

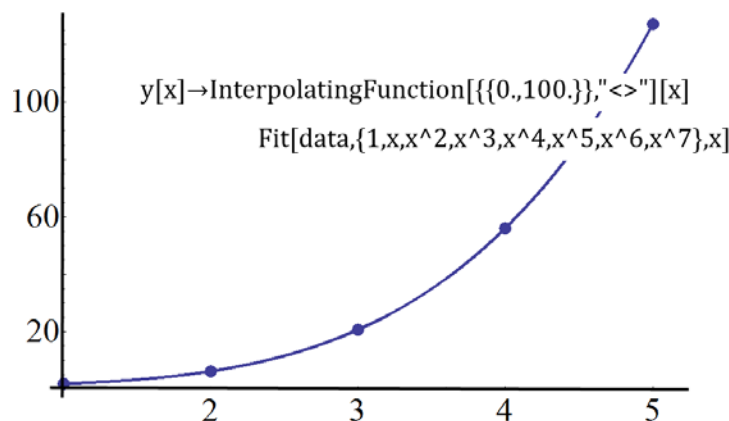
**Wo'zbekstan Respublikasi' joqari' ha'm orta
arnawli' bilim ministrligi**

**Berdaq ati'ndag'i' Qaraqalpaq ma'mleketlik
universiteti**

A.Abdikamalov, J.Akimova, X.Turekeev, R.Xojanazarova

**Uli'wma fizika boyi'nsha
laboratoriyali'q praktikumda
o'tkerilgen eksperimentler
na'tiyjelerin qayta islew usi'llari'**

Ma'mleketlik universitetlerdin' studentleri ushi'n oqi'w qollanbasi'



No'kis - 2013

Oqi'w qollanbasi' Qaraqalpaq ma'mleketlik universitetinin' ilimiy ken'esinin' 2013-jil 5-aprel ku'ngi ma'jilisinde maqullandi' ha'm baspag'a usi'ni'ldi'. 6-sanli' protokol.

Pikir bildiriwshiler:

Fizika-matematika ilimlerinin' doktori' A.Kamalov.

Texnika ilimlerinin' kandidati' D.Jumamuratov.

Mazmuni'

Kirisiw.	4
1-§. Ha'r qi'yli' tu'rdegi birdey da'lliktegi wo'lshevwlerde tosattan jiberiletug'i'n qa'teliklerdin' shamasin' ani'qlaw usi'llari'.	14
2-§. Tuvri'dan-tuvri' ko'p qaytara wo'tkerilgen wo'lshevwlerdegi tosattan ju'zege keletug'i'n qa'telikler.	20
3-§. Bir retten wo'tkeriletug'i'n wo'lshevwlerde jiberiletug'i'n qa'teler.	37
4-§. Ko'p ret ha'm bir ret wo'tkerilgen wo'lshevwlerdegi tosin'nan ketetug'i'n qa'telerdi birgelikte yesapqa ali'w.	43
5-§. Janapay wo'lshevwlerdin' qa'teleri.	45
6-§. Fizikali'q shamalar arasin'dag'i' eksperimentlerde ali'ng'an baylani'slardi' qayta islew.	59
7-§. En' kishi kvadratlar usi'li'.	73
8-§. Interpolyaciya ha'm eksperiment na'tijjelerin statistikali'q qayta islew ma'selelerin Mathematica algebrali'q sistemasi'ni'n' ja'rdeminde sheshiw texnologiyalari'.	87
9-§. Mathematica kompiuterlik algebra sistemasi' ortalig'i'ndag'i' interpolyaciyalawdi'n' texnologiyalari'.	93

Kirisiw

Fizika ta'biyiy ilim si'pati'nda teoriyali'q ha'm eksperimentalli'q izertlewlerdin' qosi'ndi'si'nan turadi'. Fizikani'n' teoriyali'q ha'm eksperimentalli'q qurawshi'lari' bir biri menen baylani'sli' tu'rde, bir birin toli'qti'ri'p rawajlanadi'. Jan'a eksperimentalli'q jetiskenlik da'rha'l jan'a teoriyalardi'n' do'retiliwin talap yetedi. Soni'n' menen birge teoriyali'q fizikadag'i' jetiskenlikler jan'a eksperimentlerdi qoyi'w ushi'n tiykarlar payda yetip beredi.

Fizika pa'nin u'yrengende ha'r bir studentte eksperimentalli'q ha'm teoriyali'q izertlewler ju'rgiziw ko'nligiwlerin payda yetiw og'ada a'hmiyetli ma'selelerdin' biri boli'p tabi'ladi'. Uli'wma fizika kursi'n u'yrengende eksperimentalli'q ko'nlikpeler laboratoriyali'q praktikum bari'si'nda ali'nadi'.

Eksperimentalli'q izertlew din' tiykarg'i' usi'llari' si'pati'nda baqlaw menen eksperimentti atap ataw mu'mkin.

Baqlaw qanday da bir obektti usi' obektke ta'sir yetpey sistemali' tu'rde ha'm belgili bir maqsetlerge muwapi'q u'yreniw boli'p tabi'ladi'. Baqlaw u'yreniletug'i'n obekt yamasa qubi'li's haqqi'ndag'i' yen' baslang'i'sh informaciyalardi' beredi.

Eksperiment bolsa obektti yamasa qubi'li'sti' u'yreniw din' usi'li' boli'p, bul jag'dayda izertlewshi aktiv tu'rde ha'm belgili bir maqsetlerge muwapi'q jasalma tu'rdegi sharayatlardi' payda yetiw yamasa ta'biyiy sharayatlardi' paydalani'w joli' menen usi' obektke yamasa qubi'li'sqa olardi'n' bazi' bir qa'siyetlerinin' ko'riniwi ushi'n ta'sir yetedi. Eksperimenttin' baqlawdan to'mendegidey principialli'q wo'zgesheliklerin ayi'ri'p ko'rsetiwge boladi':

1. Eksperiment qubi'li'sti' yamasa obektti izertleniwshi tiykarg'i' processke basqa keregi joq faktorlardi'n' ta'sirin tiygizbey u'yreniw mu'mkinshiliginin' ju'zege keliwin ta'miynleydi.

2. Eksperimentalli'q sharayatlarda tez ha'm da'l tu'rde na'tiyjelerdi ali'w mu'mkin.

3. Eksperimentte u'yrenilip ati'rg'an processti yamasa obektti qansha talap yetilse, sonsha ret si'nap ko'riw mu'mkin.

Eksperimenttin' maqseti u'yreniletug'i'n obektti yamasa qubi'li'sti' sapali'q ha'm sanli'q jaqtan u'yreniw ha'm olar arasi'ndag'i' baylani'sti' ani'qlaw boli'p tabi'ladi'. Bunday izertlewlerdin' barli'g'i' da wo'lsheuler tiykari'nda wo'tkeriledi. Sonli'qtan wo'lsheulerdin' bari'si'nda sanli'q na'tiyjelerdin' da'l ha'm isenimli tu'rde ali'ni'wi' og'ada u'lken a'hmiyetke iye boladi'.

Ha'zirgi waqitlari' eksperimentalli'q izertlew menen shug'i'llani'wshi'lar aldi'nda payda bolatug'i'n tiykarg'i' problemalardi'n' biri bul joqari' da'llikte ali'ng'an na'tiyjelerdi qayta islewde yeffektivli tu'rde isleytug'i'n jan'a algoritmlerdi do'retiw boli'p tabi'ladi'. Jan'a texnikali'q qurallardi'n' rawajlani'wi', jan'a ko'rgizbeli usi'llardi'n' qollani'li'wi', kompiuterlestiriw - bulardi'n' barli'g'i' wo'lsheuler da'lliginin' joqari'lawi'na mu'mkinshilik beredi. Biraq usi' da'llikke yerisiw ushi'n eksperimentler na'tiyjelerin qayta islew metodlari' turaqli' tu'rde jetilistirilip bari'li'wi' sha'rt.

XIX a'sirdin' baslari'nda belgili matematikler Adrien Mari Lejandr (Adrien-Marie Legendre, 1752-1833, francuz matematigi) ha'm Iogann Karl Fridrix Gaussti'n' (Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, nemis matematigi, mexanigi, fizigi ha'm astronomi') miynetlerinde yen' kishi kvadratlar metodi' rawajlandi'ri'ldi' ha'm bul metod ko'p ji'llar dawami'nda da'slepki tu'rinde qollani'li'p kelindi. XX a'sirdin' 40-j'i'llari'nan baslap, bul metodti'n' ko'p sanli' modifikaciyalari' payda boldi'. Bunda jan'a texnikali'q qurallar ha'm ko'rgizbeli metodlardi'n' payda boli'wi', matematiklerdi informaciyalardi' qayta islew din' ju'da' quramali' algoritmin islep shi'g'i'wg'a ma'jbu'rledi. Mi'sali', yekinshi Jer ju'zi uri'si' ji'llari' payda bolg'an raketa texnikasi' berilgen mag'li'wmatlardi' izbe-iz qayta islew algoritmin ha'm oni'n' modifikaciyalari'n islep shi'g'i'w di' alg'a qoydi'. Sonli'qtan, texnikali'q qurallardi'n' rawajlani'wi' ali'ng'an na'tiyjelerdi qayta islew ushi'n arnalg'an matematikali'q apparatlardi'n' jetilistiriwin talap yetti. Bunday mi'sallardi' fizikani'n'

ko'plegen bo'limlerinen, a'sirese elementar bo'leksheler fizikasi' (joqari' yenergiyalar fizikasi'), tarlar fizikasi', gravitaciya teoriyasi' bo'limlerinen ko'plep keltiriwge boladi'.

Eksperimentalli'q fizikani'n' rawajlani'wi' menen birge eksperiment na'tiyjelerin qayta islew, jiberilgen qa'telerdi bahalaw ha'm yesapqa ali'w isleri de u'lken pa'tler menen rawajlana basladi'. Bul jag'dayg'a da'lil retinde 1933-j'i'li' Moskva ha'm Leningrad qalalari'nda jari'q ko'rgen Angliyalı' (Shotlandiyalı') ilimpazlar E.Uitteker menen G.Robinsonni'n' 364 betten ibarat "Matematisheskaya obrabotka rezultatov nabliudeniy" kitabi'n ko'rsetiwge boladi' (bul kitap www.libgen.org yelektronli'q kitapxanası'nan ali'ndi').

Kompiuterlik texnologiyalardi'n' payda boli'wi' menen rawajlani'wi' eksperimentlerde ali'ng'an na'tiyjelerdi yeffektivli tu'rde qayta islew ushi'n u'lken jol ashi'p berdi. Ha'zirgi waqi'tlari' ha'r bir eksperimentator wo'zi alg'an sanli' na'tiyjelerdi matematikali'q jaqtan qayta isley ali'w mu'mkinshiligine iye. Bul a'debiyatlardi'n' barli'g'i' da Internet tarmag'i'nda ken'nen ori'n alg'an ha'm olardi'n' ayi'ri'mlari'ni'n' dizimi usi' qollanbani'n' keyninde keltirilgen.

Joqari'da ayti'lg'an jag'daylarg'a baylani'sli' oqi'w qollanbasi' oqi'ti'wshi'larg'a, studentlerge uli'wma fizika boyi'nsha laboratoriyali'q praktikumda wo'lsheplerdin' na'tiyjelerin qaytadan islew ha'm qa'telerdin' shamalari'n ani'qlaw usi'llari'n teren' u'yreniw ushi'n tayarlandi'.

Oqi'w qollanbasi' wo'lsheplerdin' na'tiyjelerin qaytadan islew ha'm qa'telerdin' shamalari'n ani'qlaw usi'llari' boyi'nsha tradiciyag'a aylang'an oqi'w qollanbalari'nan kompiuterlik texnologiyalardi' ken'irek qollani'w boyi'nsha wo'zgeshelikke iye. Bul qollanbada tiykari'nan Wolfram kompaniyasi'ni'n' Mathematica kompiuterlik algebra sistemasi'n laboratoriyali'q praktikumda oqi'ti'wshi'lar menen studentlerdin' ken'nen paydalani'wi' na'zerde tuti'ladi'. Sonli'qtan Mathematica sistemasi'nda fayllar menen islesiw, usi' sistemada fizikali'q mag'li'wmatlar fayli'n do'retiw,

Mathematica sistemasi'nda funkciyalardi' grafikali'q tu'rde sa'wlelendiriw, yeki wo'lsheмли ha'm u'sh wo'lsheмли grafiklerdi du'ziw, ortasha arifmetikali'q ma'nisler menen dispersiyalardi' yesaplaw, isenimli intervallardi' yesaplaw ushi'n kirgizilgen operatorlardi' biliw talap yetiledi.

Mathematica sistemasi'ndag'i' Fure-analiz, fure-analizlerdi quri'w ushi'n arnalg'an funkciyalar, bul sistemadag'i' si'ziqli' korrelyaciya'li'q analiz, Mathematica sistemasi'n paydalani'w arqali' sa'ykeslik kriteriyleri ja'rdeminde mag'li'wmatlardi' qayta islew talap yetiledi.

Wo'lshewlerdin' tu'rleri. Eksperimentlerde fizikali'q qubi'li'slar menen obektlerdin' qa'siyetleri sa'ykes fizikali'q shamani' wo'lshew arqali' u'yreniledi.

Qanday da bir fizikali'q shamani' wo'lshew degende usi' shamani' shamasin' bir birlikke ten' dep ali'ng'an ta'biyati' tap usi'nday bolg'an basqa bir shama menen sali'sti'ri'w'di' tu'sinemiz. Mi'sali' uzi'nli'qti'n' birligi retinde 1 metr, massani'n' birligi retinde 1 kg qabi'l yetilgen. Fizikali'q shamani' wo'lshegende arnawli' ma'mleketlik ma'kemelerde saqlanatug'i'n yetalonlardi' paydalanbaydi', al ko'rsetiwleri qanday da bir jollar menen sonday yetalonlar menen sali'sti'ri'lg'an wo'lshew a'sbaplari' qollani'ladi'.

Wo'lshewlerdin' tu'rleri wo'lshevetug'i'n shamani'n' fizikali'q xarakteri menen ani'qlanadi'. Fizikali'q xarakteri dep aytqani'mi'zda wo'lshewdin' talap yetiletug'i'n da'lligi, wo'lshewdin' tezligi, wo'lshew wo'tkerilgen sharayatlar, wo'lshewlerdin' rejimleri ha'm tag'i' basqalar na'zerde tuti'ladi'. Wo'lshewlerdin' tu'rlerin to'mendegidey tu'rde klassifikaciyalaw mu'mkin:

Wo'lshewler tu'rleri	Shamani' o'lshewlerdin' sani' boyi'nsha	Ko'p ret o'tkeriletug'i'n,
		Bir ret o'tkeriletug'i'n.
	Wo'lshewlerdin' jetkilikliginin' da'rejesi boyi'nsha	Za'ru'rli bolg'an,
		Arti'qsha.
	Wo'lshewlerdin'	Absoliutlik,

	na'tiyjelerinin' xarakteri boyi'nsha	Tabaldi'ri'qli'q,
		Sali'sti'rmali'.
	Wo'lshewler o'tkeriwdin' sha'rtleri boyi'nsha	Birdey da'lliktegi,
		Birdey da'lliktegi yemes.
	Wo'lshewlerdi o'tkeriw sharayatlari' boyi'nsha	Tuwri'dan-tuwri' (tikkeley),
		Janapay,
		Ji'ynaq,
		Birgeliktegi,
		Dinamikali'q.
	Usi'li' boyi'nsha	Tikkeley beriletug'i'n bahalar,
		Wo'lshem menen sali'sti'ri'w,
		Qosi'mshalar,
		Qarsi' qoyi'w,
		Differencialli'q,
		Nollik,
		Almasti'ri'w (sa'ykes keliw).
	Obektke ta'siri boyi'nsha	Kontaktsi'z,
		Kontaktli'.
	Bahalawdi'n' da'lligi boyi'nsha	Texnikali'q,
		Laboratoriyali'q (izertlew)

Eskertiw: Laboratoriyali'q (izertlew) o'lshewlerdi qa'teliktin' shamasin da'l bahalaw menen ha'm qa'telerdin' shamasin juwi'q tu'rde bahalaw menen ali'p bari'latug'i'n o'lshewler dep yekige bo'ledi.

Wo'tkerilgen ta'jiriybelerdin' sani' boyi'nsha o'lshewlerdi bir retlik yamasa ko'p ret qaytalanatug'i'n dep bo'liw mu'mkin. Eger bazi' bir fizikali'q shamani'n' ma'nisi ani'qlaw ushi'n tek bir ret o'lshew o'tkeriletug'i'n bolsa, onda bunday o'lshewdi bir retlik o'lshew dep ataydi'. Eger ta'jiriybe

bari'si'nda birdey sharayatlarda ha'm birdey a'sbap-u'skenenin' ja'rdeminde o'lshevwler bir neshe ret o'tkeriletug'i'n bolsa, onda o'lshewdi ko'p ret qaytalanatug'i'n o'lshew dep ataydi'.

Fizikali'q laboratoriyada na'tiyjeni ali'wdi'n' usi'li' boyi'nsha a'dette tuwri'dan-tuwri' ha'm janapay o'tkerilgen ta'jiriybeler dep bo'ledi. Tuwri'dan-tuwri' o'lshevwlerde fizikali'q shamani'n' ma'nisi sa'ykes fizikali'q a'sbapti'n' ja'rdeminde ani'qlani'ladi'. Demek bunday jag'dayda o'lshenetug'i'n shama yetalon menen tikkeley sali'sti'ri'ladi'. Mi'sali' uzi'nli'qti' si'zg'i'sh, temperaturani' termometr, ku'shti dinamometr, toq ku'shin ampermetr menen o'lsheydi. Biraq ayi'ri'm fizikali'q shamalardi' ani'qlaw ushi'n usi' shamani'n' basqa fizikali'q shamalar menen qanday baylani'sqa iye yekenligin ani'qlap ali'w kerek boladi'. Usi'nday jollar menen o'tkerilgen o'lshevwlerdi janapay o'lshevwler dep ataymi'z. Bunday o'lshevwler qatari'na denelerdin' ji'lli'li'q si'yi'mli'g'i'n, ji'lli'li'q ken'eyiwin, basqa da termodinamikali'q parametrlarin ani'qlaw kiredi. Ji'lli'li'q ken'eyiwin ani'qlaw ushi'n a'dette temperaturani'n' ha'r qanday ma'nislerindegi denenin' uzi'nli'qlari'ni'n' ma'nislerin o'lshew kerek boladi'. Temperaturani'n' ma'nisleri menen uzi'nli'qlardi'n' ma'nisleri tikkeley o'lshenedi.

Wo'lshevwler o'tkerilgen sharayatlar boyi'nsha olardi' birdey da'lliktegi ha'm ha'r qi'yli' da'lliktegi o'lshevwler dep bo'liw mu'mkin. Eger fizikali'q shamani' o'lshew birdey sharayatlarda ha'm birdey da'lliktegi a'sbaplardi'n' ja'rdeminde o'lsheense, onda bunday o'lshevwlerdi birdey da'lliktegi o'lshevwler dep ataydi'. Al ha'r qi'yli' sharayatlarda ha'm ha'r qi'yli' da'lliktegi a'sbaplardi'n' ja'rdeminde o'tkerilgen o'lshevwler ha'r qi'yli' da'lliktegi o'lshevwler dep ataladi'. Fizikali'q laboratoriyalarda o'tkerilgen o'lshevwlerdin' ko'pshiligi birdey da'lliktegi o'lshevwler boli'p tabi'ladi'. Sebebi ha'r bir laboratoriyali'q jumi's ori'nlang'anda usi' laboratoriyali'q jumi'sti' ori'nlaw ushi'n belgilengen a'sbap g'ana paydalani'ladi'.

Laboratoriyali'q fizikali'q praktikum studentlerdin' fizikali'q shamalardi'

o'lshevi qabiletliklarining ha'm ko'nliklarining payda bolivina, fizikaliq shamalardi o'lshevidin a'hmiyetli usullari'n men'geriwine, tiykarg'i fizikaliq nizamlar menen qubili'slardi' teren' biliwine ja'rdem beredi. Fizikaliq praktikumni'n ha'r bir laboratoriyaliq jumi'si'nda izertlenetug'i'n qubili'sti' yamasa obektti xarakterleytug'i'n ani'q bir fizikaliq shamani' o'lshevi na'zerde tutiladi'. Joqari'da keltirilgen klassifikaciya boyi'nsha laboratoriyaliq jumi'slardi' ori'nlaw bari'si'nda o'tkeriletug'i'n o'lshevlardi birdey da'lliktegi, bir ret o'tkeriletug'i'n, ko'p ret qaytalanatug'i'n, tuwri'dan-tuwri' o'tkeriletug'i'n, janapay ha'm tag'i' basqa da o'lshevlerge bo'liw mu'mkin.

Laboratoriyaliq o'lshevlar barli'q waqi'tta da bazi' bir da'llikte o'tkeriledi. Bul jag'day ali'ng'an na'tiyjede belgili bir ani'qsi'zli'qti'n qatnasatug'i'nli'g'i'n bildiredi. Bunday ani'qsi'zli'qti' bahalaw (yag'ni'y ani'qsi'zli'qti'n shamasin' biliw) qa'legen eksperimentalli'q izertlew din' aji'ralmas bo'legi boli'p tabiladi'.

Wo'lshevlar bari'si'nda jiberiletug'i'n qa'teler. Ta'jiriybeler o'lshevi a'sbaplari'ni'n da'lliginin' joqari' yemes yekenliginen, bizin' seziw organlari'mi'zdi'n' jetisken yemes yekenliginen, bizin' bilimlerimizdin' toli'q yemes yekenliginen birdey o'lshevlardi ko'p ret qaytalag'anda o'lshevip ati'rg'an fizikaliq shama ushi'n ha'r qanday ma'nislerdin' alinatug'i'nli'g'i'n ko'rsetedi. Wo'lshevlardi birdey sharayatlarda o'tkergende de tap usi'nday jag'day qaytalanadi'. Anaw yamasa mi'naw o'lshevlardin' na'tiyjelerin a'melde paydalang'anda u'yrenilgen fizikaliq shamani'n haqi'yqi'y ma'nisi, o'lshevidin' da'lligi haqqi'nda ma'sele tuwiladi'.

"Wo'lshevidin' da'lligi" termini, yag'ni'y o'lshevidin' na'tiyjelerinin' bazi' bir haqi'yqi'y ma'niske jaqi'nli'g'i' da'rejesi o'lshevi operaciyalari'n sapali'q jaqtan salisti'ri'w ushi'n qollaniladi'. Sanli'q xarakteristika ushi'n "o'lshevidin' qateligi" tu'sinigi qollaniladi'. Bul terminler bir biri menen ti'g'i'z baylanisqan: qatelik qanshama kishi bolsa da'llik sonshama joqari'

boladi'. Wo'lshevlarda jiberiletug'i'n qa'teliklerdin' shamasini bahalaw o'lshevlardini shi'nli'g'i'ni'n ta'miyinlew din' yen' a'hmiyetli ilajlari'ni'n biri boli'p tabi'ladi'.

Wo'lshevlardini da'lligine ta'sirin tiygizetug'i'n faktorlardi'n sani' jetkilikli da'rejede u'lken ha'm sonli'qtan o'lshevlardini qa'telerinin qa'legen klassifikatsiyasi'n toli'q klassifikatsiya dep yesaplaw'ga bolmaydi'.

Biz fizikali'q laboratoriyalarda o'tkeriletug'i'n o'lshevlardini qa'telerin bahalaw ushi'n tiykar boli'p tabi'latug'i'n klassifikatsiyalardi'n ayi'ri'mlari'n keltiremiz. Qa'teliklerdin' bazi' bir tur'lerin toli'q tur'de qarap shi'g'ami'z.

Biz x orqali' bazi' bir shamani' o'lshegende ali'natug'i'n ma'nisti belgileyik. x_0 orqali' usi' fizikali'q shamani'n haqi'yqi'y ma'nisi belgilengen bolsi'n (fizikali'q shamalardi'n xaqi'yqi'y ma'nislerin kestelerden alami'z ha'm sonli'qtan olardi' barli'q waqi'tta da belgili dep yesaplaymi'z).

Wo'lshevdini qa'teligi degenimizde o'lshegen x shamasini'ni'n oni'n haqi'yqi'y x_0 shamasidan ayi'rmasi'n na'zerde tutami'z.

A'dette o'lshevlardini absoliut, sali'sti'rmali' ha'm keltirilgen qa'telerin bir birinen ayi'ri'p ko'rsetedi.

Wo'lshevdini absoliut qa'teligi dep fizikali'q shamani'n o'lshevide ani'qlang'an ha'm haqi'yqi'y ma'nisleri arasi'ndag'i' ayi'rmag'a, yag'ni'y $x_0 - x$ ayi'rmasi'na aytami'z. Absoliut qa'teliktin' ma'nisi on' da, teris te boladi'.

Sali'sti'rmali' qa'telik dep absoliut qa'teliktin' haqi'yqi'y ma'niske yamasa o'lshevdini bari'si'nda ali'ng'an ma'niske qatnasi'na aytami'z. Sali'sti'rmali' qa'telik ko'binese procentlerde an'g'arti'ladi':

$$\delta = \pm \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\% \text{ yamasa } \delta = \pm \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\%.$$

Keltirilgen qa'telik procentlerde an'lati'lg'an absoliut qa'teliktin' normirovkalang'an x_n ma'nisine qatnasi' boli'p tabi'ladi'. Bunday qa'telikni

$\gamma = \pm \frac{\Delta x}{x_n} \cdot 100\%$ tu'rinde jazami'z. Normirovkalang'an ma'nis ushi'n o'lshenip

ati'rg'an shamani'n' maksimalli'q ma'nisi bolg'an x_{\max} shamasi'ni'n' ali'ni'wi' mu'mkin. Bunday jag'dayda $x = x_{\max}$.

Ko'riniw xarakterine, payda boli'w sebeplerine ha'm saplasti'ri'li'w mu'mkinshiliklerine baylani'sli' o'lshewdin' qa'telerinin' sistemali'q ha'm tosattan bolatug'i'n qurawshi'lari'n bir birinen ayi'ri'wg'a boladi'. Wo'lshewlerdin' bari'si'nda turpayi' tu'rde jiberiletug'i'n qa'telesiwler de bar boladi' (aljasi'wlar).

Sistemali'q qa'telikler barli'q ta'jiriybelerde shamasi' da, belgisi de saqlanatug'i'n birdey da'lliktegi o'lshewler qa'teleri boli'p tabi'ladi'. Sistemali'q qa'teliklerdin' yen' a'dettegi ha'm ko'p ushi'rasatug'i'n derekleri to'mendegiler boli'p tabi'ladi':

- paydalani'li'p ati'rg'an apparaturani'n' (a'sbap-u'skenelerdin') kemshilikleri,
- o'lshewdin' paydalani'p ati'rg'an usi'li'ni'n' kemshilikleri,
- o'lshew apparaturasi'ni'n' duri's yemes sazlani'wi',
- ta'jiriybe o'tkeriw sharayati'ni'n' turaqli' bolmawi',
- qorshap alg'an ortalı'qti'n' ta'siri,
- eksperimentatordi'n' turaqli' tu'rde jiberetug'i'n qa'teleri,
- basqa parametrlerdin' yesapqa ali'nbag'an ta'sirleri.

Sistemali'q qa'teliklerdi saplasti'ri'w mu'mkin bolg'an qa'telikler dep yesaplaydi'. Sistemali'q qa'teliklerdi jog'alti'w yamasa kishireytiw ushi'n izertlew usi'llari'na si'n ko'z benen qarap olardi' jetilistiriw, da'lligi joqari' bolg'an a'sbaplardi' duri's paydalani'w kerek boladi'.

Tosattan jiberiletug'i'n qa'telikler birdey o'lshewlerdin' bari'si'nda ha'm birdey sharayatlarda ha'r ta'jiriybede o'zinin' shamasi'n ha'm belgisin o'zgertetug'i'n qa'telikler boli'p tabi'ladi'. Tosattan jiberiletug'i'n qa'telikler ha'r bir o'lshewde ha'r qi'yli' ha'm belgisiz tu'rde ta'sir yetetug'i'n tosattan

bolatug'i'n sebeplerge baylani'sli' payda boladi'. Bunday sebepler qatari'na a'sbapti'n' ayi'ri'm bo'limlerinin' tosattan ju'zege keletug'i'n vibraciyasi', ortalı'qtag'i' ha'r qi'yli' o'zgerisler (temperaturali'q, yelektrlik, magnitlik, optikali'q ta'sirler, i'g'alli'qti'n' o'zgerisi, hawani'n' terbelisleri ha'm basqalar) kiredi. Bunday sebeplerdin' basqa da ko'plegen tu'rlerin keltiriw mu'mkin. Olardi' a'meliy jaqtan saplasti'ri'w mu'mkinshiligi pu'tkilley bolmaydi'. Bir o'lsheude tosattan jiberiletug'i'n qa'telikti boljap ayti'w mu'mkinshiligi principinde mu'mkin yemes. Sonli'qtan o'lsheuler sani'n aqi'lg'a muwapi'q keletug'i'nday ret qaytalaw talap yetiledi. Bunnan keyin ali'ng'an na'tiyjeler itimalli'qlar teoriyasi' menen matematikali'q statistika usi'llari'ni'n' ja'rdeminde qayta islenedi. Olar qa'telikler teoriyasi' dep atalatug'i'n teoriyani'n' tiykari' boli'p tabi'ladi'.

Qa'telesiwler (turpayi' qa'teler) baqlawdi' yamasa o'lsheudi duri's yemes o'tkeriwdin' na'tiyjesinde payda boladi' (a'sbapti'n' ko'rsetiwin duri's yemes jazi'p ali'w, ta'jiriybe o'tkeriletug'i'n sharayatlardi'n' buzi'li'wi', materiallardin' pataslani'wi', kernewdin' o'zgeriwi ha'm basqalar). Bunday duri's yemes mag'li'wmatlardi' qaytadan o'lshep ko'riw joli' menen paydalanbaw kerek.

Eger eksperimentlerde ali'ng'an na'tiyjelerdegi sistemali'q qa'teliklerdi ha'm turpayi' tu'rdegi qa'telesiwlerdi jog'alti'wg'a yamasa kishireytiwge bolatug'i'n bolsa da, tosattan jiberiletug'i'n qa'teliklerdi saplasti'ri'w mu'mkinshiligi bolmaydi'. Sonli'qtan laboratoriyali'q praktikumdag'i' birdey da'llikte o'tkeriletug'i'n o'lsheulerde jiberiletug'i'n tosattan qa'teliklerdi ani'qlaw usi'llari' menen tani'sami'z.

1-§. Ha'r qi'yli' tu'rdegi birdey da'lliktegi o'lshevlarda tosattan jiberiletug'i'n qa'teliklerdin' shamasini aniqlaw usullari'

Eksperimentalli'q izertlew jumi'slari'n ori'nlag'anda o'lshenetug'i'n shamani'n' ma'nisine usi' obektke yamasa qubi'li'sqa tuwri'dan-tuwri' qatnasi' joq ko'p sanli' tosattan ju'zege keletug'i'n faktorlar ta'sir yetedi. Bul faktorlar o'lshevlar na'tiyjelerine ku'shli ta'sir yete aladi', biraq ni'zamli'q (turaqli') xarakterge iye bola almaydi'. Sonli'qtan eksperimentte ali'natug'i'n barli'q shamalar tosattan ali'natug'i'n shamalar boli'p tabi'ladi'. Bul jag'dayda payda bolatug'i'n qa'telikler tosattan jiberiletug'i'n qa'telikler dep ataladi'. Tosattan payda bolatug'i'n qa'teliklerdi saplasti'ri'wg'a bolmaydi'. Biraq olar itimalli'qlar teoriyasi' ni'zamli'qlari'na bag'i'natug'i'n bolg'anli'qtan o'lshevlardin' sani' jetkilikli da'rejede ko'p bolg'anda barli'q waqi'tta da o'lshenip ati'rg'an shamani'n' haqi'yqi'y ma'nisi jatatug'i'n sheklerdi ko'rsetiw mu'mkinshiligi boladi'.

Tosattan ali'natug'i'n shamalardi'n' qa'siyetleri. Tosattan ali'natug'i'n shamalar dep birdey sharayatlarda o'tkerilgen ta'jiriybede ha'r qi'yli' san ma'nislerge iye bolatug'i'n shamalarg'a aytami'z. Wo'lshevlardagi tosattan jiberiletug'i'n qa'telikler tosattan ali'natug'i'n shamalardi'n' mi'sallari'ni'n' biri boli'p tabi'ladi'. Tosattan ali'natug'i'n shama diskret (eger ol tek belgili bir sanli' ma'nislerge iye bolatug'i'n bolsa) ha'm u'zliksiz (bunday shama ma'nislerdin' u'zliksiz qatari'n qabi'l yete aladi') shamalar dep bo'linedi. Mi'sali' uzi'nli'qti' ko'p qaytara o'lshegende principinde bazi' bir diapazonda oni'n' u'zliksiz ma'nislerin ali'w mu'mkin.

U'zliksiz tosattan ali'natug'i'n shamalardi'n' bazi' bir qa'siyetlerin ko'rip shi'g'ami'z.

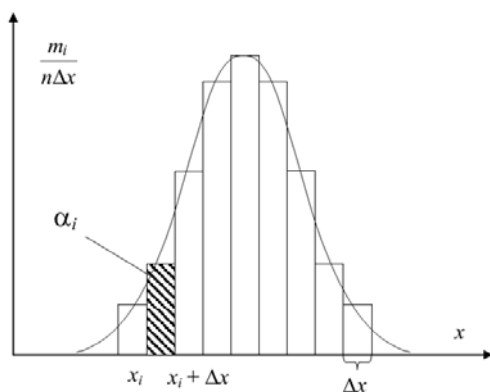
Qanday da bir x fizikali'q shamani' birdey da'llikte ko'p ret tuwri'dan-tuwri' o'lsheymiz.

Eger o'lshenip ati'rg'an shama x u'zliksiz bolsa, onda jetkilikli da'rejede

u'lken bolg'an n ret o'lshevdin' na'tiyjesinde x_1, x_2, \dots, x_n shamalari'ni'n' qatari'n alami'z. Wo'lshenip ati'rg'an shamani'n' haqi'yqi'y ma'nisi x_0 bizge ma'lim yemes. Wo'lshevdin' na'tiyjesin grafikali'q tu'rde ko'rsetemiz. Buni'n' ushi'n barli'q ali'ng'an ma'nisler jaylasqan oblastti' ken'ligi Δx birdey bolg'an birdey ken'liktegi intervallarg'a bo'lemiz. Bunnan keyin usi' intervallardi'n' ha'r birine kiriwshi o'lshevdin' sani'n yesaplaymi'z. Ken'ligi Δx shamasina ten' bolg'an intervallarg'a kiriwshi o'lshevdin' sanlari'n sa'ykes $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ arqali' belgileymiz (yag'ni'y birinshi intervalg'a kiriwshi o'lshevdin' sani' m_1 ge ten'). $(x_i, x_i + \Delta x)$ intervali'na kiriwdin' sali'sti'rmali' jiyiligi $\frac{m_i}{n}$ ge ten'.

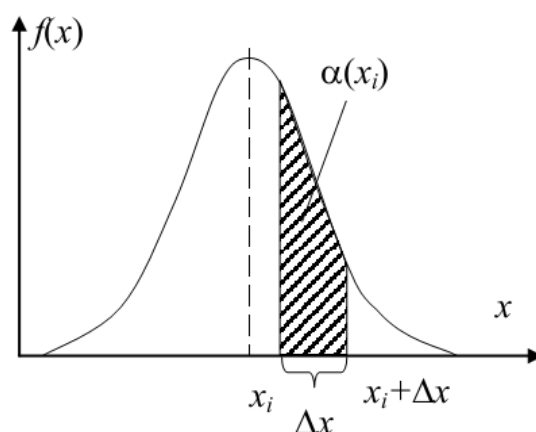
Grafikti du'zgende absciss ko'sherin bir biri menen shegaralasatug'i'n sani' shekli bolg'an Δx dana kesindige bo'lemiz. Ha'r bir $(x_i, x_i + \Delta x)$ kesindi u'stine biyikligi usi' intervalg'a kiriwdin' sali'sti'rmali' jiyiligi $\frac{m_i}{n}$ shamasina ten' tuwri' mu'yeshlik sog'ami'z (oni'n' orni'na $\frac{m_i}{n\Delta x}$ shamasin da ali'wi'mi'z mu'mkin). Usi'nday jollar menen payda bolg'an tekshelerden turatug'i'n grafik tan'lap ali'w gistogrammasi' dep ataladi' (1-su'wret).

Tap usi'nday jiyiliklik bo'listiriw o'lshevdin' seriyasi'ni'n' na'tiyjesin ko'rgizbeli tu'rde ko'rsetiwge mu'mkinshilik beredi. Ha'r bir o'lshevdin' na'tiyjesi tosi'nnan bolatug'i'n sebepler menen ani'qlanatug'i'n bolsa da, bul tosi'nnan bolatug'i'n qubi'li'sti'n' belgili bir ni'zamg'a bag'i'natug'i'nli'g'i' ani'q ko'rinip tur.



1-su'wret.

Tan'lap ali'w gistogrammasi'.



2-su'wret. x shamasini'n' bo'listiriwi iymekligi (yamasa x shamasini'n' itimallig'i'ni'n' ti'g'i'zli'g'i').

Wo'lshevlar sani' n u'lken bolg'anda x shamasini'n' x_i dan $x_i + \Delta x$ shamasina shekemgi intervaldag'i' ma'nisin qabi'l yete ali'wi'ni'n' sali'sti'rmali' jiyiligi bolg'an $\frac{m_i}{n}$ shamasin itimalliq dep ataydi' $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_i}{n} = \alpha_i \right)$. Itimalliq nolden 1 ge shekemgi ma'nislardi qabi'l yetetug'i'n on' shama.

$\frac{m_i}{n \Delta x}$ shamasini' birlik intervalg'a sa'ykes keletug'i'n itimalliq boli'p tabi'ladi'. Oni'n' ma'nisi x_i di'n' shamasin g'a'rezli, yag'ni'y bazi' bir $f(x_i)$ funkciyasi' boli'p tabi'ladi'. Bul funkciyani' itimalliqti'n' ti'g'i'zli'g'i' yamasa bo'listiriw ti'g'i'zli'g'i' dep ataydi':

$$n \rightarrow \infty \text{ sheginde } f(x_i) = \frac{m_i}{n \Delta x}. \quad (1.1)$$

Intervallar sani'n sheksiz u'lken yetip alg'anda intervaldi'n' uzi'nli'g'i' Δx ti'n' nolga umti'latug'i'nli'g'i'n atap o'tiwimiz kerek. Bunday jag'dayda gistogramma tegis tu'rde o'zgeretug'i'n $f(x)$ iymekligine aylanadi'. Bul iymeklikni x shamasini'n' bo'listiriwi iymekligi yamasa itimallig'i'ni'n' ti'g'i'zli'g'i' dep ataydi'. Bunday iymeklik maksimumg'a sali'sti'rg'anda

simmetriyali' iymeklik boli'p tabi'ladi' (2-su'wret).

Qa'legen sheksiz kishi dx intervali' ushi'n x shamasi'n o'lshegende x tan $x + dx$ shamasi'na shekemgi ma'nisinin' ali'ni'w itimalli'g'i' $d\alpha(x)$ ti'n' shamasi' $f(x)$ itimalli'q ti'g'i'zli'g'i'nan g'a'rezli boladi'

$$f(x)dx = d\alpha(x). \quad (1.2)$$

x shamasi'n o'lshegende oni'n' ma'nisinin' x tan $x + dx$ shamasi'na shekemgi intervalda boli'w itimalli'g'i' $\alpha(x_i)$ di'n' shamasi' usi' intervaldag'i' itimalli'qti'n' ti'g'i'zli'g'i' funkciyasi'ni'n' iymekliginin' maydani'na ten' (2-su'wrettegi shtrixlang'an oblast). Oni'n' ma'nisi itimalli'qlar ti'g'i'zli'g'i' bolg'an $f(x)$ funkciyasi'n integrallaw joli' menen ali'nadi':

$$\alpha(x_i) = \int_{x_i}^{x_i + \Delta x} f(x)dx. \quad (1.3)$$

x_i shamasi'ni'n' berilgen ma'nisi ushi'n Δx intervali'ni'n' shamasi' qanshama u'lken bolsa, og'an sa'ykes keletug'i'n itimalli'q ta sonshama u'lken boladi' (maydani' da u'lken).

Endi sheksiz uzi'n bolg'an Δx intervali'n qaraymi'z. Wo'lshenetug'i'n shamani'n' $-\infty$ ten $+\infty$ ke shekemgi intervaldi'n' ishindeg'i qanday da bir ma'nisti qabi'l yetiwinin' itimalli'g'i' 1 ge ten' (haqi'yqat waqi'ya – barli'q waqi'tta da ju'zege keletug'i'n waqi'ya). Bul $f(x)$ bo'listiriwi iymekligi asti'ndag'i' maydanni'n' 1 ge ten' yekenligin bildiredi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \quad (1.4)$$

Bul an'latpa normirovka sha'rti dep ataladi'.

Endi basqa sheklik jag'daydi' qaraymi'z. Δx intervali'n nolge umti'ldi'rami'z (yag'ni'y tosattan ali'natug'i'n shamani'n' tek bir ayqi'n ma'nisin yesapqa alami'z). Bunday jag'dayda maydan da nolge ten' boladi'. Bul

o'z geziginde o'lshevdin' bari'si'nda tosi'nnan bolatug'i'n u'zliksiz shamani'n' ayqi'n belgilengen ma'nisin ali'wdi'n' itimalli'g'i'ni'n' nolge ten' yekenligin bildiredi. Demek tosattan bolatug'i'n u'zliksiz shama ushi'n oni'n' mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' intervali'n ha'm usi' intervalda oni'n' turi'wi'ni'n' itimalli'g'i'n g'ana ayti'wg'a boladi' yeken. Bul x_1, x_2, \dots, x_n o'lshevlarinin' na'tiyjelerinin' seriyasi'nan shamani'n' haqi'yqi'y ma'nisin ali'wg'a bolmaytug'i'nli'g'i'n, al usi' haqi'yqi'y ma'niske jaqi'n bolg'an intervaldi' g'ana ani'qlawg'a bolatug'i'nli'g'i'n an'g'artadi'. Tap sol si'yaqli' o'lshevlarde jiberilgen qa'teliklerdin' da'l ma'nisin de ko'rsetiw mu'mkin yemes, al sa'ykes itimalli'q penen qa'teliklerdin' mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' intervali' g'ana ko'rsetiledi.

Tosattan ali'natug'i'n u'zliksiz shamani'n' tiykarg'i' statistikali'q xarakteristikalari'. Tosi'nnan bolatug'i'n u'zliksiz shamani'n' qa'siyetleri usi' shama bag'i'natug'i'n bo'listiriw ushi'n itimalli'qlardi'n' ti'g'i'zli'g'i' funkciyasi' $f(x)$ ja'rdeminde ani'qlanadi'. Sol tosattan ali'natug'i'n shamani'n' barli'q statistikali'q xarakteristikalari' itimalli'qlardi'n' ti'g'i'zli'g'i' funkciyasi' bolg'an $f(x)$ funkciyasi' tiykari'nda ani'qlanadi'.

1. Tosattan ali'natug'i'n u'zliksiz shamani'n' ortasha ma'nisi (bunday ortasha ma'nisti a'dette "matematikali'q ku'tiliw" dep ataydi')

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (1.5)$$

2. Dispersiya. Dispersiya tosattan ali'natug'i'n shamani'n' ortasha ma'nis a'tirapi'ndag'i' shashi'rawi'n ta'riyipleydi. Tosattan ali'natug'i'n u'zliksiz shamani'n' dispersiyasi'n

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x} - x)^2 f(x) dx \quad (1.6)$$

formulasi'ni'n' ja'rdeminde alami'z.

3. Ortasha kvadratli'q awi'si'w dep dispersiyadan ali'ng'an kvadrat tu'bir $\sqrt{\sigma^2}$ shamasina aytami'z. Ortasha kvadratli'q awi'si'w tosattan ali'natug'i'n shamani'n' ortasha ma'nisten absoliut ortasha awi'si'wi'na ten'.

Tosattan ali'natug'i'n shamani'n' modasi' dep yen' jiyi ushi'rasatug'i'n shamag'a, yag'ni'y maksimalli'q itimalli'qqa iye shamag'a aytadi'. Tosattan ali'natug'i'n u'zliksiz shama ushi'n moda itimalli'qti'n' ti'g'i'zli'g'i' funkciyasi' bolg'an $f(x)$ funkciyasi'ni'n' maksimumi'na sa'ykes keledi.

Solay yetip tosattan ali'natug'i'n shamani'n' itimalli'g'i'ni'n' ti'g'i'zli'g'i' funkciyasi' bolg'an $f(x)$ funkciyasi'ni'n' analitikali'q tu'ri belgili bolg'an jag'dayda ortasha ma'nis, ortasha kvadratli'q awi'si'w ha'm yen' itimal bolg'an ma'nis si'yaqli' shamalar ju'da' an'sat tu'rde yesaplanadi' yeken.

Itimalli'qlar teoriyasi'nda ha'r qi'yli' bo'listiriw ni'zamlari' u'yreniledi. Olardi'n' ha'r biri ushi'n belgili bir itimalli'q ti'g'i'zli'g'i'ni'n' funkciyasi' sa'ykes keledi. Olar tosattan ali'natug'i'n shamalar u'stinen o'tkerilgen u'lken sandag'i' baqlawlardi'n' na'tiyjelerin qayta islewler tiykari'nda ali'ng'an. Bul ni'zamlardi' o'lshevwlerdin' na'tiyjelerin qayta islew ushi'n paydalani'w mu'mkin. Biraq berilgen tosattan ali'ng'an shamani'n' qanday bo'listiriw ni'zami'na bag'i'natug'i'nli'g'i'n aldi'n-ala bilip ali'w kerek boladi'.

2-§. Tuvri'dan-tuvri' ko'p qaytara o'tkerilgan o'lshevlardagi tosattan ju'zege keletug'i'n qa'telikler

Eksperimentalli'q o'lshevlar qa'teleri teoriyasi'nda Gauss (normal bo'listiriw), Stiyudent bo'listiriwleri ha'm ten' o'lshevli bo'listiriw jiyyi ushi'rasadi'. Solardi'n' ishinde Gauss bo'listiriwi ju'da' ayri'qsha ori'ndi' iyeleydi. Bul jag'day itimalli'qlar teoriyasi'ndagi' orayli'q sheklik teorema menen tikkeley baylani'sli'. Bul teorema tosattan ju'zege keletug'i'n bir neshe bir birinen g'a'rezsiz bir neshe processler si'pati'nda qa'liplesetug'i'n tosattan ali'natug'i'n shama normal bo'listiriwge (Gauss bo'listiriwine) bag'i'nadi' dep tasti'yi'qlaydi'. Tosattan jiberiletug'i'n qa'telikler bar jag'dayda ko'p qaytara o'tkerilgan o'lshevlardin' na'tiyjeleri bir birinen g'a'rezsiz ha'reket yetetug'i'n faktorlardin' ta'sirinde qa'liplesedi. Usi' tiykarda ko'p qaytara tuvri'dan-tuvri' o'tkerilgan o'lshevlardin' na'tiyjelerinin' normal bo'listiriwge bag'i'nadi' dep yesaplawg'a boladi'.

A'dette normal bo'listiriw dep atalatug'i'n bo'listiriwdi Gauss bo'listiriwi, gaussian dep ataydi' ha'm ol to'mendegidey ti'g'i'zli'qti'n' bo'listiriw formulasi' menen beriledi:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.1)$$

Bul an'latpada μ arqali' tosattan ali'natug'i'n shamani'n' ortasha ma'nisi (matematikali'q ku'tiliwi) belgilengen ha'm bo'listiriw ti'g'i'zli'g'i'ni'n' maksimumi'ni'n' koordinatasi'n ani'qlaydi'. σ^2 arqali' dispersiya belgilengen.

Tosattan ali'natug'i'n u'zliksiz shamani'n' normal bo'listiriwi. Joqari'da ayti'p o'tkenimizdey, normal bo'listiriw K.F.Gauss ta'repinen ali'ndi'. Bul bo'listiriw ta'biyatta, yekonomikada, ilim menen texnikani'n' basqa da tarawlari'nda yen' ko'p tarqalg'an bo'listiriw boli'p tabi'ladi'. Usi'ni'n' menen

birge sheklik jag'daylarda ko'p sanli' basqa bo'listiriwler normal bo'listiriwge o'tedi.

Normal bo'listiriwge iye tosattan ali'natug'i'n x shamasi' $-\infty$ ten $+\infty$ ke shekemgi qa'legen ma'niske iye bola aladi' ha'm

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.2)$$

tu'rinde jazi'ladi'. Bul an'latpada \bar{x} abscissasi' itimalli'qlar ti'g'i'zli'g'i' $f(x)$ funkciyasi'ni'n' maksimumi'na sa'ykes keledi, σ^2 shamasi' bolsa yen' itimal ma'nis \bar{x} ti'n' a'tirapi'ndag'i' o'lshevlardin' na'tiyjelerinin' shashawli'g'i'n ta'riyipleydi ha'm bas dispersiya (generalnaya dispersiya) dep ataladi'. σ shamasi'n yen' bas ortasha kvadratli'q awi'si'w dep ataymi'z.

Normal bo'listiriwdin' tiykarg'i' qa'siyetleri:

1. Bo'listiriw $x = \bar{x}$ noqati'na qarata simmetriyali'.

2. Matematikali'q ku'tiliw $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ formulasi'ni'n' ja'rdeminde

yesaplanadi' [(1.5)-formula]. Normal bo'listiriw ushi'n oni'n' ma'nisi tosattan

ali'natug'i'n shamani'n' yen' itimal ma'nisine sa'ykes keledi. Og'an $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

shamasi'na ten' itimalli'qti'n' ti'g'i'zli'g'i' sa'ykes keledi.

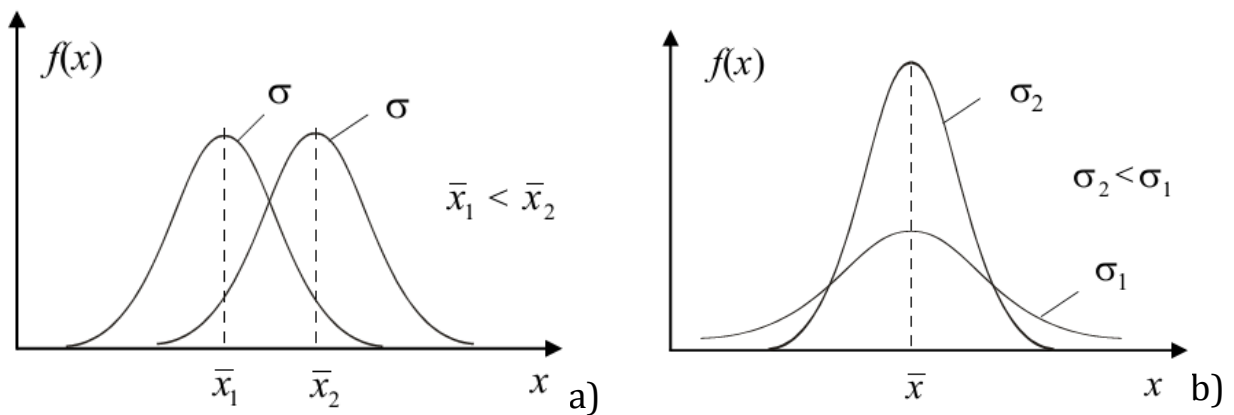
3. Dispersiya $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x} - x)^2 f(x)dx$ tu'rinde, al ortasha kvadratli'q

awi'si'w $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ tu'rinde ani'qlanadi' [(1.6)-formula]].

4. Itimalli'qti'n' ti'g'i'zli'g'i' funkciyasi' bolg'an $f(x)$ funkciyasi' $x = \bar{x}$ noqati'nda maksimalli'q ma'niske iye, bul noqattag'i' oni'n' ma'nisi $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ shamasi'na ten'. Soni'n' menen birge $f(x)$ funkciyasi' $x_1 = \bar{x} - \sigma$ ha'm $x_2 = \bar{x} + \sigma$ noqatlari'nda yeki iyiliw (peregib) noqatlari'na iye.

5. Normirovka sha'rti $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 1$ tu'rinde jazi'ladi' [(1.4)-formula].

Qa'teler teoriyasi'nda eksperimentlerde ali'natug'i'n ma'nisler ko'pshilik jag'daylarda o'lshenip ati'rg'an fizikali'q shamani'n' haqi'yqi'y ma'nisleri boli'p tabi'ladi' dep yesaplaydi'. Demek normal bo'listiriwge bag'i'natug'i'n fizikali'q shama ushi'n haqi'yqi'y ma'nis x_0 matematikali'q ku'tiliw \bar{x} qa ten' boladi', yag'ni'y $x_0 = \bar{x}$.



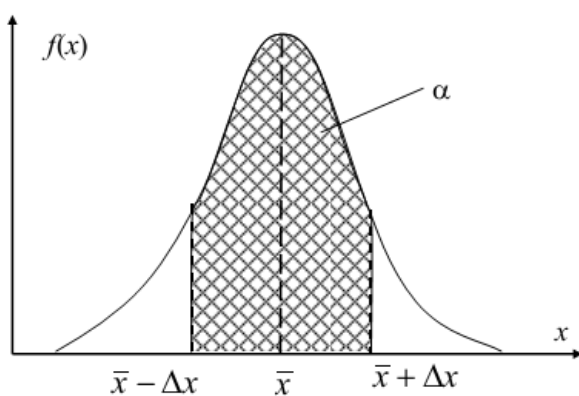
3-su'wret.

Bunday jag'dayda eksperimentalli'q o'lshewlerdin' qa'telerin ani'qlaw (bahalaw) ma'selesine normal bo'listiriwdi (Gauss bo'listiriwin) qollang'anda \bar{x} penen σ^2 shamalari'n bi'layi'nsha interpretaciyalaw mu'mkin:

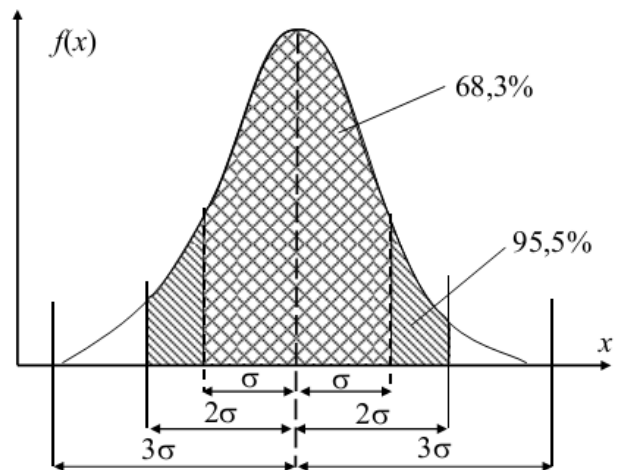
1. Matematikali'q ku'tiliwi (ortasha ma'nisi, haqi'yqi'y ma'nisi) \bar{x}_1 shamasina ten' bazi' bir fizikali'q shamani' o'lshewdin' seriyasi'n ori'nlaymi'z. Bunnan keyin tap sonday sharayatlarda sonday a'sbapti'n' ja'rdeminde matematikali'q ku'tiliwi \bar{x}_2 shamasina ten' bolg'an basqa fizikali'q shamani' o'lshewdin' seriyasi'n ori'nlaymi'z. Ekinshi shamani'n' itimalli'g'i'ni'n' ti'g'i'zli'g'i'ni'n' maksimumi' birinshi shamani'n' itimalli'g'i'ni'n' ti'g'i'zli'g'i'ni'n' maksimumi'nan ji'li'sqan, al iymekliklerdin' ken'ligi birdey boladi' (3-su'wret). Bo'listiriwdin' dispersiyasi' σ berilgen usi'l menen o'lshegendegi ma'nislerdin' shashawli'g'i'n (pi'ti'ran'qi'li'g'i'n) ta'riyipleydi.

Eger bir shama ha'r qi'yli' usi'llar menen o'lshengen bolsa (mi'sali' ha'r

qi'yli' a'sbaplardi'n' ja'rdeminde o'lshengen bolsa), onda tosattan payda bolatug'i'n qa'teliklarga baylani'sli' haqi'yqi'y ma'nis \bar{x} a'tirapi'ndag'i' na'tiyjelerdin' pi'ti'ran'qi'li'g'i' basqasha boladi' (3-b su'wret). Eger da'lirek o'lshew usi'li' qollani'lsa na'tiyjelerdin' pi'ti'ran'qi'li'g'i' kishi boladi' (σ_2 shamasini'n' ma'nisi kishi boladi'), iymekliktin' ken'ligi kishireyedi. 3-b su'wrette $\sigma_2 < \sigma_1$.



4-cu'wret.



5-su'wret.

Solay yetip ortasha kvadratli'q awi'si'w σ a'sbapti' yamasa o'lshew usi'li'n ta'riyipleydi yeken, al matematikali'q ku'tiliw \bar{x} bolsa o'lshenetug'i'n shamani'n' haqi'yqi'y ma'nisin beredi. Bul jag'daydi'n' ori'nlani'wi' ushi'n ta'jiriybeler sani'ni'n' og'ada ko'p boli'wi'ni'n' sha'rt yekenligin atap o'temiz (matematikali'q jaqtan ta'jiriybeler sani' sheksiz u'lken boli'wi' kerek).

\bar{x} shamasi' o'lshenetug'i'n shamani'n' haqi'yqi'y ma'nisine sa'ykes keletug'i'n bolg'anli'qtan eksperimentalli'q izertlewler ushi'n o'lshengen shamani'n' \bar{x} shamasini'n' qasi'nda jaylasqanli'g'i'ni'n' itimalli'g'i' α ni' ani'qlaw a'hmiyetli. Basqa so'zler menen aytqanda o'lshengen shamani'n' \bar{x} shamasina simmetriyali' bolg'an $(\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x)$ intervali'nda boli'wi'ni'n' itimalli'g'i'n α ni' ani'qlaw kerek boladi' (4-su'wret). Itimalli'qlar teoriyasi' boyi'nsha α itimalli'g'i' $f(x)$ iymekligi asti'ndag'i' sa'ykes intervaldag'i'

maydang'a ten'. Al bul maydanni'n' shamasi' integrallaw arqali' ani'qlanadi', yag'ni'y

$$\alpha = \int_{\bar{x}-\Delta x}^{\bar{x}+\Delta x} f(x) dx. \quad (2.3)$$

Wo'lshengen fizikali'q shamani'n' ma'nisi uzi'nli'g'i' Δx bolg'an intervaldi'n' ishindeg'i ma'nisti qabi'l yetiwinin' itimalli'g'i'ni'n' σ shamasi'na proporcional yekenligi 1-kestede berilgen. 5-su'wrette bolsa $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$ bolg'an intervallar ushi'n α itimalli'qlari'ni'n' ma'nisleri ko'rsetilgen.

1-keste.

No	Interval	Itimalli'q, %
1	$\bar{x} - \sigma \leq x \leq \bar{x} + \sigma$	68,3
2	$\bar{x} - 1,96\sigma \leq x \leq \bar{x} + 1,96\sigma$	95,0
3	$\bar{x} - 2\sigma \leq x \leq \bar{x} + 2\sigma$	95,5
4	$\bar{x} - 2,58\sigma \leq x \leq \bar{x} + 2,58\sigma$	99,0
5	$\bar{x} - 3\sigma \leq x \leq \bar{x} + 3\sigma$	99,7

Eksperimentte o'lshenetug'i'n shamani'n' ma'nisin berilgen intervalda ali'wg'a mu'mkinshilik beretug'i'n intervaldi'n' uzi'nli'g'i' Δx penen itimalli'q α arasi'ndag'i' baylani'sti'n' bar yekenligin an'sat an'g'ari'wg'a boladi'. Intervaldi'n' uzi'nli'g'i' bolg'an Δx shamasi'n ortasha kvadratli'q awi'si'w σ arqali' an'latami'z: $\Delta x = k_{\alpha} \sigma$. Bunday jag'dayda proporcionalli'q koefficienti k_{α} shamasi' α itimalli'g'i'nan g'a'rezli dep tasti'yi'qlawg'a boladi'. Itimalli'q α qansha u'lken bolsa o'lshengen shama jaylasatug'i'n Δx intervali' da u'lken ha'm usi'g'an sa'ykes k_{α} koefficienti de u'lken ma'niske iye boladi'.

Wo'lshewdin' na'tiyjelerine tosattan ushi'rasatug'i'n ko'p sanli' bir birinen g'a'rezsiz faktorlar ta'sir yetetug'i'n bolg'anli'qtan eksperimentte ali'ng'an

na'tiyjelerdin' barli'g'i' u'yrenilip ati'rg'an obektti yamasa qubi'li'sti' isenimli tu'rde ta'riyipleay almaydi'. Geypara jag'daylarda basqa si'rtqi' faktorlar di'n' ta'siri ju'da' ku'shli boli'wi' mu'mkin ha'm sonli'qtan o'lshengen shamani' u'yrenilip ati'rg'an fizikali'q shamag'a qatnasi' bar dep ayti'wg'a bolmaydi'. Berilgen eksperiment sharayatlari'nda ali'ng'an shamalardi' haqi'yqat dep yesaplawdi'n' itimalli'g'i'n u'mit yamasa isenimlik itimalli'g'i' dep ataydi'. Isenimlik itimalli'qti'n' shamasi' o'tkerilgen o'lshewlerdin' xarakterine baylani'sli' ani'qlanadi'. Uli'wma fizika kursi'ndag'i' laboratoriyali'q jumi'slardi' ori'nlag'anda isenimlik itimalli'g'i'n 95 procentke ten' dep yesaplaydi'.

Eksperimentte α isenimlik itimalli'g'i' menen ali'ng'an ma'nis kiretug'i'n Δx intervali'n isenimlik intervali' dep ataydi'. $\Delta x = \sigma$ isenimlik intervali'na ($k_{\alpha} = 1$) 68,3 % lik isenimlik itimalli'g'i' sa'ykes keledi. Itimalli'qti'n' ani'qlamasi' boyi'nsha na'tiyjelerdin' 68,3 procenti ($\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma$) intervali'na kiredi, al 31,7 procenti bul intervaldi'n' si'rti'nda jaylasadi'. Soni'n' menen bir qatarda, yeger isenimlik itimalli'g'i' 95,5 % shamasina ten' bolsa, onda eksperimentalli'q ma'nislerdin' 95,5 procenti ($\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma$) intervali'nda jaylasqan boladi' ha'm $k_{\alpha} = 2$ ten'ligi ori'nlanadi'.

Eksperiment o'tkerilgen sharayatta (yag'ni'y berilgen isenimlik intervali'nda) o'lshewler na'tiyjelerinin' tek Δx isenimlik intervali'na kiretug'i'nlari' g'ana isenimli bolatug'i'n bolg'anli'qtan bul shamalardi'n' absoliut qa'teleri (haqi'yqi'y ma'nisten awi'si'wlari') isenimlik intervali' Δx ti'n' uzi'nli'g'i' menen sheklengen boladi'. Demek isenimlik intervali' Δx ti'n' uzi'nli'g'i' o'tkerilgen o'lshewler seriyasi'ni'n' (ko'p qaytara o'lshewlerdin') qa'teliginin' xarakteristikasi' boli'p tabi'ladi' yeken. Sonli'qtan o'lshewler seriyasi'ni'n' qa'teligi bolg'an $\Delta x = k_{\alpha} \sigma$ shamasini' o'lshenetug'i'n fizikali'q shamani'n' ortasha kvadratli'q awi'si'wi' σ ha'm eksperimentlerdin' berilgen seriyasi'ni'n' isenimlik itimalli'g'i' σ arqali' ani'qlanadi'. Bul shamalardi'n' yekewi de eksperimentlerdi o'tkeriw sharayatlari'nan g'a'rezli boladi'.

Sonli'qtan ko'p qaytara o'tkerilgen o'lshevlardagi tosattan ali'natug'i'n qa'telerinin' shamasini'n' xarakteristikasi' ushi'n yeki sandi' ko'rsetiw za'ru'r: isenimlik intervali' Δx shamasini'n' shamasini' ha'm usi' intervalga sa'ykes keliwshi isenimlik itimalli'q α shamasini'n' shamasini'.

Wo'lsenetug'i'n fizikali'q shamani'n' haqi'yqi'y ma'nisi ha'm qa'tesi. Fizik aldi'nda ayqi'n fizikali'q shamani' o'lshevlar ma'selesi turadi'. Ta'jiriybeler sani' barli'q waqi'tta sheklengen, al o'lshevlar atirg'an fizikali'q shama bag'i'natug'i'n normal bo'listiriwdin' parametrleri \bar{x} penen σ belgisiz bolsi'n. Bunday jag'dayda shekli sandag'i' o'lshevlardan haqi'yqi'y ma'nisti ha'm o'lshevlardin' qa'teligin qalayi'nsha ani'qlawg'a boladi' degen soraw payda boladi'.

Da'lligi birdey n ret o'tkerilgen o'lshevlarda fizikali'q shamani'n' n dana ma'nisi ali'ndi' dep yesaplayi'q. Fizikali'q shamani'n' haqi'yqi'y ma'nisi $x_0 = \bar{x}$ belgisiz, al o'lsenetug'i'n shama x Gauss bo'listiriwine bag'i'nadi' dep boljayi'q. x_1, x_2, x_3, \dots arqali' ayi'ri'm o'lshevlardin' na'tiyjeleri, al $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ shamalari' arqali' ali'ng'an na'tiyjelerdin' $x_0 = \bar{x}$ haqi'yqi'y ma'nisten awi'si'wlari' belgilengen bolsi'n (ayi'ri'm o'lshevlardin' haqi'yqi'y absoliut qa'teleri).

$$\Delta_1 = \bar{x} - x_1,$$

$$\Delta_2 = \bar{x} - x_2,$$

$$\Delta_3 = \bar{x} - x_3 \text{ h.t.b.}$$

Absoliut qa'telikler $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ on' da teris te ma'nislerge iye boladi'. Ten'liklerdin' on' ha'm shep ta'replerin summalap ag'zalardi'n' ori'nlari'n almasti'ri'p qoyg'annan keyin

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n\bar{x} - \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

ten'ligin alami'z. Son'g'i' ten'liktin' yeki ta'repin de o'lshevlar sani' n ge bo'lsek

$$\bar{X} = \tilde{X} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i$$

formulasi'n alami'z. Bul formulada

$$\tilde{X} = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) \quad (2.4)$$

yamasa

$$\tilde{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (2.5)$$

\tilde{X} shamasi'n ortasha arifmetikali'q ma'nis dep ataydi'.

Gauss iymekliginin' simmetriyasi'na baylani'sli' eksperimentlerdin' sani' u'lken bolg'anda haqi'yqi'y ma'nisten u'lken bolg'an Δ shamalardi'n' ali'ni'w itimalli'g'i' haqi'yqi'y ma'nisten kishi bolg'an Δ shamalari'ni'n' ali'ni'w itimalli'g'i'na ten' boladi' (on' ha'm teris absoliut qa'teliklerdin' itimalli'qlari' bir birine ten'). Bunday jag'dayda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i \right) = 0,$$

yag'ni'y o'lshevwler sani' u'lken bolg'anda tosi'nnan ketetug'i'n absoliut qa'teliklerdin' ortasha ma'nisi nolge umti'ladi'. Demek o'lshevwler sani' jetkilikli da'rejede u'lken bolsa, onda tosattan ali'natug'i'n x shamasi' Gauss bo'listiriwine bag'i'nadi' degen so'z. Sonli'qtan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{X} = \bar{X}$$

an'latpasi'na iye bolami'z.

Gauss bo'listiriwindegi σ^2 dispersiyasi' o'lshevwlerdin' ortasha kvadratli'q pi'ti'ran'qi'li'g'i'n ko'rsetedi, al ortasha kvadratli'q awi'si'w σ berilgen isenimlik itimalli'g'i' α ushi'n isenimlik intervali'ni'n' shamasi'na proporcional. Dispersiyani'n' ani'qlamasi' boyi'nsha

$$n \rightarrow \infty \text{ shaginde } \sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x} - x)^2 f(x) dx.$$

Wo'lshevlar sani' n shakli bolg'an jag'day ushi'n itimalli'qlar teoriyasi'na ha'm matematikali'q statistikag'a sa'ykes

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_n)^2}{n}} \quad (2.6)$$

an'latpasi'na iye bolami'z.

$n \rightarrow \infty$ shaginde $\tilde{x} = \bar{x}$ bolg'anli'qtan ortasha kvadratli'q awi'si'widi' bi'layi'nsha jazi'wg'a boladi':

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{(\tilde{x} - x_1)^2 + (\tilde{x} - x_2)^2 + \dots + (\tilde{x} - x_n)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (2.7)$$

Wo'lshevlardin' sani' ju'da' ko'p bolsa ($n \rightarrow \infty$) $\tilde{\sigma} = \sigma$ ten'ligi ori'nlanadi'. Bunday jag'dayda isenimlik intervali' $\Delta x = k_\alpha \sigma$ biz qarap ati'rg'an shekte ($n \rightarrow \infty$) $\Delta \tilde{x} = k_\alpha \tilde{\sigma}$ ten'liginin' ja'rdeminde ani'qlanadi' ha'm berilgen isenimli itimalli'q α ushi'n $\tilde{\sigma}$ shamasina proporcional. Usi' jag'dayg'a sa'ykes o'lshenip ati'rg'an fizikali'q shama $\tilde{x} \pm k_\alpha \tilde{\sigma}$ intervali'nda (yamasa $\tilde{x} \pm \Delta \tilde{x}$ intervali'nda) α isenimli itimalli'qta ma'niske iye boladi' dep aytadi'. Al o'lshenetug'i'n fizikali'q shamani'n' haqi'yqi'y ma'nisi $\tilde{x} = \bar{x}$ shamasina ten'.

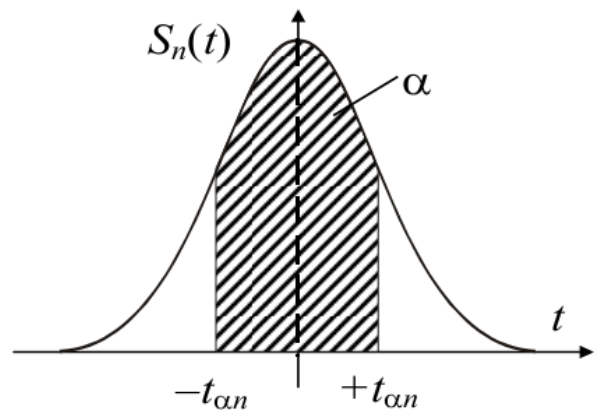
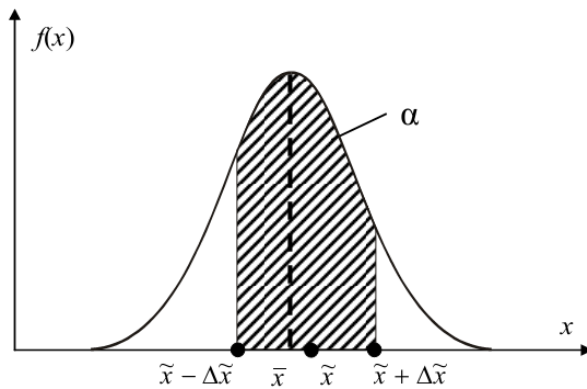
Bunday jag'dayda x fizikali'q shamasin o'lshevlari'ni'n' na'tiyjelerin bi'layi'nsha jazadi'

$$\alpha \text{ shamasina ten' isenimli itimalli'q penen } x = \tilde{x} \pm \Delta \tilde{x}.$$

Isenimli intervaldi' (ko'p qaytara o'lshevlardin' tosi'nnan ali'natug'i'n qa'tesi) $\Delta \tilde{x} = k_\alpha \tilde{\sigma}$ tu'rinde saylap ali'w o'lshevlari'ni'n' 50 den u'lken

yekenligin (yag'ni'y $n \geq 50$) na'zerde tutadi'. Bunday jag'dayda Gauss bo'listiriwinen paydalanadi' (1-keste).

Eger fizikali'q shamani' o'lshevwlerdin' sani' u'lken bolmasa, onda o'lshenetug'i'n shamani'n' haqi'yqi'y ma'nisi $x_0 = \bar{x}$ ortasha arifmetikali'q ma'nis bolg'an \tilde{x} shamasina ten' bolmaydi'. 6-su'wret ko'p sanli' bolmag'an o'lshevwlerdegi haqi'yqi'y ma'nis (\bar{x}) penen ortasha arifmetikali'q ma'nistin' (\tilde{x}) bir birine ten' bolmaytug'i'nli'g'i'na mi'sal retinde keltirilgen.



6-su'wret. Eger fizikali'q shamani' o'lshevwlerdin' sani' u'lken bolmasa, onda o'lshenetug'i'n shamani'n' haqi'yqi'y ma'nisi ortasha arifmetikali'q ma'niske ten' bolmaydi'.

7-su'wret.
Stiudent bo'listiriwi.

Eger o'lshevwler sani' n az bolsa, onda α itimalli'g'i' boyi'nsha isenimli interval $\Delta \tilde{x}$ ti' Gauss bo'listiriwinen paydalani'wg'a bolmaydi'. Fizikali'q praktikumdag'i' laboratoriyali'q jumi'slardi' ori'nlag'anda o'lshevwler a'dette 10 nan kem boladi' (yag'ni'y $n \leq 10$).

Stiudent bo'listiriwi. Eger o'lshevwler sani' $2 \leq n \leq 10$ bolsa, onda isenimli interval Stiudent bo'listiriwinin' ja'rdeminde ani'qlanadi'.

Meyli parametrleri \bar{x} ha'm σ bolg'an normal bo'listiriwge bag'i'natug'i'n tosattan ali'natug'i'n x shamasin n ret qaytalang'an o'lshevwlerdin'

na'tiyjesinde ha'r qi'yli' bolg'an x_1, x_2, \dots, x_n shamalari' ali'ng'an bolsi'n.

Angliyalii' matematik ha'm ximik Uilyam Sili Gosset (William Sealy Gosset, psevdonimi Stiudent, 1876-1937, belgili ingliz ilimpaz-statistigi boli'p yesaplanadi') 1908-ji'li'

$$t = \frac{\bar{x} - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}} \quad (2.8)$$

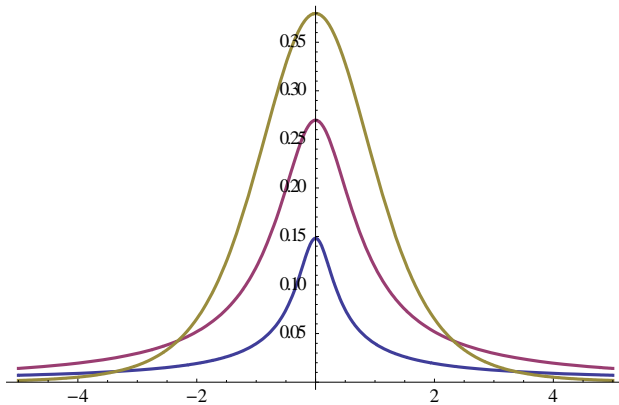
tu'rindegii' tosattan ali'natug'i'n shamani' u'yrendi. Bul an'latpada $\tilde{\sigma}$ arqali' berilgen n dana o'lshevlardan turatug'i'n seriyadag'i' o'lshevlardan na'tiyjelerinin' \tilde{x} ortasha arifmetikali'q shamadan ortasha kvadratli'q awi'si'wi' belgilengen.

\tilde{x} penen $\tilde{\sigma}$ shamalari'ni'n' ma'nisleri o'lshevlardan sani' n nen g'a'rezli. Sonli'qtan n_1 ret o'lshevlardan o'tkergende t_1 san ma'nisine, n_2 ret o'lshevlardan o'tkergende t_2 san ma'nisine iye boladi'. Stiudent tosi'nnan ali'natug'i'n t shamasii' ushi'n $S_n(t)$ bo'listiriv ni'zami'n (itimalli'qlar ti'g'i'zli'g'i'n) aldi'. Bul n menen t ni'n' bazi' bir matematikali'q funkciyasi' boli'p tabi'ladi'. Al Stiudent ni'zami' bolsa tosattan ali'natug'i'n normal Gauss shamalari'n o'lshevlardan ali'natug'i'n qa'teliklerdin' tarqali'w ni'zami' boli'p tabi'ladi'. Bul funkciya (yag'ni'y itimalli'qlardi'n' ti'g'i'zli'g'i') $t=0$ de, $\bar{x} = \tilde{x}$ ten'ligi ori'nlang'anda maksimumg'a iye boladi'. Bul jag'day 7-su'wrette keltirilgen.

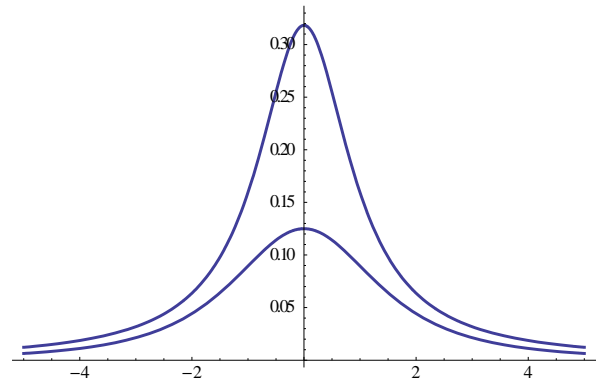
Ha'zirgi waqi'tlari' Stiudent bo'listiriv funkciyasi'ni'n' ma'nisleri matematikali'q programmalaw tillerinin' ja'rdeminde an'sat tabi'ladi' ha'm yesaplanadi'. Mi'sal retinde Matmematica 9.0 kompiuterlik algebra sistemasi'nda Stiudent funkciyasi'n yesaplawdi' ko'rsetemiz. Sa'ykes programma bi'layi'nsha jazi'ladi':

*Plot[Evaluate@Table[PDF[StudentTDistribution[v],t],
{v,{0.1,0.5,5}},{t,-5,5},PlotStyle→Thickness[0.005]]*

Kompiuter to'mendegidey na'tiyjelerdi beredi (8-su'wret).



8-su'wret. Mathematica 9.0
kompiuterlik algebra sistemasi'
ja'rdeminde ali'ng'an Stiudent
bo'listiriwlerinin' iymeklikleri.



9-su'wret. $n = 2$ ha'm $n = 1$ bolg'an
jag'daylar ushi'n $f_t(y)$
funkciyasi'ni'n' grafigi [(2.9)-an'latpa
boyi'nsha].

Tap sol si'yaqli' ha'zirgi waqi'tlari' Stiudent koefficientlerinin' ma'nislerin yesaplaw da hesh qanday qi'yi'nshi'li'q payda yetpeydi. Mi'sali' itimalli'q ti'g'i'zli'g'i' ushi'n

$$f_t(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(n + \frac{y^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad (2.9)$$

tu'rindegı formula ori'nli' boladi'. Bul formulada Γ arqali' Eylerdin' gamma funkciyasi' belgilengen. Biz bul funkciyani'n' grafiginde du'ze alami'z (9-su'wret), funkciyani'n' ma'nislerin de yesaplay alami'z.

\bar{x} shaması'na qarata simmetriya bolg'an x shaması'ni'n' intervali'na nolge qarata simmetriyalı' t o'zgeriwshisinin' ma'nislerinin' intervali' sa'ykes keledi. t shaması'ni'n' bazi' bir $-t_{an}$ shaması'nan $+t_{an}$ shaması'na shekemgi intervalda ma'niske iye boli'wi'ni'n' itimalli'g'i'n α arqali' belgileyik (7-su'wrettegi shtrixlang'an oblast). Eger bazi' bir o'lshewler sani' n ushi'n isenimli itimalli'q

α ni'n' shamasini beretug'i'n bolsaq, onda $S_n(t)$ funkciyasi'n paydalani'p sa'ykes simmetriyali' $t_{\alpha n}$ intervali'ni'n' shegaralari'n yesaplaw mu'mkin. Bul shegaralar α menen n shamalari'na baylani'sli' boladi':

$$\alpha = \int_{-t_{\alpha n}}^{+t_{\alpha n}} S_n(t) dt. \quad (2.10)$$

$t_{\alpha n}$ shamalari'n Stiudent koefficientleri dep ataydi'.

Biz Stiudent koefficientlerinin' ma'nislerin an'sat yesaplay alami'z. Oni'n' ushi'n (2.10) integrali'ni'n' ma'nislerin yesaplawi'mi'z kerek boladi'. Buni' Mathematica tilinde a'melge asi'ri'w ushi'n $S_n(t)$ funkciyasi'ni'n' orni'na (2.9)-an'latpadan itimalli'q ti'g'i'zli'g'i' funkciyasi'n ali'p kelip qoyami'z. Biraq bunday jag'dayda analitikali'q jollar menen integrallawdi'n' mu'mkin yemes yekenligin yesapqa ali'p integrallawdi' sanli' jollar menen a'melge asi'rami'z. Bul Mathematica tilinde bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$tan = 0.5; n = 5; NIntegrate\left[\frac{\text{Gamma}\left[\frac{n+1}{2}\right]}{\sqrt{\pi n} \text{Gamma}\left[\frac{n}{2}\right]} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \{x, -tan, tan\}\right].$$

Na'tiyjede bul formulag'a n , $t_{\alpha n}$ lerdin' ma'nislerin qoyi'w joli' menen Stiudent koefficientlerinin' ma'nislerin yesaplaw mu'mkinshiligine iye bolami'z.

Ta'jiriybeler sani' n ha'm isenimli itimalli'q α ushi'n $t_{\alpha n}$ Stiudent koefficientlerinin' ma'nislerin a'piwayi' jollar menen yesaplaymi'z. Bul koefficient ortasha arifmetikali'q ma'nistin' haqi'yqi'y ma'nisten maksimalli'q awi'si'wi'na sa'ykes keledi. \tilde{x} ti'n' \bar{x} shamasinan maksimalli'q awi'si'wi' isenimli intervaldi'n' uzi'nli'g'i' $\Delta\tilde{x}$ shamasina ten'. Bunday jag'dayda

$t = \frac{\bar{x} - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}}$ ni'n' ani'qlamasii' boyi'nsha mi'nag'an iye bolami'z:

$$\left. \bar{x} - \tilde{x} t_{an} = \frac{\bar{x} - \tilde{x}}{\tilde{\sigma}} \right|_{\max} = \frac{\Delta \tilde{x}}{\tilde{\sigma}} \Rightarrow \Delta \tilde{x} = t_{an} \tilde{\sigma}. \quad (5)$$

Bul an'latpada $\Delta \tilde{x}$ arqali' n nin' ma'nisi u'lken bolmag'an jag'dayda ha'm berilgen isenimli itimalli'q α ushi'n normal bo'listiriwge bag'i'natug'i'n tosi'nnan ali'natug'i'n u'zliksiz x shamasi' ushi'n isenimlik intervali'ni'n' shegarasi' belgilengen. Al t_{an} arqali' n ret o'lshevi ha'm isenimlik itimalli'g'i' α ushi'n Stiyudent koeffitsienti, $\tilde{\sigma}$ arqali' o'lshevlardin' usi' seriyasi'ndag'i' o'lshevlar na'tiyjelerinin' \tilde{x} ortasha arifmetikali'q shamasi'nan ortasha kvadratli'q awi'si'wi' belgilengen.

$n \rightarrow \infty$ sheginde Stiyudent bo'listiriwi Gauss bo'listiriwine o'tedi. Birdey α koeffitsientlerinde t_{an} menen k_{α} koeffitsientleri $n \geq 50$ bolg'anda ten'lesedi.

Solay yetip o'lshevlardin' sani' kishi bolg'anda tosi'nnan jiberiletug'i'n qa'telik (isenimli interval) $\Delta \tilde{x}$ ti' Stiyudent koeffitsientin paydalani'p bi'layi'nsha yesaplawg'a boladi' yeken:

$$\Delta \tilde{x} = t_{an} \tilde{\sigma}. \quad (2.12)$$

Biz 2-kesteden Stiyudent koeffitsientlerinin' ma'nislerin keltiremiz.

2-keste. Ha'r qi'yli' p isenimli intervallari' ha'm yerkinlik da'rejesi sani' t ushi'n Stiyudent koeffitsientlerinin' ma'nisleri.

t	p (isenimli interval)							
	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995	0.998	0.999
1	3.0770	6.3130	12.7060	31.820	63.656	127.656	318.306	636.619
2	1.8850	2.9200	4.3020	6.964	9.924	14.089	22.327	31.599
3	1.6377	2.35340	3.182	4.540	5.840	7.458	10.214	12.924
4	1.5332	2.13180	2.776	3.746	4.604	5.597	7.173	8.610
5	1.4759	2.01500	2.570	3.649	4.0321	4.773	5.893	6.863
6	1.4390	1.943	2.4460	3.1420	3.7070	4.316	5.2070	5.958
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.998	3.4995	4.2293	4.785	5.4079

8	1.3968	1.8596	2.3060	2.8965	3.3554	3.832	4.5008	5.0413
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	3.6897	4.2968	4.780
10	1.3720	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	3.5814	4.1437	4.5869
11	1.363	1.795	2.201	2.718	3.105	3.496	4.024	4.437
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0845	3.4284	3.929	4.178
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.1123	3.3725	3.852	4.220
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.976	3.3257	3.787	4.140
15	1.3406	1.7530	2.1314	2.6025	2.9467	3.2860	3.732	4.072
16	1.3360	1.7450	2.1190	2.5830	2.9200	3.2520	3.6860	4.0150
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5668	2.8982	3.2224	3.6458	3.965
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5514	2.8784	3.1966	3.6105	3.9216
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.1737	3.5794	3.8834
20	1.3253	1.7247	2.08600	2.5280	2.8453	3.1534	3.5518	3.8495

Endi ko'p ret o'tkerilgan o'lshevlardagi tosattan ali'natug'i'n (ketetug'i'n) qa'telikler boyi'nsha bir qatar juwmaqlar shi'g'arami'z.

Joqari'da ayti'li'p o'tilgan tallawlar tuwri'dan-tuwri' ko'p qaytara o'tkeriletug'i'n o'lshevlarda tosattan jiberiletug'i'n qa'teliklerdi ani'qlaw ushi'n ju'rgizildi. Bul jag'dayda isenimli intervaldi' $\Delta\tilde{x}_{tos}$ arqali' belgileytug'i'nli'g'i'n atap o'temiz.

Solay yetip bazi' bir x fizikali'q shamasi'n tuwri'dan-tuwri' ko'p qaytara o'tkeriletug'i'n o'lshevlardagi tosi'nnan jiberiletug'i'n qa'teliklerdi bahalaw ushi'n to'mendegidey yesaplawlardi' a'melge asi'ri'w kerek boladi' yeken:

1. Wo'lshevlarda ali'ng'an shamalardi'n' ortasha arifmetikali'q ma'nisi ani'qlanadi' [(2.5)-formula].
2. Ortasha kvadratli'q awi'si'w yesaplanadi' [(2.7)-an'latpa].
3. $\alpha = 0,95$ shamasi'na ten' isenimlik itimalli'g'i' saylap ali'nadi' (uli'wma fizika kursi'n boyi'nsha fizikali'q praktikumda ori'nlanatug'i'n jumi'slardi'n' ko'pshiligi ushi'n).
4. Kesteden yamasa kompiuterdin' ja'rdeminde yesaplaw arqali' Stiudent koefficienti $t_{\alpha n}$ shamasi' ani'qlanadi'.
5. Isenimli interval ani'qlanadi' (ko'p qaytara o'tkerilgan o'lshevlar

seriyasi'ni'n' qa'tesi) [(2.12)-an'latpa]:

$$\Delta \tilde{x}_{tos} = t_{an} \tilde{\sigma}.$$

6. Na'tiyjeni bi'layi'nsha jazadi':

$$\alpha \text{ isenimlik itimalli'g'i' menen } x = \tilde{x} \pm \Delta \tilde{x}_{tos}.$$

Biz bul paragrafti'n' aqi'ri'nda a'piwayi' funkciyalar ushi'n sistemali'q ha'm tosattan ali'natug'i'n qa'telerdi yesaplaw kestelerin beremiz.

3-keste. A'piwayi' funkciyalar ushi'n sistemali'q qa'telerdi yesaplaw keستي

N	f	δf	$\varepsilon = \delta f / f$	N	f	δf	$\varepsilon = \delta f / f$
1	$x + y$	$\delta x + \delta y$	$\frac{\delta x + \delta y}{x + y}$	6	$x^{1/n}$	$\frac{\delta x}{n x^{\frac{n-1}{n}}}$	$\frac{\delta x}{n x}$
2	$x - y$	$\delta x + \delta y$	$\frac{\delta x + \delta y}{x - y}$	7	$\sin x$	$\cos x \cdot \delta x$	$\frac{\delta x}{tg x}$
3	$x \cdot y$	$y \delta x + x \delta y$	$\frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$	8	$\cos x$	$\sin x \cdot \delta x$	$tg x \cdot \delta x$
4	x / y	$\frac{y \delta x + x \delta y}{y^2}$	$\frac{\delta x}{x} + \frac{\delta y}{y}$	9	$tg x$	$\frac{\delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2 \delta x}{\sin 2x}$
5	x^n	$n x^{n-1} \delta x$	$n \frac{\delta x}{x}$	10	$\ln x$	$\frac{\delta x}{x}$	$\frac{2 \delta x}{x \cdot \ln x}$

4-keste. A'piwayi' funkciyalar ushi'n tosattan ali'natug'i'n qa'telerdi yesaplaw keستي

N	f	δf	$\varepsilon = \delta f / f$	N	f	δf	$\varepsilon = \delta f / f$
1	$x + y$	$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	$\frac{\sqrt{(y \Delta x)^2 + (x \Delta y)^2}}{x + y}$	6	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{\Delta x}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\frac{\Delta x}{n x}$
2	$x - y$	$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$	$\frac{\sqrt{(y \Delta x)^2 + (x \Delta y)^2}}{x - y}$	7	$\sin x$	$\cos x \Delta x$	$\frac{\Delta x}{tg x}$
3	xy	$\sqrt{(y \Delta x)^2 + (x \Delta y)^2}$	$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$	8	$\cos x$	$\sin x \Delta x$	$tg x \Delta x$
4	$\frac{x}{y}$	$\frac{x}{y} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$	$\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$	9	$tg x$	$\frac{\Delta x}{\cos^2 x}$	$\frac{2 \Delta x}{\sin 2x}$
5	x^n	$n x^{n-1} \Delta x$	$n \frac{\Delta x}{x}$	10	$\ln x$	$\frac{\Delta x}{x}$	$\frac{\Delta x}{x \ln x}$

3-§. Bir retten o'tkeriletug'i'n o'lshevlarda jiberiletug'i'n qa'teler

Eger o'lshevlarda tosattan ketetug'i'n qa'telerdin' shamasini sistemali'q qa'telerdin' shamalari'nan bir neshe yese kishi bolsa ko'p ret o'tkerilgan o'lshevlardin' na'tijeleri birdey boladi' ha'm toli'q qa'te a'sbapli'q qa'tenin' shamasina ten' boladi'. Bunday jag'dayda o'lshev tek bir ret ori'nlanadi' ha'm qa'te si'pati'nda a'sbapti'n' shaklasi'ndagi' yen' kishi bo'liminin' shamasina ten' a'sbapti'n' qa'teligi qabi'l yetiledi. Bir retten o'tkeriletug'i'n o'lshevlar sani' o'lshenetug'i'n shamalardi'n' sani'na ten' boladi'. Wo'lshevlardin' bunday tu'rin a'melde qollani'w u'lken qa'telerdin' payda boli'wi'na ali'p keliwi mu'mkin. Sonli'qtan bir retten o'lshevlardi keminde u'sh ret qaytalap, ali'ng'an na'tijelerdin' ortasha ma'nisin yesaplaw usi'ni'ladi'.

Bir retten o'tkerilgan o'lshevlardin' na'tijelerin mi'sal retinde keste tu'rinde bi'layi'nsha ko'rsetiw mu'mkin:

Shamani'n' belgileniwi	l, mm	m, g	t, c	π
Wo'lshev na'tijesi	1,32	146,5	36,15	3,142
Qa'te	0,01	0,2	0,01	0,0005

Tek bir ret o'tkeriletug'i'n o'lshevlarda da'l yemes na'tijje ali'ni'wdi'n' belgili bir itimalli'g'i' bar boladi'. Bul itimalli'q o'lshevlashi a'sbaplardi'n' o'lshev da'lligi menen baylani'sli' boli'p, usi' o'lshevlashi a'sbap penen o'lshevlardin' barli'g'i'nda da birdey na'tijje beredi. Demek bir ret o'lshevlarda tosattan ali'natug'i'n shama ten' o'lshevli bo'listirililiwge bag'i'nadi' yeken.

Biz ten' o'lshevli bo'listiriwdin' diskret ten' o'lshevli bo'listiriw (discrete uniform distribution) ha'm u'zliksiz ten' o'lshevli bo'listiriw boli'p yekige bo'linetug'i'nli'g'i'n ha'm biz qarap ati'rg'an jag'daydi'n' diskret ten' o'lshevli

bo'listiriwge tiyisli yekenligin bilemiz
([http://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_distribution_\(discrete\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_distribution_(discrete))).

Tosattan ali'natug'i'n shamalardi'n' ten' o'lsheqli bo'listiriwi. Ten' o'lsheqli bo'listiriwde tosi'nnan ali'natug'i'n shamalardi'n' ha'r qi'yli' ma'nisleri birdey itimalli'q penen ushi'rasadi'. Bunday jag'dayda tosattan ali'natug'i'n shamani'n' itimalli'g'i'ni'n' ti'g'i'zli'g'i' $f(x)$ bazi' bir (a,b) intervali'nda turaqli' ma'niske, al bul intervaldan ti'sta nolge ten' boladi' (10-su'wret).

$$F(x) = \begin{cases} x < a \text{ болғанда } 0, \\ a < x < b \text{ болғанда } \frac{1}{b-a}, \\ x > b \text{ болғанда } 0. \end{cases}$$

bunday ni'zam ushi'n matematikali'q ku'tiliw (ortasha ma'nis) mi'nag'an ten':

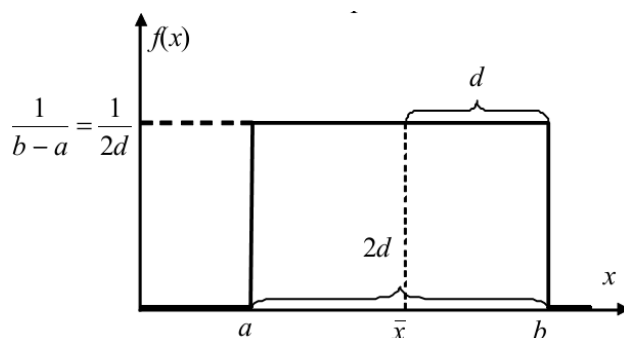
$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b xdx = \frac{a+b}{2}.$$

ten' o'lsheqli bo'listiriw ushi'n normirovka sha'rti bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = 1.$$

(a,b) intervali'ni'n' uzi'nli'g'i'n $2d$ arqali' belgileyik. Bunday jag'dayda d shamasini ten' o'lsheqli bo'listiriw parametri dep ataydi'. Itimalli'q ti'g'i'zli'g'i' $f(x)$ nolge ten' bolmaytug'i'n intervaldi'n' shegarasi'n yendi bo'listiriw parametri arqali' an'g'artami'z: $a = \bar{x} - d$, $b = \bar{x} + d$. Al (a,b) intervali'nda

$$\text{itimalli'q ti'g'i'zli'g'i' } f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2d}.$$



10-su'wret.

Tosattan ali'natug'i'n shamani'n' itimalli'g'i'ni'n' ti'g'i'zli'g'i' $f(x)$ funkciyasi'ni'n' grafigi.

Ten' o'lsheqli bo'listiriv ushi'n dispersiya mi'nag'an ten':

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x} - x)^2 f(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{x} - x)^2 dx = \frac{1}{2d} \int_{\bar{x}-d}^{\bar{x}+d} (\bar{x} - x)^2 dx = \frac{d^2}{3}. \quad (3.1)$$

Ortasha kvadratli'q awi'si'w

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \frac{d}{\sqrt{3}} = 0,577 \cdot d \quad (3.2)$$

formulasi'ni'n' ja'rdeminde yesaplanadi'.

Endi o'lshenetug'i'n x fizikali'q shamasini'n' $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ intervali' ishinde jaylasi'wi'ni'n' itimalli'g'i' α ni' yesaplaymi'z:

$$\alpha = \int_{\bar{x}-d}^{\bar{x}+d} f(x) dx = \frac{1}{2d} \int_{\bar{x}-d}^{\bar{x}+d} dx = \frac{\sigma}{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577 \text{ yamasa } 57,7 \%. \quad (3.3)$$

Solay yetip uzi'nli'g'i' $\pm \sigma = 0,577d$ bolg'an interval ushi'n $\alpha = 57,7 \%$ itimalli'g'i'n aldi'q.

Biz mi'na a'hmiyetli jag'dayg'a itibar beremiz: normal bo'listiriv ori'n alg'an jag'dayda shamani'n' $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ intervali' ishinde jaylasi'wi'ni'n' itimalli'g'i' 68,3 % ke ten' yedi, al ten' o'lsheqli bo'listiriv ushi'n itimalli'q 57,7 % ke ten' boli'p shi'qti'.

Endi o'lshenip ati'rg'an shamani'n' itimalli'g'i' 95 % ke ten' bolg'an isenimli intervaldi' tabami'z. $(\bar{x} - 0,95d, \bar{x} + 0,95d)$ intervali'nda o'lshenetug'i'n shamani'n' 95 % lik itimalli'q penen tabi'latug'i'nli'g'i'n ani'qlaw qi'yi'n yemes.

Demek ten' o'lsheqli bo'listirivge bag'i'natug'i'n tosattan ali'natug'i'n shamani'n' isenimli intervali'n tabi'w ushi'n isenimli itimalli'q α ni' ten' o'lsheqli tarqali'w parametri d g'a ko'beytiw jetkilikli yeken. Bunday shamani'n' isenimli intervali'n $\Delta \tilde{x}_{to}$ arqali' belgileydi ha'm bir qaytara

o'lshevlardin' qa'teligi dep ataydi'. Bunday jag'dayda $\Delta\tilde{x}_{to}=0,95d$. Bul an'latpada d arqali' ten' o'lshevoli bo'listiriw parametri belgilengen.

Bir ret o'tkeriletug'i'n o'lshevlardin' qa'teligi paydalani'latug'i'n o'lshevi a'sbaplari'ni'n' da'lligi menen baylani'sli'. Sonli'qtan ten' o'lshevoli bo'listiriw parametrin a'sbapli'q qa'te dep te ataydi'.

A'sbapli'q qa'telerdi ani'qlaw usi'llari'. Bir ret o'tkeriletug'i'n o'lshevlardagi qa'teler eksperimentte paydalani'latug'i'n a'sbaplardi'n' xarakteristikalari' boyi'nsha ani'qlanadi'. Wo'lshevlashi a'sbap penen o'lshevlar ju'rgizgende oni'n' jiberiletug'i'n qa'telerge ta'sir yetetug'i'n xarakteristikalari' o'lshevi shegi menen bo'leklerdin' bahasi' (cena deleniya) boli'p tabi'ladi'. Elektr o'lshevlashi a'sbaplar ushi'n a'sbapti'n' da'lliginin' klassi' da a'hmiyetli shama boli'p tabi'ladi'.

Wo'lshevi shegi Sh dep a'sbap penen (usi' a'sbapti'n' berilgen shkalasi' menen) o'lshevi mu'mkin bolg'an shamani'n' maksimalli'q ma'nisine aytadi'. Eger o'lshevi shegi a'sbapta ko'rsetilmegen bolsa, onda bul xarakteristikani' a'sbapti'n' shkalasi'na qarap ani'qlaydi'.

Bo'limler bahasi' **Bb** (cena deleniya) shkalani'n' yen' kishi bo'limine tiyisli bolg'an o'lshevetug'i'n shamani'n' ma'nisi boli'p tabi'ladi'. Eger shkala nolden baslanatug'i'n bolsa, onda $Bb = \frac{Sh}{N}$. Bul an'latpada N arqali' shkaladagi' bo'limlardin' sani' belgilengen. Mi'sali' o'lshevi shegi 1 A toq ku'shin o'lshevetug'i'n ampermetr berilgen bolsi'n ha'm oni'n' shkalasi'ndagi' bo'limler sani' $N = 20$ bolsi'n. Bunday jag'dayda $Bb = \frac{Sh}{N} = \frac{1}{20} = 0,05$ amperge ten' boladi'. Ko'p sanli' yelektr o'lshevlashi a'sbaplar o'lshevlardin' bir neshe sheklerine iye boladi'. Bir shekten yekinshi shekke o'tkende bo'limler bahasi' da o'zgeredi.

A'sbapti'n' da'llik klassi' (oni' K arqali' belgileymiz) procentlerde an'latilg'an absoliut a'sbapli'q qa'telik δx ti'n' shkalani'n' o'lshevi shegine

qatnasi'na ten':

$$K = \frac{\sigma x}{Sh} \cdot 100 \%$$

Da'llik klassi'ni'n' ma'nisi % a'dette yelektr o'lshevwshi a'sbaplarda jazi'lg'an boladi'. Laboratoriyali'q jumi'slardi' ori'nlag'anda paydalani'latug'i'n yelektr o'lshevwshi a'sbaplar 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 4,0 da'llik klassi'na iye boli'wi' mu'mkin. Da'lligi to'men (turpayi') a'sbaplar da'llik klassi'na iye bolmaydi'.

Biz joqari'da bir ret o'lshewlerdin' qa'telerinin' tosi'nnan ali'natug'i'n shamalardi'n' ten' o'lshewli bo'listiriwine bag'i'natug'i'nli'g'i'n ha'm ten' o'lshewli bo'listiriw parametri d ni'n' ja'rdeminde ani'qlanatug'i'nli'g'i'n ayti'p o'tip yedik. Wo'lshevwshi a'sbapti'n' tu'rine baylani'sli' d parametri to'mendegi usi'llardi'n' birinin' ja'rdeminde ani'qlanadi':

1. Wo'lshew da'lligi (bo'limlerdin' bahasi') a'sbapti'n' o'zinde tikkeley ko'rsetilgen. Ten' o'lshewli bo'listiriw parametri d a'sbapti'n' da'lligi Bb shamasina ten': $d = Bb$.

2. A'sbapta da'llik klassi' ko'rsetilgen. Da'llik klassi'ni'n' ani'qlamasini' boyi'nsha biz a'sbapli'q qa'tege iye bolami'z: $\delta x = \frac{K \cdot Sh}{100}$. Ten' o'lshewli bo'listiriw parametri a'sbapti'n' qa'tesine ten', yag'ni'y $d = \delta x$. Mi'sali' da'llik klassi' 2,5 ke ten' ha'm o'lshew shegi 600 v bolg'an voltmeter ushi'n ten' o'lshewli bo'listiriw parametri $d = \delta x = \frac{2,5 \cdot 600}{100} = 15$ volt shamasina ten'.

3. Eger a'sbapta o'lshewdin' da'lligi de, da'llik klassi' da ko'rsetilmegen bolsa, onda jumi'sti'n' xarakteri boyi'nsha ten' o'lshewli bo'listiriw parametrin ani'qlawdi'n' bir neshe usi'li' bar. Biz bul usi'llar xaqqi'nda bul qollanbada keltirilgen ko'p sanli' a'debiyatlardan oqi'wdi' usi'nami'z.

4. Eger qanday da bir shama bul ta'jiriybede o'lshebeytug'i'n bolsa ha'm tek oni'n' ma'nisi belgili bolsa, onda bunday fizikali'q shama tek berilgen parametr boli'p tabi'ladi'. Bul berilgen parametrdin' qa'teligi parametrdin'

shamasi'ni'n' yen' keyingi razryadi' birliginin' yari'mi'na ten' yetip ali'nadi'. Mi'sali' si'mni'n' radiusi' millimetr din' ju'zden bir u'lesindey da'llikte berilgen. Bunday jag'dayda bul shamani'n' ten' o'lsheqli bo'listiriwinin' parametri $d = 0,005$ mm shamasi'na ten' yetip ali'nadi'.

5. Ayi'ri'm ta'jiriybelerde ten' o'lsheqli bo'listiriw parametrim ta'jiriybede ani'qlawg'a tuwri' keledi. Bunday jag'dayda oni'n' ma'nisi paydalani'li'p ati'rg'an a'sbapti'n' shkalasi'ni'n' bo'limlerinin' bahasi'nan bir neshe yese u'lken bola aladi'. Mi'sali' kelte si'zg'i'shti'n' ja'rdeminde u'lken qashi'qli'qlardi' o'lshegende bir shamani'n' ma'nisin ali'w ushi'n si'zg'i'shti' bir neshe ret sali'p ko'riw kerek boladi'. A'sbapti' ha'r bir paydalang'anda oni'n' bo'liminin' bahasi'na ten' qa'te qatnasadi'. Bunday jag'dayda ten' o'lsheqli bo'listiriw parametri d ni'n' shamasi' a'sbapti' o'lsheqli ushi'n neshe ret qoyi'p shi'qsa (oni' k arqali' belgileymiz), oni'n' shkalasi'ni'n' bo'liminin' bahasi' Bb dan sonsha yese u'lken boladi': $d = kBb$.

4-§. Ko'p ret o'tkerilgen ha'm bir ret o'tkerilgen o'lsheqlerdegi tosi'nnan ketetug'i'n qa'telerdi birlilikte yesapqa ali'w

Qanday da bir x fizikali'q shamasi'n ko'p qaytara o'lshegende ha'r bir o'lsheqli bir qaytara o'lsheqli si'pati'nda qabi'l yetiw mu'mkin. Sonli'qtan qa'telikt yepapqa alg'anda ko'p qaytara o'tkerilgen o'lsheqlerdegi Gauss bo'listiriwine bag'i'natug'i'n tosattan jiberiletug'i'n qa'telerdi ha'm ten' o'lsheqli bo'listiriwge bag'i'natug'i'n bir ret o'lsheqlerdegi jiberiletug'i'n qa'telerdi yesapqa ali'w kerek boladi'. Sol yeki tiptegi qa'telerdin' ketiwine ali'p keletug'i'n faktorlar bir birinen g'a'rezli yemes. Sonli'qtan qosi'ndi' qa'teni ani'qlaw ushi'n itimalli'qlar teoriyasi'ndag'i' bir birinen g'a'rezsiz shamalardi'n' qosi'li'wi' ni'zami'nan paydalanadi'.

Bul ni'zam isenimli intervallar ushi'n da duri's na'tiyje beredi. Sonli'qtan ta'jiriybeler seriyasi'nda o'lsheqlitug'i'n isenimli interval $\Delta\tilde{x}$ bi'layi'nsha

jazi'ladi'

$$\Delta \tilde{x} = \sqrt{\Delta \tilde{x}_{tos}^2 + \Delta \tilde{x}_{to}^2}.$$

Bul an'latpada $\Delta \tilde{x}_{tos}$ arqali' ko'p qaytara o'lshevlardagi tosattan ketetug'i'n qa'tege sa'ykes keliwshi isenimli interval, al $\Delta \tilde{x}_{to}$ arqali' bir ret o'tkeriletug'i'n o'lshevlarga sa'ykes keliwshi isenimli interval belgilengen.

Tuwri'dan-tuwri' o'tkeriletug'i'n birdey da'llikke iye o'lshevlardin' qa'teleri boyi'nsha bazi' bir juwmaqlar. Eger tikkeley (yag'ni'y tuwri'dan-tuwri') o'lshevlardin' na'tiyjesinde bazi' bir x fizikali'q shamasi' ushi'n $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ shamalari' ali'natug'i'n bolsa, onda joqari'da keltirilgen mag'li'wmatlar tiykari'nda qa'telerdi bahalawdi' to'mendegidey izbe-izlikte o'tkeriwdi usi'nami'z:

1. x shamasi'n o'lshevlardin' na'tiyjeleri boyi'nsha n dana o'lshevlari ushi'n ortasha arifmetikali'q ma'nisi yesaplanadi':

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. Na'tiyjelerdin' ortasha arifmetikali'q ma'nisten ortasha kvadratli'q awi'si'wi' yesaplanadi':

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\tilde{x} - x_i)^2}{n(n-1)}}.$$

3. Isenimli itimalli'q $\alpha = 0,95$ ha'm o'lshevlari sani' n bolg'an jag'day ushi'n Student koefficienti t_{an} shamasi'ni'n' ma'nisi kompiuterdin' ja'rdeminde yesaplanadi' yamasa kestelerden ali'nadi'.

Ko'p qaytara o'lshevlari ushi'n isenimli intervaldi'n' shegaralari' yesaplanadi' (tosattan ketetug'i'n qa'telik):

$$\Delta \tilde{x}_{tos} = t_{an} \tilde{\sigma}.$$

5. Bir retten o'tkeriletug'i'n o'lshevlardin' isenimli intervali' (qa'teligi)

ani'qlanadi':

$$\Delta \tilde{x}_{to} = \alpha \cdot d.$$

Bul an'latpada d arqali' o'lshevwshi a'sbapti'n' shkalasi'ni'n' bo'limlerinin' bahasi' ha'm da'llik klassi' menen baylani'sli' bolg'an ten' o'lshewli bo'listiriw parametri belgilengen.

6. Wo'lshewler seriyasi'ni'n' uli'wmali'q qa'teligi ani'qlanadi' (isenimli interval ani'qlanadi'):

$$\Delta \tilde{x} = \sqrt{\Delta \tilde{x}_{tos}^2 + \Delta \tilde{x}_{to}^2}.$$

7. En' aqi'rg'i' na'tiyje

$$\alpha \text{ isenimli itimalli'q penen } x = \tilde{x} \pm \Delta \tilde{x}.$$

Wo'lshewler na'tiyjesinin' sali'sti'rmali' qa'tesi bahalanadi':

$$\delta = \frac{\Delta \tilde{x}}{\tilde{x}} 100\%.$$

Sali'sti'rmali' qa'telik ha'r qi'yli' o'lshevm birliklerine iye shamalardi' o'lshewlerdegi qa'telerdi sali'sti'ri'wg'a mu'mkinshilik beredi.

5-§. Janapay o'lshewlerdin' qa'teleri

Ko'pshilik fizikali'q eksperimentlerde qanday da bir a'sbapti'n' ja'rdeminde tuwri'dan-tuwri' o'lshebeytug'i'n, al basqa o'lshewler tiykari'nda yesaplanatug'i'n shamalar qi'zi'g'i'w payda yetedi. Izlenip ati'rg'an fizikali'q shama o'lshebetug'i'n shamalar menen funkcionalli'q baylani'sta turadi'. Bunday jag'dayda fizikali'q shamani' janapay jollar menen o'lshegen yamasa janapay o'lshewler haqqi'nda ga'p yetedi.

Bul jag'dayda tuwri'dan-tuwri' o'tkerilgen o'lshewlerdin' qa'teleri (isenimli intervallardi'n' shegaralari') belgili dep yesaplanadi' ha'm janapay o'lshewlerdegi qa'telerdi yesaplaw ma'selesini tuwi'ladi'.

Meyli janapay o'lshewlerde bazi' bir fizikali'q shamani'n' ma'nisin $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkciyasi'ni'n' (formulasi'ni'n') ja'rdeminde

ani'qlanatug'i'n bolsi'n. Bul an'latpada x_1, x_2, \dots, x_n shamalari' arqali' bir birinen g'a'rezsiz shamalar belgilengen. Al x_1, x_2, \dots, x_n shamalari'ni'n' ha'r birin ani'qlag'anda olardi'n' ha'r birin o'lshevw ushi'n n dana bir biri menen baylani'ssi'z o'lshevwler seriyasi' o'tkerilgen.

Izlenip ati'rg'an shamani'n' ortasha ma'nisin

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$$

formulasi'ni'n' ja'rdeminde yesaplaydi'. Endi bul shamani'n' absoliut qa'teligi bolg'an $\Delta\tilde{y}$ shamasini'n o'lshevgen shamalardi'n' absoliut qa'teleri $\Delta\tilde{x}_1, \Delta\tilde{x}_2, \dots, \Delta\tilde{x}_n$ boyi'nsha ani'qlaymi'z. Biz $x_1 = \tilde{x}_1 \pm \Delta x_1, x_2 = \tilde{x}_2 \pm \Delta x_2, \dots, x_n = \tilde{x}_n \pm \Delta x_n$ ten'liklerinin' ori'nlanatug'i'nli'g'i'n joqari'da ko'rgen yedik. Sonli'qtan

$$\tilde{y} \pm \Delta y = f(x_1 \pm \Delta x_1, x_2 \pm \Delta x_2, \dots, x_n \pm \Delta x_n)$$

an'latpasi'n jaza alami'z. On' ta'reptegi funkciyani' oni'n' birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'lari' menen sheklenip Teylor qatari' tu'rinde ko'rsetemiz ($\Delta\tilde{x}_i \ll \tilde{x}_i$ ten'sizligi ori'nlang'anda birinshi ta'rtpili tuwi'ndi'lar menen shekleniw mu'mkin):

$$\tilde{y} \pm \Delta y = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \pm \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \pm \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \pm \dots \pm \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

Bul an'latpada $\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i}$ arqali' $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ funkciyasi'ni'n' \tilde{x}_i boyi'nsha

ali'ng'an tuwi'ndi'si' belgilengen.

$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ yekenligin itibarg'a ali'p

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_n} \Delta x_n$$

an'latpasi'na iye bolami'z.

Wo'lshevwler sani' ju'da' u'lken bolg'anda (yag'ni'y $n \rightarrow \infty$ bolg'an jag'dayda) qa'legen normal bo'listirilgen tosi'nnan ali'natug'i'n shama ushi'n

haqi'yqat ma'nisten ortasha awi'si'wdi'n' nolge ten' yekenligin yeske ali'p awi'si'wdi'n' ortasha kvadrati' bolg'an $\Delta \tilde{y}^2$ shamasi'n ani'qlaymi'z. Buni'n' ushi'n ten'lemenin' on' ha'm shep ta'replerin kvadratqa ko'teremiz ha'm o'lshevlar sani' boyi'nsha ortashalaymi'z. Wo'lshevlardini' sani' boyi'nsha \tilde{x} ortasha ma'nisten awi'si'wlardi'n' ortasha ma'nisi Δx_i yekenligin yesapqa ali'p

$$\Delta \tilde{x}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum \Delta x_i \right) = 0$$

an'latpasi'na iye bolami'z ha'm on' ta'repte Δx_i shamasi'na qarata tek

$$\Delta \tilde{y}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 \Delta \tilde{x}_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2 \Delta \tilde{x}_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_n} \right)^2 \Delta \tilde{x}_n^2$$

qosi'ndi'si'na iye bolami'z. Bunday jag'dayda y shamasi'n janapay o'lshevlar seriyasi'ndagi'i' tosattan jiberiletug'i'n qa'te (isenimli interval)

$$\Delta \tilde{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 \Delta \tilde{x}_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2 \Delta \tilde{x}_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_n} \right)^2 \Delta \tilde{x}_n^2}$$

tu'rinde jazi'ladi'. Bul an'latpani' qi'sqasha tu'rde bi'layi'nsha jazadi':

$$\Delta \tilde{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2 \Delta \tilde{x}_i^2}.$$

Eger $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkciyasi' differenciallaw ushi'n "qolaysi'z" bolsa $\Delta \tilde{y}$ ushi'n ali'ng'an an'latpani' logarifmdi differenciallawdi'n' qa'siyetlerinen paydalani'p basqasha jazi'wg'a boladi'. $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ funkcionalli'q baylani's ushi'n logarifmdi qaraymi'z:

$$\ln f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n).$$

Logarifmnin' tuwi'ndi'si'n yesaplaw qag'i'ydasini' paydalani'p

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} (\ln f) = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i}$$

ten'liginin' ori'nli' yekenligin yeske tu'siremiz.

$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ yekenligin yesapqa ali'p

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} (\ln f) = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{1}{\tilde{y}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i}$$

an'latpalari'na iye bolami'z. Demek

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i} = \tilde{y} \frac{\partial \ln f}{\partial \tilde{x}_i}$$

Funkciyadan ali'ng'an tuwi'ndi' menen oni'n' logarifminen ali'ng'an tuwi'ndi' arasi'ndag'i' bul o'z-ara baylani'sti' paydalani'p buri'ni'raq ali'ng'an $\Delta \tilde{y}$ qa'tesin bi'layi'nsha jazami'z:

$$\Delta \tilde{y} = \tilde{y} \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 \Delta \tilde{x}_1^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2 \Delta \tilde{x}_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \tilde{x}_n} \right)^2 \Delta \tilde{x}_n^2}$$

yamasa qi'sqasha tu'rde jazi'lg'an

$$\Delta \tilde{y} = \tilde{y} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2 \Delta \tilde{x}_i^2}$$

an'latpasi'na iye bolami'z.

Eki formula da x_1, x_2, \dots, x_n shamalari'ni'n' qa'legen bo'listiriwi ushi'n duri's. Tek g'ana bul shamalardi'n' bir birinen g'a'rezsiz boli'wi' za'ru'rli.

Janapay o'lshewlerdegi qa'telerdi yesaplaw ushi'n formulalardi' ali'wg'a arnalg'an yeki mi'sal. Bizdi qi'zi'qti'ratug'i'n y shamasini ta'jiriybelerde o'lshenetug'i'n x, u, z shamalari' menen $y = f(x, u, z)$ tu'rindagi funkcionalli'q baylani'sqa iye bolsi'n ha'm bul baylani's

$$y = \frac{x^2}{2u} z$$

tu'rine iye bolsi'n. Bul an'latpada $f(x, u, z) = \frac{x^2}{2u} z$. $\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{z}$ shamalari' tikkeley

o'lshenetug'i'n shamalardi'n' ortasha ma'nisi belgilengen ha'm isenimli intervallar $\Delta \tilde{x}$, $\Delta \tilde{u}$ ha'm $\Delta \tilde{z}$ belgili bolsi'n.

Biz izlep ati'rg'an shamani'n' ortasha ma'nisi $\tilde{y} = \frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}} \tilde{z}$ shamasina ten' boladi'.

1-mi'sal. $\Delta\tilde{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2} \Delta\tilde{x}_i^2$ formulasi'na sa'ykes $\Delta\tilde{y}$ qa'tesin

bi'layi'nsha tabami'z:

$$\Delta\tilde{y} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 \Delta\tilde{x}_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2 \Delta\tilde{u}_2^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_n} \right)^2 \Delta\tilde{z}_n^2}.$$

$f(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{z}) = \frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}} \tilde{z}$ funkciyasi'n $\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{z}$ o'zgeriwshileri boyi'nsha

differenciallaymi'z:

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{u}} \tilde{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}} = -\frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}^2} \tilde{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \tilde{z}} = \frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}}.$$

Bunday jag'dayda qa'teni yesaplaw formulasi' mi'na tu'rge iye boladi':

$$\Delta\tilde{y} = \sqrt{\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{u}} \tilde{z} \right)^2 \Delta\tilde{x}_1^2 + \left(-\frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}^2} \tilde{z} \right)^2 \Delta\tilde{u}_2^2 + \left(\frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}} \right)^2 \Delta\tilde{z}_n^2}.$$

Kvadrat tu'birdin' asti'nan uli'wmali'q ko'beytiwshilerdi shi'g'arami'z ha'm to'mendegilerga iye bolami'z:

$$\Delta\tilde{y} = \frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}^2} \tilde{z} \sqrt{\left(\frac{2}{\tilde{x}} \right)^2 \Delta\tilde{x}_1^2 + \left(-\frac{1}{\tilde{u}} \right)^2 \Delta\tilde{u}_2^2 + \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)^2 \Delta\tilde{z}_n^2}$$

yamasa

$$\Delta\tilde{y} = \tilde{y} \sqrt{\left(\frac{2}{\tilde{x}} \right)^2 \Delta\tilde{x}_1^2 + \left(-\frac{1}{\tilde{u}} \right)^2 \Delta\tilde{u}_2^2 + \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)^2 \Delta\tilde{z}_n^2}.$$

2-mi'sal. Bizin' qoli'mi'zda bar $f(\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{z}) = \frac{\tilde{x}^2}{2\tilde{u}} \tilde{z}$ funkcionalli'q baylani'sti'n'

logarifmi boyi'nsha qa'te $\Delta\tilde{y}$ shamasini'n tabami'z. Funkciyani' logarifmleyemiz:

$$\text{Ln}f = 2\text{Ln}\tilde{x} - \text{Ln}2 - \text{Ln}\tilde{u} + \text{Ln}\tilde{z}.$$

Bul an'latpani' $\tilde{x}, \tilde{u}, \tilde{z}$ boyi'nsha differenciallaymi'z:

$$\frac{\partial Lnf}{\partial \tilde{x}} = \frac{2}{\tilde{x}}, \quad \frac{\partial Lnf}{\partial \tilde{u}} = -\frac{1}{\tilde{u}} \quad \text{ha'm} \quad \frac{\partial Lnf}{\partial \tilde{z}} = \frac{1}{\tilde{z}}.$$

$$\Delta \tilde{y} = \tilde{y} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2} \Delta \tilde{x}_i^2 \text{ formulasi'na sa'ykes}$$

$$\Delta \tilde{y} = \tilde{y} \sqrt{\left(\frac{\partial Lnf}{\partial \tilde{x}} \right)^2 \Delta \tilde{x}^2 + \left(\frac{\partial Lnf}{\partial \tilde{u}} \right)^2 \Delta \tilde{u}^2 + \left(\frac{\partial Lnf}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \Delta \tilde{z}^2} \quad (7)$$

yamasa

$$\Delta \tilde{y} = \tilde{y} \sqrt{\left(\frac{2}{\tilde{x}} \right)^2 \Delta \tilde{x}_1^2 + \left(-\frac{1}{\tilde{u}} \right)^2 \Delta \tilde{u}_2^2 + \left(\frac{1}{\tilde{z}} \right)^2 \Delta \tilde{z}_n^2} \quad (8)$$

formulalari'na iye bolami'z.

Solay yetip yeki formula boyi'nsha o'tkerilgen yesaplawlar birdey na'tiyjelerdi beredi.

Janapay o'lshevlardir' qat'eleri boyi'nsha bazi' bir juwmaqlar. Janapay o'lshevlardir' na'tiyjelerin qayta islegende to'mendegidey ta'rtipte ha'reket yetiwdi usi'nami'z:

1. Eger za'ru'rlik bolsa o'lshenetug'i'n shamalardi' baylani'sti'ratug'i'n formulani' arali'qli'q formulalari'z barli'q o'lshenetug'i'n shamalardi' tikkeley baylani'sti'ratug'i'n funkcionalli'q baylani'sqa iye formulag'a tu'rlendiriw kerek.

2. Ko'p qaytara ha'm bir ret o'tkeriletug'i'n o'lshevlardir' qat'elerin yesapqa ali'w menen izlenip ati'rg'an shamani'n' formulasi'na kiriwshi barli'q tikkeley tuwri'dan-tuwri' o'lshenetug'i'n shamalardi'n' qat'elerin bahalan'i'z. Bunday jag'dayda barli'q o'lshenetug'i'n shamalar ushi'n isenimli itimalli'qti'n' $\alpha = 0,95$ shamasin'dag'i' ma'nisi qabi'l yetiledi.

3. Wo'lshenetug'i'n shamalardi'n' ortasha $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ ma'nisleri boyi'nsha izlenip ati'rg'an shamani'n' ortasha ma'nisi bolg'an

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$$

shamasi'n tabi'n'i'z.

$$4. \text{ Janapay o'lshevlardin' qa'tesi ushi'n } \Delta\tilde{y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2} \Delta\tilde{x}_i^2 \text{ yamasa}$$

$$\Delta\tilde{y} = \tilde{y} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \tilde{x}_i} \right)^2} \Delta\tilde{x}_i^2 \text{ formulasi'ni'n' ja'rdeminde an'latpa ali'n'i'z.}$$

En' aqi'rg'i' na'tiyjeni

$$\alpha \text{ isenimli itimalli'qta } y = \tilde{y} \pm \Delta\tilde{y}$$

dep jazi'w kerek.

Ta'jiriybeler na'tiyjelerin qa'teni yesapqa alg'an halda ko'rsetiw. Eksperimentalli'q izertlewlerde ali'ng'an san shamalar o'lshevlardagi qa'telerga baylani'sli' sanlardag'i' cifralardi' duri's cifralar (isenimge miyasar cifralar) ha'm duri's yemes cifralar dep yekige bo'ledi. Eger usi' cifra joylasqan razryad ushi'n qa'te usi' razryadi'n' yari'mi'nan u'lken bolmasa, onda cifrani' duri's cifra dep yesaplaymi'z. Mi'sali' qa'teligi 0,6 g'a ten' ta'jiriybede 12,786 shamasi' ali'ng'an bolsa, onda shamani'n' pu'tin bo'liminin' barli'g'i' da duri's, al u'tirden keyingi tek bir san duri's degendi an'latadi'. Al qalg'an 8 ha'm 6 sanlari' duri's yemes (yag'ni'y isenimge miyasar yemes) cifralar boli'p tabi'ladi'.

Ali'ng'an na'tiyjelerdin' onnan bir u'lesinen keyingi cifralardi' jazi'wdi'n' yeki usi'li' bar (mi'sali' 0,00063 ha'm $6,3 \cdot 10^{-4}$). Ha'r qi'yli' bolg'an eksperimentalli'q na'tiyjelerdi duri's sali'sti'ri'w ushi'n na'tiyjenin' jazi'wi'ndag'i' a'hmiyetli cifra (znashashaya cifra) tu'sinigi kirgiziledi.

Onli'q pozitsiyali'q yesaplaw sistemasi'nda 1 den 9 g'a shekemgi sanlar ha'm nol bar. Eger cifra sanni'n' ortasi'nda yamasa aqi'ri'nda tursa, onda oni' a'hmiyetli cifra dep ataymi'z. 12300 sani'nda 5 a'hmiyetli cifra bar, al $1,2 \cdot 10^4$ sani'nda bolsa tek yeki a'hmiyetli sang'a iye bolami'z. 0,00045 sani'nda yeki a'hmiyetli san tur, sebebi 4 tin' shep ta'repindeg'i nollard'in' barli'g'i' da a'hmiyetli yemes. 15,897 sani'nda a'hmiyetli cifralardi'n' sani' beske ten'.

Eksperimentalli'q na'tiyjelerdin' qa'tesi haqqi'nda mag'li'wmatlar bolmag'an jag'dayda a'hmiyetli cifralardi'n' sani' boyi'nsha yesaplawdi'n' yamasa o'lshewdin' da'lligin ani'qlaydi'. Mi'sali' 1,23 sani'nda u'sh a'hmiyetli cifra bar, demek o'lshewde ju'zden bir u'les te yesapqa ali'ng'an degen so'z. Al 1,2 sani'nda tek yeki a'hmiyetli cifra bar. Bul jerde pu'tin ha'm onnan bir u'les yesapqa ali'ng'an. Demek yekinshi jag'daydag'i' sanni'n' da'lligi birinshi jag'daydag'i' sanni'n' da'lliginen on yese kishi degen so'z.

Qa'teler yesapqa ali'nbag'an jag'dayda o'lshewlerdin' na'tiyjelerin juwi'q tu'rde yesaplaw. Na'tiyjelerdeg'i' qa'te tek o'lshewlerdin' da'lliginin' to'menligi menen baylani'sli' boli'p qalmay, yesaplawlardi'n' da'lliginin' to'men bolg'anli'g'i' menen de baylani'sli'. Na'tiyjeni qa'legen tu'rdeg'i' do'n'geklew sistemali'q qa'telik boli'p tabi'ladi'. Sonli'qtan yesaplawlar na'tiyjelerindegi do'n'geklew o'lshewlerdin' na'tiyjelerindegi tosi'nnan ketetug'i'n qa'teden kishi boli'wi' kerek. Biraq yesaplawlar qa'teni bahalawdan buri'n ju'rgiziledi. Sonli'qtan usi' sha'rtti ori'nlaw ushi'n eksperimentalli'q izertlewlerdegi barli'q yesaplawlarda a'hmiyetli cifralardi'n' sani' o'lshewlerde ali'ng'an sanlardag'i' cifralardan 1 ge arti'q boli'wi' kerek. Bul ila'j qa'teni yesapqa alg'an halda na'tiyjeni duri's do'n'geklewge mu'mkinshilik beredi.

Wo'lshewlerdin' na'tiyjelerin jazg'anda qollani'latug'i'n do'n'geklew qag'i'ydalari'. Tuvri'dan-tuvri' ha'm janapay o'lshewlerdin' na'tiyjelerin do'n'geklegende o'lshenetug'i'n shamani'n' juwi'q ma'nisi ali'nadi'. Ma'nisti jazi'w ushi'n tek a'hmiyetli (duri's) cifralardi' jazadi'. Do'n'geklewdin' to'mendegidey qag'i'ydalari'n paydalani'p duri's yemes cifralardi' to'mendegidey qag'i'ydalardan paydalani'p ali'p taslaydi':

1. Eger ali'p taslanatug'i'n cifra 5 ten kishi bolsa son'g'i' saqlanatug'i'n cifra o'zgerissiz qaladi'.

2. Eger ali'p taslanatug'i'n sanlardin' birinshisi 5 ten u'lken bolsa, onda saqlani'li'p qali'natug'i'n yen' son'g'i' cifra 1 ge u'lkeytiledi. Eger ali'p

taslanatug'i'n cifralardi'n' birinshisi 5 ke ten', al onnan keyingi bir yamasa bir neshe cifralar nolge ten' bolmasa da son'g'i' cifra 1 ge u'lkeytiledi. Mi'sali' 19,856 sani'n do'n'geletkende 19; 19,9; 19,86 sanlari'n ali'w mu'mkin.

3. Eger ali'p taslanatug'i'n cifra 5 bolsa, al onnan keyin a'hmiyetli cifra bolmasa, onda do'n'geleklewde yen' jaqi'n jup san itibarg'a ali'nadi'. Mi'sali' 0,435 sani'n 0,44 ke do'n'gelekleymiz, al 0,465 sani'n 0,46 g'a do'n'gelekleymiz.

Mi'sallar keltiremiz:

$8.27 \approx 9$	$0.237 \approx 0.3$
$0.0862 \approx 0.09$	$0.00035 \approx 0.0004$
$857.3 \approx 900$	$43.5 \approx 50$

4. Wo'lsheplerdin' na'tiyjelerin "qa'tege shekemgi" da'llikte juwi'qlaydi', yag'ni'y yen' son'g'i' a'hmiyetli cifra qa'tenin' razryadi'nday boli'wi' kerek.

Mi'sallar:

$$243.871 \pm 0.026 \approx 243.87 \pm 0.03;$$

$$243.871 \pm 2.6 \approx 244 \pm 3;$$

$$1053 \pm 47 \approx 1050 \pm 50.$$

Matematikali'q yesaplawlardag'i' do'n'geleklew qag'i'ydalari'.

1. Qosi'w menen ali'wda onli'q bo'lshekke sa'ykes keletug'i'n u'tirden keyin ha'r qi'yli' sandag'i' cifralar qatnasatug'i'n bolsi'n. Mi'sali' $23,2 + 0,44 + 7,247 \approx 23,2 + 0,44 + 7,25 \approx 30,89 \approx 30,9$. Demek na'tiyjedegi u'tirden keyingi cifralardi'n' sani' qosi'li'wshi'lardi'n' ishindeg i u'tirden keyingi yen' az cifrag'a iye sanday boladi' yeken. Ja'ne bir mi'sal keltiremiz: $23,52 + 12,66772 = 26,18772 \approx 26,19$.

2. Ko'beytiwde de, bo'liwde de 1-punktte keltirilgen qag'i'ya basshi'li'qqa ali'nadi'. Mi'sali': $30,9 \cdot 1,8364 = 56,74476 \approx 56,74$.

Bul qag'i'ydalari' mi'sali' $30,9 - 1,8364 = 56,74476 \approx 56,74$ bolg'an jag'dayda

ori'nlanbaydi'. Bul jag'dayda ko'beytiwshilerdi biri 1 den baslanadi', al u'tirden keyin kishi cifrag'a iye shama basqa cifradan baslanadi'.

3. x^n , $\sqrt[n]{x}$, $\ln(x)$ tu'rindegı funkciyalardi'n' ma'nislerin yesaplag'anda argument x a'hmiyetli cifrag'a iye bolsa, na'tiyjede tap sonday a'hmiyetli cifrag'a iye boladi'. Mi'sali': $(11,38)^2 = 129,5044 \approx 129,5$.

Arali'qli'q na'tiyjelerdi yesaplag'anda 1-3 punktlerde na'zerde tuti'lg'an cifralar sani'na 1 sang'a ko'p cifralardan turatug'i'n na'tiyje paydalani'ladi'. Al yen' son'g'i' na'tiyjede bul san joqari'da keltirilgen qag'i'ydalar tiykari'nda ali'p taslanadi'.

Wo'lsheuler qa'tesın yesapqa alg'an halda o'lsheuler na'tiyjelerin jazı'w ta'rтіpleri. Tuvri'dan-tuvri' o'tkerilgen ha'm janapay o'lsheulerdin' na'tiyjelerin qa'telerdi yesapqa alg'an halda jazı'w ushi'n to'mendegidey qag'i'ydalardi' basshi'li'qqa ali'w kerek:

1. Qa'tenin' shaması'n (isenimli intervaldi') yekinshi a'hmiyetli sang'a (shepten on'g'a qaray, yeger olardi'n' birinshisi 1 bolsa) shekem do'n'geleklew kerek. Al basqa jag'daylardi'n' barli'g'i'nda da birinshi a'hmiyetli cifrag'a shekem do'n'geleklenedi.

2. Wo'lsheuler na'tiyjesin (tuvri'dan-tuvri' o'tkerilgen yamasa janapay o'lsheulerdegı ali'ng'an shamalardi'n' ortasha ma'nisi) de qa'telerdegı razryadlar sani'nday yetip do'n'geleklew kerek. En' aqi'rg'i' na'tiyjedegı a'hmiyetli cifralardi'n' sani' absoliut qa'teliktin' (isenimli intervaldi'n') shaması'ni'n' ta'rtibi boyi'nsha ani'qlanadi'.

Mi'sali': o'lsheulerdin' na'tiyjesi 42,959 shaması'na ten'. Bul shama 0,045 da'lliginde ani'qlang'an. Bunday jag'dayda yen' aqi'rg'i' na'tiyjeni bi'layi'nsha jazami'z: $42,96 \pm 0,04$.

Eger yesaplawlarda qa'tesi ko'rsetilmegen kestelerden ali'natug'i'n mag'li'wmatlar paydalani'latug'i'n bolsa, onda a'dette bul shamani'n' qa'tesi son'g'i' a'hmiyetli cifrani'n' razryadi'ni'n' yari'mi'na ten' dep yesaplanadi'. Bul do'n'geleklew qa'tesinin' ten' o'lsheuli bo'listiriwi ushi'n d parametri boli'p

tabi'ladi'.

x shamasini o'lshevdin' na'tiyjelerin qayta islewdi jazi'w ushi'n arnalg'an keste

N ^o	x_i	$\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle$	Δx_i^2	S_n	Δx_{tos}	$\Delta x_{a'sb}$	Δx_{juw}	$\langle x \rangle \pm \Delta x$
1	x_1	Δx_1	Δx_1^2					
2	x_2	Δx_2	Δx_2^2					
...					
i	x_i	Δx_i	Δx_i^2					
...					
n	x_n	Δx_n	Δx_n^2					
$n =$	$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0$	$\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2 =$	$t_{n,P}$	$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{tos}^2 + \Delta x_{a'sb}^2 + \Delta x_{juw}^2}$			$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%$

Bul keste de N^o arqali' o'lshevlardin' qatar sani', x_i arqali' i – sanli' o'lshewde ali'ng'an x shamasini'nin' ma'nisi, S_n arqali' n ret o'lshegende jiberiletug'i'n ortasha kvadratli'q qa'telik, Δx_{tos} arqali' tosattan jiberiletug'i'n qa'te, $\Delta x_{a'sb}$ arqali' a'sbapli'q qa'te, Δx_{juw} arqali' juwi'qlag'anda jiberiletug'i'n qa'te belgilengen.

Eksperimentalli'q izertlewlerdin' qa'tesin bahalawg'a ha'm na'tiyjelerin jazi'wg'a mi'sal. Eksperimentte duri's geometriyali'q formag'a iye (parallelepiped) denenin' ko'lemin ani'qlaw maqsetinde parallelepipedtin' qabi'rg'alari'nin' uzi'nli'qlari'n o'lshevlar o'tkerilgen bolsi'n. Wo'lshevlar na'tiyjeleri to'mendegi 2-keste de berilgen. Barli'q o'lshevlar noniusi'nin' bo'limlerinin' bahasi' 0,1 mm bolg'an shtangencirkuldin' ja'rdeminde ori'nlang'an.

2-keste.

n	a, mm	b, mm	h, mm
1	12,7	12,7	14,8
2	12,7	12,8	14,9
3	12,7	12,9	14,7
Ortashasi'	$\tilde{a} = 12,7$	$\tilde{b} = 12,8$	$\tilde{h} = 14,8$

Eksperimentte ali'ng'an na'tiyjelerdi qayta islew.

b shamasini tuwri'dan-tuwri' o'lshevlardini qat'esini yesaplaymiz.

Ortasha arifmetikali'q ma'nisi $b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i = 12,80$ mm.

Ortasha kvadratli'q awisi'w

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_b &= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\tilde{b} - b_i)^2} = \sqrt{\frac{0,1^2 + 0 + (-0,1)^2}{3 \cdot 2}} = \\ &= \sqrt{33,3 \cdot 10^{-4}} = 5,77 \cdot 10^{-2} \text{ (mm)}.\end{aligned}$$

$n = 3$ ha'm $\alpha = 0,95$ bolg'anda Student koefficienti $t_{\alpha n} = 4,30$, demak ko'p qaytara o'lshevlardagi tosattan jiberiletug'i'n qat'elik:

$$\Delta \tilde{\sigma}_{tos} = t_{\alpha n} \cdot \tilde{\sigma}_b = 4,30 \cdot 5,77 \cdot 10^{-2} = 0,2481 \text{ (mm)}.$$

Wo'lshevlar bo'liminin bahasi' 0,1 mm bolg'an shtangencirkuldin' noniusi' boyi'nsha ju'rgizildi. Demak bir ret o'lshevlar ushi'n ten' o'lshewdi tarqali'wdi'n' parametri $d = 0,1$ mm. Bir ret o'lshevlar qat'esi:

$$\Delta \tilde{\sigma}_{bir_ret} = \alpha \cdot d = 0,95 \cdot 0,1 = 0,095 \text{ (mm)}.$$

b shamasindagi'i' toli'q qat'elik:

$$\Delta \tilde{b} = \sqrt{\Delta \tilde{\sigma}_{tos}^2 + \Delta \tilde{\sigma}_{bir_ret}^2} = \sqrt{0,2481^2 + 0,0095^2} = 0,2484 \text{ (mm)}.$$

Eger bul shamalardi' izertlew jumi'slari'ni'n' na'tiyjeleri ko'rsetiw ushi'n za'ru'r bolsa, onda eksperimentte ali'ng'an b shamasini'ni'n' ma'nisi qat'eni yesapqa alg'an halda bi'layi'nsha jazamiz:

$$b = \tilde{b} \pm \Delta\tilde{b} = (12,8 \pm 0,2) \text{ (mm)}.$$

Tap sonday jollar menen h shamasi'n tuwri'dan-tuwri' o'lshevwlerdegi qa'teni yesaplaymi'z.

$$\text{Ortasha arifmetikali'q } \tilde{h} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i = 14,80 \text{ (mm)}.$$

$$\text{Ortasha kvadratli'q awi'si'w } \tilde{\sigma}_h = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\tilde{h} - h_i)^2} = 5,77 \cdot 10^{-2} \text{ (mm)}.$$

$\alpha = 0,95$ penen $n = 3$ ushi'n $t_{\alpha n} = 4,30$ (a, b, h shamalari'n o'lshegendegi ta'jiriybeler sani' birdey yedi).

Ko'p qaytara o'lshevwlerdegi qa'te:

$$\Delta\tilde{h}_{tos} = t_{\alpha n} \cdot \tilde{\sigma}_h = 4,30 \cdot 5,77 \cdot 10^{-2} = 0,2481 \text{ (mm)}.$$

Bir ret o'lshevwlerdegi qa'teler (bul da b shamasi'ndag'i'day, sebebi o'lshevwler bir a'sbapti'n' ja'rdeminde a'melge asi'ri'ldi'):

$$\Delta\tilde{h}_{bir_ret} = \alpha \cdot d = 0,95 \cdot 0,1 = 0,095 \text{ (mm)}.$$

h shamasi'ndag'i' toli'q qa'telik:

$$\Delta\tilde{h} = \sqrt{\Delta\tilde{h}_{tos}^2 + \Delta\tilde{h}_{bir_ret}^2} = \sqrt{0,2481^2 + 0,0095^2} = 0,2484 \text{ (mm)}.$$

Eger bul shamalardi' izertlew jumi'slari'ni'n' na'tiyjeleri ko'rsetiw ushi'n za'ru'r bolsa, onda eksperimentte ali'ng'an h shamasi'ni'n' ma'nisi qa'teni yesapqa alg'an halda bi'layi'nsha jazami'z:

$$h = \tilde{h} \pm \Delta\tilde{h} = (14,8 \pm 0,2) \text{ (mm)}.$$

Endi a shamasi'n tuwri'dan-tuwri' o'lshegendegi qa'teni yesaplaymi'z.

U'sh o'lshewdin' na'tiyjesinde birdey shamalar ali'ng'an bolg'anli'qtan ortasha kvadratli'q awi'si'w $\tilde{\sigma}_a = 0$ ha'm ko'p qaytara o'lshevwlerdegi qa'te de $\Delta\tilde{a}_{tos} = 0$.

Bul shamalardi' bir retten o'lshegendegi qa'te joqari'da ko'rip o'tilgen yeki jag'daydag'i'day $\Delta\tilde{a}_{bir_ret} = \alpha \cdot d = 0,95 \cdot 0,1 = 0,095 \text{ (mm)}$.

a shamasi'ni'n' toli'q qa'teligi

$$\Delta \tilde{a} = \sqrt{\Delta \tilde{a}_{tos}^2 + \Delta \tilde{a}_{bir_ret}^2} = \Delta \tilde{a}_{bir_ret} = 0,095 \text{ (mm)}.$$

Eger izertlewdin' na'tiyjelerin ko'rsetiw za'ru'rliqi bar bolsa, onda a shamasini'n ma'nisi qa'teni yesapqa ali'p bi'layi'nsha jazami'z:

$$a = \tilde{a} \pm \Delta \tilde{a} = (12,7 \pm 0,1) \text{ (mm)}.$$

4. Endi paralelepipedtin' ko'leminin' ma'nisin yesaplaymi'z (janapay o'lshepler).

$$\tilde{V} = \tilde{a} \cdot \tilde{b} \cdot \tilde{h} = 12,7 \cdot 12,8 \cdot 14,8 = 2405,888 \text{ mm}^3.$$

5. Paralelepipedtin' ko'lemindegi qa'te $\Delta \tilde{V}$ ni' yesaplaymi'z.

Ko'lemnin' o'lsheiniwshi shamalar menen baylani'si' bolg'an $\tilde{V} = \tilde{a} \cdot \tilde{b} \cdot \tilde{h}$ an'latpasi'n logarifmleyemiz.

$$\ln \tilde{V} = \ln \tilde{a} + \ln \tilde{b} + \ln \tilde{h}.$$

Dara tuwi'ndi'lardi' yesaplaymi'z:

$$\frac{\partial \ln \tilde{V}}{\partial \tilde{a}} = \frac{1}{\tilde{a}}, \quad \frac{\partial \ln \tilde{V}}{\partial \tilde{b}} = \frac{1}{\tilde{b}}, \quad \frac{\partial \ln \tilde{V}}{\partial \tilde{h}} = \frac{1}{\tilde{h}}.$$

Biz joqari'da janapay o'lshepler ushi'n ali'ng'an (7)-formulag'a sa'ykes

$$\Delta \tilde{V} = \tilde{V} \sqrt{\left(\frac{\partial \ln \tilde{V}}{\partial \tilde{a}}\right)^2 \Delta \tilde{a}^2 + \left(\frac{\partial \ln \tilde{V}}{\partial \tilde{b}}\right)^2 \Delta \tilde{b}^2 + \left(\frac{\partial \ln \tilde{V}}{\partial \tilde{h}}\right)^2 \Delta \tilde{h}^2} \quad (9)$$

ha'm

$$\Delta \tilde{V} = \tilde{V} \sqrt{\left(\frac{\Delta \tilde{a}}{\tilde{a}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \tilde{b}}{\tilde{b}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \tilde{h}}{\tilde{h}}\right)^2} \quad (10)$$

formulalari'n alami'z. $\Delta \tilde{V}$ qa'teligine qatnasi' boyi'nsha si'zi'qli' o'lsheplernge sa'ykes keliwshi $\Delta \tilde{a}$, $\Delta \tilde{b}$, $\Delta \tilde{h}$ shamalari' arali'qli'q na'tiyjeler boli'p tabi'ladi'. Sonli'qtan bunnan bi'lay ori'nlanatug'i'n yesaplawlarda birinshi a'hmiyetli cifrag'a shekemgi do'n'gelekletilmegen ma'nisleri qollani'ladi'.

$$\Delta \tilde{V} = 2405,88 \sqrt{\left(\frac{0,095}{12,7}\right)^2 + \left(\frac{0,2484}{12,80}\right)^2 + \left(\frac{0,2484}{14,80}\right)^2} = 68,5 \text{ mm}^3.$$

Qa'teni shep ta'repten birinshi a'hmiyetli cifrag'a shekem

do'n'gelekleyemiz:

$$\Delta \tilde{V} = 70 \text{ mm}^3.$$

Ko'lemnin' ma'nisin de tap sonday razryadqa shekem do'n'gelekleyemiz

$$\tilde{V} = 2410 \text{ mm}^3.$$

En' aqi'rg'i' na'tiyjeni

$$\alpha \text{ isenimli itimalli'qta } V = \tilde{V} \pm \Delta \tilde{V} = (2410 \pm 70) \text{ mm}^3.$$

tu'rinde jazami'z.

Sali'sti'rmali' qa'te bi'layi'nsha yesaplanadi':

$$\delta = \frac{\Delta \tilde{V}}{\tilde{V}} = \frac{70}{2410} = 0,029 \text{ yamasa } 2,91 \%$$

6-§. Fizikali'q shamalar arasi'ndag'i' eksperimentlerde ali'ng'an baylani'slardi' qayta islew

Oqi'w eksperimentlerinde sheshiletug'i'n a'dettegi ma'selelerdin' biri qubi'li'sti' yamasa obektti ta'riyipleytug'i'n ha'r qi'yli' fizikali'q shamalar arasi'ndag'i' funkcionalli'q baylani'slardi' tabi'w boli'p tabi'ladi'. Ko'pshilik jag'daylarda izertlengen baylani'slardi' analitikali'q yamasa grafikler tu'rinde ko'rsetedi.

Eksperimentlerdin' na'tiyjelerin grafikali'q ko'rsetiw. A'l'bette na'tiyjelerdi grafikali'q jollar menen ko'rsetiw o'zinin' ko'rgizbeliligi menen ha'm mag'li'wmatlardi'n' ko'pligi menen ayri'li'p turadi'. Eksperimentalli'q baylani'slardi'n' grafikleri baylani'sti'n' xarakterin ko'z benen an'sat tu'rde ani'qlawg'a, eksperimentalli'q mag'li'wmatlardi'n' pi'ti'ran'qi'li'g'i'ni'n' (shashawli'g'i'ni'n') shamasin' bahalawg'a mu'mkinshilik beredi.

Fizikali'q baylani'slardi' sa'wlelendiretug'i'n grafiklerdin' o'zine ta'n a'hmiyetli o'zgesheliginin' biri ko'shelrlerge tu'sirilgen shamalardi'n' birliklerge iye yekenligi boli'p tabi'ladi'.

Laboratoriyali'q jumi'slardi' ori'nlag'anda quri'latug'i'n grafiklerdin'

maksimal tu'rde informatsiyaliq boli'wi' ushi'n grafiklerdi quri'w'di'n' to'mendegidey belgili bir qag'i'ydalari'n saqlaw kerek boladi'.

1. Usi' waqi'tlarg'a shekem grafiklerdi studentlerdin' laboratoriyali'q jumi'slardi' ori'nlaw ushi'n qoyg'an da'pterde quri'w a'melge asi'ri'li'p keldi. Biraq kompiuterlerdin' ha'm grafiklerdi quratu'g'i'n kompiuterlik programmalaridin' (Mi'sali', MS Excel, Origin, Mathematica ha'm basqalar) ken' tu'rde tarqali'wi'na baylani'sli' son'g'i' waqi'tlari' grafiklerdi kompiuterlerdin' ja'rdeminde quri'w praktikasi' ken'nen tarqalmaqta. Qanday jollar menen grafiktin' quri'lg'anli'g'i'nan baylani'ssi'z, tayar bolg'an grafik laboratoriyali'q jumi'sti'n' yesabi'na kiriwi kerek.

2. Koordinatalar ko'sherlerinde qoyi'lg'an shamalar ha'm olardi'n' o'lshe'm birliklerinin' ko'rsetiliwi sha'rt.

3. Za'ru'r bolg'anda koordinatalar basi' shamalaridin' nollik ma'nislerine sa'ykes kelmewi mu'mkin. Bunday jag'dayda qag'azdi'n' beti maksimalli'q tu'rde paydalani'ladi'.

4. Eksperimentte ali'ng'an noqatlar ani'q ha'm iri yetip do'n'gelekler, atanaqlar, ha'r qi'yli' ren'degi noqatlar ha'm tag'i' basqa da tu'rlerde ko'rsetiliwi mu'mkin.

5. Koordinata ko'sherlerindegi masshtabli'q bo'liwlerdi ten' o'lshe'wli tu'rde ori'nlaw kerek. Ko'sherlerdegi eksperimentalli'q noqatlardi'n' koordinatalari' ko'rsetilmeydi, al usi' koordinatalardi' ani'qlaytu'g'i'n si'zi'qlar ju'rgizilmeydi.

6. Masshtab saylap ali'ng'anda to'mendegidey jag'daylarg'a itibar beriledi:

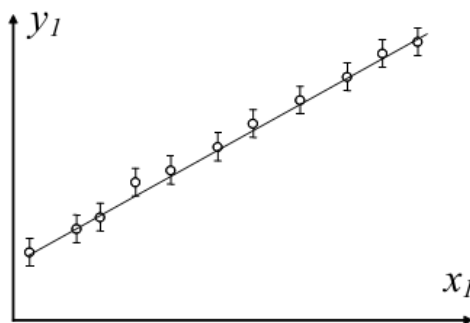
Iymeklik yeki ko'sher bag'i'ti'nda da ten' o'lshe'wli jaylasqan boli'wi' kerek. Eger grafik tuwri' si'zi'qtan turatu'g'i'n bolsa, onda oni'n' ko'sherlerge qi'yali'q mu'yeshin 45 gradusqa jaqi'n yetip ali'w usi'ni'ladi'

Qa'legen noqatti'n' iyelep turg'an orni'n an'sat ha'm tez tawi'p alatug'i'nday boli'wi' sha'rt. Eger grafiktin' ko'sheri bag'i'ti'ndag'i' bir masshtabli'q bo'lekte (millimetrde yamasa santimetrde) o'lshe'ngen

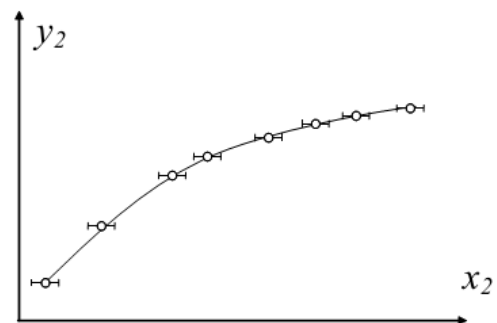
shamani'n' bir yamasa yeki (bes, on, jigirma h.t.b.) birligi sa'ykes kelse masshtab sa'tli tu'rde saylap ali'ng'an dep yesaplanadi'.

7. Eksperimentalli'q mag'li'wmatlardi'n' belgili bir tosattan ketetug'i'n qa'telerge iye yekenligin yesapqa alg'anda eksperimentalli'q baylani'sti' sa'wlelendiretug'i'n iymeklikti (yamasa tuwri'ni') noqatlar arqali' yemes, al olar arasi'nan iymekliktin' yeki ta'repindegi noqatlar sani' birdey bolatug'i'nday yetip ju'rgiziw kerek. Iymekliklerdin' tegis boli'wi' kerek.

Grafikke shamalardi' o'lshegende jiberiletug'i'n qa'teni (isenimli intervaldi') qoyi'w kerek. Bul eksperimentalli'q noqatlarg'a qarata simmetriyali' vertikal yamasa gorizont bag'i'ti'ndag'i' si'zi'q boli'p tabi'ladi'.



11-su'wret.



12-su'wret.

11- ha'm 12- su'wretlerde bazi' bir $y_1 = f(x_1)$ ha'm $y_2 = f(x_2)$ fizikali'q baylani'slari'ni'n grafiklerindegi o'lshew qa'telerin sa'wlelendiriwge mi'sallar keltirilgen.

Eksperimentalli'q mag'li'wmatlar boyi'nsha eksperimenttin' qa'tesi sheklerinde ta'jiriybelerde ali'ng'an noqatlarg'a jetkilikli da'rejede jaqi'n o'tetug'i'n bir neshe iymekliklerdi ju'rgiziwge boladi'.

Grafikler du'zgende yen' ko'p jiberiletug'i'n qa'teler. Meyli dene ten' o'lshewli qozg'alg'andag'i' joldi'n' waqi'tqa g'a'rezliginin' grafigin du'ziw kerek bolsi'n. Bul g'a'rezlikti $S = f(t)$ arqali' belgileyik. Wo'lshewlerdin' na'tiyjeleri to'mendegi 5-kestede berilgen.

5-keste.

t, c	10	12	14	15	16	18	19	20
S, m	20	23	30	31	34	34	38	43

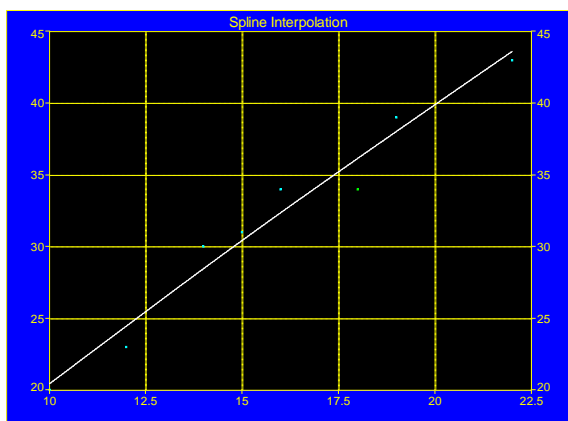
Bul mag'li'wmatlar tiykari'nda TableCurve 2D programmasi' ja'rdeminde grafikti an'sat si'zi'wg'a ha'm approksimaciyalawg'a boladi' (13-a su'wret).

Bul mag'li'wmatlar tiykari'nda Mathematica 9.0 paketinin' ja'rdeminde grafik du'ziwimiz mu'mkin. Oni'n' ushi'n mi'naday komandalardi' jazami'z:

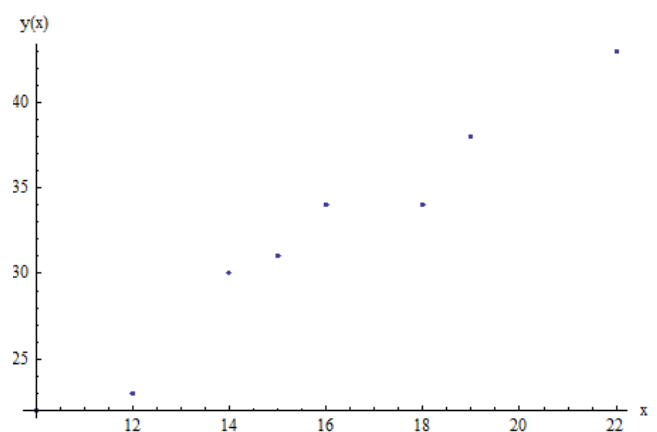
$$f = \{\{10,22\},\{12,23\},\{14,30\},\{15,31\},\{16,34\},\{18,34\},\{19,38\},\{22,43\}\};$$

$$ListPlot[f, AxesLabel \rightarrow \{ "x", "y(x)" \}]$$

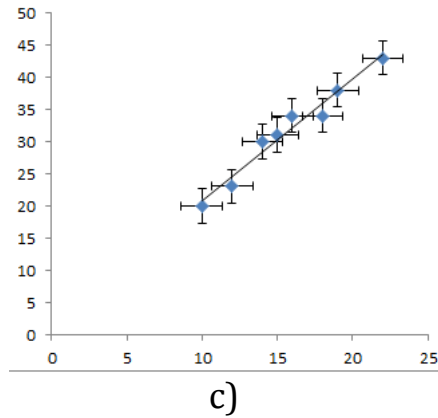
Kompiuter 13-b su'wrette keltirilgendey grafikti beredi. Bul grafik duri's si'zi'lg'an (grafik iyelegen maydan toli'g'i' menen paydalani'lg'an).



a)

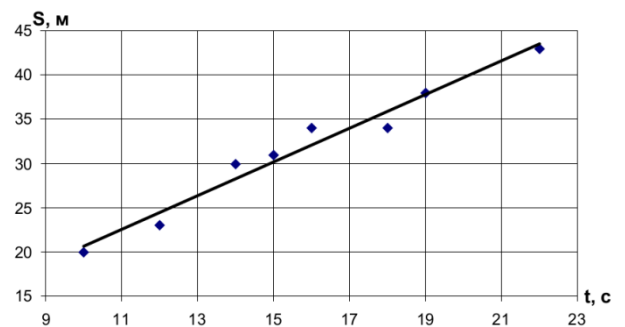
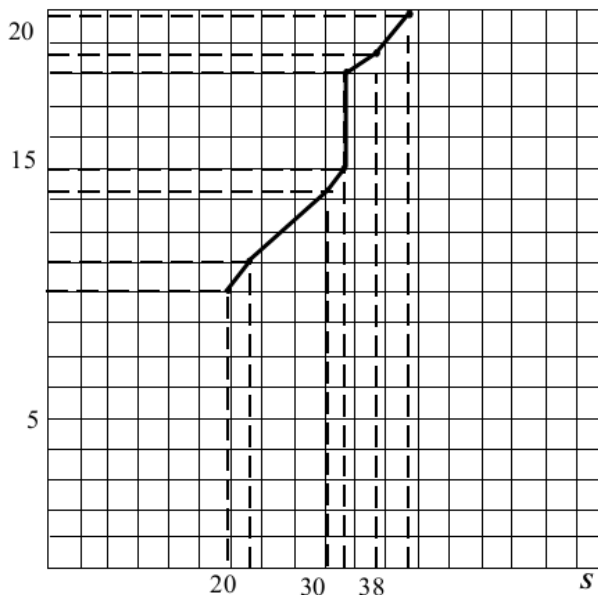


b)



13-su'wret 3-kestede keltirilgen mag'li'wmatlar boyi'nsha kompiuterdin' ja'rdeminde sog'i'lg'an grafikler. a – TableCurve 2D programmasi' ja'rdeminde si'zi'qli' approksimaciya islengen, b - Mathematica 9.0 paketinin' ja'rdeminde ali'ng'an grafik. Bul grafikler duri's si'zi'lg'an. c – Excel ja'rdeminde standart qa'teliklerdi ko'rsetiw menen si'zi'lg'an. Bul grafiktin' du'ziliwinde qa'telik jiberilgen (maydanni'n' birazi' paydasi'z paydalani'lg'an).

14-su'wrette grafiklerdi qoldan du'zgende studentlerdin' yen' jiyi jiberetug'i'n qa'teligi keltirilgen.



14-su'wret. a) duri's yemes si'zi'lg'an grafik, b) duri's si'zi'lg'an (qoldan) grafik.

14-su'wrette keltirilgen grafikti du'zgende jiberilgen tiykarg'i' qa'teler mi'nalardan ibarat:

1. Koordinatalar ko'sherlerinin' bag'i'tlari' duri's yemes saylap ali'ng'an.

Waqit t g'a'rezsiz o'zgeretug'i'n shama boli'p tabi'ladi' (argument boli'p tabi'ladi') ha'm sonli'qtan bul fizikali'q shama abscissa ko'sherine tu'siriliwi, al funkciyani'n' ma'nisi bolsa ordinata ko'sherine tu'siriledi (vertikal bag'i'tta). Ordinata ko'sherinde usi' ko'sherge tu'sirilgen fizikali'q shama (t waqi'ti'), oni'n' o'lshem birligi (s), al abscissa ko'sherinde bolsa joldi'n' o'lshem birligi (m) ko'rsetilmegen.

2. Grafiktin' maydani' toli'q paydalani'lmag'an. Joqari'dag'i' kestedede berilgen eksperimentalli'q mag'li'wmatlardan koordinatalar ko'sherlerinin' nollik belgiden baslani'wi' kerek degen juwmaq kelip shi'qpaydi'. Sonli'qtan koordinatalar basi'n ji'li'sti'ri'w ha'm soni'n' yesabi'nan masshtabti' u'lkeytiw mu'mkin.

3. Eksperimentalli'q n'oqatlar ayi'ri'p ko'rsetilmegen.

4. Ordinata ko'sherine masshtabli'q bo'liwlar yemes, al eksperimentalli'q noqatlardi'n' koordinatalari' qoyi'lg'an. Al abscissa ko'sherinde masshtabli'q bo'liwlar ten' o'lshewli qoyi'lmag'an.

5. Eksperimentalli'q noqatlar duri's yemes baylani'sti'ri'lg'an: ten' o'lshewli qozg'ali'sta joldi'n' waqi'ttan g'a'rezliginin' si'zi'qli' yekenligi aldi'n-ala belgili ha'm sonli'qtan grafik tuwri' si'zi'qtan turi'wi' kerek.

14-b su'wrette $S = f(t)$ g'a'rezligi ushi'n duri's si'zi'lg'an grafik keltirilgen.

Analitikali'q an'latpalardi' ali'w. Ta'jiriybelerdin' bari'si'nda o'lshenetug'i'n yeki shamani'n' y_1, y_2, \dots, y_n ha'm x_1, x_2, \dots, x_n tu'rindegi ma'nisleri ali'ng'an ha'm olar bir biri menen bazi' bir $y = f(x)$ funkcionalli'q baylani'si' menen baylani'sqan ha'm bul funkciyani'n' tu'ri aldi'n-ala belgisiz bolsi'n. Si'zi'qli' g'a'rezlilik mi'sali'nda belgisiz bolg'an analitikali'q baylani'sti' ali'wg'a mu'mkinshilik beretug'i'n bir neshe usi'ldi' ko'rsetemiz.

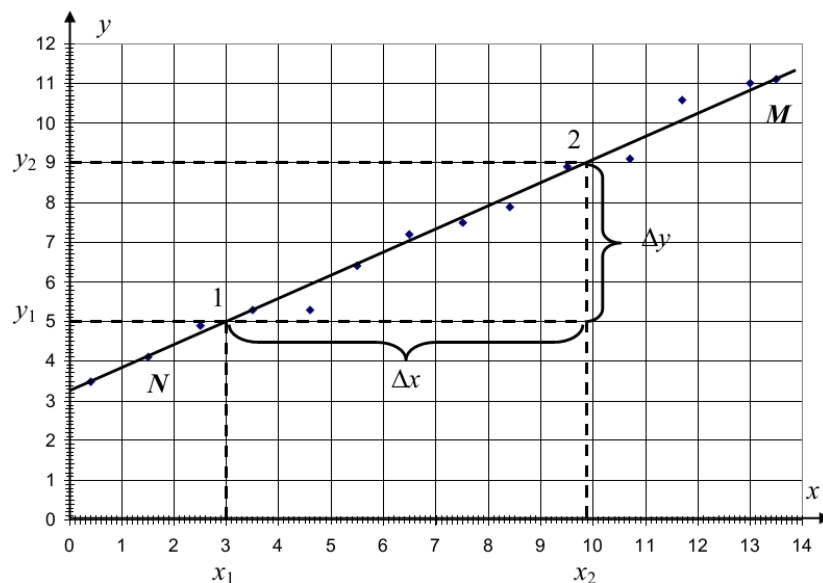
Analitikali'q baylani'sti'n' parametrlerin ali'wdi'n' grafikali'q usi'li'. Bizin' qoli'mi'zda bar y_1, y_2, \dots, y_n ha'm x_1, x_2, \dots, x_n eksperimentalli'q mag'li'wmatlar boyi'nsha $y = f(x)$ funkcionalli'q baylani'sti'n' grafigin du'zemiz. Wo'lshewlerdin' qa'telerin yesapqa alg'an halda ali'ng'an baylani'sti'

si'zi'qli' baylani's dep yesaplawg'a bolatug'i'nli'g'i'n yamasa bolmaytug'i'nli'g'i'n ani'qlaymi'z. Eger biz izertlep ati'rg'an baylani'sti' si'zi'qli' baylani's dep yesaplawg'a bolatug'i'n bolsa, onda grafikte ali'ng'an si'zi'qti' $y = ax + b$ formulasi'ni'n' ja'rdeminde an'lati'w mu'mkin. Bul an'latpada a menen b arqali' ani'qlani'wi' kerek bolg'an belgisiz koefficientler belgilengen.

Eki ko'sher boyi'nsha yesaplawdi'n' nolden baslani'wi' ha'm yeki ko'sher boyi'nsha da birdey masshtablardi'n' qollani'li'wi' bul usi'ldi' paydalani'wda ori'nlani'wi' sha'rt yekenligin atap o'temiz.

Quri'lg'an grafikte $y = ax + b$ si'zi'qli' baylani's boyi'nsha ordinata ko'sheri menen kesilisetug'i'n tuwri' si'zi'q si'zi'ladi'. Tuwri'ni' mu'mkin bolg'ani'nsha eksperimentalli'q noqatlar arasi'nan usi' noqatlarg'a mu'mkin bolg'ani'nsha jaqi'n arali'qlardan o'tkeredi.

15-su'wrette 6-kestede keltirilgen ma'nisler boyi'nsha si'zi'lg'an grafik ko'rsetilgen. Bul grafik tiykari'nda a menen b koefficientlerin ani'qlawdi'n' yeki usi'li'n ko'rsetemiz.



15-su'wret. $y = ax + b$ si'zi'qli' baylani's parametrlarin (koefficientleri) ani'qlaw ushi'n arnalg'an su'wret.

Biz yendi ali'ng'an analitikali'q an'latpalar tiykari'nda keste du'zemiz (6-keste) ha'm bul keste 15-su'wrettegi M menen N noqatlari'ni'n' koordinatalari'na ayri'qsha itibar beremiz. Kesteni du'ziw ushi'n Excel dep paydalanami'z.

6-keste.

x	0,40	1,50	2,50	3,50	4,60	5,50	6,50	7,50	8,40	9,50	10,70	11,70	13,00	13,50
y	3,50	4,10	4,90	5,30	5,30	6,40	7,20	7,50	7,90	8,90	9,10	10,60	11,00	11,10
		M												N

1-usi'l. Matematikadan masshtablar yesapqa ali'ng'anda tuwri'ni'n' abscissa ko'sherine qi'yali'g'i' mu'yeshinin' tangensinin' a shamasi'na, al tuwri'ni'n' ordinata ko'sheri menen kesilisiw noqati'ni'n' koordinatasi'ni'n' b shamasi'na ten' yekenligi belgili.

15-su'wrette tuwri'ni'n' vertikal'li'q ko'sherdi 3,2 noqati'nda kesip o'tetug'i'nli'g'i' ko'rinip tur. Demek $b = 3,2$.

Tuwri'ni'n' x ko'sherine qi'yali'g'i' mu'yeshinin' tangensin tabi'w ushi'n oni'n' bag'i'ti' boyi'nsha bir birinen mu'mkin bolg'ani'nsha u'lken qashi'qli'qta jaylasqan 1 ha'm 2 noqatlari'n alami'z ha'm olardi'n' koordinatalari'n ani'qlaymi'z (argumenttin' ma'nisleri x_1, x_2 ler menen funkciyalardi'n' ma'nisleri bolg'an y_1, y_2 shamalari'n). Bunday jag'dayda $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Su'wretten $a = \frac{4}{6,9} = 0,58$ yekenligine iye bolami'z.

Demek biz izlep ati'rg'an ten'leme

$$y = 0,58x + 3,2$$

tu'rinde jazi'ladi' yeken.

2-usi'l. a menen b koefficientlerin ani'qlaw ushi'n tuwri'ni'n' u'stinde ali'ng'an koordinatalari' (x_1, y_1) ha'm (x_2, y_2) bolg'an yeki noqat jetkilikli. Bul ma'nislerdi $y = ax + b$ ten'lemesine qoyi'w a ha'm b koefficientleri ushi'n to'mendegidey yeki algebrali'q ten'lemeni beredi:

$$ax_1 + b = y_1,$$

$$ax_2 + b = y_2.$$

Bul ten'lemeler sistemasi'n sheship a menen b koefficientleri ushi'n to'mendegidey ma'nislardi alami'z:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad b = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

Eger yen' keminde yeki eksperimentalli'q noqat tegislengen si'zi'qti'n' u'stinde jatatug'i'n jag'dayda bul usi'ldi' qollani'wg'a boladi'. Grafikte M ha'm N noqatlari'ni'n' tegislengen si'zi'qqa tiyisli yekenligi ko'rinip tur. Bul noqatlardi'n' koordinatalari'ni'n' M(1,5;4,1) ha'm N(13,5;11,1) shamalari'na ten' yekenligi ko'rinip tur. Usi' mag'li'wmatlardi'n' ja'rdeminde a ha'm b koefficientlerin bi'layi'nsha tabami'z:

$$a = \frac{y_M - y_N}{x_N - x_M} = \frac{11,1 - 4,1}{13,5 - 1,5} = \frac{7}{12} = 0,583;$$

$$b = y_M - ax_M = y_N - ax_N = 11,1 - 0,583 \cdot 13,5 = 3,229.$$

Demek biz izlep ati'rg'an baylani's bi'layi'nsha jazi'ladi' yeken:

$$y = 0,583x + 3,23.$$

Si'zi'qli' yemes funkcionalli'q baylani'slardi' si'zi'qli' baylani'sqa aylandi'ri'w. Ha'zirgi waqi'tlari' funkcionalli'q baylani'slardi' si'zi'qli' baylani'sqa aylandi'ri'w'di'n' kompiuterlik usi'llari' ju'da' ken' tarqalg'an. Biz bul jumi'sta studentlerdin' u'yrenilip ati'rg'an ma'selenin' ma'nisin teren' ug'i'wi' ushi'n yesaplawlardi'n' qalayi'nsha ju'rgiziletug'i'nli'g'i'n toli'g'i' menen beremiz.

Eger eksperimentalli'q g'a'rezlik (baylani's) si'zi'qli' yemes xarakterge iye bolsa o'zgeriwshilerdi almasti'ri'w arqali' oni' si'zi'qli' tu'rge ali'p keliw mu'mkin. Bunday jag'dayda jan'a koordinatali'q tor ali'nadi'. Bunnan keyin analitikali'q baylani'sti' tabi'w ushi'n qaytadan grafikali'q usi'ldi' paydalani'w kerek boladi'. Bunday usi'ldi' funkcionalli'q baylani'slardi' si'zi'qli' baylani'sqa aylandi'ri'w, yag'ni'y linearizaciya dep ataladi'.

Mi'sal retinde $y \sim x^2$ tu'rindegi kvadratli'q baylani'sti' qaraymi'z. Eger OY ko'sherine ten' o'lsheqli shkalani', al OX ko'sherine $x_1 = x^2$ kvadratlar shkalasi'n jaylasti'rsa, onda parabola ten'lemesi tuwri' si'zi'qti'n' su'wretindey tu'rdegi tor ali'nadi'. Bul torda $y \sim x_1$.

Logarifmlik shkalalar ayri'qsha jiyi qollani'ladi'. Bunday shkalani'n' ja'rdeminde da'rejeli ha'm ko'rsetkishli funkciyalardi'n' grafiklerin "tuwri'g'a aylandi'ri'w" mu'mkin. Mi'sal retinde $y = ae^{bx}$; $Ln(y) = bx + Ln(a)$ tu'rindegi ha'm basqa da funkciyalardi' ko'rsete alami'z. $Ln(y) = y_1$, $Ln(a) = A$ dep belgilep da'slepki ten'lemeni $y_1 = A + bx$ tu'rinde jazami'z. Bul jerde x shkalasi'n ten' o'lsheqli qaldi'ri'p ha'm y_1 lagorifmlik shkalasi'n paydalani'p da'slepki funkciyani' tuwri' si'zi'qti'n' ja'rdeminde sa'wlelendiriw mu'mkin yekenligi ko'rinedi. Ali'ng'an koordinatali'q tordi' yari'm logarifmlik tor dep ataladi'.

Usi'nday tu'rlendiriwlerdin' uli'wma jag'daylarda da mu'mkin yekenligi o'z-o'zinen tu'sinikli.

$$a\varphi(x) + b\psi(y) + c = 0$$

tu'rindegi ani'q yemes funkciyani' funkcionalli'q torda tuwri' si'zi'qti'n' ja'rdeminde sa'wlelendiriw mu'mkin. Bul funkciyada a, b, c arqali' turaqli' shamalar belgilengen. Grafikte OX ko'sherine $\varphi(x)$ shkalasi', al OY ko'sherine $\psi(y)$ shkalasi' tu'siriledi. Bunday jag'dayda paydalani'li'p ati'rg'an $\varphi(x)$ ha'm $\psi(y)$ funkciyalari' u'zliksizlik ha'm monotonli'q sha'rtlerin qanaatlandi'ri'wi' kerek. 7-kestede bazi' bir funkciyalardi' si'zi'qli' funkciyalarg'a aylandi'ri'wg'a bir neshe mi'sallar keltirilgen.

Da'slepki formula	Tu'rlendirilgen formula	Wo'zgeriwshilerdi almasti'ri'w	Si'zi'qli' funkciyag'a aylandi'ri'lg'an formula
$y = a \ln(x) + b$	-	$\ln(x) = x_1$	$y = ax_1 + b$
$y = ax^b$	$\ln(y) = b \ln(x) + \ln(a)$	$\ln(y) = y_1,$ $\ln(x) = x_1,$ $\ln(a) = a_1.$	$y_1 = bx_1 + a_1$
$y = e^{bx+k}$	$\ln(y) = bx + k$	$\ln(y) = y_1$ $b = a$	$y_1 = ax + k$
$y = ae^{bx}$	$\ln(y) = \ln(a) + bx$	$\ln(y) = y_1$ $b = b_1$ $\ln(a) = a_1$	$y_1 = b_1x + a_1$
$y = \frac{a}{x} + b$	-	$\frac{1}{x} = x_1$	$y = ax_1 + b$
$y = \frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{y} = ax + b$	$\frac{1}{y} = y_1$	$y_1 = ax + b$
$y = \frac{x}{ax+b}$	$\frac{1}{y} = \frac{b}{x} + a$	$\frac{1}{y} = y_1,$ $\frac{1}{x} = x_1$	$y_1 = bx_1 + a$

Ta'jiriybelerdin' bari'si'nda ali'ng'an eksperimentalli'q baylani's si'zi'qli' yemes iymeklikten tursa a'dette ko'z benen qarag'anda bul iymekliktin' qanday funkciya menen oni' ta'riyiplewdin' mu'mkin yekenligin ani'qlaw qi'yi'n boladi'. Ali'ng'an eksperimentalli'q mag'li'wmatlardi' funkcionalli'q torlarg'a jaylasti'ri'p sol baylani'slardin' arasi'ndag'i' qaysi' baylani'sti'n' si'zi'qli' baylani'sqa jaqi'n yekenligine baha beriw, yag'ni'y qanday funkciya

menen ta'riyipleniwinin' mu'mkin yekenligin ani'qlaw mu'mkin.

Biz ha'zirgi zaman programmalaw tillerinin' yamasa eksperimentte ali'ng'an mag'li'wmatlardi' qayta islewge (approksimaciyalawg'a intepolyaciyalawg'a) mu'mkinshilik beretug'i'n programmalardi'n' qa'legen funkcionalli'q baylani'slardi' si'zi'qli' baylani'sqa tu'rlendire alatug'i'nli'g'i'ni'wi'n, al tu'rlendiriw processinin' joqari'da keltirilgendetay funkciyalar menen matematikali'q proceduralardi'n' ja'rdeminde a'melge asi'ri'latug'i'nli'g'i'n atap o'temiz.

Funkcionalli'q baylani'slardi'n' parametrlerin ali'wdi'n' analitikali'q usi'llari'. Joqari'da bayan yetilgen funkcionalli'q baylani'slardi'n' parametrlerin ali'wdi'n' grafikali'q usi'li' o'zinin' ko'rgizbeliligi ha'm sali'sti'rmali' a'piwayi'li'g'i' menen ayri'li'p turadi'. Biraq ol usi'l belgili bir subektivlikti ha'm to'men da'llikti o'z ishine aladi'.

Analitikali'q usi'llar bunday kemshiliklerge iye yemes, funkciyalardi'n' ken' klassi' ushi'n u'lken da'lliktegi na'tiyjelerdi ali'wg'a mu'mkinshilik beredi. Biraq o'zinin' ko'rsetpeligi boyi'nsha grafikali'q usi'ldan to'men turadi'.

Biz to'mende funkcionalli'q baylani'slardi'n' parametrlerin ani'qlawdi'n' usi'llari'ni'n' bir qatari'n ko'rsetemiz. Birinshisi to'mendegiden ibarat:

Meyli ta'jiriybenin' bari'si'nda buri'ng'i'day x_1, x_2, \dots, x_n ha'm y_1, y_2, \dots, y_n shamalari' ali'ng'an bolsi'n. Olar arasi'nda $y = ax + b$ tu'rindegi funkcionalli'q baylani's bar dep boljaymi'z. Eksprimentalli'q qa'telerdin' bar yekenligine baylani'sli' ali'ng'an y_i shamalari' $ax_i + b$ formulasi' boyi'nsha ali'ng'an shamag'a ten' bolmaydi'. Sa'ykes qa'teni Δ_i arqali' belgileymiz:

$$\Delta_i = y_i - ax_i - b \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Eger biz a menen b parametrlerin $\sum_{i=1}^n \Delta_i = \sum_{i=1}^n y_i - ax_i - b$ qa'teleri ten'lesetug'i'nday yetip alsaq, onda bul ila'j tek bir ten'lemenin' ali'ni'wi'na ali'p keledi. Al a menen b parametrlerin ani'qlaw ushi'n bizge yeki ten'leme

kerek boladi'. Sonli'qtan ten'liktin' ori'nlani'wi' o'tkerilgen barli'q baqlawlar ushi'n yemes, al baqlawlarda ali'ng'an ma'nislerdin' ayi'ri'm toparlari' ushi'n (yamasa yari'mi' ushi'n) ori'nlanadi' dep boljawi'mi'z kerek. Bul boljaw to'mendegidey ten'lemeler sistemasi'ni'n' ali'ni'wi'na mu'mkinshilik beredi:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m y_i - ax_i - b = 0, \\ \sum_{i=m+1}^n y_i - ax_i - b = 0. \end{cases}$$

Bul an'latpada m arqali' birinshi gruppada'g'i' baqlawlar sani' belgilengen. Bul ten'lemeler sistemasi'n bi'layi'nsha ko'shirip jazami'z:

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^m x_i + mb = \sum_{i=1}^m y_i, \\ a \sum_{i=m+1}^n x_i - (n-m)b = \sum_{i=1}^m y_i. \end{cases}$$

a menen b parametrlerin ani'qlaw ushi'n da'slep quramali' yemes bolg'an to'rt summani' yesaplap ali'p ali'ng'an ten'lemeler sistemasi'n sheshiw kerek boladi'.

Grafikali'q usi'l qollani'lg'an jag'day ushi'n bul usi'ldi' demonstraciyalaymi'z. Esaplawlardi'n' qolayli' boli'wi' ushi'n 15-su'wrette keltirilgen mag'li'wmatlardi' yeki toparg'a bo'lemiz ha'm 6-kestedegidey yetip ko'shirip jazami'z (biz 8-kesteni du'zgende Excel programmasi'nan paydalandi'q). 14 o'lshewdi yekige bo'lemiz, birinshi toparda $m = 7$, al yekinshi toparda bolsa $n - m = 7$.

8-keste

n	x	y	n	x	y
1	0,40	3,50	8	7,50	7,50
2	1,50	4,10	9	8,40	7,90
3	2,50	4,90	10	9,50	8,90
4	3,50	5,30	11	10,70	9,10
5	4,60	5,30	12	11,70	10,60
6	5,50	6,40	13	13,00	11,00
7	6,50	7,20	14	13,50	11,10
Summasi'	24,50	36,70	Summasi'	74,30	66,10

Ali'ng'an na'tiyjelerdi ten'lemeler sistemasi'na qoyi'p to'mendegilerdi alami'z:

$$\begin{cases} a \cdot 24,5 + 7 \cdot b = 36,7, \\ a \cdot 74,3 + 7 \cdot b = 66,1. \end{cases}$$

Bul sistemani' a, b parametrlariga qarata sheshsek $a = 0,590$, $b = 3,176$ shamarlari'n alami'z. Demek si'zi'qli' baylani's ten'lemesi

$$y = 0,590x + 3,176$$

tu'rinde jazi'ladi' yeken.

7-§. En' kishi kvadratlar usi'li'

En' kishi kvadratlar usi'li' (metod naimenshix kvadratov, OLS, Ordinary Least Squares) eksperimentalli'q baylani'slardi'n' koefficientlerin ani'qlawg'a mu'mkinshilik beretug'i'n yen' isenimli ha'm ilimiy jaqtan tiykarlang'an usi'l boli'p tabi'ladi'. Bul usi'l menen koefficientler yesaplang'anda eksperimentte ali'ng'an y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) shamarlari'ni'n' awi'si'wlardi'n' kvadratlari'ni'n' summasi' izlenip ati'rg'an $y = ax + b$ baylani'si' boyi'nsha ali'ng'an ma'nisten ayi'rmasi' minimal boli'wi' kerek.

Usi'g'an baylani'sli' awi'si'wlardi'n' kvadratlari'ni'n' summasi'n yesaplaymi'z:

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2.$$

Summa asti'ndag'i' an'latpani'n' kvadrati'n ashami'z. Na'tiyjede to'mendegilerge iye bolami'z:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2ax_i y_i - 2by_i + a^2 x_i^2 + 2abx_i + b^2)$$

yamasa

$$S = S_{yy} - 2aS_{xy} - 2bS_y + a^2S_{xx} + 2abS_x + nb^2.$$

Bul an'latpalarda

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2; S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i; S_y = \sum_{i=1}^n y_i; S_x = \sum_{i=1}^n x_i; S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Eksperimentlerde x_1, x_2, \dots, x_n ha'm y_1, y_2, \dots, y_n ma'nisleri ali'ng'an bolsi'n. Sonli'qtan awi'si'wlardi'n' kvadratlari'ni'n' summasi' bolg'an S shamasi' tek a menen b koefficientleri menen g'ana baylani'sli' boladi'. Demek awi'si'wlardi'n' kvadratlari'ni'n' summasi' tek yeki a menen b shamalari'nan g'ana g'a'rezli boladi' degen so'z. $S(a,b)$ funkciyasi'ni'n' minimumi'n tabi'w ushi'n oni'n' a menen b dan ali'ng'an tuwi'ndi'lari'n nolge ten'ew kerek:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2S_{xy} + 2aS_{xx} + 2bS_x = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2S_y + 2aS_x + 2nb = 0.$$

Ali'ng'an yeki ten'lemeler sistemasi'n a'piwayi'lasti'rg'annan keyin sheshiw arqali' a menen b shamalari'ni'n' ma'nislerin yesaplaymi'z (Mathematica tilinin' ja'rdeminde):

$$\text{Solve}[\{S_{aa}a + S_x b = S_{xy}, S_x a + nb = S_y\}, \{a, b\}]$$

$$a = -\frac{-nS_{xy} + S_x S_y}{nS_{aa} - S_x^2}, \quad b = -\frac{S_x S_{xy} - S_{aa} S_y}{nS_{aa} - S_x^2}.$$

Bul metodti'n' qollani'li'wi'n grafikali'q usi'ldi' qollang'an mi'salda qarap shi'g'ami'z. Qolayli' boli'wi' ushi'n 4-kesteni $x_i^2 = xx$ penen $x_i y_i$ shamalari'n aldi'n-ala yesaplap 9-keste tu'rinde jazami'z. Wo'lshevlar sani' $n = 14$.

9-keste.

x	y	xx	xy
0,4	3,5	0,16	1,4
1,5	4,1	2,25	6,15
2,5	4,9	6,25	12,25
3,5	5,3	12,25	18,55
4,6	5,3	21,16	24,38
5,5	6,4	30,25	35,2

6,5	7,2	42,25	46,8
7,5	7,5	56,25	56,25
8,4	7,9	70,56	66,36
9,5	8,9	90,25	84,55
10,7	9,1	114,49	97,37
11,7	10,6	136,89	124,04
13	11	169	143
13,5	11,1	182,25	149,85
$S_x = 98,8$	$S_y = 102,8$	$S_{xx} = 934,26$	$S_{xy} = 866,15$

Za'ru'rli bolg'an summalar Excel yelektronli'q kestesinin' ja'rdeminde avtomat tu'rde yesaplandi' (9-kestedegi yen' to'mengi qatar). Wo'lshevlar sani' $n = 14$ yekenligin yesapqa ali'p to'mendegidey ten'lemeler sistemasi'n alami'z:

$$\begin{cases} S_{xx}a + S_xb = S_{xy}, \\ S_xa + nb = S_y. \end{cases}$$

Bul ten'lemeler sistemasi'n sheshiw ushi'n Mathematica kompiuterlik sistemasi' ushi'n

$$\text{Solve}[\{S_{xx}a + S_xb == S_{xy}, S_xa + nb == S_y\}, \{a, b\}]$$

tu'rdegi programmani' jazsaq, kompiuter

$$a = -\frac{nS_{xy} - S_xS_y}{S_x^2 - nS_{xx}}, \quad b = -\frac{S_xS_{xy} - S_{xx}S_y}{-S_x^2 + nS_{xx}}$$

sheshimlerin beredi. Demek $a = 0,5934$ ha'm $b = 3,1548$ shamalari'n ha'm tuwri'ni'n' ten'lemesi ushi'n

$$y = 0,5934x + 3,1548$$

ten'lemesin alami'z.

Biz joqari'da yen' kishi kvadratlar usi'li'ni'n' ko'p sanli' yesaplaw jumi'slari'n ori'nlawdi' talap yetetug'i'nli'g'i'n ko'rdik. Eger biz usi' usi'l menen si'ziqli' yemes baylani'slardi' izertlesek, onda yesaplawlardi'n' ko'lemi ja'ne de ko'beyedi. Mi'sali' $y = ax^2 + bx + c$ tu'rindegi kvadratli'q baylani's (g'a'rezlilik) ushi'n koefficientlerdi yesaplag'anda

$$S = \sum_{i=1}^n (\Delta y)^2 = \sum_{i=1}^n (y^2 - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

tu'rindegi kvadratlardi'n' summasi' bolg'an S shamasini'n' minimalli'q ma'nisin tabi'wi'mi'z kerek boladi'. Demek a, b, c koefficientlerinin' ma'nislerin yesaplaw ushi'n

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc - \sum_{i=1}^n y_i = 0, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i = 0 \end{cases}$$

tu'rindegi algebrali'q ten'lemeler sistemasi'n sheshiwge tuwri' keledi.

Ha'zirgi waqi'tlarda ken' tarqalg'an arnawli' kompiuterlik programmalaridi' qollang'anda yen' kishi kvadratlar usi'li'ni'n' ja'rdeminde a'dewir quramali' bolg'an yesaplawlardi' da an'sat tu'rde ju'rgiziwge boladi'. Mi'sallar keltiremiz.

Laboratoriyada matematikali'q mayatniktin' ja'rdeminde yerkin tu'siw tezleniwini'n' ma'nisin ani'qlaw ushi'n uzi'nli'g'i' l ha'r qi'yli' bolg'an mayatnikler menen o'lshewler seriyasi' ori'nlandi'. Na'tiyjeler 8-kestede berilgen. Bul kestdede mayatniktin' uzi'nli'g'i' l penen mayatniktin' terbeliw T da'wirin ani'qlaw ushi'n ko'p qaytara o'lshewler o'tkerilip, ali'ng'an na'tiyjelerdin' ortasha arifmetikali'q ma'nisi qabi'l yetildi.

10-keste. Ta'jiriybelerdin' bari'si'nda matematikali'q mayatniktin' terbelis da'wirinin' mayatniktin' uzi'nli'g'i'na baylani'si'.

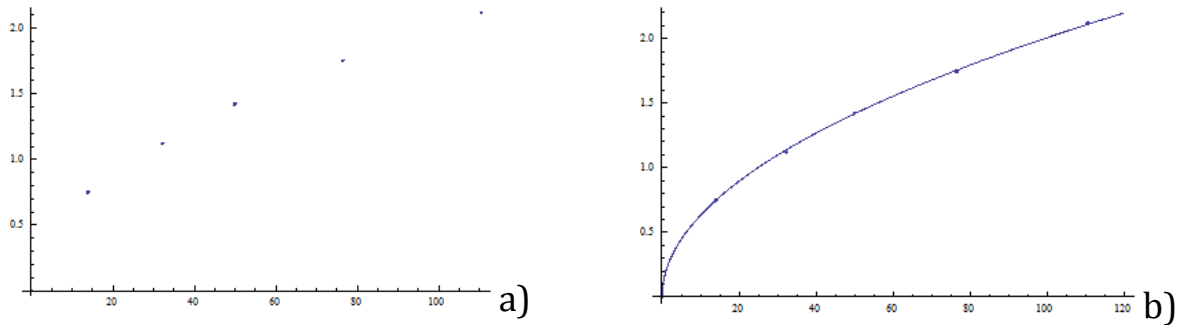
$l, \text{ sm}$	0	14	32,3	50	76,5	110,5
$T, \text{ s}$	0	0,751	1,12	1,42	1,75	2,12

Bul mag'li'wmatlardi' Mathematica 9.0 kompiuterlik algebra sistemasi'na

$Data = \{\{0,0\}, \{14,0.751\}, \{32.3,1.12\}, \{50,1.42\}, \{76.5,1.75\}, \{110.5,2.12\}\}$

tu'rinde beriledi. Biz $ListPlot[Data]$ komandasi'ni'n' ja'rdeminde bul

mag'li'wmatlar ushi'n grafik te du'ze alami'z (16-a su'wret).



16-su'wret. Matematikali'q mayatniktin' uzi'nli'g'i' menen terbeliw da'wiri arasi'ndag'i' baylani's ushi'n ali'ng'an mag'lawmatlar. a – eksperimentte ali'ng'an noqatlar, b – yen' kishi kvadratlar usi'li' menen approksimaciya na'tiyjesi.

Biz mayatniktin' uzi'nli'g'i' menen terbelis da'wiri arasi'nda $y \sim \sqrt{x}$ tu'rindegi baylani's bar dep boljaymi'z. $parabola = Fit[Data, \{1, x^{1/2}\}, x]$ tu'rinde jazi'ladi'. Bul komanda boyi'nsha kompiuter bizge

$$-0.005721 + 0.201243\sqrt{x}$$

tu'rindegi baylani'sti' beredi. Biz bul jerde -0,005721 shamasi'n kishi yekenligin yesapqa alg'an halda yesapqa almasaq ta boladi'. Al 0,201 shamasi' bolsa $2\pi / \sqrt{g} = 2\pi / \sqrt{981} = 0,2006 \approx 0,201$ shamasi'na ten'. Solay yetip biz

$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ formulasi'na sa'ykes keletug'i'n baylani'sti' aldi'q. Na'tiyje 16-b su'wrette keltirilgen.

Ja'ne bir mi'saldi' ko'remiz ha'm bul mi'saldi'n' yesaplawlari'ni'n' barli'g'i'n Mathematica tilinde ori'nlaymi'z.

Aylanbali' qozg'ali's dinamikasi'ni'n' tiykarg'i' ten'lemesi $\varepsilon = \frac{M}{J}$ (yag'ni'y $\varepsilon = kM$, $k = 1/J$) izertlendi (koordinata basi' arqali' o'tetug'i'n tuwri' si'zi'q). Moment M nin' ha'r qi'yli' ma'nislerindegi bazi' bir denenin' mu'yeshlik tezleniwi ε o'lshendi. Usi' denenin' inerciya momentin tabi'w kerek. Ku'sh

momentin ha'm mu'yeshlik tezleniwdi o'lshewdin' na'tiyjeleri 11-kestede berilgen.

11-keste. Ku'sh momenti menen mu'yeshlik tezleniwdi o'lshew na'tiyjeleri

n	M, N · m	ε, c^{-1}	M^2	$M \cdot \varepsilon$	$\varepsilon - kM$	$(\varepsilon - kM)^2$
1	1.44	0.52	2.0736	0.7488	0.039432	0.001555
2	3.12	1.06	9.7344	3.3072	0.018768	0.000352
3	4.59	1.45	21.0681	6.6555	-0.08181	0.006693
4	5.90	1.92	34.81	11.328	-0.049	0.002401
5	7.45	2.56	55.5025	19.072	0.073725	0.005435
Σ	-	-	123.1886	41.1115	-	0.016436

M menen ε arasi'ndag'i' baylani's $\varepsilon = kM$ tu'rine iye yekenligin ko'rdik. Usi'g'an baylani'sli'

$$k = \frac{1}{J} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i \varepsilon_i}{\sum_{i=1}^n M_i^2} = 0,333728 \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}.$$

shamasi'na iye bolami'z. Bunnan $J = 2,99645 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Si'zi'qli' baylani'sta a ha'm b shamalari'ndag'i' ortasha kvadratli'q qa'telerdi

$$S_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i - a)^2}{(n-2) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (\text{M.1})$$

ha'm

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i - a)^2}{(n-2) \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right)}} \quad (\text{M.2})$$

formulalari'ni'n' ja'rdeminde tabami'z.

Biz qarap ati'rg'an jag'dayda ortasha kvadratli'q qa'teni yesaplaw ushi'n to'mendegi formuladan paydalanami'z:

$$S_{1/J} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - kx_i)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - kM_i)^2}{\sum_{i=1}^n M_i^2}} = 0,00577547 \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Ani'qlama boyi'nsha

$$S_J = J \sqrt{\left(\frac{S_{1/J}}{1/J} \right)^2} = J \frac{S_{1/J}}{1/J} = 0,05185 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

P = 0.95 isenimligin berip Stiudent koefficientleri kestesinen n = 5 ushi'n

$$\Delta J = 2.78 \cdot 0.05185 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 0.1441 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \approx 0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

ekenligin tabami'z.

Na'tiyjelerdi bi'layi'nsha jazami'z:

$$J = (3.0 \pm 0.2) \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Sali'sti'rmali' qa'telik

$$\varepsilon = \frac{\Delta J}{J} \cdot 100\% = \frac{0,2}{3} \cdot 100\% \approx 7\%.$$

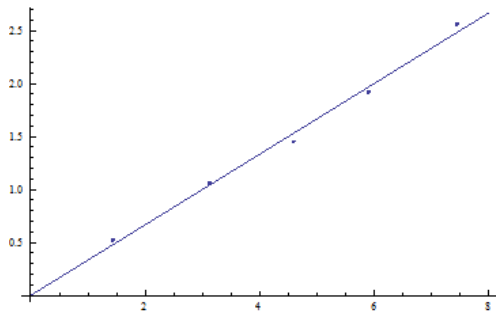
Biz ma'seleni Mathematica 9.0 paketinin' ja'rdeminde ju'da' an'sat sheshemiz. Mag'li'wmatlardi' beriw ushi'n

$$Data = \{\{1.44, 0.52\}, \{3.12, 1.06\}, \{4.59, 1.45\}, \{5.9, 1.92\}, \{7.45, 2.56\}\};$$

tu'rindegi an'latpa jazi'ladi'. Al tiykarg'i' programma

```
line = Fit[Data, {1, x}, x]
r1 = Plot[0.001255 + 0.3335x, {x, 0, 8}];
r2 = ListPlot[Data];
Show[r1, r2]
```

tu'rinde jazi'ladi'. Kompiuter $y = 0.0013 + 0.3335x$ tu'rindegi analitikali'q formulani' beredi (programmadag'i' yekinshi qatarg'a usi' ma'nis berilgen). Bul formuladag'i' 0,3335 joqari'dag'i' k ni'n' ma'nisi boli'p tabi'ladi', al 0,0013 sani'n yesapqa almaymi'z. Mathematica paketi ja'rdeminde ali'ng'an grafik 17-su'wrette berilgen.



17-su'wret.

5-keste. Ku'sh momenti menen mu'yeshlik tezleniwdi o'lshew na'tiyjeleri boyi'nsha ali'ng'an eksperimentalli'q noqatlar menen approksimaciyalang'an tuwri'.

2-mi'sal. Metaldi'n' qarsi'li'g'i'ni'n' temperaturali'q koefficientin yen' kishi kvadratlar usi'li' menen yesaplaymi'z. Qarsi'li'q penen temperatura arasi'ndag'i' baylani'sti'n' si'ziqli' yekenligi ma'lim:

$$R_t = R_0(1 + \alpha t) = R_0 + R_0 \alpha t.$$

Erkin ag'za 0°S temperaturadag'i' izertlenip ati'rg'an metal u'lginin' qarsi'li'g'i' R_0 di ani'qlaydi'. Al mu'yeshlik koefficient bolsa temperaturali'q koefficient α ni'n' R_0 qarsi'li'g'i'na ko'beymesine ten'.

Wo'lshewler menen yesaplawlardi'n' na'tiyjeleri 12-kestede keltirilgen.

12-keste.

n	$t, ^{\circ}\text{C}$	r, Om	$t - \bar{t}$	$(t - \bar{t})^2$	$(t - \bar{t})r$	$r - bt - a$	$(r - bt - a)^2 \cdot 10^{-6}$
1	23	1.242	-62.8333	3948.028	-78.039	0.007673	58.8722
2	59	1.326	-26.8333	720.0278	-35.581	-0.00353	12.4959
3	84	1.386	-1.83333	3.361111	-2.541	-0.00965	93.1506
4	96	1.417	10.16667	103.3611	14.40617	-0.01039	107.898
5	120	1.512	34.16667	1167.361	51.66	0.021141	446.932
6	133	1.520	47.16667	2224.694	71.69333	-0.00524	27.4556
Σ	515	8.403	–	8166.833	21.5985	–	746.804
Σ/n	85.8333	1.4005	–	–	–	–	–

$y = a + bx$ si'zi'qli' baylani'si' bar bolg'an jag'dayda $b = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$ ha'm

$a = \bar{y} - b\bar{x}$ ten'likleri ori'nlanatug'i'n bolg'anli'qtan bul kestdede $b = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}) r_i}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$

ha'm $a = R_0 = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}) r_i}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \bar{t}$. Bul an'latpalarda \bar{t} arqali' temperaturani'n'

ortasha ma'nisi belgilengen.

6-kesteni Mathematica 9.0 tilinde de du'ziw mu'mkin. Oni'n' ushi'n

$$n = 6; t_1 = 23; t_2 = 59; t_3 = 84; t_4 = 96; t_5 = 120; t_6 = 133;$$

$$r_1 = 1.242; r_2 = 1.326; r_3 = 1.386; r_4 = 1.417; r_5 = 1.512; r_6 = 1.52;$$

$$t1 = \sum_{i=1}^n t_i; \text{tort} = N[t1 / 6, 6];$$

```
Table[Print[" i = ", i, "; ti-t̄ = ",
  ti - tort, "; (ti-t̄)2 = ", (ti - tort)2, "; (ti-t̄) ri = ",
  (ti - tort) ri, "; ri-bt-R0 = ", ri -
   $\frac{\sum_{i=1}^n ((t_i - \text{tort}) r_i)}{\sum_{i=1}^n (t_i - \text{tort})^2} t_i - R0$ , "; (ri-bt-R0)2 106 = ",
   $\left( r_i - \frac{\sum_{i=1}^n ((t_i - \text{tort}) r_i)}{\sum_{i=1}^n (t_i - \text{tort})^2} t_i - R0 \right)^2 10^6$ , ";"], {i, 1, n}]
```

Na'tiyeler to'mendegidey tu'rge iye boladi':

$$i = 1; t_1 - \bar{t} = -62.8333; (t_1 - \bar{t})^2 = 3948.0; (t_1 - \bar{t}) r_1 = -78.039; r_1 - bt - R0 = 0.00767282; (r_1 - bt - R0)^2 10^6 = 58.8722;$$

$$i = 2; t_2 - \bar{t} = -26.8333; (t_2 - \bar{t})^2 = 720.03; (t_2 - \bar{t}) r_2 = -35.581; r_2 - bt - R0 = -0.00353495; (r_2 - bt - R0)^2 10^6 = 12.4959;$$

$$i = 3; t_3 - \bar{t} = -1.8333; (t_3 - \bar{t})^2 = 3.361; (t_3 - \bar{t}) r_3 = -2.541; r_3 - bt - R0 = -0.00965146; (r_3 - bt - R0)^2 10^6 = 93.1506;$$

$$i = 4; t_i - \bar{t} = 10.1667; (t_i - \bar{t})^2 = 103.36; (t_i - \bar{t}) r_i = 14.4062; r_i - bt - R_0 = -0.0103874; (r_i - bt - R_0)^2 \cdot 10^6 = 107.898;$$

$$i = 5; t_i - \bar{t} = 34.1667; (t_i - \bar{t})^2 = 1167.36; (t_i - \bar{t}) r_i = 51.66; r_i - bt - R_0 = 0.0211408; (r_i - bt - R_0)^2 \cdot 10^6 = 446.932;$$

$$i = 6; t_i - \bar{t} = 47.1667; (t_i - \bar{t})^2 = 2224.69; (t_i - \bar{t}) r_i = 71.6933; r_i - bt - R_0 = -0.00523981; (r_i - bt - R_0)^2 \cdot 10^6 = 27.4556;$$

Bul an'latpalarda tort arqali' temperaturani'n' ortasha ma'nisi belgilengen.

Qa'telerdi yesaplaw boyi'nsha to'mendegidey an'latpalardi' jazami'z:

$$\alpha R_0 = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}) r_i}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = 0,002645 \text{ Om/grad.}$$

$$R_t = R_0(1 + \alpha t) = R_0 + R_0 \alpha \bar{t} = 1.1735 \text{ Om}.$$

Bunnan

$$\alpha = \frac{\alpha R_0}{R_0} = 0,00225 \text{ grad}^{-1}.$$

α shamasi'n ani'qlang'anda jiberilgen qa'telikti tabami'z ha'm (M.1) ja'ne

(M.2) an'latpalari'nan paydalanami'z. $\alpha = \frac{\alpha R_0}{R_0}$ bolg'anli'qtan joqari'dag'i'

formulalardan

$$S_\alpha = \sqrt{\left(\frac{S_{\alpha R_0}}{\alpha R_0}\right)^2 + \left(\frac{S_{R_0}}{R_0}\right)^2}.$$

$$S_{\alpha R_0} = \sqrt{\frac{\sum (R_i - bt_i - a)^2}{(n-2) \sum (t_i - \bar{t})^2}} = \sqrt{\frac{0,000746804}{(6-2)8166,833}} = 1,54 \cdot 10^{-4}$$

$$S_{R_0} = \sqrt{\frac{\sum (R_i - bt_i - a)^2}{n-2} \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{t}^2}{\sum (t_i - \bar{t})^2} \right)} = 0,014126 \text{ Om}.$$

Bunday jag'dayda

$$S_\alpha = 0,002254 \sqrt{\left(\frac{1,51 \cdot 10^{-4}}{26,45 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + \left(\frac{0,014126}{1,1735}\right)^2} = 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}.$$

Stiudent keستي boyi'nsha $P = 0,95$ isenimligin berip $n = 6$ ushi'n $t = 2,57$ yekenligin tabami'z ha'm sali'sti'rmali' qa'telikti tabami'z: $\Delta\alpha = 2.57 \cdot 0.000132 = 0.000338 \text{ grad}^{-1}$.

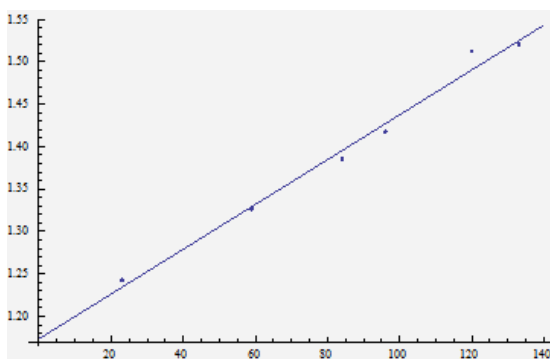
$P = 0.95$ bolg'anda $\alpha = (23 \pm 4) \cdot 10^{-4} \text{ grad}^{-1}$.

$$\varepsilon = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \cdot 100\% = \frac{4}{23} 100\% \approx 20\%.$$

Endi yen' kishi kvadratlar usi'li' menen $R = R(t)$ funkciyasi' ushi'n analitikali'q an'latpani' ali'wi'mi'z kerek. Buni'n' ushi'n to'mendegidey programma du'zemiz:

```
Data = {{23,1.242},{59,1.326},{84,1.386},{96,1.417},{120,1.512},{133,1.520}};
line = Fit[Data,{1,x},x]
r1 = Plot[1.1735 + 0.00264x,{x,0,140}];
r2 = ListPlot[Data];
Show[r1,r2]
```

Kompiuter bizge $1.1735 + 0.002645x$ funkcionalli'q baylani'si'n ha'm sa'ykes grafikni beradi (18-su'wret). Bul an'latpadag'i' $1,1735$ Om o'tkizgishtin' 0°S temperaturadag'i' qarsi'li'g'i'na ten'. $0,002645$ sani' α koefficientine ten' (joqari'dag'i' mag'li'wmatlar menen sali'sti'ri'w kerek).



18-su'wret. 6-kestede berilgen mag'li'wmatlar boyi'nsha tabi'lg'an $R(t)$ funkcionalli'q baylani'si'.
Noqatlar eksperimentte ali'ng'an na'tiyjeler, tuwri' si'zi'q $1.1735 + 0.002645x$ funkciyasi'ni'n' grafigi.

3-mi'sal. Niuton saqaynalari' boyi'nsha linzani'n' iymeklik radiusi'n ani'qlaymi'z. N.ton saqi'ynalari'ni'n' radiusi' r_m o'lshendi ha'm bul

saqi'ynalardi'n' nomerleri m ani'qlandi'. Niuton saqi'ynalari'ni'n' radiusi' saqi'ynani'n' nomeri menen bi'layi'nsha baylani'sqan

$$r_m^2 = m\lambda R - 2d_0 R.$$

Bul an'latpada d_0 arqali' linza menen tegis parallel plastinka arasi'ndag'i' qashi'qli'q (yamasa linzani'n' deformaciyasi'), λ arqali' jaqti'li'qti'n' tolqi'n uzi'nli'g'i' belgilengen. Meyli $\lambda = (600 \pm 6)$ nm bolsi'n. $r_m^2 = y$, $m = x$ belgilewlerin qabi'l yeteyik. $\lambda R = b$, $-2d_0 R = a$.

Bunday jag'dayda ten'leme $y = ax + b$ tu'rine yenedi. Wo'lshevwler menen yesaplawlar na'tijjeleri 13-kestede berilgen.

13-keste.

n	$x = m$	$y = r^2,$ 10^{-2} mm^2	$m - \bar{m}$	$(m - \bar{m})^2$	$(m - \bar{m})y$	$y - bx - a,$ 10^{-4}	$(y - bx - a)^2,$ 10^{-6}
1	1	6.101	-2.5	6.25	-0.15252	12.01	1.44229
2	2	11.834	-1.5	2.25	-0.17751	-9.6	0.930766
3	3	17.808	-0.5	0.25	-0.08904	-7.2	0.519086
4	4	23.814	0.5	0.25	0.11907	-1.6	0.024395 5
5	5	29.812	1.5	2.25	0.44718	3.28	0.107646
6	6	35.760	2.5	6.25	0.894	3.12	0.097581 9
Σ	21	125.129	-	17.5	1.04117	-	3.12176
Σ/n	3.5	20.85483 33	-	-	-	-	-

$y = a + bx$ si'zi'qli' baylani'si' bar bolg'an jag'dayda $b = \frac{\sum (x_i - \bar{x})y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$ ha'm

$a = \bar{y} - b\bar{x}$ ten'liklerinin' ori'nlanatug'i'nli'g'i'n yesapqa alami'z ha'm usi'nday tiykarda a menen b shamalari' ushi'n mi'nalarg'a iye bolami'z:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})r_i}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = \frac{1,0412}{17,5} = 0,0595 \text{ Om.grad.}$$

$$a = \bar{r}^2 - b\bar{m} = 0,20855 - 0,0595 \cdot 3,5 = 0,00313 \text{ mm}^2.$$

a menen b shamalari'ndag'i' ortasha kvadratli'q qa'telerdi tabi'w ushi'n (M.1) ha'm (M.2)-an'latpalardan paydalanami'z.

$$S_b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r^2 - bm - a)^2}{(n-2)\sum_{i=1}^n (m - \bar{m})^2}} = \sqrt{\frac{3,12176 \cdot 10^{-6}}{(6-2) \cdot 17,5}} = 0,000211179 \text{ mm}^2.$$

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r^2 - bm - a)^2}{(n-2)} \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{m}^2}{\sum_{i=1}^n (m - \bar{m})^2} \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{3,12176 \cdot 10^{-6}}{6-2} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{3,5^2}{17,5} \right)} = \text{mm}^2.$$

$P = 0.95$ isenimligi ushi'n kestelerden $n = 6$ bolg'an jag'dayda Stiudent koefficienti $t = 2.57$ yekenligin tabami'z ha'm absoliut qa'telerdi tabami'z.

$$\Delta b = 2.57 \cdot 0.000211179 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2;$$

$$\Delta a = 2.57 \cdot 0.000822424 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2.$$

Na'tiyjelerdi to'mendegidey tu'rde jazami'z:

$R = 0.95$ bolg'an jag'dayda

$$b = (595 \pm 6) \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2,$$

$$a = (0.3 \pm 3) \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2.$$

Ta'jiriybelerde ali'ng'an na'tiyjeler boyi'nsha qa'teler sheklerinde $r_m^2 = f(m)$ tuwri'si' koordinata basi'nan o'tedi. Sebebi qanday da bir parametrdin' ma'nisin ani'qlag'andag'i' jiberiletug'i'n qa'te usi' parametrdin' ma'nisine shama menen ten' yamasa usi' parametrdin' ma'nisinen u'lken bolsa, onda bul jag'daydan parametrdin' ma'nisinin' nolge ten' yekenligin bildiredi.

Bul eksperimenttin' sharayatlari'nda a parametrinin' ma'nisi qi'zi'g'i'wshi'li'q payda yetpeydi. Sonli'qtan bul shamani'n' ma'nisin yesaplaw menen yendi shug'i'llanbaymi'z.

Linzani'n' iymeklik radiusi'n yesaplaymi'z:

$$R = b / \lambda = 594.5 / 6 = 99.1 \text{ mm.}$$

Tolqi'n uzi'nli'g'i' ushi'n sistemali'q qa'te berilgen bolg'anli'qtan R ushi'n da sistemali'q qa'teni yesaplaymi'z. Buni'n' ushi'n b shamasini'n' sistemali'q qa'tesi ushi'n oni'n' tosattan jiberiletug'i'n Δb qa'tesin alami'z:

$$\delta R = \left(\frac{\Delta b}{b} + \frac{\delta \lambda}{\lambda} \right) = 100,3 \left(\frac{0,05 \cdot 10^{-2}}{6,02 \cdot 10^{-2}} + \frac{6}{600} \right) = 1,84 \approx 2 \text{ mm.}$$

En' aqi'rg'i' na'tiyjeni

$$P = 0.95 \text{ bolg'anda } R = (99 \pm 2) \text{ mm, } \varepsilon \approx 3\%.$$

8-§. Interpolyaciya ha'm eksperiment na'tiyjelerin statistikalik qayta islew ma'selelerin Mathematica algebralik sistemasi'ni'n' ja'rdeminde sheshiw texnologiyalari'

Kompiuterlik interpolyaciyanin' tu'rleri ha'm basqi'shlari'. Matematikada interpolyaciya dep analitikali'q yamasa keste tu'rinde berilgen $y = f(x)$ funkciyasi'n argumenttin' bazi' bir oblasti'nda usi' funkciya menen birdey bolg'an $y = \varphi(x)$ funkciyasi' menen ko'rsetiwge aytadi'. Uqsasli'q teoriyasi' menen birlikler teoriyasi' menen bir qatarda interpolyaciya modellestiriwdin', ali'ng'an eksperimentalli'q na'tiyjelerdi qayta islew din' ilimiy tiykari' boli'p tabi'ladi'.

Biz grafik penen kestenin' obektin' yamasa qubi'li'sti'n' modeli bola almaytug'i'nli'g'i'n bilemiz. Tek matematikalik funkciya g'ana u'yrenilip ati'rg'an fizikalik obektin' yamasa qubi'li'sti'n' modeli bola aladi'. biraq interpolyaciya tek modellestiriwde g'ana yemes, al eksperimentti planlasti'ri'wda ha'm oni'n' na'tiyjelerin statistikalik qayta islewde, quramali' analitikali'q funkciyalardi' a'piwayi'raq funkciyalar menen almasti'ri'wda a'hmiyetli ori'ndi' iyeleydi.

Kompiuterlik interpolyaciya texnologiyalari'ni'n' tiykarg'i' basqi'shlari' to'mendegilerden ibarat:

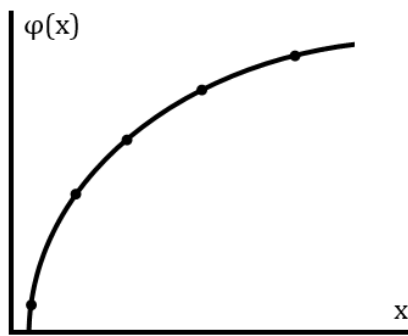
- 1). Interpolyaciya funkciyasi'ni'n' tu'rin saylap ali'w;
- 2). Interpolyaciya funkciyalari'ni'n' koefficientlerin ani'qlaw;
- 3). Saylap ali'ng'an interpolyaciya funkciyasi'ni'n' haqi'yqi'y qubi'li'slarg'a yamasa ni'zamli'qlarg'a tuwri' keletug'i'nli'g'i'n ani'qlaw.

Mathematica kompiuterlik algebra sistemasi' interpolyaciyalawdin' ha'r qi'yli' texnologiyalari' menen usi'llari'n qollani'wg'a mu'mkinshilik beredi. Olardi'n' bir qatari'n eksperimentler na'tiyjelerin qayta islewge paydalani'w

maqsetinde qarap shi'g'ami'z.

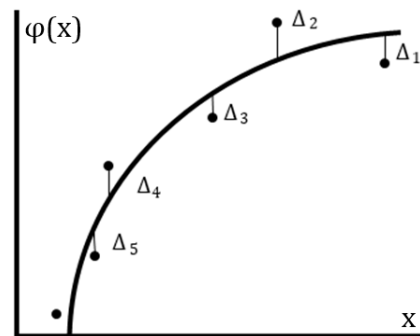
Interpolyaciyaning tiykarg'i yoki tu'ri bar: birinshisi tu'yinlerdegi da'l interpolyaciya, al yekinshisi tu'yinlerdegi juwi'q interpolyaciya dep ataladi'.

Tu'yinlerdegi da'l interpolyaciya dep na'tiyjesi interpolyaciya tu'yinlerinde $y = f(x)$ funkciyasi'na da'l sa'ykes keletug'i'n $y = \varphi(x)$ funkciyasi'na aytami'z. Bunday interpolyaciya 8-1 su'wrette ko'rsetilgen.



8-1 su'wret.

Tu'yinlerde da'l bolg'an interpolyaciya.



8-2 su'wret.

Tu'yinlerde juwi'q interpolyaciya.

Tu'yinlerde da'l interpolyaciyaning tiykari'nan argumenttin' kishi diapazoni'nda quramali' funkciyaning a'piwayi'raq funkciya menen almasti'ri'w za'ru'rliqi bar bolg'an jag'daylarda qollanadi'. Bunday interpolyaciyaning qollanil'wg'a mi'sal retinde joqari' da'lliktegi eksperimentalli'q mag'li'wmatlar ali'ng'an jag'dayda obekttin' matematikali'q modelin du'ziw ma'selesin sheshiwdi ko'rsetiwge boladi'.

Tu'yinlerde juwi'q interpolyaciya $y = \varphi(x)$ funkciyasi'ni'n' tu'yinlerdegi ma'nisleri da'slepki $y = f(x)$ funkciyasi'ni'n' tu'yinlerdegi ma'nislerine da'l sa'ykes kelmeytug'i'n jag'daylar ori'n aladi'. Bunday interpolyaciya baslang'i'sh mag'li'wmatlardi'n' da'l yemes ma'nislerin tegisliw ushi'n qollanil'adi'. Matematikada bunday operaciyaning approksimaciya dep ataydi'. Approksimaciyaning geometriyalig ma'nisi 8-2 su'wrette keltirilgen.

8-2 cu'wrette mi'naday belgilewler paydalani'lg'an: $\varphi(x)$ arqali'

yemperikali'q funkciya, noqatlar orqali' eksperimentte ali'ng'an funkciyani'n' ma'nisi, Δ_i orqali' $\varphi(x)$ funkciyasi' menen eksperimentalli'q ma'nis arasi'ndag'i' ayi'rma belgilengen.

$y = \varphi(x)$ interpolyaciya funkciyasi' yemperikali'q $\varphi(x)$ funkciyasi'ni'n' ha'm eksperimentalli'q yamasa basqa da jollar menen ali'ng'an baslang'i'sh funkciya menen jaqi'n boli'w kriteriyleri tiykari'nda tabi'ladi'. Usi'nday kriteriyler si'pati'nda to'mendegilerdi ko'rsetemiz:

a) awi'si'wlardi'n' algebrali'q summasi' nolge ten', yag'ni'y $\Delta_c = \sum_{i=1}^n y_i = 0;$

b) awi'si'wlardi'n' kvadratlari'ni'n' shamasi' minimalli'q ma'niske iye, yag'ni'y $\sum_{i=1}^n y_i^2 = \min;$

c) awi'si'wlardi'n' ortasha ma'nisi minimalli'q, yag'ni'y $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \min.$

Interpolyaciya ma'selesin sheshiwidin' kompiuterlik texnologiyalari' baslang'i'sh ha'm yemperikali'q funkciyalardi'n' tu'rlerinin' jaqi'nli'g'i' menen ani'qlanadi'. Bunday jag'dayda qa'telerdi bahalaw usi'li' birinshi plang'a shi'g'adi'.

Interpolyaciya funkciyasi'ni'n' tu'rin saylap ali'w. Interpolyaciya funkciyasi'ni'n' tu'rin saylap ali'w interpolyaciyani'n' yen' a'hmiyetli basqi'shi' boli'p tabi'ladi'. Sebebi saylap ali'ng'an $\varphi(x)$ funkciyasi' u'yrenilip ati'rg'an obekttin' yamasa qubi'li'sti'n' matematikali'q modelin ani'qlaydi'.

A'meliy yesaplawlarda $\varphi(x)$ funkciyasi'ni'n' tu'rin ani'qlawda to'mendegidey usi'llar qollani'ladi':

a) grafoanalitikali'q;

b) si'zi'qli' yemes funkciyalardi' si'zi'qli' funkciyalarg'a aylandi'ri'w (linearizaciya, 7-paragrafqa qaran'i'z);

c) kestelerde keltirilgen ayi'rmalardi' tallaw usi'li';

d) $\varphi(x)$ funkciyasi'ni'n' tu'rin avtomat tu'rde ani'qlap beretug'i'n

programmalaridi' qollani'w.

Biz to'mende usi' usi'llardi' qarap o'temiz.

Grafoanalitikali'q usi'l. $y = f(x)$ funkciyasi' grafik tu'rinde beriledi. Al bul grafik belgili matematikali'q funkciyalardi'n' grafikleri menen sali'sti'ri'ladi' ha'm usi'nday sali'sti'ri'wlardi'n' na'tiyjesinde yen' jaqi'n keletug'i'n funkciya saylap ali'nadi'.

Si'zi'qli' yemes funkciyalardi' si'zi'qli' funkciyalarg'a aylandi'ri'w jollari' 7-paragrafta ayti'p o'tildi.

Kestelerde keltirilgen ayi'rmalardi' tallaw usi'li'. Bul usi'l polinomialli'q interpolyaciya dag'i' ko'p ag'zali'ni'n' da'rejesin saylap ali'wg'a mu'mkinshilik beredi. Eger $y = f(x)$ funkciyasi'ni'n' n-kestelik ayi'rmalari' birdey ma'nislerge iye bolatug'i'n bolsa, onda ko'p ag'zali'ni'n' da'rejesi n shamasin'an u'lken bolmaydi'.

Bul ma'seleni toli'g'i'raq tu'sindiremiz. 14-kestenin' 1- ha'm 2-bag'analari'nda interpolyaciya funkciyasi' keste tu'rinde, al 3-5 bag'analari'nda funkciyani'n' ma'nislerinin' ayi'rmalari' keltirilgen. Bul jerde biz u'shinshi kestelik ayi'rmalardi'n' turaqli' ha'm 0,66 shamasina ten' yekenligin ko'remiz. Bul jag'day interpolyaciya'q polinomni'n' u'shinshi da'rejeden joqari' bolmaytug'i'nli'g'i'n, yag'ni'y polinomdi' $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tu'rinde jazi'wi'mi'zdi'n' kerek yekenligin an'g'artadi'.

14-keste.

x	y	1	2	3
1	1,69	1,81	1,78	0,66
2	3,50	3,59	2,44	0,66
3	7,09	6,03	3,10	0,66
4	13,12	9,13	3,76	0,66
5	22,25	12,89	4,42	0,66
6	35,14	17,31	5,08	0,66
7	52,45	22,39	5,74	0,66

8	74,84	28,13	6,40	0,66
9	102,97	34,53	7,06	0,66
10	137,50	41,59	7,72	0,66
11	179,09	49,31	8,38	0,66
12	228,40	57,69	9,04	0,66
13	286,09	66,73	9,70	0,66
14	352,82	76,43	10,36	0,66
15	429,25	86,79	11,02	0,66
16	516,04	97,81	11,68	0,66
17	613,85	109,49	12,34	0,66
18	723,34	121,83	13,00	
19	845,17	134,83		

Interpolyaciyani' avtomatlasti'ri'widi'n' arnawli' programmalarini' paydalani'w. Eger baslang'i'sh funkciya keste tu'rinde berilse interpolyaciya funkciyasi'n saylap ali'widi'n' ko'p sanli' arnawli' programmalarini'n' bar yekenligin atap o'temiz. Bunday programmali'q qurallar ishinde SIMPLE FORMULA, TableCurve, Curve Expert si'yaqli' ken' tarqalg'an programmalaridi' ko'rsetiwge boladi'. Olar qa'telerin ko'rsetiw menen ha'r qi'yli' bolg'an mi'n'nan aslam funkciyalardi' beredi.

Interpolyaciya funkciyasi'ni'n' koefficientlerinin' ma'nislerin ani'qlaw. $\varphi(x)$ funkciyasi'ni'n' koefficientlerinin' ma'nislerin ani'qlawdi'n' ju'da' ko'p usi'llari' bar. Funkciyani'n' tu'rin saylap ali'w usi'li' $\varphi(x)$ funkciyasi'ni'n' tu'rinen (bul funkciya si'zi'qli', si'zi'qli' yemes, polinomialli'q, yeksponentiali'q ha'm basqa da boli'wi' mu'mkin), interpolyaciyanin' talap yetiletug'i'n da'lliginen, paydalani'li'p ati'rg'an universalli'q matematikali'q sistemani'n' mu'mkinshiliklerinen g'a'rezli boladi'.

Mathematica kompiuterlik algebra sistemasi' interpolyaciya ma'selelerin sheshiwidin' og'ada bay mu'mkinshiliklerine iye. Biz to'mende sol mu'mkinshiliklerdi ayqi'n mi'sallar keltiriw menen bayanlaymi'z.

Interpolyaciya funkciyasi'ni'n' adekvatli'g'i'n (tuwri' keletug'i'nli'g'i'n) ani'qlaw.

Ali'ng'an sheshimnin' adekvatli'g'i' $\varphi(x)$ funkciyasi'ni'n' qa'teliginin'

shamasi' boyi'nsha ani'qlanadi'. Funkciyani'n' jaqi'nli'g'i' kriteriyi si'pati'nda

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2} \quad (8.1)$$

ha'm

$$\delta = \frac{\varepsilon}{y_{\min}} \times 100\% \quad (8.2)$$

formulalari'ni'n' ja'rdeminde yesaplanatug'i'n absoliut (ε) ha'm sali'sti'rmali' (δ) ortasha kvadratli'q qa'teler xi'zmet yetedi. Bul formulalarda $\Delta_i = f(x_i) - \varphi(x_i)$ arqali' $f(x_i)$ baslang'i'sh funkciya menen $\varphi(x_i)$ interpolyasiya funkciyasi' arasi'ndag'i' ayi'rma, n arqali' $f(x)$ funkciyasi'ni'n' argumentlerinin' sani', y_{\min} arqali' $f(x)$ funkciyasi'ni'n' yen' minimalli'q ma'nisi belgilengen. Eger biz $\delta_{\text{jol qoyi'g'an}}$ qa'tesinin' ketiwine mu'mkinshilik beretug'i'n bolsaq, onda $\delta \leq \delta_{\text{jol qoyi'g'an}}$ sha'rtinin' ori'nlani'wi' kerek. Bunday jag'dayda sheshim adekvatli'q boli'p yesaplanadi'. Biraq usi' $\delta \leq \delta_{\text{jol qoyi'g'an}}$ sha'rti ori'nlang'an jag'dayda da modellestiriwdin' na'tiyjesinde ali'ng'an $y = \varphi(x)$ funkciyasi'n izertlenip ati'rg'an obekttin' yamasa qubi'li'sti'n' modeli dep ayti'wg'a bolmaydi'. $y = f(x)$ funkciyasi' ju'da' joqari' da'llikte ali'ng'an jag'dayda g'ana modellestiriwdin' na'tiyjesin obektke yamasa qubi'li'sqa da'l sa'ykes keledi dep ayta alami'z.

9-§. Mathematica kompiuterlik algebra sistemasi' ortalig'i'ndag'i' interpolyasiyalawdi'n' texnologiyalari'

Tu'yinlerdegi da'l interpolyasiya (bul usi'lda ali'ng'an na'tiyjelerdin' interpolyasiyani'n' tu'yinlerde da'l duri's ma'nislerge iye bolatug'i'nli'g'i'n, biraq tu'yinler arasi'ndag'i' intervallarda da'l duri's ma'nislerge iye bolmaytug'i'nli'g'i'n atap o'temiz). Mathematica ortalig'i'nda bunday

interpolyaciya yeki usi'ldi'n' ja'rdeminde a'melge asi'ri'ladi'. Olardi'n' birinshisin universalli'q usi'l dep ataymi'z. Al yekinshisi InterpolatingPolynomial ha'm Inpolation universalli'q funkciyalari'ni'n' ja'rdeminde sheshiledi.

Universalli'q usi'l keste yamasa matrica tu'rinde berilgen $y = f(x)$ funkciyasi'ni'n' mag'li'wmatlari' tiykari'nda ali'ng'an algebrali'q ten'lemeler sistemasi'n sheshiwdi talap yetedi. Bul usi'ldi'n' texnologiyasi' to'mendegidey a'mellerdi islewden turadi':

Ten'lemeler sistemasi'n du'ziw (interpolyaciya funkciyasi'n belgili dep boljaymi'z).

Ten'lemeler sistemasi'ni'n' sheshimlerin shi'g'ari'w (buni' <Shift>+<Enter> klavi'shlari'ni'n' kombinaciyasi'n birden basi'w arqali' a'melge asi'radi'). Mi'sal keltiremiz (15-keste).

15-keste.

x	1	2	3	4	5
y	1,8578	6,1848	20,6818	56,0768	127,125

$y = f(x)$ funkciyasi' polinom boli'p tabi'latug'i'n jag'day ushi'n tu'yinlerde da'l ma'nislerdi beretug'i'n interpolyaciya ma'selesin sheshiw talap yetiledi.

Tu'yinler sani' $n = 5$ bolg'anli'qtan polinom $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ tu'rine iye boli'wi' kerek. Demek bul polinomni'n' koefficientlerin tabi'w ushi'n

$$a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 + a_4 \cdot 1^4 = 1,8578;$$

$$a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + a_4 \cdot 2^4 = 6,1848;$$

$$a_0 + a_1 \cdot 3 + a_2 \cdot 3^2 + a_3 \cdot 3^3 + a_4 \cdot 3^4 = 20,6818;$$

$$a_0 + a_1 \cdot 4 + a_2 \cdot 4^2 + a_3 \cdot 4^3 + a_4 \cdot 4^4 = 56,0768;$$

$$a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5^3 + a_4 \cdot 5^4 = 127,125$$

algebrali'q ten'lemeler sistemasi'n du'ziwimiz kerek boladi'. Bul ten'lemeler

sistemi'si'n Mathematica paketi ja'rdeminde sheshiw ushi'n

$$\text{Solve}[\{a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 + a_3 1^3 + a_4 1^4 == 1.8578, a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 == 6.1848, \\ a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + a_3 3^3 + a_4 3^4 == 20.6818, a_0 + a_1 4 + a_2 4^2 + a_3 4^3 + a_4 4^4 == 56.0768, \\ a_0 + a_1 5 + a_2 5^2 + a_3 5^3 + a_4 5^4 == 127.125\}, \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}]$$

tu'rindeg i an'latpani' jazami'z. Bul ten'lemeler sistemi'si'ni'n' sheshimlari

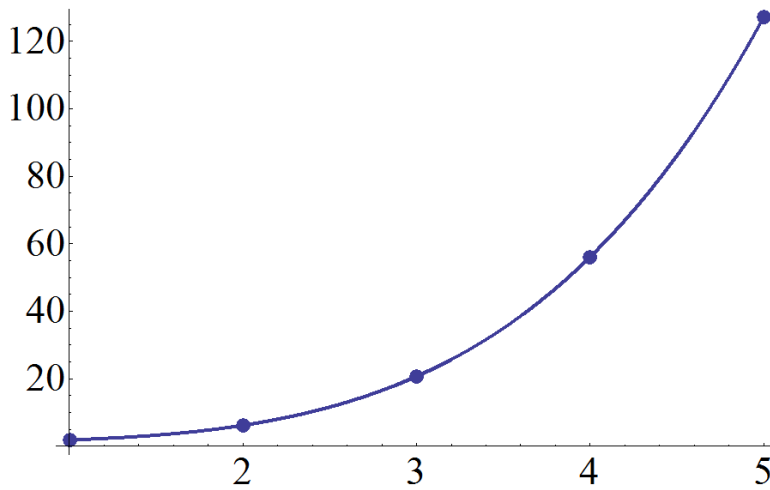
$$\begin{aligned} a_0 &\rightarrow 0.999999999999999, \\ a_1 &\rightarrow 0.3500000000000003, \\ a_2 &\rightarrow 0.229999999999999, \\ a_3 &\rightarrow 0.110000000000000, \\ a_4 &\rightarrow 0.167799999999999 \end{aligned}$$

tu'rine iye (biz kompiuter bergan mag'li'wmatlardi'n' joqari' da'llikte yekenligin ko'rsetiw maqsetinde u'tirden keyingi 15 tey ag'zani' keltirdik). Na'tiyjede interpoliyaciya'li'q funkciya ushi'n ali'ng'an sanli' mag'li'wmatlardi' bir qansha juwi'qlawdan keyin

$$y = 1 + 0,35x + 0,23x^2 + 0,11x^3 + 0,1678x^4$$

tu'rindeg i an'latpani' alami'z. Bul an'latpa menen 15-kestede keltirilgen mag'li'wmatlar boyi'nsha Mathematica paketinin' ja'rdeminde sa'ykes grafiklerdi alami'z (8-3 su'wret).

```
data = {{1, 1.8578}, {2, 6.1848}, {3, 20.6818}, {4, 56.0768}, {5, 127.125}};
f1 = ListPlot[data, PlotStyle -> PointSize[0.02], AxesStyle -> Directive[Black, 30]];
f2 = Plot[1 + 0.35x + 0.23x^2 + 0.11x^3 + 0.1678x^4, {x, 1, 5},
AxesStyle -> Directive[Black, 15], PlotStyle -> Thickness[0.005]];
Show[f1, f2, ImageSize -> 600]
```



8-3 su'wret.
15-kestede keltirilgen sanli'
mag'li'wmatlar tiykari'nda
tu'yinlerde da'l sa'ykes
keletug'i'n
interpolyaciyalawdi'n'
na'tiyjesinde ali'ng'an
grafik.

Tu'yinlerde da'l na'tiyjelerdi beretug'i'n interpolyaciyani' si'ziqli' algebrali'q ten'lemelerdi sheshiw ushi'n arnalg'an matricali'q usi'l menen de sheshiw mu'mkin. Matricali'q usi'l menen sheshiw texnologiyasi'n studentlerdin' o'z betinshe u'yreniwi ushi'n qaldi'rami'z.

Interpolyaciya ma'selesinin' haqi'yqatli'g'i'n tekserip ko'riw. Sheshimnin' duri's yekenligin tekserip ko'riw ushi'n ali'ng'an formulani'n' tabulyaciyasi'n ori'nlaymi'z ha'm na'tiyjelerdi da'slepki mag'li'wmatlar menen sali'sti'rami'z. Mathematica sistemasi'nda tabulyaciyani'n'

$$\text{Table}[f[x], \{x, x_{\text{basl}}, x_{\text{qi'rg'i'}}, h\}]$$

komandasi'ni'n' ja'rdeminde a'melge asi'ralatug'i'nli'g'i'n na'zerde tutami'z. Bul an'latpada $f[x]$ arqali' tabulyaciyalanatug'i'n funkciya, x arqali' sol funkciyasi'ni'n' argumenti, $x_{\text{basl}}, x_{\text{qi'rg'i'}}$ shamalari' arqali' argumenttin' da'slepki ha'm yen' aqi'rg'i' ma'nislerin, h arqali' kestenin' adi'mi' belgilengen (eger $h = 1$ bolsa oni' jazi'wdi'n' keregi joq).

Table funkciyasi' vektor-qatar tu'rinde juwap beredi.

Tabulyaciyaladi'n' basqa funkciyasi' bi'layi'nsha jazi'ladi':

$$\text{Do}[\text{Print}[f[x]], \{x, x_{\text{basl}}, x_{\text{qi'rg'i'}}, h\}]$$

Bul funkciya sheshimdi vektor-bag'ana tu'rinde beredi.

Biz interpolyaciya ma'selesin sheshkende ali'ng'an na'tiyjenin'

$$y = 1 + 0,35x + 0,23x^2 + 0,11x^3 + 0,1678x^4$$

tu'rine iye yekenligin yeske ali'p bul funkciyani' tabulyaciyalaymi'z. Tabulyaciyalaw ushi'n yeki usi'lda da paydalanami'z. Oni'n' ushi'n Mathematica sistemasi' ushi'n

```
y[x_]=1+0.35x+0.23x^2+0.102x^3+0.1678x^4;
Table[y[x],{x,1,5}]
Do[Print[y[x]],{x,1,5}]
```

tu'rindegı an'latpalardi' jazami'z. Kompiuter to'mendegidey na'tiyjelerdi beredi:

Programmani'n' yekinshi qatari'ni'n' na'tiyjesi (vektor-qatar)

{1.8498, 6.1208, 20.4658, 55.5648, 126.125}

Programmani'n' u'shinshi qatari'ni'n' na'tiyjesi (vektor-bag'ana)

1.8498
6.1208
20.4658
55.5648
126.125

Ali'ng'an na'tiyjelerdi da'slepki mag'li'wmatlar menen sali'sti'ri'p interpolyciya ma'selesinin' sheshiminin' duri's yekenligine isenemiz.

Biz joqari'da ko'rgen mi'salda ten'lemeler sani' menen belgisizlerdin' sani' birdey. Al a'melde interpolyciya ma'selesin sheshkende pu'tkilley basqa situaciyag'a iye bolami'z. Derlik barli'q waqi'tta da da'slepki mag'li'wmatlardan ibarat kestenin' o'lshemleri algebrali'q ten'lemelerdin' sani'nan (yag'ni'y interpolyciya tu'yinlerinin' sani'nan) a'dewir u'lken, demek interpolyciyanin' da'rejesi kestenin' o'lsheminen kishi boladi'.

Bunday jag'dayda interpolyciyanin' tu'yinlerinin' sani'n da'slepki mag'li'wmatlardin' barli'g'i'nan saylap ali'wg'a tuwri' keledi. A'dette bunday jag'day interpolyciyada qa'telerdin' payda boli'wi'na ali'p keledi.

Mi'sal keltiremiz. Kubli'q strukturag'a iye untalg'an $\text{Sm}_{0,8}\text{Gd}_{0,2}$ kristallari' ushi'n rentgenografiyalı'q jollar menen ali'ng'an kristalli'q pa'njere turaqli'si'

α ni'n' temperaturadan g'a'rezligi 16-kestede berilgen.

16-keste. $\text{Sm}_{0,8}\text{Gd}_{0,2}$ kristallari' ushi'n kristalli'q pa'njere turaqli'si' α ni'n' temperaturadan g'a'rezligi

130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
5,712	5,705	5,701	5,6975	5,695	5,6935	5,6915	5,692	5,6925	5,6939

16-kestenin' dawami'

230	240	250	260	270	280	290
5,6955	5,6972	5,6992	5,71	5,728	5,745	5,762

Mathematica sistemasi'ndag'i' Fit operatori'ni'n' ja'rdeminde o'tkerilgen aldi'n-ala tekserip ko'riw joqari'dag'i' 16-kestede keltirilgen mag'li'wmatlardi'n' 3-da'rejeli polinomg'a sa'ykes keletug'i'nli'g'i'n ko'rsetti. Buni'n' ushi'n ha'r qi'yli' da'rejege iye polinomg'a sa'ykes keliw ma'selesi sheshiledi ha'm to'mendegidey na'tiyjeler ali'nadi':

Ekinshi da'rejeli polinom ushi'n

$$5.79481 - 0.000965x + 0.00000229x^2$$

U'shinshi da'rejeli polinom ushi'n

$$5.95365 - 0.0033536x + 0.0000138x^2 - 1.78448 \times 10^{-8} x^3$$

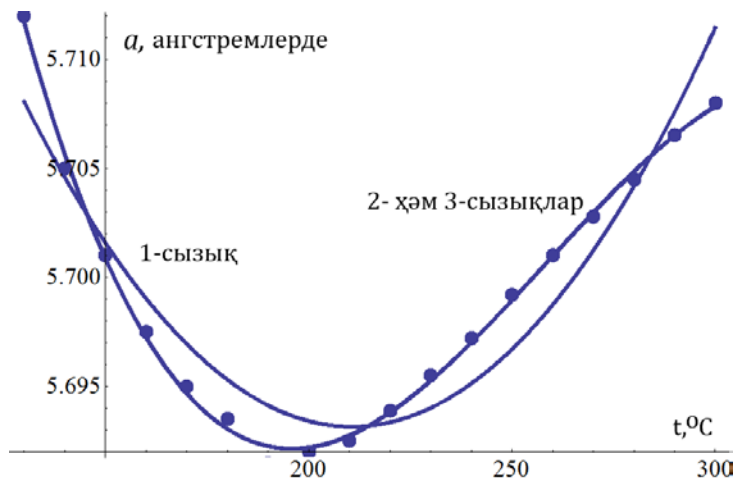
To'rtinshi da'rejeli polinom ushi'n

$$5.96542 - 0.00359x + 0.000015545x^2 - 2.33918 \times 10^{-8} x^3 + 6.4499 \times 10^{-12} x^4$$

funkciyalari' ali'nadi'. A'l'bette ju'da' kishi yekenligine baylani'sli' 10^{-8} ha'm 10^{-12} ko'beytiwshileri bar koefficientlerdi yesapqa almawi'mi'z kerek. Sonli'qtan interpolyaciya'li'q funkciya retinde tek kvadrat funkciyani' alami'z.

Ali'ng'an na'tiyjeler 8-4 su'wrette keltirilgen.

8-4 su'wret.



16-kestede keltirilgen sanli' mag'li'wmatlardi' interpolyaciyalaw na'tiyjeleri. 1-si'zi'q yekinshi da'rejeli polinomg'a, al 2- ha'm 3-si'zi'qlar u'shinshi ha'm to'rtinshi da'rejeli polinomlarg'a sa'ykes keledi.

8-4 su'wrette barli'q noqatlardi'n' interpolyaciya iymekliginin' boyi'nsha jatpaytug'i'nli'g'i' ko'rinip tur. Biraq soni'n' menen birge interpolyaciyanin' qa'tesinin' kishi yekenligin de an'g'ari'wi'mi'zg'a boladi'. Endi sol qa'tenin' ma'nislerin ani'qlawi'mi'z kerek boladi'. Buni'n' ushi'n absoliut ha'm ortasha kvadratli'q qa'teler ushi'n jazi'lg'an (8.1)- ha'm (8.2)-formulalardan paydalanami'z ha'm oni' Mathematica ortalig'i'nda to'mendegidey jazi'wlardi'n' ja'rdeminde ju'zege keltiremiz:

Bizin' da'slepki sanlari'mi'z (yag'ni'y kubli'q kristaldi'n' kristalli'q pa'njeresinin' turaqli'si')

$\nu_1 = \{5.712, 5.705, 5.701, 5.6975, 5.695, 5.6935, 5.6915, 5.692, 5.6925, 5.6939, 5.6955, 5.6972, 5.6992, 5.701, 5.7028, 5.7045, 5.7065, 5.708\};$

Interpolyaciiali'q funkciyag'a argumenttin' sa'ykes ma'nislerin beriw arqali' ali'ng'an ma'nisler:

$\nu_2 = \{5.71169, 5.70566, 5.70089, 5.697273, 5.69470, 5.69307, 5.69227, 5.692198, 5.69274, 5.693798, 5.695258, 5.697015, 5.69896, 5.70099, 5.702996, 5.704869, 5.70650, 5.70779\}$

Olardi'n' ayi'rmasi' ($z = \nu_1 - \nu_2$):

$\{0.000303, -0.000663, 0.000108, 0.000226, 0.000298, 0.000429, -0.000771, -0.000197, -0.000242, 0.000101, 0.000241, 0.000184, 0.000237, 0.000008, -0.000196, -0.000369, -0.000003, 0.000207\}$

Ayi'rmani'n' kvadrati' (z^2):

$\{9.195599 \times 10^{-8}, 4.401758 \times 10^{-7}, 1.18150 \times 10^{-8}, 5.14587 \times 10^{-8}, 8.88788 \times 10^{-8},$
 $1.846219 \times 10^{-7}, 5.95000 \times 10^{-7}, 3.9146225 \times 10^{-8}, 5.88830 \times 10^{-8},$
 $1.027452 \times 10^{-8}, 5.824949 \times 10^{-8}, 3.401753 \times 10^{-8}, 5.653430 \times 10^{-8}, 7.192749 \times 10^{-11},$
 $3.85290 \times 10^{-8}, 1.36455 \times 10^{-7}, 1.37904 \times 10^{-11}, 4.322555 \times 10^{-8}\}$

Bul shamalardi'n' summasi' $1,93931 \cdot 10^{-6}$ shamasina ten' (oni' Plus[y] komandasi'ni'n' ja'rdeminde a'melge asirami'z). Bul shamani' o'lshevlar sani' 18 ge bo'lemiz ha'm onnan kvadrat tu'bir alami'z (bul operatsiya $Sqrt[\% / 18]$ komandasi'ni'n' ja'rdeminde a'melge asiri'ladi'). Na'tijje 0,000328237 shamasina ten' boli'p shig'adi'. Demek absoliut qa'te usi' $\varepsilon = 0,000328237$ shamasina ten' degen so'z. Al ortasha kvadratlilik qa'te [yag'ni'y (8.2)-

formula] $\delta = \frac{\varepsilon}{y_{\min}} \cdot 100\% = \frac{0,000328}{5,6915} \cdot 100\% = 0,005767\%$ shamasina ten'

boli'p shig'adi'. Bul og'ada kishi shama ha'zirgi zaman kristallar rentgenografiyasi'ndagi' o'lshevlardini' qanday u'lken da'llikte o'tkeriletug'i'nli'g'i'n ayqi'n ko'rsetedi.

Endi yekinshi mi'saldi' keltiremiz. Uli'wma fizikani'n' yelektr ha'm magnetizm laboratoriyasi'nda ta'biyati' belgisiz bolg'an qatti' denenin' qarsi'li'g'i'ni'n' temperaturaga baylani'sli' o'zgerisi izertlendi ha'm to'mendegidey na'tijjeler ali'ndi':

17-keste.

x	14	19	24	29	34	39	44	49
y	1620	1320	1220	1005	920	820	730	650

Dawami':

54	59	64	69	74	79	84
580	525	480	440	390	350	320

Bul mag'li'wmatlardi' Mathematica sistemasi'na kirgiziwimiz ushi'n

$data = \{\{14, 1620\}, \{19, 1320\}, \{24, 1220\}, \{29, 1005\}, \{34, 920\}, \{39, 820\}, \{44, 730\}, \{49, 650\},$
 $\{54, 580\}, \{59, 525\}, \{64, 480\}, \{69, 440\}, \{74, 390\}, \{79, 350\}, \{84, 320\}\};$

tu'rindagi an'latpani' jazami'z (figuralilik qawsi'rmalardi'n' ishindegisi birinshi

san Celsiy shkalasi'ndag'i' temperaturani', al yekinshi san omlardag'i' qarsi'li'qti'n' ma'nisin bildiredi). Bul na'tiyjelerde temperaturani'n' arti'wi' menen qarsi'li'qti'n' kemeyetug'i'nli'g'i' ko'rinip tur.

Mathematica paketinin' ja'rdeminde interpolyaciya qarsi'li'q penen temperatura arasi'nda

$$\frac{7189.2054}{x^{0.55}} - 3.81259x$$

tu'rindagi baylani'sti'n' bar yekenligin ko'rsetti. Bul shamalar tiykari'nda qarsi'li'qti'n' temperaturag'a g'a'rezliginin' grafigi si'zi'ldi' (8-5 su'wret).

Biz qa'telerdi ani'qlaw maqsetinde joqari'da keltirilgen proceduralardi' qaytalaymi'z.

$v1 = \{1620, 1320, 1220, 1005, 920, 820, 730, 650, 580, 525, 480, 440, 390, 350, 320\};$

$v2 = \{1630.50116, 1351.09009, 1160.38361, 1017.57226, 904.00758, 809.81611, 729.22427, 658.60408, 595.54775, 538.38706, 485.92534, 437.27922, 391.78067, 348.91403, 308.2742\};$

$z = v1 - v2 = \{-10.50116, -31.09008, 59.61638, -12.57226, 15.99242, 10.18389, 0.77572, -8.60407, -15.54774, -13.38706, -5.92534, 2.72077, -1.78066, 1.08596, 11.72579\}$

Bunnan keyin z shamasi'ni'n' kvadrati', kvadratardi'n' summasi' tabi'ladi'.

Absoliut qa'telik $z2 = Sqrt[5828.45 / 15] = 19,172$, al sali'sti'rmali' qa'telik 6,16 % shamasi'na ten'. Bul jag'daylar fizikali'q praktikumdagi' ali'ng'an shamalardi'n' qa'tesinin' u'lken yekenligin ayqi'n tu'rde ko'rsetedi.

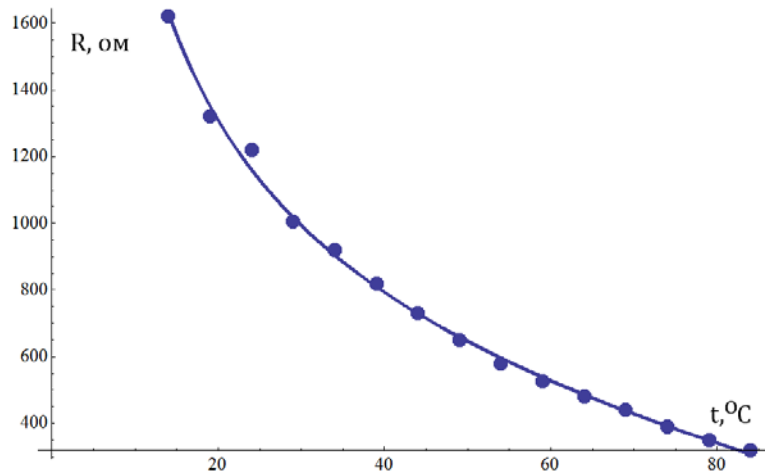
InterpolatingPolynomial funkciyasi'. Mathematica sistemasi'nda polinomlar menen interpolyaciya InterpolatingPolynomial funkciyasi'ni'n' ja'rdeminde an'sat a'melge asi'ri'ladi'. Bul funkciya

$$InterpolatingPolynomial[y, x]$$

tu'rine iye. Bul funkciyada y arqali' da'slepki mag'li'wmatlardi'n' matricasi', al x arqali' y funkciyasi'ni'n' argumenti belgilengen. Birden ma'seleler sheshiwge o'temiz ha'm mi'sal retinde 18-kestede keltirilgen

mag'li'wmatlarg'a itibar beremiz.

8-5 su'wret.
Qarsi'li'qti'n'
temperaturadan g'a'rezligi.
Noqatlar eksperimentte
ali'ng'an na'tiyjeler, tutas
si'zi'q interpolyasiyani'n'
na'tiyjesi.



Bul kestdede keltirilgen mag'li'wmatlardi' Mathematica sistemasi'na kirgiziw ushi'n

$$y = \{\{1,1\},\{2,8\},\{3,27\},\{4,64\},\{5,125\},\{6,216\},\{7,343\}\}$$

tu'rindegi an'latpani' jazami'z. Bunnan keyin

InterpolatingPolynomial[y,x]

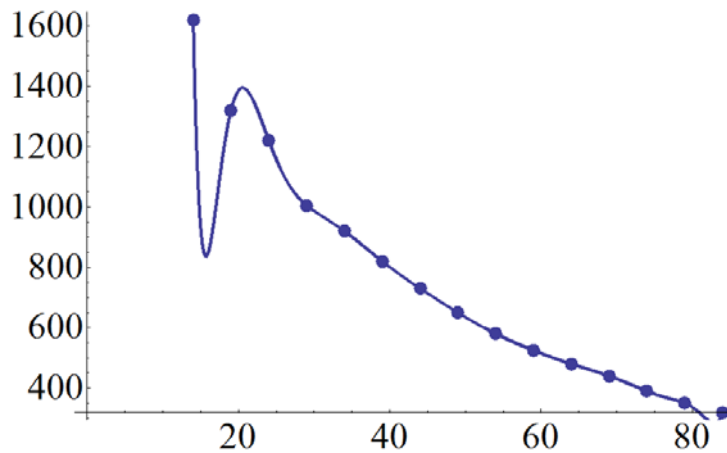
funkciyasi'n kirgizemiz. Sheshimdi ali'w ushi'n yendi tek <Shift> + <Enter> klavishlerin basi'w jetkilikli ha'm yekranda $1 + (-1 + x)(7 + (-2 + x)(3 + x))$ jazi'wi'na iye bolami'z. Al a'piwayi'lasti'ri'lg'an na'tiyjeni ali'w ushi'n *InterpolatingPolynomial*[y,x] jazi'wi'nan keyin *Simplify*[%] qatari'n qosi'wi'mi'z kerek. Na'tiyjede yen' aqi'rg'i' x^3 sheshimin alami'z.

Endi tap usi'nday jollar menen 17-kestdede keltirilgen mag'li'wmatlardi' interpolyasiyalaymi'z. Oni'n' ushi'n

```
y = {{14,1620},{19,1320},{24,1220},{29,1005},{34,920},{39,820},
{44,730},{49,650},{54,580},{59,525},{64,480},{69,440},{74,390},
{79,350},{84,320}};
InterpolatingPolynomial[y,x];
Plot[%,{x,14,84}]
```

tu'rindegi an'latpani' jazi'wi'mi'z jetkilikli ha'm kompiuter 8-6 su'wrette

keltirilgandey grafikni beradi. Bul grafikni' 8-5 su'wrette keltirilgen grafikke usamaytug'i'nli'g'i' ayqi'n tu'rde ko'rinip tur. Usi'ni'n' na'tiyjesinde eksperimentalli'q mag'li'wmatlardi' interpoliyaciyalawda Interpolating Polynomial funkciyasi'n abaylap paydalani'wdi'n' kerek yekenligin atap o'temiz.



8-6 su'wret.
17-kestede keltirilgen
mag'li'wmatlardi'
Interpolating- Polynomial
funkciyasi'ni'n' ja'rdeminde
interpolyaciyalawdi'n'
na'tiyjesi.

Tu'yinlerde juwi'q na'tiyje beretug'i'n interpoliyaciya. Tu'yinlerde juwi'q na'tiyje beretug'i'n interpoliyaciya (approksimaciya) ortasha kvadratli'q qa'tenin' minimumi' kriteriyi, yag'ni'y yen' kishi kvadratlar usi'li' boyi'nsha a'melge asi'ri'ladi'. Mathematica sistemasi'nda bul interpoliyaciya Fit funkciyasi'ni'n' ja'rdeminde a'melge asi'ri'ladi'. Bul funkciya

$\text{Fit}[\text{data}, \{X\}, x]$

tu'rine iye. Bul an'latpada data arqali' da'slepki mag'li'wmatlar matricasi', X arqali' bazislik o'zgeriwshiler dizimi, x arqali' funkciyani'n' argumenti belgilengen. Ayqi'n mi'sal retinde 18-kestede keltirilgen mag'li'wmatlardi' interpoliyaciyalawdi' keltiremiz.

18-keste

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	8	27	64	125	216	343

Biz izlenip ati'rg'an funkciyani' 4-da'rejeli polinom, yag'ni'y $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ tu'rine iye dep boljaymi'z ha'm sonli'qtan

Mathematica tilinde

```
data = {{1,1},{2,8},{3,27},{4,64},{5,125},{6,216},{7,343}};
Fit[data,{1,x,x^2,x^3,x^4},x]
```

tu'rindegı an'latpani' jazami'z. Kompiuter bizge

$$3.387545 \times 10^{-13} - 4.828166 \times 10^{-13}x + 2.109351 \times 10^{-13}x^2 + 1.0x^3 + 2.029032 \times 10^{-15}x^4$$

na'tiyjesin beredi. Bul an'latpadag'i' a_0 ha'm basqa da koefficientlerdin' x^3 shaması'ni'n' aldi'nda turg'an koefficientten (yag'ni'y 1 den) ju'da' kishi yekenligin yesapqa ali'p izlep ati'rg'an funkciyami'zdi'n' $y = x^3$ tu'rindegı funksiya yekenligine ko'z jetkeremiz.

Biz yendi 18-kestede keltirilgen polinomdi' u'shinshi ta'rtpke iye, yag'ni'y $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ tu'rine iye dep boljaymi'z. Bunday jag'dayda ma'seleni sheshiw ushi'n

```
data = {{1,1},{2,8},{3,27},{4,64},{5,125},{6,216},{7,343}};
Fit[data,{1,x,x^2,x^3},x]
```

tu'rindegı an'latpani' jazi'wi'mi'z kerek. Kompiuter

$$-1.255589 \times 10^{-13} + 7.446425 \times 10^{-14}x - 1.870361 \times 10^{-14}x^2 + 1.0x^3$$

na'tiyjesin beredi. Al ali'ng'an an'latpadag'i' kishi yekenligin yesapqa ali'p $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ dep yesaplasaq, onda

$$1.0000000000000002x^3$$

an'latpasi'n alami'z.

Demek yen' kishi kvadratlar usi'li'n o'z ishine qamti'ytug'i'n *Fit* funkciyasi' menen eksperiment na'tiyjelerin interpoliyaciyalaw joqari' da'llikte ju'rgiziledi yeken.

Paydalani'lg'an a'debiyatlar dizimi

1. Э.Уиттекер, Г.Робинсон. Математическая обработка результатов наблюдений. Государственное технико-теоретическое издательство. Москва-Ленинград. 1933. 364 с.
2. Ferdinand F. Cap. Mathematical Methods in Physics and Engineering with Mathematica. A CRC Press Company Boca Raton London New York Washington, D.C. 2003. 339 p.
3. Stephen Wolfram. Mathematica Book. 5th ed. Wolfram Media. 2003. 1301 p.
4. Gerd Baumann. Mathematica in Teoretical Physics. Electrodynamics, Quantum Mechanics, General Relativity and Fractals. Second Edition. Springer-Verlag. 1993. P. 544-942.
5. James M. Feagin. Quantum Methods with Mathematica. Springer-Verlag. 1993. 482 p.
6. Джон Уокенбах. Microsoft Excel 2010. Библия пользователя. Издательство "Диалектика". Москва. 2011. 912 с. Д.М.Златопольский. 1700 заданий по Microsoft®Excel. Издательство "БХВ-Петербург". Санкт-Петербург. 2003. 544 с.
7. Конрад Карлберг. Бизнес-анализ с использованием Excel. Решение практических бизнес-задач. Издательство "Вильямс". Москва. 2012. 576 с.
8. Билл Джелен, Майкл Александер. Сводные таблицы в Microsoft Excel 2010. Издательство "Вильямс". 2011. 464 с.
9. Дж.Сквайрс. Практическая физика. Издательство "Мир". Москва. 1971. 246 с.
10. Н.С.Кравченко, О.Г.Ревинская. Методы обработки результатов измерений и оценки погрешностей в учебном лабораторном практикуме. Издательство Томского политехнического университета.

2011. 88 с.

11. В.И.Шутов, В.Г.Сухов, Д.В.Подлесный. Экспериментальная физика. Издательство ФИЗМАТЛИТ. Москва. 2005. 184 с.

12. З.И.Авдусь, М.М.Архангельский, Н.И.Кошкин, О.Д.Шебалин, В.Ф.Яковлев. Практикум по общей физике. Под редакцией профессора В.Ф.Ноздрева. Издательство "Просвещение". Москва. 1971. 312 с.

13. А.В.Кортнев, Ю.Б.Рублев, А.Н.Куценко. Практикум по физике. Издательство "Высшая школа". Москва. 1965. 568 с.

14. А.Н.Зайдель. Элементарные оценки ошибок измерений. Издательство "Наука". Ленинградское отделение. Ленинград. 1968. 98 с.

15. О.Н.Касаандрова, В.В.Лебедев. Обработка результатов наблюдений. Издательство "Наука". Москва. 1970. 104 с.

16. М.А.Никитин, С.В.Анферова. Физический практикум по механике. Издательство Калининградского государственного университета. Калининград. 2001. 102 с.

17. В.Г.Сидякин, Ю.М.Алтайский. Техника физического эксперимента. Издательство Киевского университета. Киев. 1965. 192 с.

18. М.А.Фаддеев. Элементарная обработка результатов эксперимента (учебное пособие). Издательство Нижегородского государственного университета имени Н.И.Лобачевского. Нижний Новгород. 2010. 122 с.

19. В.А.Яворский. Планирование научного эксперимента и обработка экспериментальных данных. Издательство Московского физико-технического института (государственный университет). Долгопрудный. 2006. 24 с.

20. П.В.Новицкий, И.А.Зограф. Оценка погрешностей результатов измерений. Энергоатомиздат. Ленинград. 1991. 304 с.

21. Ю.В.Линник. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Государственное издательство физико-математической литературы. Москва. 1958. 334 с.

22. Л.Н.Третьяк. Обработка результатов наблюдений. Издательство Оренбургского государственного университета. Оренбург. 2004. 78 с.

23. Г.М.Серопян, И.С. Позыгун. Обработка результатов измерения физических величин: Лабораторный практикум (для студентов физического факультета). Издательство Омского государственного университета. Омск. 2004. 20 с.

24. Он-лайн расчет линейной регрессии методом наименьших квадратов.<http://www.chem-astu.ru/science/lsg/>

25. <http://reference.wolfram.com/mathematica/ref/Fit.html>

A.Abdikamalov, J.Akimova, X.Turekeev, R.Xojanazarova

Uli'wma fizika boyi'nsha laboratoriyali'q praktikumda o'tkerilgen eksperimentler na'tiyjelerin qayta islew usi'llari'

Ma'mleketlik universitetlerdin' studentleri ushi'n oqi'w qollanbasi'

"Mirazuz Nukus" ЖШЖ баспаханасында басылды.

Өзбекстан Республикасы баспа сөз хәм хабар агентлигиниң

20013-жыл 10-майдағы № 11-3059 лицензиясы.

Көлеми 7 баспа табақ. Қағаз көлеми 60x84 1/16.

Буйыртпа № 27. Тиражы 50 нусқа.

Офсет усылында басылды.