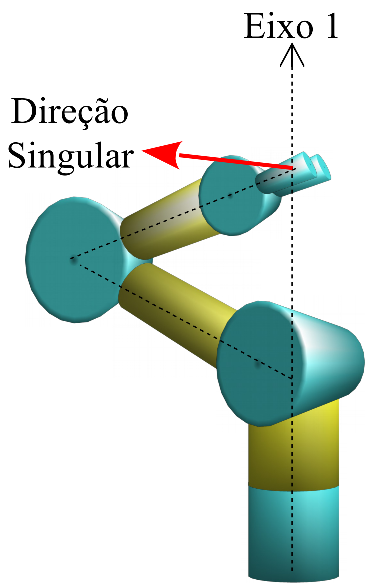
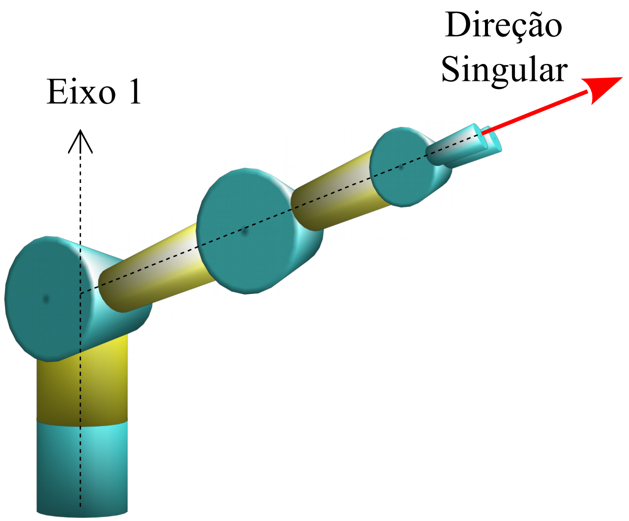
Cinemática Diferencial
Jacobiano e Singularidades





Singularidades do Mecanismo

• Uma singularidade de um braço manipulador é uma configuração na qual o movimento do efetuador é bloqueado em certas direções.

• Em uma singularidade, o mecanismo perde um ou mais graus de liberdade no espaço cartesiano.

• Geralmente ocorre quando elos ficam alinhados, eixos de junta coincidem ou se intersectam.

Jacobiano:

Dada a função de cinemática direta: $X = X(q)$

onde $q_{n\times 1}$ é o vetor das n variáveis de juntas e $X_{m\times 1}$ é o vetor que representa os m graus de liberdade controlados em espaço cartesiano.

Derivando temos: $$\frac{d\,X(q)}{dt} = \left[\frac{\partial X(q)}{\partial q^T}\right] . \frac{dq}{dt} \qquad \Rightarrow \dot{X} = J(q).\dot{q}$$

$\Rightarrow$ Matriz jacobiana J(q) m×n, (Jacobiano):

$$\Rightarrow J(q) = \left[\frac{\partial X(q)}{\partial q^T}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial X_1(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial X_1(q)}{\partial q_n} \\ \frac{\partial X_2(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial X_2(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial X_2(q)}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial X_m(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial X_m(q)}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial X_m(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

Jacobiano:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \vdots \\ \dot{X}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial X_1(q)}{\partial q_1} & \dfrac{\partial X_1(q)}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial X_1(q)}{\partial q_n} \\ \dfrac{\partial X_2(q)}{\partial q_1} & \dfrac{\partial X_2(q)}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial X_2(q)}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial X_m(q)}{\partial q_1} & \dfrac{\partial X_m(q)}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial X_m(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

- Os elementos da matriz jacobiana não são constantes.
- Os elementos são funções da configuração de juntas q.
- Quando o manipulador se movimenta, J(q) varia com q.

Características da Matriz Jacobiana

Sistema linear: $\dot{X} = J(q).\dot{q}$

- Nº de colunas de J(q) = Nº de GDL em espaço de juntas.

- Nº de linhas L.I. de J(q) = Nº de GDL controláveis em espaço cartesiano.

➢ m > n, GDL em espaço de juntas insuficientes para controlar todos os GDL em espaço cartesiano (objetivo dentro de subespaço de trabalho).

➢ m < n, GDL em espaço de juntas excede o necessário para realizar a tarefa, ou seja, o manipulador é redundante.

➢ m = n, GDL espaço de juntas = GDL em espaço cartesiano, (desde que J(q) seja de posto completo).

Características da Matriz Jacobiana

Sistema linear: $\dot{X} = J(q).\dot{q}$

- Se m = n (matriz quadrada) e de posto completo:

$$\boxed{\dot{q} = J^{-1}(q).\dot{X}}$$

- Se m ≠ n (matriz não quadrada):

$$\dot{X} = J(q).\dot{q} \Rightarrow J^T(q).\dot{X} = J^T(q).J(q).\dot{q} \qquad \boxed{\Rightarrow \dot{q} = [J^T(q).J(q)]^{-1}.J^T(q).\dot{X}}$$

<u>Singularidades do Mecanismo:</u>

Se, dado q, a matriz J(q) for singular $\Rightarrow$ J(q) não é mais de posto completo e a inversão não é possível.

<u>Singularidades do Mecanismo</u> = {q / det(J(q) = 0}

- Singularidades nos limites do espaço de trabalho, (braço estendido).

- Singularidades no interior do espaço de trabalho, (eixos de juntas alinhados ou se intersectando).

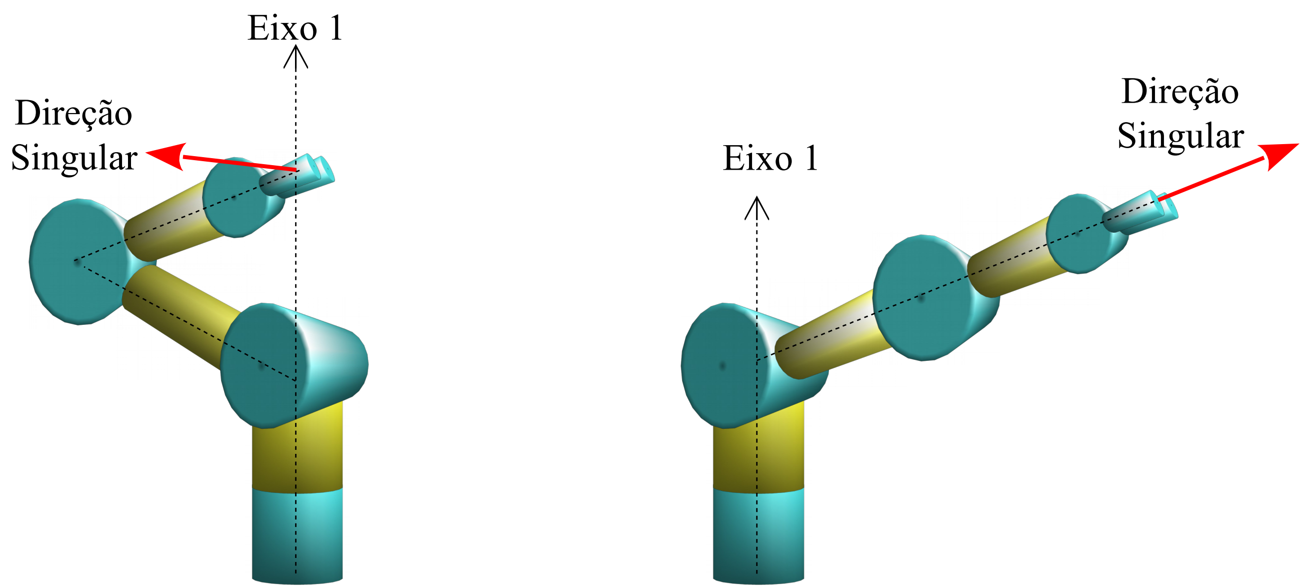
Singularidades do Mecanismo:

Numa singularidade, perde-se um ou mais GDL's cartesianos. $\Rightarrow$ Existirão direções nas quais é impossível movimentar o efetuador, independente da velocidade aplicada nas juntas.

$$q \rightarrow q_{singular} \Rightarrow \dot{q} = J^{-1}(q).\dot{X} \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ Pode sobrecarregar os atuadores!!!

$\Rightarrow$ É necessário implementar métodos de medição da distância às singularidades e técnicas para contorná-las.



Eixo 1
Direção
Singular
Eixo 1
Direção
Singular

Exemplo - jacobiano e singularidades:

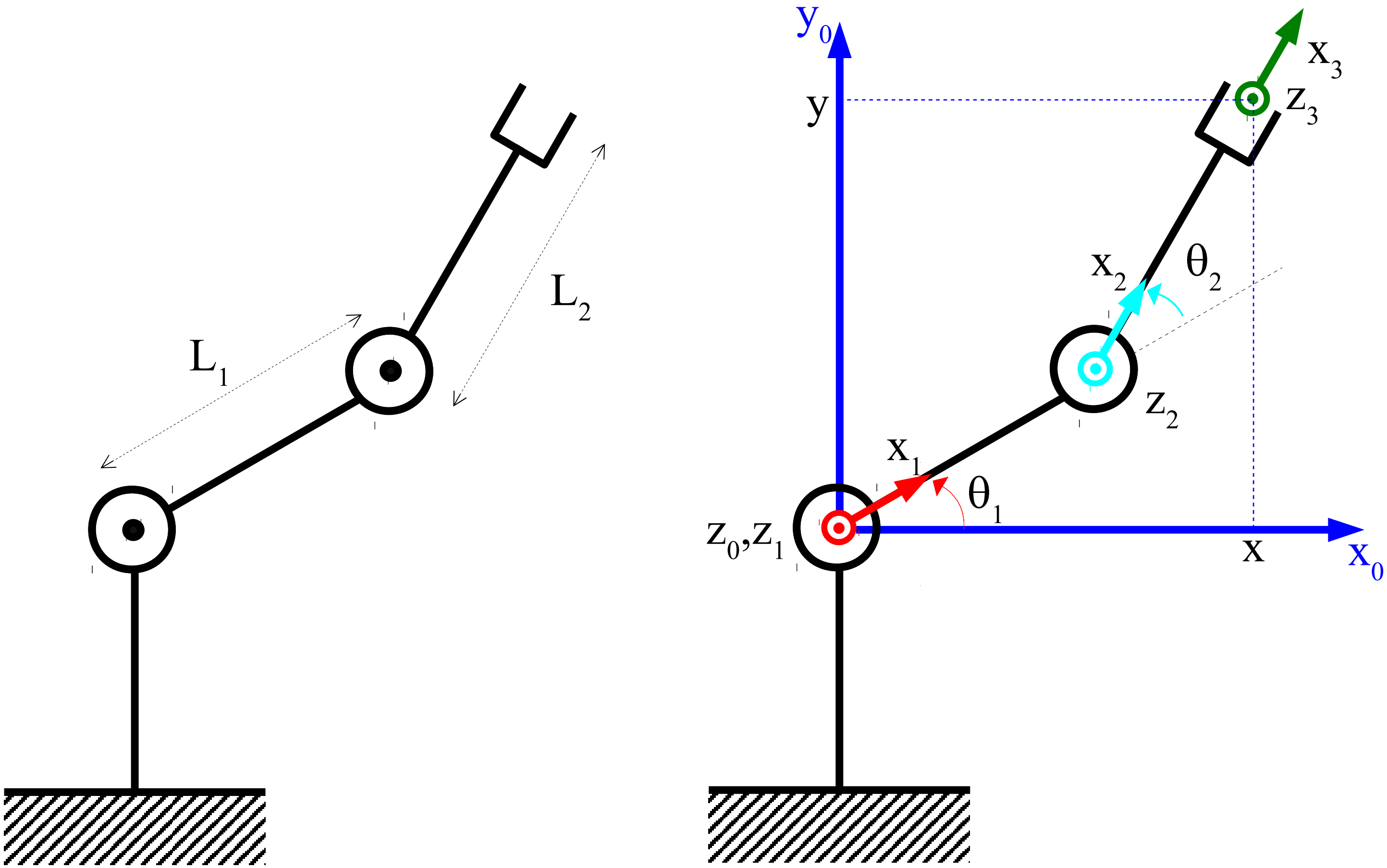
Dado o mecanismo de braço manipulador articulado planar de 2 GDL, considere que a tarefa é posicionar a garra em uma posição (x,y) no plano definido pelos eixos x_0 y_0. Determine:

- O Jacobiano do mecanismo;

- As singularidades do mecanismo;

- As velocidades de junta necessárias para fazer com que a garra se movimente ao longo do eixo x com velocidade:

$$^{0}v_{03x} = {}^{0}\dot{P}_{03x} = \dot{x}$$



L_1
L_2
y_0
y
x_3
z_3
x_2
θ_2
z_2
x_1
θ_1
z_0, z_1
x
x_0

Exemplo - jacobiano e singularidades:

A função de Cinemática direta do braço planar é dada por:

$$ {}^{0}T_3(\theta_1,\theta_2)=\begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & (c_1 L_1 + c_{12} L_2) \\ s_{12} & c_{12} & 0 & (s_1 L_1 + s_{12} L_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Desta forma, como a tarefa consiste em controlar a posição (x,y) da ferramenta, temos:

$$ q=\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \qquad X(q)=X(\theta_1,\theta_2)=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (c_1 L_1 + c_{12} L_2) \\ (s_1 L_1 + s_{12} L_2) \end{bmatrix} $$

Exemplo - jacobiano e singularidades:

Então, a partir de:

$$X(q) = X(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1 L_1 + c_{12} L_2) \\ (s_1 L_1 + s_{12} L_2) \end{bmatrix}$$

Temos:

$$J(q) = \left[\frac{\partial x(q)}{\partial q^T} \right] \Rightarrow J(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \theta_1} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta_2} \end{bmatrix}$$

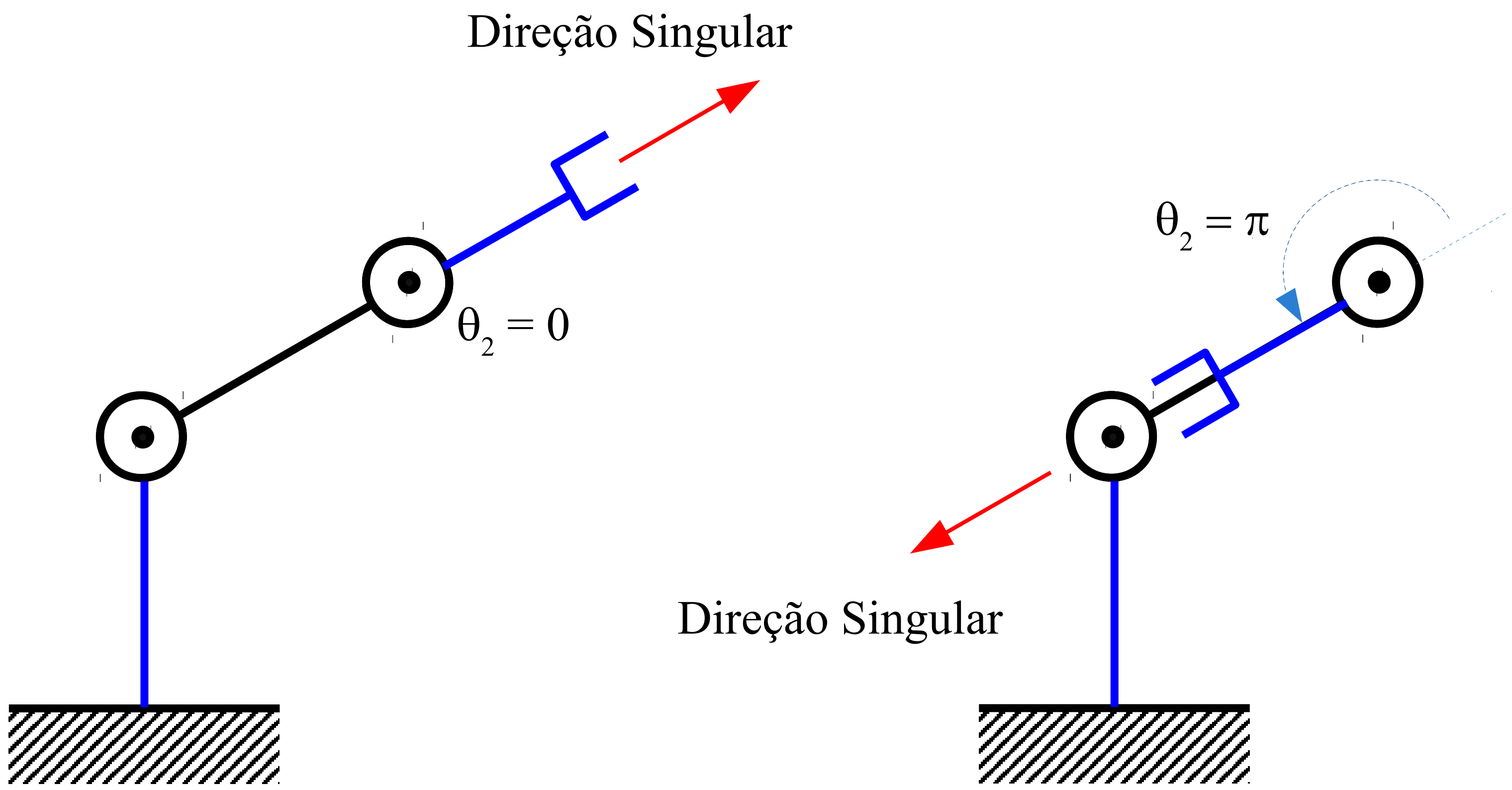
Assim:

$$\boxed{J(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} (-s_1 L_1 - s_{12} L_2) & (-s_{12} L_2) \\ (c_1 L_1 + c_{12} L_2) & (c_{12} L_2) \end{bmatrix}}$$

Singularidades:

$$det(J(\theta_1, \theta_2)) = L_1 L_2 (s_{12} c_1 - c_{12} s_1) = L_1 L_2 sen(\theta_1 + \theta_2 - \theta_1) = L_1 L_2 sen(\theta_2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_2 = k.\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}}$$


Direção Singular
$\theta_2 = 0$
$\theta_2 = \pi$
Direção Singular

<u>Exemplo - jacobiano e singularidades</u>:

Para determinar as velocidades das juntas necessárias para impor uma velocidade da garra ao longo do eixo x, com velocidade ao longo do eixo y nula, temos que resolver o sistema:

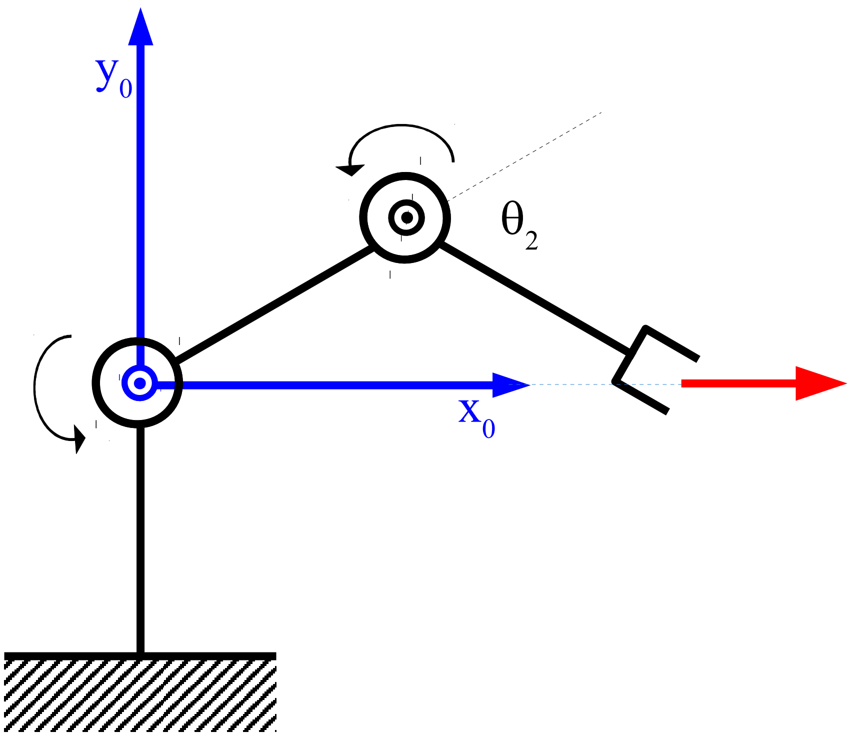
$$\dot{q} = J^{-1}(q).\dot{X} \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-s_1 L_1 - s_{12} L_2) & (-s_{12} L_2) \\ (c_1 L_1 + c_{12} L_2) & (c_{12} L_2) \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculando a inversa da matriz jacobiana, obtemos a solução:

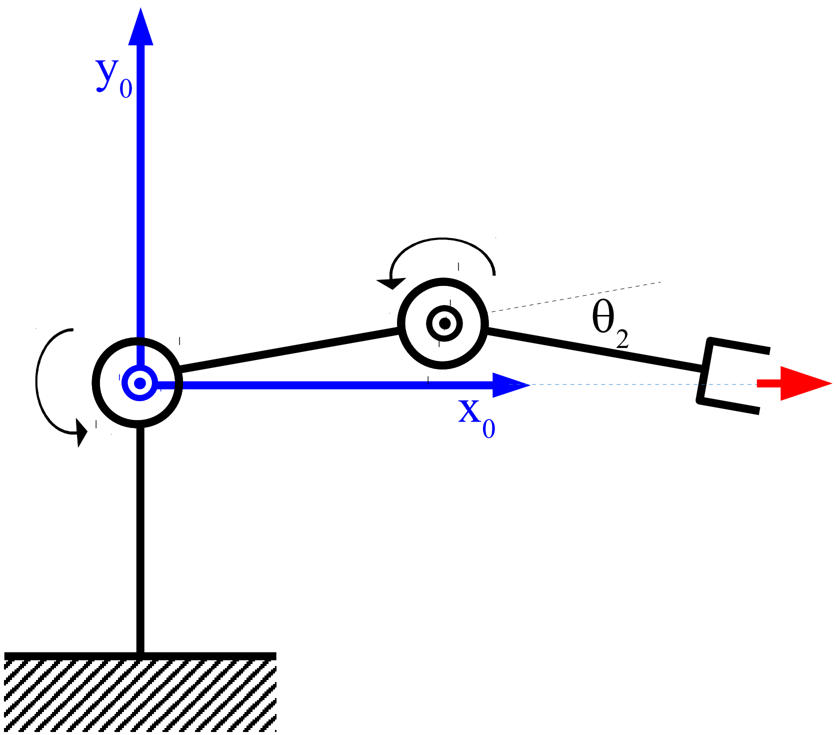
$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{L_2 c_{12}}{L_1 L_2 s_2} \right) \dot{x} \\ \left(\dfrac{-L_1 c_1 + L_2 c_{12}}{L_1 L_2 s_2} \right) \dot{x} \end{bmatrix}$$

Verifica-se que, ao aproximar da singularidade:

$$\theta_2 \rightarrow 0 \quad ou \quad \theta_2 \rightarrow \pi \qquad \Rightarrow \qquad \begin{matrix} \dot{\theta}_1 \rightarrow \infty \\ \dot{\theta}_2 \rightarrow \infty \end{matrix}$$



y_0
θ_2
x_0



y_0
θ_2
x_0

Cinemática Diferencial
Jacobiano e Singularidades