① Axel Beke 990820-9696

1 a) $f(t) = e^{-2t}\theta(t)$

$f'(t) = -2e^{-2t}\theta(t) + e^{-2t}\delta(t) = \boxed{-2e^{-2t}\theta(t) + \delta(t)}$

$f''(t) = 4e^{-2t}\theta(t) - 2e^{-2t}\delta(t) + \delta' = \boxed{4e^{-2t}\theta(t) - 2\delta(t) + \delta'(t)}$

b) $\int f(t)dt = \int e^{-2t}\theta(t)dt = \left(F(t) - F(0)\right)\theta(t) =$

$= \left[-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^t \theta(t) = \left(-\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{1}{2}\right)\theta(t) =$

$= \boxed{\frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)\theta(t)}$

c) $y'' - 4y = e^{-2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

$\therefore y''\theta - 4y\theta = e^{-2t}\theta$

Låt $\mathcal{L}(y\theta) = Y(s)$

ger $\mathcal{L}(y''\theta) = s^2Y(s) - s - 2$

$\therefore \mathcal{L}(y''\theta - 4y\theta) = \mathcal{L}e^{-2t}\theta$

$s^2Y(s) - s - 2 - 4Y(s) = \frac{1}{s+2}$

$Y(s)(s^2 - 4) - s - 2 = \frac{1}{s+2}$

Partial Bråksuppdelning av $\frac{1}{(s+2)^2(s-2)}$

$\frac{1}{(s+2)^2(s-2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s-2}$

$1 = As^2 - 4A + Bs - 2B + Cs^2 + 4sC + 4C$

$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 4C = 0 \\ -4A - 2B + 4C = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A = -\frac{1}{16} \\ B = -\frac{1}{4} \\ C = \frac{1}{16} \end{matrix}$

Check:
$y(0) = 1$
$y'(0) = 2$

$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s-2)} + \frac{1}{s-2}$

$Y(s) = -\frac{1}{16}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-2}$

$y(t) = -\frac{1}{16}e^{-2t}\theta(t) - \frac{1}{4}te^{-2t}\theta(t) + \frac{17}{16}e^{2t}\theta(t)$

$\boxed{y(t) = \frac{1}{16}\left(17e^{2t} - e^{-2t} - 4te^{-2t}\right)\theta(t)}$

Scanned with CamScanner

②

2. a) Det system som deriverar och fördröjer med 2021.

b) För systemet S och insignal $w(t)$ och utsignal $y(t)$ och tiden t gäller:

Om $Sw(t) = y(t)$ och $w(t) = 0$ för $t < t_0$ så gäller det att $y(t) = 0$ då $t < t_0$.

c) Systemet med impulssvar $h(t) = t\theta(t)$

d) $g(t) = f(t) * f(t)$, $g'(t) = 2\theta(t)$

$$\frac{d}{dt}\left(f(t) * f(t)\right) = 2\theta(t)$$

$$f(t) * f(t) = \int 2\theta(t)dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F^2) = \int 2\theta(t)dt$$

$$F^2 = \frac{2}{s^2}$$

$$F = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$f(t) = \pm\sqrt{2} \cdot \theta(t)$$

Svar: $f(t) = \sqrt{2} \cdot \theta(t)$

③

3\. a) $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 2\end{pmatrix}$

$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}\lambda-2 & -5\\ -5 & \lambda-2\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}\lambda-2 & -5\\ -5 & \lambda-2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2+4\lambda+4-25=0$

$\lambda^2-4\lambda-21=0$

$\lambda=2\pm\sqrt{25}$

$\boxed{\lambda_1=7 \quad \lambda_2=-3}$

b) Framtagning av s_1:

$(7I-A)=\begin{pmatrix}5 & -5\\ -5 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}5x_1-5x_2=0\\ -5x_1+5x_2=0\end{cases}$ $\quad x_1=t \quad x_2=t \quad s_1=t(1,1)$

Framtagning av s_2:

$(-3I-A)=\begin{pmatrix}-5 & -5\\ -5 & -5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-5x_1-5x_2=0\\ -5x_1-5x_2=0\end{cases}$ $\quad x_2=t \quad x_1=-t \quad s_2=t(-1,1)$

$S=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

kontroll av icke linjärt beroende kolonner:

$s_1 \cdot s_2 = 1\cdot1+-1\cdot1=0$ #

Bestämmer t för att normera S till Q

$t=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

då Q är ortogonal gäller det att $Q^{-1}=Q^T$

$D=Q^TAQ=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$

(4)

c)

$$e^{At} = S e^{Dt} S^{-1}$$

$$e^{Dt} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}) = \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = S^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ då S är ortogonal

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{7t} & -e^{-3t} \\ e^{7t} & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{7t} + e^{-3t} & e^{7t} - e^{-3t} \\ e^{7t} - e^{-3t} & e^{7t} + e^{-3t} \end{pmatrix}}$$

d)

$$\begin{cases} x' = 2x + 5y \\ y' = 5x + 2y \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases} \rightarrow \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$u' = Au \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(t) = e^{tA} u(0) :$$

$$: u(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{7t} + e^{-3t} & e^{7t} - e^{-3t} \\ e^{7t} - e^{-3t} & e^{7t} + e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{7t} - e^{-3t} \\ 3e^{7t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\left(3e^{7t} - e^{-3t}\right) \\ y(t) &= \frac{1}{2}\left(3e^{7t} + e^{-3t}\right) \end{aligned}}$$

5

4.

$$y' + y = w'$$

a) $y' + y = w'$

$$sY(s) + Y(s) = sW(s)$$

$$Y(s)(s+1) = sW(s)$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{s}{s+1} = 1 - \frac{1}{s+1}$$

överföringsfunktion

Då $H(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$ är $\boxed{H(s) = 1 - \frac{1}{s+1}}$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} H(s) = \mathcal{L}^{-1}\left(1 - \frac{1}{s+1}\right) = \boxed{\delta(t) - e^{-t}\theta(t)}$$

impulssvar

b) $A(w) = |H(iw)| = \left|\frac{iw}{iw+1}\right| = \left|\frac{iw(1-iw)}{(1+iw)(1-iw)}\right| =$

$$= \left|\frac{w^2}{1+w^2} + i\,\frac{w}{1+w^2}\right| = \sqrt{\frac{w^4}{(1+w^2)^2} + \frac{w^2}{(1+w^2)^2}} = \sqrt{\frac{w^4 + w^2}{(1+w^2)^2}} = \boxed{\frac{w}{\sqrt{w^2+1}}}$$

(Vet inte vad ett högpassfilter är för något :/)

c) $w_1(t) = \cos 3t \Rightarrow e^{3it} = \cos 3t + i\sin 3t$

$$y_1(t) = \mathrm{Re}\left(H(3i)e^{3it}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{3i}{1+3i}(\cos 3t + i\sin 3t)\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{3i(1-3i)}{10}(\cos 3t + i\sin 3t)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{3i+9}{10}(\cos 3t + i\sin 3t)\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{3i\cos 3t - 3\sin 3t + 9\cos 3t + 9i\sin 3t}{10}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{9\cos 3t - 3\sin 3t}{10} + i\left(\frac{3\cos 3t + 9\sin 3t}{10}\right)\right) =$$

$$= \boxed{\frac{9\cos 3t - 3\sin 3t}{10}}$$

6 d)

$$y_1(t) = h(t) * \cos 3t\,\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s+1} \cdot \frac{s}{s^2+9}\right) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s+1)(s^2+9)}\right) \overset{\text{Partialbråksuppdelning}}{=}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{10}\frac{1}{s+1} + \frac{9}{10}\frac{s-1}{s^2+9}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{10}\frac{1}{s+1} + \frac{9}{10}\left(\frac{s}{s^2+9} - \frac{1}{s^2+9}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{10}e^{-t}\theta(t) + \frac{9}{10}\left(\cos 3t\,\theta(t) - \frac{1}{3}\sin 3t\,\theta(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{10}e^{-t}\theta(t) + \frac{9}{10}\cos 3t\,\theta(t) - \frac{9}{30}\sin 3t\,\theta =$$

$$= \boxed{\frac{1}{30}\left(3e^{-t} + 27\cos 3t - 9\sin 3t\right)\theta(t)}$$

Partialbråksuppdelningen:

$$\frac{s^2}{(s+1)(s^2+9)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+9}$$

$$s^2 = As^2 + 9A + Bs^2 + Bs + Cs + C$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ B + C = 0 \\ 9A + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A - C = 1 \\ 9A + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{ 10A = 1 \right.$$

$$A = \frac{1}{10}$$

$$B = \frac{9}{10}$$

$$C = -\frac{9}{10}$$

5. 7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ a & 11 & b \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) A måste vara symmetrisk för att vara en kvadratisk form. Därför är $a=-3$ och $b=1$

$$\boxed{\begin{aligned} a&=-3 \\ b&=1 \end{aligned}}$$

$$f(X) = x_1^2 + 11x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

b) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = trA = 1 + 11 + 5 = \boxed{17}$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 11 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 11 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[a_1]{d_1 = 1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 11 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[b_1]{\substack{(2)+3(1) \\ (3)+(1)}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[a_2]{d_2 = 2}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[b_2]{(3)+2(2)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad d_3 = 2$$

Då d_1, d_2 och d_3 är större än noll är den kvadratiska formen $f(X)$ positivt definit

(8)

d) $d_1 = 1 \quad d_2 = 2 \quad d_3 = 2$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \end{pmatrix} \quad D^{?}_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

L = Det som finns kvar efter gausseliminationen av $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Choleskyfaktoriseringen =

$$= D^{?}_{\frac{1}{2}} L = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

9

6.

$$r_{1i} = \frac{1}{(s-2)^2}$$

a) $\Theta b_{1i} = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{(s-2)^2} = te^{2t}\Theta(t)$

$$\boxed{b_{1i} = te^{2t}}$$

b) $e^{0 \cdot A} = I, \quad b_{1i}(0) = 0 \Rightarrow i = 2$

Svar: Nej

c) Svar: Nej A är inte diagonaliserbar.

Då $b_{12} = t^1 e^{2t}$ ger att $k \neq 0$ i t^k är matrisen A inte diagonaliserbar.

d) e) Då $r_{12} = \frac{1}{(s-2)^2} \Rightarrow \det(sI - A) = (s-2)^2$. Vi vet även att det bara finns ett egenvärde $\lambda = 2$ från $b_{12} = te^{2t}$.

Om $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ och $(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s-2)^2}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ och att $r_{12} = \frac{1}{(s-2)^2}$ måste $b = -1$. Om $b = -1$ och $\det(sI-A) = (s-2)^2 = s^2 - 4s + 4$ måste $a = 3$, $c = 1$ och $d = 1$ alt. $a = 1$, $c = 1$ och $d = 3$.

$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s-3 & 1 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix} = (s-3)(s-1) + 1 = s^2 - 4s + 3 + 1 = (s-2)^2$.

Då $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ elr $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ser vi att A inte är symmetrisk, men den är inverterbar då $\det A = 4 \neq 0$!

$\boxed{\text{Svar: inverterbar men inte symmetrisk.}}$