לוגיקה למדעי המחשב

1 ביולי 2023

הרצאה 1:

"If I could begin to be half of what you think of me, I could do about anything... I could even learn how to love"

... (תכונות ל $X_{B,F}$)

הרצאה 2:

"I gave my trust, I shed my blood. I held on tight just to end up stung... you were my friend- scorpion!"

בהנתן עולם W ובסיס B וקבוצת פונקציות מעל W, הקבוצה $X_{B,F}$ קיימת ויחידה. כלומר כאשר מתארים קבוצה אינדוקטיבית מספיק להצביע על השלשה הזו.

איך מראים שקבוצה היא $X_{B,F}$? מראים לפי ההגדרה... או משתמשים בהגדרות השקולות הבאות:

- $X_{B,F} = \cap\{T \subset W | B \subset T \; and \; T \; is \; closed \; under \; W\}$
- נגדיר: $D_0 = B, D1 = D_0 \cup F(D_0), ..., D_i = D_{i-1} \cup F(D_{i-1}), ...$, עתה: $X_{B,F} = \cup_{i \in \mathbb{N}} D_i$

תחשיב הפסוקים:

נגדיר קבוצות:

- $Var = \{p_i | i \in \mathbb{N}\}$
- $Symb = \{\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, (,)\}$
- $W = (Var \cup Symb)^*$
- $B = Var$
- $F = \{F_\neg, ...\}$

$WFF = X_{B,F}$ תיקרא תחשיב הפסוקים.

בפרט:

- אם רוצים להראות שתחשיב הפסוקים אמ"מ משהו (תכונה) יש להראות לפי ההגדרה או השקילויות
- אם רוצים להראות שתחשיב הפסוקים מקיימת תכונה מסויימת צריך להראות את זה ע"י אנדוקציית מבנה
- אם רוצים להראות שאיבר שייך לתחשיב הפסוקים צריך להראות סדרת יצירה לאיבר!
- ועוד ...

משפט הקריאה היחידה

...

סמנטיקה של תחשיב הפסוקים:

נגדיר השמה $z : var \to \{0,1\}$. $Ass = \{z | z : var \to \{0,1\}\}$

הרצאה 3:

"There's no time, we're losing the light"

נגדיר השמה מורחבת $\overline{z}$ מעל WFF בצורה אינדוקטיבית:

לכל $v \in Var$: $\exists i \in \mathbb{N}, \overline{z}(v) = z(v) = z(p_i)$

סגור: ...

משפט התלות הסופית: בהנתן פסוק α ושתי השמות z_1, z_2 שמקיימות $z_1(p_i) = z_2(p_i)$ לכל אטום המופיע בפסוק אזי $z_1 \vDash \alpha \iff z_2 \vDash \alpha$.

בצורה הזו, פסוק מתאר טבלת אמת.

האם לכל טבלת אמת קיים פסוק שמתאר אותה?

לא! אבל תחת תנאים מסויימים, כן.

הגדרה: מערכת קשרים שעבורה מתקיים שלכל טבלת אמת יש פסוק שמתאר אותה נקראת מערכת קשרים שלמה.

יש לחזור על הדוגמאות מההרצאה + הוכחות שמערכת קשרים היא שלמה או לא.

הרצאה 4:

"אם ביחד, אז רק לחוד"

פסוק α נקרא טאוטולוגיה או אמת לוגית אם לכל השמה z מתקיים $z \vDash \alpha$.

איך נראה שפסוק הוא טאואולוגיה? טבלת אמת (משפט התלות הסופית) או הנחה בשלילה.

טענה: α סתירה אמ"מ $\neg\alpha$ טאוטולוגיה. α טאוטולוגיה אמ"מ $\neg\alpha$ סתירה.

דוגמאות חשובות לטאוטולוגיות:

- $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
- $\alpha \to (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
- $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

נביעה לוגית:

נאמר שפסוק β נובע לוגית מפסוק α אם לכל השמה z מתקיים אם $z \vDash \alpha$ אז $z \vDash \beta$. ונסמן $\alpha \vDash \beta$.

טענה: $\alpha \vDash \beta$ אמ"מ $\vDash \alpha \to \beta$.

שקילות לוגית

נאמר ששני פסוקים α, β שקולים לוגית אם $\alpha \vDash \beta$ וגם $\beta \vDash \alpha$.

אינטואיציה: פסוקים שקולים הם פסוקים שמספרים "אותו הסיפור". בפרט,כל פסוק שקול לעצמו.

הרחבת המושגים לקבוצות של פסוקים:

קבוצת פסוקים Σ תיקרא ספיקה אם: $\exists z, \forall\alpha \in \Sigma, z \vDash \alpha$. קבוצת פסוקים יכולה להיות אינסופית ויכולה להיות ריקה. בפרט עבור קבוצת פסוקים ריקה היא ספיקה, וכל ההשמות (Ass) מספקות אותה.

אינטאיציה: $\wedge$ על כל הפסוקים. ונותן לנו דרך לבטא רת זה במקרה האינסופי. בפרט עבור קבוצה סופית ניתן לבטא אותה ע"י $\bigwedge_{\alpha\in X}\alpha$ (ורק עבור סופית!). אם הקבוצה ריקה אז הביטוי לא מוגדר.

יש גם הגדרות לשקילות קבוצות פסוקים ולגרירה לוגית לפסוק מקבוצה.

טענות נוספות:

1. $X \cup \{\alpha\} \vDash \beta$ אמ"מ $X \vDash \alpha \to \beta$.
2. אם $X \cup \{\alpha\} \vDash \beta$ וגם $X \vDash \alpha$ אז $X \vDash \beta$.
3. אם $X \cup \{\alpha\} \vDash \beta$ וגם $X \cup \{\neg\alpha\} \vDash \beta$ אזי $X \vDash \beta$.
4. אם $X \vDash \beta$ וגם $X \vDash \neg\beta$ אז X לא ספיקה.
5. אם $X \cup \{\neg\alpha\} \vDash \beta$ וגם $X \cup \{\neg\alpha\} \vDash \neg\beta$ אז $X \vDash \alpha$.

ויש עוד... (3)

הערה (1): קבוצת ההשמות המספקות קבוצה Σ מסומנת ע"י $M(\Sigma)$.

הערה (2): הרצאה מעניינת :)

הרצאה 5:

"And is all that I might owe you carved on ivory?"

מערכת הוכחה שלמה

הגדרה: מעל העולם $WFF_{\{\neg,\to\}}$ וקבוצת פעולות $F = \{MP\}$ וקבוצת בסיס B נגדיר קבוצה אינדוקטיבית בצורה הבאה:

בסיס B: אקסיומות-

יהיו $\alpha, \beta, \gamma \in WFF_{\{\neg,\to\}}$:

- $\alpha \to (\beta \to \alpha) \in B$
- $\alpha \to (\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \in B$
- $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta) \in B$

פעולות(כללי היסק): יהיו $\alpha, \beta, \gamma \in X_{B,F}$. אזי:

$MP(\alpha, \alpha \to \beta) = \beta$

אם $\gamma \neq \alpha \to \beta$ אזי $MP(\alpha, \gamma) = \alpha$

סימון היסק: $MP : \frac{\alpha, \alpha\to\beta}{\beta}$

קבוצה זו נקראת קבוצת הפסוקים היכיחים. כאשר לכל $\alpha \in X_{B,F}$ נסמן $\vdash \alpha$.

הוכחה מתוך הנחות

בהנתן קבוצת פסוקים Σ, הקבוצה $X_{B,F}$תכלול גם אם כל הפסוקים שבΣ בבסיס שלה.

סימון $Ded(X) := X_{B,F}$.

תכונות של הוכחה מתוך הנחות:

1. אם $X \in \alpha$ אז $X \vdash \alpha$
2. אם $Y \subseteq X$ וגם $X \vdash \alpha$ אז $Y \vdash \alpha$- מונוטוניות
3. אם לכל $\beta \in X$ מתקיים $Y \vdash \beta$ אזי לכל $X \vdash \alpha$ מתקיים $Y \vdash \alpha$.

<u>הוכחה ל-3:</u>

נבנה סדרת יצירה לα מתוך Y.

יהי $X \vdash \alpha$. אזי קיימת סדרת הוכחה ל

.1

.2

$\vdots$

$.k$

משפט הדדוקציה:

לכל $\alpha, \beta \in WFF_{\{\neg,\to\}}$ ולכל $X \subseteq WFF_{\{\neg,\to\}}$ מתקיים:

$X \vdash \alpha \to \beta$ אמ"מ $X \cup \{\alpha\} = \beta$.

אינטואיציה: לפעמים יותר נוח לצרף את α לקבוצת ההנחות שלנו על מנת להוכיח משהו.

איך מוכיחים שפסוק יכיח מתוך קבוצה?

לפי משפט הדדוקציה ואז תכונות או על פי יצירת סדרת הוכחה.

משפט הנאותות:

לכל פסוק α ולכל קבוצת פסוקים X מתקיים:

$X \vdash \alpha \Leftarrow X \vDash \alpha$.

הוכחה: אנדוקציית מבנה

קבוצת פסוקים עקבית

יש שתי הגדרות שקולות:

1. קבוצת פסוקים X נקראת עקבית אם קיים פסוק α כך ש $X \nvdash \alpha$.
2. קבוצת פסוקים X נקראת עקבית אם לכל פסוק α מתקיים $X \vdash \alpha$ או $X \nvdash \neg\alpha$.

להסתכל על ההוכחה!

משפט: אם X ספיקה אז היא עקבית.

הערות:

- כדאי לחשוב האם כללי ההיסק השונים מקיימים את משפט הנאותות ($Ded(X) \subseteq Con(X)$).
  למשל: $\frac{\neg(\alpha\wedge\beta)}{\neg\alpha,\neg\beta}$, $\frac{\alpha\to\beta,\neg\beta}{\neg\alpha}$, $\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$, $\frac{\alpha\wedge\beta}{\alpha,\beta}$.

תכונות מעקכת ההוכחה (תרגול):

- הנחת המבוקש: $\Sigma \vdash \alpha \Leftarrow \alpha \in \Sigma$
- סופיות ההוכחה: $\exists \Sigma : |\Sigma| < \infty \wedge \Sigma \subseteq \Gamma, \Sigma \vdash \alpha \Leftarrow \Gamma \vdash \alpha$
- מונוטוניות (ראינו)

הרצאה 6:

משפט:

תהי X קבוצת פסוקים ויהי α פסוק.

אם $X \cup \{\neg\alpha\}$ לא עקבית אז $x \vdash \alpha$.

להסתכל על ההוכחה של זה!

משפט:

תהי X קבוצת פסוקים. אם X עקבית אז X ספיקה.

משפט השלמות:

תהי Xקבוצת פסוקים ויהי α פסוק. $X \vDash \alpha \Leftarrow X \vdash \alpha$.

עקביות מקסימלית

קבוצת פסוקים Y נקראת עקבית מקסמלית אם היא עקבית וגם לכל פסוק α מתקיים $X \vdash \alpha$ או $X \vdash \neg\alpha$.

משפטים:

- אם X עקבית אז קיימת Y ע"מ כך ש $X \subseteq Y$: הוכחה חשובה
- X ע"מ אמ"מ $|M(X)| = 1$

משפט הקומפקטיות

Y עקבית מקסימלית אמ"מ כל תת קבוצה **סופית** שלה היא עקבית.

טיפים להוכחות מהצורה $Ded_N(\emptyset) \subseteq Con(\emptyset)$:

- וודא.י שמתקיים עבור כל כללי ההיסק שהפלט הוא אכן טאוטולגיה בהינתן שהקלט טאוטולוגיה וגם עבור האקסיומות שהן אכן טאוטולוגיות
  - אם זהו אכן המצב, תמשיכ.י להוכחה באנדוקציית מבנה "רגילה" וסיימת.ה
- אחרת, וודא.י שכללי ההיסק שלא מקיימים את זאת אכן ניתנים לשימוש ע"י למשל בדיקת האם ניתן בכלל להגיע לביטוי מהצורה של הארגומנטים (קשר מרכזי וכו)
  - אם זהו אכן המצב, הגדיר.י תכונה T מתאימה המקיימת $T \subseteq Con(\emptyset)$ והראה.י שמתקיים $Ded_N(\emptyset) \subseteq T$
- אחרת, כנראה יש להפריך... ואז בהצלחה לכולנו :)

הרצאה 7:

“If I lead you through the fury, will you call to me?”

גדירות

נאמר שקבוצת השמות $K \subseteq Ass$ היא גדירה אם קיימת רבוצת פסוקים Σ שמגדירה אותה. כלומר קיימת Σ כך ש $M(\Sigma) = K$.

גדירות באופן סופי

נאמר שקבוצה השמות K היא גדירה באופן סופי אם קיימת Σ סופית שמגדירה אותו.

משפט: התנאים הבאים שקולים

- K גדירה באופן סופי
- K גדירה ע"י פסוק יחיד
- $K, Ass \backslash K$ גדירות

הרצאה 8:

“Jesse, I don’t know what I have done”

תחשיב היחסים

א"ב של השפה:

סימנים שאינם תלויים במילון:

- $Symb$
- כמתים
- סימן יחס שוויון $\approx$
- Var

סימנים שכן תלויים במילון:

- סימני קבוע: c_i עבור $i \in \mathbb{N}$
- סימני פונקציה: $F_{i,k}$עבור $i \in \mathbb{N}$ $k \geq 1$ סימן פונקציה k מקומית
- סימני יחסים: $R_{i,k}$עבור $i \in \mathbb{N}$ $k \geq 1$ סימן יחס k מקומי

<u>שורה תחתונה:</u> על מנת להגדיר מילון מספיק לציין סימני קבועים פונקציות ויחסים.

שמות עצם:

קבוצה אינדוקטיבית המוגדרת מעל קבוצת המחרוזות הסופיות מעל הא"ב מעל τ.

בסיס:

משתנים Var וסימני קבוע שמופיעים ב τ

פעולות:

לכל סימן פונקציה k מקומית F שמופיע במילון מוגדרת פעולה $W^k \to W$ שבהנתן $t_1, t_2, ..., t_k \in W$ מחזירה את $F(t_1, t_2, ..., t_k)$

משפט הקריאה היחידה לשמות עצם

לכל שם עצם "יש פירוק יחיד".

<u>הערה מהמחברת 1</u>: בהרצאה הרלוונטית לא הוצג בצורה פורמלית... so don't come for me

<u>הערה מהמחברת 2</u>: זה יהיה המצב גם בהמשך כשאציג אותו עבור קבוצת הנוסחאות <:

נוסחאות:

קבוצה אינדוקטיבית המוגדרת מעל קבוצת המחרוזות הסופיות מעל הא"ב מעל τ.

בסיס:

הרצאה 9:

"when I ask a good question, people assume I'm a guy. When I ask a stupid question, people assume I'm a girl."

הרצאה 10:

"We haven't had our pizza party yet :("

הרצאה 11:

"Darker than your brown?"

הרצאה 12:

"Are alpha women a thing?"