362880 = 3265920$$

f) Колко пермутации могат да се състават от 7 елемента?

Решение: $P_7 = n! = 7! = 1.2.3.4.5.6.7 = 5040$

g) Bosch предлага нов модел хладилници с възможности за избор на три различни цвята, два типа охлаждане и четири вида размери. Колко различни модификации има този модел?

Решение: $3.4.2 = 24$ вида

h) Дадени са 6 различни по цвят ленти. Намерете колко различни трицветни знамена могат да се ушийт от тях.

Решение: $V_6^3 = 6.5.4 = 120$

2. Вероятности

a) Петър забравил последната цифра от телефонния номер на Георги. Каква е вероятността от 2 опита Петър да набере правилния номер?

Решение:

При първи опит вероятността е: $1/10$

При втори опит вероятността е: $1/10$

Обща вероятност: $1 / 10 + 1 / 10 = 2 / 10 = 1 / 5$

b) При играта белот се раздават по 8 карти от 32. Каква е вероятността при едно раздаване играч да получи 4 валета?

Решение:

$$\frac{C_{28}^4}{C_{32}^8} \approx \frac{28.27.26.25}{4!} : \frac{32.31.30.29.28.27.26.25}{8!} \approx 0,0019$$

3. Статистика

a) Средният успех на учениците от три класа от едно училище е 5,10. Средният успех на учениците от първия клас е 5,40, а на учениците от втория клас е

4,70. Определете средния успех на учениците от третия клас, ако се знае, че броят на учениците във всеки клас е един и същ.

Решение:

$$(\text{клас 1} + \text{клас 2} + \text{клас 3}) / 3 = 5.10$$

$$\text{Клас 1} = 5.40$$

$$\text{Клас 2} = 4.70$$

$$\text{Клас 3} = x$$

$$\Rightarrow (5.40 + 4.70 + x) / 3 = 5.10$$

$$\Rightarrow 10.1 + x = 5.10 * 3$$

$$\Rightarrow 10.1 + x = 15.3$$

$$\Rightarrow x = 15.3 - 10.1 = 5.2$$

Отговор: Средният успех на учениците от третия клас е: 5.20

- b) Четирима служители в една фирма получават заплата по 630 лв., петима получават по 810 лв., един служител получава 459 лв., а собственикът получава 4 400 лв. Колко лева е разликата между средната заплата на служителите на фирмата (без собственика) и средната заплата във фирмата?

Решение:

Средна заплата на служителите на фирмата (без собственика):

$$(4 * 630 + 5 * 810 + 1 * 459) / 10 = (2520 + 4050 + 459) / 10 = 702.90$$

Средната заплата във фирмата:

$$(4 * 630 + 5 * 810 + 1 * 459 + 4400) / 11 = 11469 / 11 = 1042.64$$

Разликата между средната заплата на служителите на фирмата (без собственика) и средната заплата във фирмата:

$$1042.64 - 702.90 = 339.74$$

- c) Ако средноаритметичното на числата a, b, c, d, p и q е 3, а средноаритметичното на числата a, b, c и d е 4. Колко е средноаритметичното на числата p и q ?

Решение:

$$(a + b + c + d) / 4 = 4 \Rightarrow a + b + c + d = 4 * 4 = 16$$

$$(a + b + c + d + p + q) / 6 = 3$$

$$a + b + c + d + p + q = 3 * 6$$

$$(a + b + c + d) + p + q = 18$$

$$16 + p + q = 18$$

$$p + q = 18 - 16 = 2$$

Средноаритметичното на числата p и q е: $(p + q) / 2 = 2 / 2 = 1$

- d) В клас от 29 ученици двама завършили първи срок с двойка по математика, седем - с тройка, четирима - с четворка, седем - с петица и девет ученици завършили с отличен. Колко е медианата на статистическия ред от данните за оценките на всички ученици в класа?

Решение:

Статистически ред:

2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6

Медиана = 5

- e) Фирма се състои от три отдела: административен – 4 души със средна заплата 1 400 лв., научен – 10 души със средна заплата 1 300 лв. и производствен – 36 души със средна заплата 1 100 лв. Да се намери средната заплата във фирмата.

Решение:

адм. отдел: $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) / 4 = 1400 \Rightarrow a_1 + \dots + a_4 = 4 * 1400 = 5600$

научен отдел: $(a_5 + \dots + a_{14}) / 10 = 1300 \Rightarrow a_5 + \dots + a_{14} = 10 * 1300 = 13000$

произв. отдел: $(a_{15} + \dots + a_{50}) / 36 = 1100 \Rightarrow a_{15} + \dots + a_{50} = 36 * 1100 = 39600$

**средна заплата: $(a_1 + \dots + a_{50}) / 50 = (5600 + 13000 + 39600) / 50 =$
 $= 58200 / 50 = 1164$**