В.Фредерикс

Эйнштейнниң салыстырмалықтың улыўмалық принципи

(Қарақалпақ тилине аўдарған Б.Әбдикамалов)

Эйнштейнниң салыстырмалықтың принципи бойынша ең биринши жумысы ретинде 1914-жылы Берлин Илимлер Академиясының протоколларында пайда болған „Pie formale GrundSagen der allgemeiner Relativitatstheorie") (Улыўмалық салыстырмалық теориясының формал тийкарлары) (Berlin. Sitzungsberiehte der Preussischen Akademie der Wissenscften. 1914. T. XLI) жумысын қабыл етиў керек. Бир қанша дүзетиўлер қосымшалар киргизилген бул жумыс 1916-жылы Annalen d.Physik журналында жарық көрди. Мақаланың оттисклери сатыўға тарқатылды. Усының салдарынан Эйнштейнниң жумысы көпшиликке белгили болды. 1915-1916 жыллары Лейденде салыстырмалылық теориясы бойынша лекциялар оқыған Lorentz бул теорияны «Эйнштейнниң тартылыс теориясы», математик Hubert 1915-1916 жыллары жарық көрген мақалаларын «Die Grundlagen der Physik» (Физика тийкарлары), ал математик Weyl 1918-жылы шыққан ҳәм бул теорияға бағышлаған китабын „Raum, Zeit, Malerie" (Кеңислик, ўақыт, материя) деп атады. Усы атлардың өзи Эйнштейн тәрепинен дөретилген теорияның барлық физиканы қамтыйтуғынлығын көрсетеди, ал бундай теорияның үлкен қызығыўшылықты пайда етпеўи мүмкин емес. Сонлықтан бул теория пайда болыўдан оның менен Lorentz, Hubert, Weyl усаған атақлы физиклер менен математиклер шуғыллана баслады. Бирақ теорияны белгили бир дәрежеде толық ҳәм тийкарлы етип баянлаў физиклер ушын үлкен қыйыншылық пайда ететуғын жүдә қурамалы математикалық аппаратты талап етеди. Бул теорияны көпшилик ушын баянлаў оның каншама жақсы жазылғанлығына қарамастан түсиниксиз, дәл емес, думан тәризли образларды ғана бере алады. Бул мақала да қысқа болғанлығына байланыслы Эйнштейнниң теориясына жеткиликли дәрежеде толық түсиник бере алмайды. Оның мақсети тийкарғы жағдайларды анықлаў ҳәм соларды еки ямаса үш салыстырмалы әпиўайы мәселелерди шешиў ушын қолланыў болып табылады (мысалы дәслепки ўақытлары көп шаўқым пайда еткен Меркурийдиң перигелийиниң қозғалысы ҳәм Қуяштың тартылыс майданындағы жақтылық нурының бағытының өзгериси). Эйнштейнниң басшылыққа алған тийкарғы жағдайларын дурыслығы тастыйықланған ҳәм гүман пайда етпейтуғын теоремалардан дедуктивлик усыл менен келтирип шығарыў мүмкин болған теоремалар деп қараўға болмайтуғынлығы өз-өзинен түсиникли. Теорияның тийкарларын түсиндириў усы теорияның дөретилиўине себеп болған жағдайларды ҳәм усы жағдайлардың не себепли тийкарғы екенлигин түсиндириў (дурысырағы сол жағдайларды избе-изликте атап өтиў) болып табылады. Теорияның дурыслығына дәлилди a priori де емес (алдын ала емес), ал a posteriori де (алынған нәтийжелери бойынша) излеў керек. Бирақ Эйнштейнниң теориясында нәтийжелериниң эксперименталлық тастыйықланыўы ямаса усы теория тийкарында усы ўақытларға шекем белгисиз болған қубылысларды болжаўлар әҳмийетке ийе болмайды. Эйнштейн теориясының тийкарлары оғада үлкен принципиаллық мәниске ийе, усы мәнистен теорияның ең баслы қәдирлилигин излеў керек. Ал Эйнштейн теориясын тастыйықлайтуғын бир неше тәжирийбелер (бул тәжирийбелер қаншама әжайып түрде өткерилген болса да) принципиаллық мәниске ийе емес.

Геометрия ҳәм физика. Эйнштейнге шекем геометрия менен физика ҳәр қыйлы болған еки илим сыпатында қабыл етилип келди. Физикада геометрияға физикаға қатнасы бойынша сыртқы бир нәрсе сыпатында қаралды. Физиканың ҳақыйқый мазмуны тәжирийбеде, тек тәжирийбеде берилди. Үш өлшемли кеңисликтиң Евклид геометриясы тек ғана рамка (зәрүрли болған рамка) хызметин атқарды. Себеби барлық физикалық қубылыслар усы қубылысларға пүткиллей байланыссыз болған кеңисликте өтеди. Бирақ ҳәзирги ўақытлары «дара (гейде арнаўлы) салыстырмалылық теориясы» деп аталатуғын теорияда (1905-жыл) Minkowski Евклид геометриясының барлық белгилерине ийе емес 4 өлшемли кеңисликтиң геометриясынан пайдаланды. Бул геометрия физика менен усы геометрияға кириўши жақтылықтың тезлигине тең турақлы шама менен байланысқан. Бул геометрияда узынлық элементи $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$ аңлатпасы жәрдеминде анықланады. Бул аңлатпадағы x, y, z кеңислик координаталарын аңлатады, t ўақыт, ал c жақтылықтың тезлиги. Бул Евклид геометриясы емес, себеби Евклид геометриясында болса $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dc^2t^2$ аңлатпасына ийе болған болар едик. Буннан басқа бул геометрияда жақтылықтың тезлиги c қатнасатуғын болғанлықтан физика менен байланысқан деп есаплаймыз. Бирақ Minkowski геометриясына формал характерге ийе нәрсе сыпатында каралды ($\sqrt{-1}$ ге қараған сыяқлы) ҳәм физика менен геометрия арасында тығыз байланыс еле де орын алған жоқ.

Солай етип физика ушын геометрия қандай да бир сыртқы, мазмуны бойынша өзге рамка болып есапланды. Ал базы бир геометрлер физиканы тәжирибелериниң нәтийжелери геометрияның тийкарларын тастыйықлаў ушын зәрүр болған илим деп қабыл етти.

Биз бул жерде тәжирийбе менен аксиомалар ямаса олар жәрдеминде келтирилип шығарылған геометрияның теоремалары арасындагы байланыс ҳаққындағы мәселени караў менен шекленемиз. Бул пунктти анықлаў Эйнштейнниң геометрияға болған көз карасларын түсиниў ушын әҳмийетке ийе.

Тек бир Евклид геометриясы бар ўақытта оның аксиомаларының «физикалық» ҳакыйқат екенлигине ҳеш бир гүман пайда болған жоқ. Бирақ усыған қарамастан Гаусс үш мүйешликтиң ишки мүйешлериниң қосындысының еки туўры мүйешке тең екенлигин тексерип көриў ушын тиккелей тәжирийбениң қойылыўы зүрүр деп есаплады. Лобачевский, Риман ҳәм басқалардың геометрияларының пайда болыўы менен геометрияны тәжирийбеде тексерип көриўдиң зәрүрлиги үлкен әҳмийетке ийе бола баслады. Евклидтиң бир постулаты бойынша берилген ноқат арқалы берилген туўрыға параллел етип тек бир туўрыны жүргизиў мүмкин. Ал Лобачевскийдиң геометриясы бул постулатты бийкарлайды ҳәм сол ноқат арқалы берилген туўрыға параллел етип шексиз көп санлы туўрыларды өткериў мүмкин деп тастыйықлайды. Риманның сфералық геометриясы деп аталатуғын геометрия өз ара параллел болған туўрылардың болыўын пүткиллей бийкарлайды. Лобачевский де, Риман да Евклидтиң басқа барлық аксиомаларын қабыл етеди. Усы геометриялардың екеўи де логикалық жақтан мүмкин ҳәм ҳеш кандай ишки қарама-карсылықларға ийе емес. Үш мүйешликлердиң ишки мүйешлери ушын Лобачевский де, Риман да еки туўры мүйешке тең мүйеш таппайды. Лобачевскийде мүйешлердиң қосындысы еки туўры мүйештен киши, ал Риманда болса үлкен. Гаусс өзи жүргизген тәжирийбеде бақлаўлардың қәтелиги шеклеринде үш мүйешликтиң ишки мүйешлериниң қосындысының еки туўры мүйешке тең екенлигине ийе болды. Мүйешлерди өлшеўди үлкен дәлликте жүргизиў мүмкин. Сонлықтан Гаусс тәжирийбесиниң жуўмақларын ҳақыйқый «физикалық» кеңисликтиң (барлық физикалық қубылыслар жүзеге келетуғын кеңислик, ал логикалық қурыў мүмкин болған кеңислик емес) әдеттеги биз ушын таныс болған Евклид кеңислиги екенлигиниң дәлили сыпатында караў мүмкин. Бирақ, бириншиден, Евклид геометриясынан айырма жүдә киши болыўы мүмкин. Бундай жағдайда бул айырма тәжирийбелердиң дәллиги шеклеринде сезилмейди. Екиншиден тәжирийбе үлкен дәлликте үш мүйешликтиң ишки мүйешлериниң қосындысының еки туўры мүйешке тең екенлигин көрсеткен болса да төменде гәп етилетуғын оғада әҳмийетли болған жағдайды есапқа алғанда физикалық кеңисликти Евклидлик деп айта алмаймыз.

Биз тәжирийбе еки туўры мүйештиң қосындысынан кем болған мүйешти берди деп есаплайық. Буннан физик Евклид геометриясы дурыс емес деп жуўмақ шығара алама? Ең дәслеп ол мүйеш калай өлшенди деп сораған болар еди. Оған мүйешлерге бөлинген шеңбер ҳәм көриў трубасы жәрдеминде деп жуўап берилген болар еди. Көриў трубасын қолланыў жақтылық нурын үш мүйешликтиң еки төбесин тутастыратуғын туўры сызық сыпатында қабыл етиўди аңлатады. Бундай жағдайда физик еки туўры мүйештиң қосындысынан аўытқыўды Евклид геометриясының дурыс емеслиги менен байланыстырмайды, ал жақтылық нурының «қыйсайыўы» менен байланыстырады. Ал Лобачевский геометриясының көз-қарасында турған физик болса Лобачевскийдиң сәйкес теоремасынан аўытқыўды нурдың «қыйсайыўы» менен түсиндирер еди (керисинше, қосынды еки туўры мүйешке тең болып шықсада Лобачевский геометриясы көз-қарасларында турыўды қәлеўши физик Лобачевский теоремасына сәйкес келмесликти нурдың «қыйсайыўы» менен түсиндирген болар еди). Бирақ нурдың қыйсайыўы ҳаққында айтып турған физик сол қыйсайыўларды кандайда бир жоллар менен анықлаў мүмкин деп, ал буны әмелге асырыў ушын ҳақыйқый туўры сызықты беретуғын басқа бир «физикалық» аппарат керек деп есаплайды. Усы «ҳақыйқый сызық» пенен жақтылық нурын салыстырып жақтылық нурының ҳакыйқатында да қыйсайғанлығын көрсетип жаңа аппарат ишки мүйешлердиң қосындысының еки туўры мүйешке тең екенлигин дәлиллеген болар еди. Бирақ оның «қуўанышы» тек «үстиртин» болады ҳәм узаққа бармайды Лобачевский көз-қарасында турған адам жаңа аппараттың ҳақыйқатында да туўры сызықты беретуғынлығын дәлиллеўди сораған болар еди. Ал бизиң физик болса басқа аппаратты ойлап таппай бул сораўға жуўап бере алмаған болар еди. Аппаратларды шексиз көп түрли етип ойлап таба бериў мүмкин емес болғанлықтан биз өзимиздиң тийкарғы аппаратымызға (жақтылық нурына) туўрының (сызықтың) қәсийетин бериўге мәжбүр боламыз. Бирақ жоқарыда айтылғанларға байланыслы жақтылық нурына туўры сызықтың қәсийетин бериў бизиң пүткиллей бизиң ықтыярымызға байланыслы болып шықты. Бул жағдайға биз мына себеплерге байланыслы дыққат аўдардық: Эйнштейн тәрепинен пайдаланылған геометрия Евклид геометриясы емес. Усыған байланыслы Эйнштейн теориясының дурыс ямаса дурыс емеслиги Евклид геометриясының дурыс ямаса дурыс емес екенлигиниң дәлили сыпатында көриниўи мүмкин. Бирақ олай емес. Евклид геометриясын дурыс деп есаплаўшылар Эйнштейнниң көз-қарасларынан ҳәм теорияларынан ғәрезсиз өзлериниң пикирлеринде тура бериўи мүмкин. *Бирақ бундай жағдайларда ол тийкарғы өлшеў әсбаплары болған жақтылық нурын, сызғыштың қырын туўрылар деп есаплаўдан бас тартыўы керек.* Егер жақтылық нурын туўры, сызығыштың қырын туўры деп есаплайтуғын болсақ, онда Гаусс тәрепинен өткерилген өлшеўлерге қарағанда дәл өткерилген өлшеўлер Евклид геометриясынан аўытқыўды береди.

Бирақ өткерилген бақлаўлардың қандай жуўмақларды бергенлигинен ямаса беретуғынлығынан ғәрезсиз *принципиаллық көз-қарастан туўры физикалық жақтан жақтылық нурының жәрдеминде анықланатуғын болса*, онда *физикалық кеңислик ушын қандай геометрияның дурыс екенлигин тек тәжирийбе көрсете алады*. Бирақ геометриялардың саны оғада көп. Оларды экспериментлерде қалай тексерип көремиз? Геометриялардың қандай жуўмақларын ҳәм талапларын тексерип көриў керек? Өзгермейтуғын фигуралардың орын алмасыўы мүмкин (кеңисликтеги фигураны бир орыннан екинши орынға көшириў, қатты денелердиң бар екенлиги ҳәм басқалар) геометриялар саны оғада көп. Олардың баслылары: Лобачевский, Риман, Евклид геометриялары. Геометриялардың әдеўир үлкен классын Риман геометриялары деп аталатуғын геометриялар өз ишине алады. Өзиниң геометрияларының тийкарына Риман тийкарғы етип узынлық элементин жатқарады.

Мейли биз n өлшемге ийе кеңисликке ийе болайық. Усы кеңисликтеги ноқаттың аўҳалын анықлайтуғын n координатаны $x_1, x_2, \ldots, x_n$ деп белгилейик. Доғаның узынлығының элементи ds болсын. Бул геометрия ушын

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k$$

аңлатпасы характерли аңлатпа болып табылады. Бул аңлатпадағы a_{ij} шамасы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лердиң функциясы болып табылады ҳәм қарап атырылған геометрия ушын характерли шама болып табылады. Ҳәр бир геометрия ушын a_{ij} базы бир анық түрге ийе болады. Мысалы Евклид геометриясы ҳәм үш өлшемли кеңислик ушын

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

ал Лобачевский геометриясы ушын

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_3^2 + dx_3^2}{1 - \frac{a^2}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}.$$

Бул аңлатпадағы а базы бир турақлы шама.

$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx_k$ деп жазыў арқалы биз тек параллеллер ҳаққындағы Евклид аксиомасынан ғана емес, ал басқа да базы бир аксиомалардан қутыламыз. Соның менен бирге улыўма жағдайларда фигураларды бир орыннан екинши орынға көшириў ямаса бир бириниң үстине қойыў аксиомалары дурыс болмай шығады (бал аксиомалар Евклидте жоқ). Бул Эйнштейн бойынша ҳәр бир геометрия ушын жазылған қатнас тәжирийбеде тексерилип көрилген болыўы керек. Әлбетте бул жерде идеал ойдағы тәжирийбениң орын алыўы мүмкин. Ал ҳақыйқатында ds аңлатпасы тәжирийбеде тексерилмейди, ал оннан келтирилип шығылатуғын жуўмақлар тексериўлерге ушырайды. Егер тәжирийбе үш өлшемли кеңисликте $i \neq k$ ушын $a_{ij} = 0$ ны, ал i = k ушын $a_{ij} = 1$ ди беретуғын болса, онда биз Евклид геометриясына ийе боламыз. Ал a_{ij} шамасы координаталардың функциясы болса, онда характери усы функцияның түринен ғәрезли болған геометрияға ийе боламыз.

Эйнштейнниң «арнаўлы» принципинде ўақыт кенисликтеги өлшемлер менен тығыз байланысқан ҳәм олардан айрылмайтуғын шама сыпатында каралады. Сонлықтан төрт өлшемли кеңлисликке ийе боламыз ҳәм бул жағдайда ўақыт координаталардың биреўиниң орнын ийелейди. Ҳәр бир физикалық кубылыс усы қубылыс жүз берген орын (үш кеңисликлик координата) ҳәм қубылыс жүз берген ўақыт моменти менен анықланады (ўақыт координатасы). Бул төрт координаталардың өсиминен узынлық элементи ушын аңлатпа алынады:

$$ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k, \quad i,k = 1,2,3,4;$$

Бул аңлатпадағы төрт координата да бирдей орынды ийелейди. Бирақ ўақыт (айтайық x_4 арқалы белгиленген болсын) кеңисликлик x_1, x_2, x_3 координаталары менен бир емес. Hilbert тәрепинен барлық теориялларда да ўақыт координатасы өзине тән қәсийетлерге ийе болыўы ушын a_{ij} шамалары қанаатландыратуғын шәртлер анықланды.

Эйнштейнниң биринши қәдеси. Солай етип Эйнштейнниң биринши қәдесиниң мәниси төмендегиден ибарат:

Узынлық элементи

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k, \qquad i,k = 1,2,3,4$$

формуласы жәрдеминде анықланады ҳәм a_{ij} функциясының мәнисиниң неге тең екенлигин тәжирийбе анықлайды.

Геометрия ҳәм механика. Ньютон механикасы туўры сызықлы ҳәм тең өлшеўли қозғалысқа айрықша әҳмийет береди. Егер бир берилген координата системасының орнына усы координата системасына салыстырғанда туўры сызықлы ҳәм тең өлшеўли қозғалатуғын басқа системаны алатуғын болсақ, онда буны туўрыдан туўры койылған физикалық тәжирийбе жәрдеминде анықлаў мүмкин емес. Басқа түрли қәлеген қозғалыс тәжирийбеде бақланады. Себеби бундай жағдайларда жаңа күшлер пайда болады. Әпиўайы мысалды – шеңбер бойынша қозғалысты қарайық. Бул жағдай бизге еки әҳмийетли фактти көрсетиўге мүмкиншилик береди. Биринвиси принципиаллық характерге, ал екиншиси эксперименталлық характерге ийе.

Шар формасына ийе физикалық денени алайық ҳәм барлық кеңисликте бул шардан басқа дене жоқ деп есаплайық. Биз усы шар айланама ямаса айланбайма деген сораўға жуўап бере аламыз ба? Бул сораўға жуўап бериў ушын шардан сыртта ҳеш бир физикалық дене ямаса физикалық ноқат жоқ. Биз шардың бетинде ямаса оның ишинде ненің болатуғынлығына қараўымыз керек. Мейли биз шардың бетинде базы бир шамадағы орайдан қашыўшы күшти тапқан болайық ҳәм шардың полюслеринде бир канша қысылғанлығын, Фуко маятнигиниң тербелис тегислигиниң айланатуғынлығын байқаған болайық. Усының тийкарында биз шарды айланып тур деп болжаймыз ҳәм ҳәтте оның айланыс тезлигин де есаплаймыз. Бирақ дәрҳәл сораў туўылады: неге салыстырғанда шар айланады. Өйткени әтирапта салыстырарлықтай физикалық дене жоқ деп есаплаған едик қо. Әлбетте өзи тәрепинен сезилмейтуғын, ишинде ҳеш бир физикалық дене жоқ қандай да бир кеңисликтиң болыўы керек. Әне усы «абсолют», физикалық емес кеңисликке салыстырғанда шардың айланыўы орын алады. Бирақ физикалық ҳақыйқатлыққа ийе емес «нәрселер» физикалық бақлаўларда сезилмейди ҳәм олар физикаға тийисли емес. Бундай абсолют кеңисликке исениўге де болады, исенбеўге де болады. Бирақ физикалық қубылысларды түсиндириў ушын ҳақыйқый физикалық объект деп алыўға болмайды. Бирақ бундай жағдайларда Ньютон механикасы «физикалық» жуўап бериў мүмкин емес сораўларға жуўап бере алады деп айтыўға туўра келеди. Бул парадокс ҳәм оған биринши болып Mach итибар берди. Einstein бул умытылған парадоксты қайтадан еске түсирди ҳәм оған жуўап берди: улыўма айтқанда Ньютон механикасы дурыс емес. Ҳақыйқый механика бундай шар ушын орайдан қашыўшы күшти де, Фуко маятнигиниң тербелис тегислигиниң айланысын да ҳ.т.б. бермейди – бул күшлер менен қубылыслардың барлығы да айланыс басқа бир «физикалық» кеңисликке салыстырғанда әмелге асқанда ғана пайда болады. Туўры сезықлы тең өлшеўли қозғалыс та ҳеш қандай әҳмийетке ийе болмай қалады. Тап сол сыяқлы шеңбер бойынша қозғалыс ҳәм олардың мүмкин болған барлық қозғалыслары да өз-ара бирдей. Егер тек бир шарға ийе болсақ, басқа ҳеш нәрсе де болмаса, онда биз оны айланып тур, жылжып баратыр, тынышлықта тур ҳәм басқа да ҳалларда тур деп айта аламыз. Бирақ ҳеш бир физикалық қубылыс бул қозғалысларды таба (сезе) алмайды. Себеби бул айтылған қозғалыслардың барлығы да «физикалық» кеңисликке салыстырғанда емес, ал ҳақыйқый кеңисликке сәйкес келмейтуғын бизиң ойымызға (қыялымызға) салыстырғанда жүзеге келтирилген. Усындай әўлад механиканың мүмкин екенлигин көрсетиў Эйнштейнниң уллы хызмети болып табылады.

Айланыў орын алғанда бақланатуғын әҳмийетли факт орайдан қашыўшы күштиң барлық ўақытта да айланыўшы денениң массасына пропорционаллығында. Ньютон нызамы бойынша тартысыў күши де массаға пропорционал. Ньютон нызамы аңлатпасында масса тартысыўды пайда етиўши себеп сыпатында қатнасады. Ал айланбалы қозғалыстың себебинен пайда болатуғын орайдан қашыўшы күштиң аңлатпасында масса пүткиллей пассив орынды ийелейди. Күшти актив түрде пайда ететуғын масса ҳәм әпиўайы санлық коэффициент болған инерт ямаса пассив масса тәжирийбеде тексерилгенде оғада үлкен дәлликте бир бирине тең болып шығады. Бул әйтеўирден әйтеўир келип шыққан факт емес, ал Ньютон механикасы бул фактти түсиндире алмайды. Ньютон өзиниң екинши нызамында инерт масса көбейтилген тезлениў күшке тең деген жағдайды тек постулат сыпатында усынады. Актив, тартылысты пайда ететуғын масса менен пассив, инерт массаның бирдейлигин Эйнштейн принцип дәрежесине жеткереди ҳәм оны эквивалентлик принципи деп атайды.

Тынышлықта турған K есаплаў системасын көз алдымызға елеслетейик. Мейли бул координатаға салыстырғанда K' есаплаў системасы тең өлшеўли тезлениўши ҳәм туўры сызық бойынша қозғалатуғын болсын. K ға салыстылғанда туўры сызықлы траектория бойынша қозғалатуғын материаллық ноқат K' та парабола бойынша қозғалады. Егер K' тың қозғалыс бағыты менен параболаның көшери ушын x көшери алынатуғын болса, онда K' системасында

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g = \text{турақлы.}$$

Егер m арқалы ноқаттың массасы берилген болса, онда $m\frac{d^2x}{dt^2}=mg$ түринде жазылған хәр бир теңлемени инерт масса менен тезлениўдиң көбеймеси ҳәм mg күшиниң теңлигиниң аңлатпасы сыпатында қараў мүмкин. Эквивалентлик принципи тийкарында mg күшин тартылыс күши деп қараў мүмкин. Сонлықтан бул жағдайда m массасы инерт масса емес, ал Жердиң бетинде $\frac{mM}{r^2}$ (m арқалы салмақлы денениң массасы, M арқалы Жердиң массасы, r арқалы Жердиң радиусы белгиленген) салмақты пайда ететуғын актив масса деп қараў мүмкин. Қала берсе бул жағдайда m күшти қоздырыўшы болып табылады.

Солай етип системаның тезлениўши ҳәм туўры сызықлы қозғалысы бақлаўшы тәрепинен сезилмеўи де мүмкин екен (тезлениўши қозғалыс тартылыс майданына эквивалент деп есаплайтуғын болсақ, бундай жағдайда бақлаўшы өзи әтирапында толып атырған қубылысларды тартылыстың салдары деп қабыл етеди). Орайдан қашыўшы күшти де эквивалентлик принципи тийкарында өзиниң тәбияты бойынша салмақ күшине сәйкес келиўши ҳәм оннан айырмасы жоқ күш сыпатында қараў мүмкин. Усындай сөзлерди қозғалыўшы дене менен байланысқан координаталар системасында кинематикалық пайда болатуғын барлық күшлер ҳаққында айтыў мүмкин.

Тәбиятта өзиниң дөгерегинде тартылыс майданы деп аталатуғын майдан пайда ететуғын массалар бар. Егер биз қандайда бир K^* координатасын алатуғын болсақ, онда тартылыс майданының характери бизиң қайсы координаталар системасын сайлап алғанымызға байланыслы болады. Егер биз K^* ға салыстырғанда қозғалыўшы басқа бир K^{*}’ координаталар системасын сайлап алсақ басқа тартылыс майданына ийе боламыз. K^{*}’ координаталар системасы менен бирликте биз қозғалатуғын болсақ K^{*}’ те болып атырған барлық кубылысларды K^{*}’ тың K^* ға салыстырғандағы қозғалысы менен байланыстырмаған, ал K^{*}’ теги майдан менен байланыстырған болар едик (бул системадағы майдан K^* теги майданнан басқа).

Бирақ ықтыярлы түрде алынған бир координаталар системасынан екиншисине өтиў физикалық кеңисликтиң геометриясының қәсийетлерин анықлайтуғын a_{ik} функцияларының өзгерисине алып келеди. Егер бир координаталар системасында

$$ds^2=\sum_{ik}a_{ik}dx_idx_k \qquad i,k=1,2,3,4$$

аңлатпасына ийе болсақ, онда K^{*}’ системасы ушын мынаны аламыз

$$ds^2=\sum_{ik}a'_{ik}\,dx'_i\,dx'_k.$$

Координаталар x_i менен x'_i арасындағы байланыс ықтыярлы болғанлықтан $a_{ik}\neq a'_{ik}$ екенлиги өз-өзинен көринип тур.

Енди бир координаталар системасынан екиншисине өтиў тек тартылыс майданын ғана емес, ал физикалық кеңисликтиң геометриясын да өзгертеди деп есаплаўға туўра келеди Бул жағдай тартылыс майданы менен a_{ik} арасында байланыстың бар екенлигин көрсетеди.

Усындай тийкарда Эйнштейн a_{ik} шамаларын тартылыс потенциаллары деп атады ҳәм оларды Жердеги еркин түсиў тезлениўиниң белгилениўине сәйкес g_{ik} арқалы белгиледи. Бирақ бул ат жоқарыда айтылған тартылыс пенен геометрия арасындағы параллеликтен басқа хеш нәрсени өз ишине қамтымайды.

Эйнштейнниң екинши тийкарғы қәдеси. Солай етип Мах парадоксын қарап Эйнштейн бир туўры сызықлы ҳәм тең өлшеўли координаталар системасынан екинши туўры сызықлы ҳәм тең өлшеўли координаталар системасына өтиўдиң мүмкин екенлиги менен бир қатар барлық координаталық түрлендириўлердиң мүмкин екен деген жуўмаққа келди (буған қозғалыс та киретуғын болғанлықтан жаңа x'_i, $i = 1,2,3,4$ координаталары төрт x_i, $i = 1,2,3,4$ координаталарының ықтыярлы функциялары бола алады).

Эйнштейнниң үшинши тийкарғы қәдеси. Эквивалентлик принципин қарап Эйнштейн мына жуўмаққа келеди: *Физикалық кеңисликтиң қәсийетлерин анықлаўшы доға элементи, яғный*

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} dx_i dx_k \qquad i,k = 1,2,3,4$$

өз ишине 10 дана g_{ik} *функцияларын алады. Берилген координаталар системасындағы геометрияның формасы да, тартылыс майданы да усы функциялардын ғәрезли болады.*

Эйнштейнниң төртинши тийкарғы қәдеси.

Жоқарыда келтирилген тийкарында механика менен физиканы дүзиў ушын және де бир ескертиўди есапқа алыў керек. Егер координаталар системасын сайлап алыў ықтыярлы түрде жүргизилетуғын болса, онда оның жәрдеминде тәбиятты қалай тәриплеймиз? Биз тәрептен ықтыярлы түрде жүргизилген ислерден ғәрезсиз болған нәтийжелерди қалай аламыз? Тәбияттың нызамлары бизиң ықтыярымыздан ғәрезсиз ғо. Бул сораўларға жуўап өз өзинен бериледи: тәбияттың нызамлары бизиң ықтыярымыздан ғәрезсиз болғанлықтан, ол нызамлар да биз тәрептен сайлап алынған координаталар системаларынан ғәрезсиз болыўы керек. Математика тилинде тәбияттың нызамлары қәлеген координаталық түрлендириўлерге қарата инвариант болыўы керек. Данышпан Эйнштейнге координаталар системасын сайлап алыўдан ғәрезсиз ҳәм инвариант болған физика менен механиканың нызамларын табыўдың ҳәм дүзиўдиң сәти түсти. Механика менен физиканың тийкарғы теңлемелерин тәриплеўге биз ҳәзир өтемиз. Усыған шекем айтылғанлардың Эйнштейн тәрепинен жүрип өтилген жолды ғана түсиндиреди. Ал оның қәделериниң дурыс екенлигин көрсетиў хызметин атқара алмайды (Эйнштейнниң тастыйықлаўлары Ньютон механикасының сәйкес тастыйықлаўлары алдында айқын артықмашлықларға ийе болса да).

Эйнштейнниң тийкарғы теңлемелери. Биз теңлемелерди алыў ушын Эйнштейн тәрепинен өтилген жол менен жүрмеймиз, ал теорияны аңсатырақ жол менен баянлаған Hilbert бойынша жүремиз. Эйнштейн өзиниң дәслепки жумысларында Poisson ның $\Delta\varphi = 4\pi\rho$ теңлемесинен баслайды. Бул аңлатпадағы φ тартылыстың әдеттеги потенциалы, ρ материяның тығызлығы. Тартылыс потенциалы φ диң орнына 10 дана g_{ik}, ρ ның орнына материяның ҳалын анықлаўшы 10 дана басқа шаманы алып $\Delta\varphi = 4\pi\rho$ теңлемесин улыўмаластырыў Эйнштейнге теңлемелерин алыўға ҳәм олардың дурыслығын дәлиллеўге мүмкиншилик берди. Бирақ теңлемени улыўмаластырыў процесси усындай усыл менен алынған нәтийжелердиң мәнислерин баҳалаў ушын әпиўайы ҳәм бир мәнисли емес. Hilbert пенен биргеликте тәбиятта жүзеге келетуғын барлық ўақыялар базы бир H «дүньялық» функциясынан ғәрезли болады деп есаплаймыз. Бул H функциясы төрт x_1, x_2, x_3, x_4 координаталарынан ғәрезли болады. Олардың үшеўи кеңисликлик, төртиншиси усы координаталар системасында ўақытты аңлатады. H функциясы биз тәрепинен сайлап алынған координаталар системасынан ғәрезли емес. Бул координаталардан H функциясы төмендеги шамалар арқалы ғәрезли болады:

1) 10 дана g_{ik} функциялары ҳәм олардың x_i бойынша туўындылары; биз H тың қәлеген тәртиптеги туўындыларға ғәрезлилигин нәзерде тута алар едик: бирақ Poisson теңлемесине сәйкес биз H ты тек g_{ik} дан ҳәм биринши ҳәм екинши туўындылардан ғәрезли деп қабыл етемиз. Бул g_{ik} лар, олардың туўындылары да барлық ўақытта бир мәнисли ҳәм үзликсиз деп қабыл етемиз.

2) Материяның ҳалын анықлаўшы параметрлерден. Бундай параметрлер ретинде материяның тығызлығын, электр зарядының тығызлығын, электр потенциалын (вектор-потенциал ҳәм скаляр потенциал) көрсетиў мүмкин. Егер материя теориясына усындай параметрлер жеткиликсиз болса, онда басқа да параметрлерди пайдаланыўға туўра келеди.

Егер материяның электромагнит теориясы көз-қарасында туратуғын болсақ, усы параметрлер ретинде тек электро зарядларының тығызлығы менен векторлық ҳәм скаляр потенциаллар жеткиликли болар еди. Егер Mie ниң көз-қарасларында турсақ материя теориясын дөретиў ушын вектор-потенциалды ҳәм скаляр потенциалды билиў керек. Олардың бириншиси 3 қосындыдан туратуғын болғанлықтан x_1, x_2, x_3, x_4 лердиң функциялары болған төрт q_1, q_2, q_3, q_4 параметрлерин билиў зәрүр. Hilbert Mie теориясының тийкарында H ты q_1, q_2, q_3, q_4 параметрлеринен ҳәм олардың x_i юойынша алынған биринши туўындыларынан ғәрезли деп қабыл етти. Бирақ бундай етип есаплаў Эйнштейн теориясы бойынша шешилетуғын көп мәселелер ушын әҳмийетке ийе емес.

Солай етип „дүньялық функция" бар деп болжаймыз:

$$H = H\left(g_{ik}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}, \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l \partial x_m}, q_i, \frac{\partial q_i}{\partial x_k}\right)$$

Бул аңлатпадағы i, k, l, m = 1, 2, 3, 4.

$$J = \int H\sqrt{g}\,dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \qquad (1)$$

интегралын қараймыз. Бул интегралдағы $dx_1dx_2dx_3dx_4$ көлем элементи, g арқалы барлық g_{ik} лардан дүзилген детерминант, анықлама бойынша H инвариант. $\sqrt{g}dx_1dx_2dx_3dx_4$ шамасының да инвариант, яғный координата системасынан ғәрезсиз екенлигин көрсетиўге болады. Сонлықтан J аңлатпасы да $\sqrt{g}dx_1dx_2dx_3dx_4$ усы интегралдың вариациялары да инвариант.

Тәбияттағы барлық ўақыялар жоқарыдағы интегралдың вариациясы нолге тең болып қалатуғындай болып жүзеге келеди, яғный

$$\delta J = 0. \qquad (2)$$

Бул Эйнштейн физикасының тийкарғы нызамы болып табылады. Бул аңлатпа физиканың барлық нызамларын алмастырады (пүткил дүньялық тартылыс нызамы, Максвелл теңлемелери, массалар арасындағы тәсирлесиўлер нызамлары ҳ.т.б.).

Нызамның әмелий әҳмийети болыўы ушын H функциясының аңлатпасын билиў керек. Бул аңлатпа бизге белгили деп есаплайық. H ушын жазылған аңлатпаға 10 белгисиз g_{ik} функциялары ҳәм 4 белгисиз q_i функциялары киреди. Бирақ $\delta J = 0$ шәртинен 14 дифференциал теңлеме келип шығады. Олардың биринши 10 теңлемеси g_{ik} функцияларының вариациясынан келип шығады. Оларды биз қысқаша былай белгилеймиз[1]

$$G_{ik} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3, 4. \qquad (3)$$

Кейинги төрт теңлеме q_i функцияларын вариациялаў арқалы алынады. Оларды

$$Q_i = 0 \qquad (4)$$

деп белгилеймиз. (3)- ҳәм (4)- теңлемелер системасы бизге берилген координаталар системасындағы g_{ik} менен q_i лерди анықлаўға мүмкиншилик береди.

$\delta J = 0$ инвариантынан келтирилип шығарылған (3)- ҳәм (4)- теңлемелердиң өзлери де инвариантлар болып табылады ҳәм биз тәрепинен сайлап алынған координаталар системасынан ғәрезли емес.

---

[1] Теңлемелер саны 16, ал биз 10 теңлемеге ийе боламыз. Себеби g_{ik} ҳәм сол сыяқлы G_{ik} шамалары i ҳәм k индекслерине қарата симметриялы.

Сайлап алынған координаталар системасының ықтыярлылығы 14 теңлemeниң бир биринен ғәрезсизлигинде көринеди, бирақ олар 4 теңлик (тождество) пенен байланысқан. Бул 14 дана g_{ik} ҳәм q_i функцияларының төртеўиниң ықтыярлы түрде сайлап алынатуғынлығын билдиреди ҳәм (3)- менен (4)-теңлемелер жәрдеминде анықланбайды. 14 функциялардың ишиндеги 4 ықтыярлы мәнис пенен сайлап алынған координаталар системасы белгиленип (фиксируется) алынады.

Бирден қарағанда «дүньялық» функцияның түрин анықлаў ушын оғада үлкен кесентликлерден өтиў керек болатуғындай болып көринеди. Бирақ бул H функциясын қубылыслардың үлкен классы ушын дерлик бир мәнисли түрде анықлаўға болады. Биз усындай жағдайды мүмкин деп болжайық. Ал теория тәрептен берилетуғын жуўмақлар усындай жағдайлардың ҳақыйқаттанда да орын алатуғынлығын көрсетеди. Бундай жағдайларда q_1, q_2, q_3, q_4 параметрлери киши шамалар болыўы керек ҳәм сонлықтан олардың орнына εq_1, εq_2, εq_3, εq_4 шамаларын киргиземиз. Бул жерде ε базы бир киши сан, ал q_1, q_2, q_3, q_4 лер болса шекли мәнислерге ийе. H ты ε ниң үлкейиўши дәрежелери бойынша қатарға жаямыз. Бундай жағдайда

$$H = K' + \varepsilon L + \varepsilon^2 M + \ldots$$

Бул қатардың тек биринши ағзалары болған K’ ҳәм εL ди қараймыз. K’ тек g_{ik} дан ҳәм бул функциялардың x_i бойынша алынған биринши ҳәм екинши туўындыларынан ғәрезли. L болса g_{ik} дан, оның туўындыларынан, q_i дан, оның туўындыларынан ғәрезли. H инвариант болып табылады. K, L, M, … лер де инвариант болыўы керек. g_{ik} *ден, оның биринши ҳәм екинши туўындыларынан ғәрезли, тек сызықлы екинши туўындыларға ийе* K’ *инвариантларының санының тек бирге тең екен.* Бул факт оғада үлкен әҳмийетке ийе. Бул бирден бир инвариант төрт өлшемли кеңисликтиң Риман қыйсықлығы деп аталатуғын қыйсықлықтың шамасы болып табылады. Оны K ҳәрипи арқалы белгилеймиз. K' тың шамасы K ға ямаса K+λ ға тең болады (λ арқалы x_i ден ғәрезсиз болған базы бир турақлы шама белгиленген). Биз λ=0 деп аламыз. Бирақ кейинирек ислеген жумысларында Einstein и Weyl бул шаманың қандай үлкен әҳмийетке ийе болатуғынлығын анықлады. Бул мақалада жеткиликли орын болмағанлықтан бул мәселени талқыламаймыз ҳәм

$$K = K'$$

деп есаплаймыз.

Мейли детерминанттың $g_{\mu\nu}$ ағзасына сәйкес келиўши g_{ik} лардан пайда етилген g детерминантының миноры $D_{\mu\nu}$ болсын. $D_{\mu\nu}/g$ ны $g^{\mu\nu}$ арқалы белгилеймиз. Және мынадай белгилеўлер киргиземиз:

Мейли

$$\begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(g_{imk} + g_{mki} - g_{ikm}\right)$$

ҳәм мейли

$$\begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix} = \sum_m g^{nm} \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}; \qquad i, k, m, n = 1,2,3,4$$

болсын. Енди

$$K = -\frac{1}{2}\sum_{ik} g^{ik} K_{ik}$$

екенлигин аңсат көрсетиўге болады. Қала берсе

$$K_{ik} = \sum_l \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{Bmatrix} kl \\ l \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_{il}}\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix} + \sum_{lm}\begin{Bmatrix} kl \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} mi \\ l \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} ik \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} ml \\ l \end{Bmatrix}.$$

K_{ik} қыйсықлығы Риман тензоры деп аталады. Бул формуланы келтирип шығарыўды Bianchi диң диффернциал геометриясында табыў мүмкин. Биз улыўма жағдайларда K ушын келтирилип шығарылған аңлатпаның оғада қурамалы екенлигин көрдик. Бирақ бир қатар арнаўлы мәселелерди шешкенимизде бул аңлатпа әдеўир әпиўайыласады.

L диң аңлатпасы арнаўлы карап шығыўды талап етеди. Бирақ егер Mie теориясына сүйенген жағдайда оның аңлатпасын табыў қыйын емес. Шварцшильд Максвелл теңлемелерин Гамильтон принципинен келтирип шығарыўдың мүмкин екенлигин көрсеткен еди. Биз $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ вектор-потенциалының қосылыўшыларын q_1, q_2, q_3 арқалы белгилеймиз. Скаляр потенциал φ ды q_4 арқалы белгилеймиз. r_1, r_2, r_3 лер ρv_1, ρv_2, ρv_3 тоқларын беретуғын болсын (ρ электр зарялраның тығызлығы, v әдеттеги тезлик), r_4 тиң шамасы ρ ға тең ҳәм ақырында

$$M_{ik} = \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \qquad a)$$

болсын.

Енди

$$L' = \int\left(\sum_{ik} M_{ik}^2 - \sum_i r_i q_i\right) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

интегралын қараймыз ҳәм δL’=0 деп есаплаймыз.

Бул интегралдың вариациясы бизге Максвелл теңлемелерин береди

$$\sum_i \frac{\partial M_{ik}}{\partial x_i} = -r_k, \qquad b)$$

$$\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial M_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial M_{li}}{\partial x_k} = 0. \qquad c)$$

(Әдеттеги белгилеўлерде (а) ның орнына былайынша жазады

$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} - \frac{\partial A_1}{\partial t} = \frac{\partial q_4}{\partial x_l} - \frac{\partial q_1}{\partial x_4} = M_{14}$, $H_l = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = M_{32}$ ҳәм тағы басқалар.

(b) ҳәм (c) лардың орнына былай жазады:

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \rho \mathbf{v},$$

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{E} = \mathrm{v},$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{H} = 0).$$

Электр зарядлары жоқ кеңисликте L_i деги екинши ағза нолге айланады ҳәм биз бослық ушын жазылған Максвелл теңлемелерин аламыз.

Mie да өзиниң теориясында усындай L функциясын қарап шығады, бирақ екинши ағза $\sum_i r_i q_i$ ны q_i дың функциясы болған базы бир f шамасы менен алмастырды. Сонлықтан онда электр зарядларының тығызлығы потенциал q_i дың функциясы болып шығады. Бирақ Mie өзиниң теориясын улыўмалық салыстырмалылық принципи ушын емес, ал биринши «арнаўлы» салыстырмалылық принципи ушын жазды. Сонлықтан оның L’ шамасын Hilbert тиң «дүньялық» функциясы ушын жазылған H тың аңлатпасына тиккелей қойыў мүмкин емес. Mie ның функциясын салыстырмалылықтың улыўмалық принципинде пайдаланыў ушын оны сәйкес улыўмаластырыў керек ҳәм инвариантлар теориясында қәлеген түрлендириўге қарата инвариант аңлатпа

$$L = \int\left[\left(\sum_{iklm} M_{ik} M_{lm} g^{il} g^{km} - f\left(\sum_{ik} g^{ik} q_i q_k\right)\right)\right]\sqrt{g}\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \ldots \qquad (6)$$

аңлатпасы болып табылады. Бул аңлатпаны Hilbert H функциясының аңлатпасына екинши ағза сыпатында қояды. Бул аңлатпа K ушын жазылған аңлатпаның өлшемлерине ийе емес, соның ушын өлшемлерининң бирдей болыўы ушын L ди базы бир санлық коэффициент ε ге көбейтиў керек болады[2]. Есаплаўлар $\varepsilon = \frac{8\pi k}{c^2}$ екенлиги береди. Бул жерде k тартысыў турақлысы, c жақтылықтың тезлиги. Демек ε = 1,87*10^{-27}, яғный жүдә киши шама. Бул бизиң дүньялық функция H ты шексиз қатарға жайғанымызға сәйкес келеди.

Оғада әҳмийетли болған бир фактти атап өтемиз. q_i дың ҳәм оның биринши туўындыларының жәрдеминде алынатуғын усындай L инвариантларының саны жүдә шекли болады. Mie тек төрт инвариантты алған ҳәм олардың ишинен тек Максвелл теңлемелерин дәрҳәл беретуғынын сайлап алған.

Егер Mie ниң материяның электрлик теориясы көз-қарасында турмасақ, онда L ушын жазылған аңлатпаға басқа форма бериў мүмикн. Бир қанша мәселелерди шешиў ушын (мысалы астрономиялық мәселелрди шешиўде de Sitter менен Einstein лер) сондай басқа форма берилген. Бирақ биз кейинирек әпиўайы ҳәм жүдә қызықлы болған астрономиялық мәселелерди шешиў ушын L функциясының формасының ҳеш қандай әҳмийетке ийе болмайтуғынлығын көрсетемиз.

Солай етип биз

$$H = K + \varepsilon L$$

деп болжаймыз. Бул аңлатпада K арқалы 4 өлшемли кеңисликтиң қыйсықлығы белгиленген, ал L ушын (5) теги мәнис алынады.

Мысаллар. Енди бизлер Эйнштейн теориясының нелерди бере алатуғынлығын, оның механикалық ҳәм физикалық мәселелерди шешиўге қалай алып келетуғынлығын көрсетиў ушын базы бир айырым мәселелерди шешиўге өтиўимизге болады.

1-мысал. Кеңислик материяға ийе емес деп болжайық. Бундай жағдайда L=0 ҳәм бизде мына аңлатпа қалады:

$$L = \int K\sqrt{g}dx_1dx_2dx_3dx_4.$$

δJ = 0 шәртинен енди

$$G_{ik} = 0$$

10 теңлемеси келип шығады. Теорияның мәниси бойынша g_{ik} лар үзликсиз ҳәм бир мәнисли деп есапласақ бул дифференциал теңлемелердиң шешимлери төмендегилер болады:

егер $i \neq k$ болса $g_{ik} = 0$ ҳәм

егер $i = k$ болса $g_{ik} = 1$ ҳәм

$$g_{44} = -1.$$

(g_{44} тиң -1 ге тең болыўы x_4 тиң ўақытты аңлататуғынлығына байланыслы). Солай етип биз мынаны аламыз:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2.$$

Бундай аңлатпаға биз Эйнштейнниң «арнаўлы» салыстырмалылық принципинде ийе болған едик. Жақтылықтың тезлиги бул аңлатпаға кирмейди, себеби биз оның бирге тең етип алдық. Соның менен бирге жақтылықтың тезлиги тек x_4 тиң (яғный ўақыттың) бирлигине ғана тәсир етеди.

---

[2] Базы бир мысаллар жәрдеминде $\varepsilon = \frac{8\pi k}{c^2}$ екенлигин дәлиллеў қыйын емес. Бирақ қысқалық ушын бундай дәлиллеўди келтирмеймиз.

Материя болмаған жағдайда ds^2 *ушын әпиўайы аңлатпаға, яғный үлкен үш өлшемли кеңисликтеги Евклид геометриясына ийе болады екенбиз*[3].

2-мысал. Мейли биз базы бир x_1, x_2, x_3, x_4 ноқаты тәрепинен тәрипленетуғын жүдә киши сфераның ишинде жайласқан кеңисликти қарайық. Егер оның радиусы жеткиликли дәрежеде киши болатуғын болса, онда g_{ik} шамаларын турақлы деп қараўға болады. Бундай жағдайда ds^2 шамасының мына түрге ийе болатуғынлығын базы бир координаталық түрлендириўлердиң жәрдеминде аңсат көрсетиўге болады:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2.$$

Буннан биз шексиз кишиде барлық ўақытта «киши» салыстырмалылық принципиниң дурыс болады деп жуўмақ шығарамыз. Бундай жағдайда «дүньялық» функция мынаған айланады:

$$H = \varepsilon\int L dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

Бул аңлатпаны вариациялаў арқалы Максвелл теңлемелерин аламыз. Себеби барлық g_{ik} лар $i = k$ болғанда бирге, ал $i \neq k$ болғанда нолге тең. Егер жақтылықтың тезлигин бирге тең емес деп алсақ, онда

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - g_{44}dx_4^2.$$

Демек $g_{44} = c$ екен деп жуўмақ шығарамыз. L ушын жазылған (5)-аңлатпадан көринип турғанындай усы g_{44} Максвелл теңлемелеринде де турады. Енди бизге арнаўлы принциптеги «физикалық» шаманың ds^2 ушын жазылған геометриялық аңлатпаға не ушын киретуғынлығы түсиникли. Және жақтылықтың тезлиги c ның турақлы екенлиги ҳаққындаға тастыйықлаў да түсиникли. Себеби биз g_{ik} ны x_i координатасынан ғәрезсиз деп есаплаў ҳуқықына ийе болғанлықтан жақтылықтың тезлиги турақлы шама болып қалады.

3-мысал. Енди бир дене мәселеси деп аталатуғын мәселени қараймыз. Бул жағдайда гравитациялық майдан бир тартышы масса тәрепинен пайда етиледи. Бул массаны координата басына орналастырамыз ҳәм ол шар тәризли формаға ийе деп болжаймыз. Шарды тынышлықта тур, шар да, гравитация майданы да стационар ҳалда тур деп есапласақ (яғный барлық g_{ik} лар ўақыт t дан ғәрезсиз), биз қарап атырған масса тәрепинен пайда етилген гравитация майданының сфералық симметрияға ийе болатуғынлығын аңлаў қыйын емес. ds^2 тың аңлатпасына шар симметриясы шәртин киргиземиз. Шварцшильд бойынша поляр координаталарындағы

$$x_1 = r\cos\vartheta,$$

$$x_2 = r\sin\vartheta\cos\varphi,$$

$$x_3 = r\sin\vartheta\sin\varphi$$

ҳәм

$$x_4 = t$$

деп алғанда бундай шәртти қанаатландыратуғын ең улыўмалық аңлатпа мына түрге ийе болады:

$$ds^2 = F(r)dr^2 + G(r)(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + H(r)dt^2.$$

Бирақ r дың орнына биз мына шаманы алыўымыз мүмкин:

$$r' = \sqrt{G(r)}.$$

Бундай жағдайда

$$ds^2 = M(r)dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + W(r)dt^2$$

(бул аңлатпадағы r деги ‘ белгиси алып тасланған).

---

[3] Кейинги раўажланыўының барысында Эйнштейнниң теориясы материя болмағанда барлық $g^{\mu\nu}$ лер нолге тең болады, яғный материясыз ҳеш бир физикалық кеңисликтиң болыўы мүмкин емес деген жуўмаққа келеди. Әлбетте, принципиаллық көз-қарастан бул бирден бир дурыс жуўмақ болып табылады.

r диң еки ықтыярлы функциялары, яғный M(r) менен W(r) J интегралының вариациясынан анықланыўы керек. Бул вариацияны табыў ушын биз тек K ны емес, ал L функциясын да билиўимиз керек. Бирақ бул вариацияны табыў ушын потенциал теориясындағы Poisson теңлемеси болған $\Delta\Psi = 4\pi\xi$ теңлемесин шешкендегидей усылдан да пайдаланыў мүмкин. Бул жағдайда бул теңлемени қанаатландыратуғын үзликсиз ҳәм бир мәнисли Ψ функциясын табыўдың орнына $\Delta\Psi = 0$ теңлемесиниң шешимлери табылады ҳәм айрықша ноқатлар ξ материясының концентрацияланған орынлары деп қабыл етиледи. Биз бул жерде усындай жоллар менен жүремиз. Биз L функциясын таслап кетемиз, бирақ қалған теңлемелерди шешкенде биз айрықша ноқатларға ийе шешимлерди қарап шығамыз ҳәм сол ноқатларда масса концентрацияланған деп болжаймыз.

Демек биз

$$\delta\int K\sqrt{g}\,dr\,d\vartheta\,d\varphi\,dt = 0$$

мәселесин шешиўимиз керек.

Буның ушын ds^2 тың аңлатпасындағы g_{ik} лардың мәнислеринен пайдаланып қыйсықлық K ны есаплаўымыз керек. Бундай есаплаў әдеўир қыйыншылық пенен жүргизиледи ҳәм $K\sqrt{g}$ ушын ақыр-аяғында мынадай аңлатпаға алып келеди:

$$K\sqrt{g} = \left\{\left(\frac{r^2W'}{\sqrt{MW}}\right) - 2\frac{rM'\sqrt{W}}{M^{3/2}} - 2\sqrt{MW} + 2\sqrt{\frac{W}{M}}\right\}\sin\vartheta.$$

Енди M ҳәм W функцияларының орнына

$$M = \frac{r}{r-m} \text{ ҳәм } W = w^2\frac{r-m}{r}$$

шамаларын қанаатландыратуғын m(r) ҳәм w(r) функцияларын киргиземиз. Бул мынаны береди

$$K\sqrt{g} = \int\left\{\left(\frac{rW'}{\sqrt{MW}}\right)' - 2m'w\right\}\sin\vartheta.$$

Бул формулада қолланылған ‘ белгиси барлық орында r бойынша дифференциаллаўдың жүргизилетуғынлығын билдиреди. Мүмкин болған барлық интеграллаўлар жүргизиледи ҳәм ақыр-аяғында мына аңлатпа алынады:

$$\delta\int K\sqrt{g}\,dr\,d\vartheta\,d\varphi\,dt = -\delta\int 2m'w\,dr.$$

Бул өз гезегинде еки дифференциал теңлемени береди:

$m‘ = 0$ ҳәм $w‘ = 0$.

Демек m де w де турақлы екен. Соған байланыслы $m = \alpha$, $w = 1$ деп болжаймыз. Бул қойылған шек бизиң мәселемизди шеклеўди аңғартпайды. Себеби w ның мәниси менен тек ўақыттың бирлигин сайлап алыў ғана байланыслы. Усылардың барлығы ds^2 ушын мынадай аңлатпаны береди:

$$ds^2 = \frac{r}{r-\alpha}dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - \frac{r-\alpha}{r}dr^2. \qquad (6)$$

Демек бизиң мәселемизди шешиў айрықша бетке – радиусы α ге тең болған сфераға ийе g_{ik} функцияларына алып келеди. Бул сфераның бетинде шар симметриясына ийе гравитациялық майданды пайда етиўши массалар жатады. Егер $\alpha = 0$ деп есапланса (демек айрықша бет жоқ) g_{ik} функциялары үзликсиз ҳәм бир мәнисли, айрықша ноқатларға ийе емес функциялар болады Бирақ олар Евклид геометриясында ийе болатуғын мәнислерге ийе болады. Ал бул жағдай материяның жоқ екенлигине сәйкес келеди.

Солай етип гравитация майданы табылды. Енди биз усындай майдандағы материаллық бөлекшелердиң қозғалыс нызамын табыўымыз керек. Бул материаллық бөлекшелер пайда болған гравитация майданын өзгериске ушыратпаўы керек. Усындай нызамларды табыў ушын биз қозғалысты Ньютондағыдай болып жүзеге келеди деп есаплаймыз (демек оларға күшлер тәсир етпесе *ең кысқа сызық ямаса геодезиялық сызық бойынша қозғалады* деп қабыл етиледи). Ал бул өз гезегинде

$$\delta\int ds = 0$$

екенлигин билдиреди ҳәм бизге жаңа вариациялық проблеманы шешиў керек болады.

Енди r, φ, ϑ, t ларды қандай да бир p параметриниң функциялары деп қараймыз. Бизиң мәселемиз

$$\delta\int\left\{\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left[\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2+\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2\right]-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2\right\}dp=0$$

шәртинен келип шығатуғын дифференциал теңлемелер системасын шешиўден ибарат.

Усындай жоллар менен алынған геодезиялық сызықлардың тегис болатуғынлығын аңсат көрсетиўге болады. Бирақ бул жағдайда экватор тегислигинде жатқан ең қысқа қашықлық сызықларынан пайдаланыў менен шеклениўге ҳәм $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ деп алыўға болады. Жоқарыда жазылған ең кейинги аңлатпа бундай жағдайда былай жазылады:

$$\delta\int\sqrt{\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\vartheta}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2}\,dp=0.$$

Буннан екинши тәртипли үш дифференциал теңлеме келип шығады:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dp}\left(\frac{2r}{r-\alpha}\frac{dr}{dp}\right)+\frac{\alpha}{(r-\alpha)^2}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2-2r\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)+\frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=0,\\ \frac{d}{dp}r^2\frac{d\varphi}{dp}=0,\\ \frac{d}{dp}\frac{r-\alpha}{r^2}\frac{dt}{dp}=0.\end{gathered}\tag{7}$$

Олардың биринши интеграллары мына түрге ийе

$$\begin{gathered}\frac{r}{r-\alpha}\left(\frac{dr}{dp}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2-\frac{r-\alpha}{r}\left(\frac{dt}{dp}\right)^2=A,\\ r^2\frac{d\varphi}{dp}=B,\\ \frac{r-\alpha}{r}\frac{dt}{dp}=C.\end{gathered}\tag{7’}$$

Бул аңлатпалардағы A, B, C лар интеграллаў турақлылары. C турақлысының мәниси тек параметрдиң бирлигин анықлайды. Сонлықтан оны 1 ге тең деп ала аламыз.

Егер бул теңлемелерден p менен t ны жоғалсақ, онда қозғалыс траекториясы ушын теңлеме аламыз. Бул теңлемени алыўдан жәнe бир 1/r = ρ өзгерисин киргиземиз ҳәм ақыр-аяғында мынаны аламыз:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=\frac{1+A}{B^2}-\frac{A\alpha}{B^2}\rho-\rho^2+\alpha\rho^3.\tag{8}$$

Бул аңлатпа планеталардың қозғалысы ушын жазылған Кеплер теңлемесине жүдә уқсас. Бул теңлеме былай алынады:

Энергияның сақланыў нызамы мынаны береди:

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]-k\frac{Mm}{r}=a.$$

Бул аңлатпадағы a энергия, m арқалы планетаның массасы берилген (буннан былай оны1 ге тең деп аламыз), M арқалы Қуяштың массасы белгиленген, k тартылыс турақлысы.

Майданлардың сақланыў нызамы мынаны береди:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=b.$$

Енди t ны жоғалтып ҳәм ρ = 1/r белгилеўин пайдаланып аламыз:

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=\frac{a}{b^2}-\frac{kM}{b^2}\rho-\rho^2.$$

(8) деги A ҳәм B шамаларының орнына жаңа a ҳәм b шамаларын киргиземиз ҳәм олар арасында мынадай байланыстың орын алғанын тәмийинлеймиз:

$$\frac{A\alpha}{B^2}=\frac{kM}{b^2},\qquad 1+A=\frac{\alpha A}{kM}.$$

Бундай жағдайда мынаны аламыз

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2=\frac{a}{b^2}+\frac{kM}{b^2}\rho-\rho^2-\alpha\rho^3.$$

Бул кейинги аңлатпа $\lim\alpha = 0$ шегинде планеталардың қозғалыс теңлемесине айланады. Егер α жүдә киши болса онда ρ жүдә үлкен болмаған жағдайда теңлемениң кейинги ағзасын таслап кетиўге болады (яғный планета Қуяшқа жүдә жақын келмейтуғын жағдайда).

Енди α шамасының физикалық мәнисин табамыз. Бул ушын шеңбер тәризли қозғалысты қараймыз. (7)-дифференциал теңлемениң интегралының r = const екенлигин көрсетиўге болады. Демек шеңбер бойынша қозғалыстың орын алыўы мүмкин, бирақ бул жағдайда (7)-теңлеме мынаны береди:

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{\alpha}{2r}.$$

Бул аңлатпада ўақыттың бирлиги c = 1 болатуғындай болып сайлап алынған Егер c ≠ 1 болса, онда

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=\frac{\alpha}{2r}c^2.$$

Бирақ Кеплер теңлемесинен шеңбер тәризли қозғалыс ушын мына теңликтиң орынланыўы шәрт:

$$r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=k\frac{M}{r^2}.$$

Кейинги еки формуланы салыстырыў арқалы аламыз

$$\frac{\alpha}{2}=\frac{kM}{c^2}\quad (= 1{,}5*10^5 \text{ см Қуяш ушын})$$

Демек α турақлысы бизде Қуяштың массасының орнын ийелейди ҳәм сантиметрлерде аңлатылады екен Қуяш ушын оның мәниси 1,5 км ге тең.

Барлық планеталар ушын α ның мәниси ҳақыйқатында да олардың орбиталарының радиус-векторларына салыстырғанда жүдә киши. Кеплер теңлемелери болса жүдә үлкен дәлликте дурыс болып табылады. Сонда да классикалық теңлемеге кирмейтуғын $\alpha\rho^3$ қосымша шамасы базы бир айрықша жағдайларда өзиниң тәсирин тийгизиўи мүмкин. Бизге белгили болған барлық планеталар ушын α шамасы ҳақыйқатында да олардың орбиталарының радиус-векторларынан жүдә киши болғанлықтан сол α ның тәсирин есапқа алыў ушын (8)-теңлемени шешкенде α ның дәрежелери бойынша қатарды пайдаланыўымыз мүмкин. Мейли e_1, e_2, e_3 лер

$$f(\rho) = \frac{\alpha}{b^2} + \frac{kM}{b^2}\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3 = 0$$

Аңлатпасының коренлери болсын.

$$e_1 + e_2 + e_3 = +\frac{1}{\alpha}$$

ҳәм

$$f(\rho) = (\rho - e_1)(t_2 - \rho)[1 - \alpha(\rho + e_1 + e_2)]$$

екенлиги анық.

Қозғалыс теңлемеси мынадай болады:

$$d\varphi = \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)[1 - \alpha(\rho + e_1 + e_2)}} \tag{9}$$

Қозғалыс $\rho = e_1$ ҳәм $\rho = e_2$ аралығында болады. Енди α ның дәрежелери бойынша қатарға жайып, аламыз (α^2 бар аңлатпаларды таслап кетемиз):

$$d\varphi = \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)}}\left[1 + \frac{\alpha}{2}(e_1 + e_2) + \frac{\alpha}{2}\right]$$

ҳәм интеграллап

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{\alpha}{2}\sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)} + \left[1 + \frac{3}{4}\alpha(e_1 + e_2)\right]\arcsin\frac{(e_1 + e_2)/2 - \rho}{(e_1 - e_2)/2}$$

Аңлатпаларын аламыз. Бул формула Қуяшқа ең жақын келгендеги ҳәм ең қашықноқатқа алыслағандағы (яғный $\rho = e_1$ ҳәм $\rho = e_2$ ноқатлары арасындағы) радиус-векторлар арасындағы мүйеш Φ ти анықлауға мүмкиншилик береди.

$$\Phi = \pi\left[1 + \frac{3}{4}\alpha(e_1 + e_2)\right]$$

екенлиги анық. Планета өзиниң ең кашықласыў ноқатына жеткен ўақытта (перигелийде) ол

$$2\Phi = 2\pi\left[1 + \frac{3}{4}\alpha(e_1 + e_2)\right]$$

мүйешине бурылады. Кеплер қозғалысы ушын биз (Кеплер нызамлары тийкарында) $2\Phi k = 2\pi$ мүйешин аламыз. Ал биз бул жерде Эйнштейн теориясында орбитаның перигейиниң планета бир рет айланғанда бурылыў мүйешиниң

$$\omega = \frac{3}{2}\alpha(e_1 + e_2)\pi$$

ге тең екенлигин көремиз.

Мейли T планетаның айланыў дәўири, a орбитаның үлкен ярым көшери ҳәм ε орбитаның эксцентритети болсын. Бундай жағдайда

$$\alpha = \frac{kM}{c^2} = \frac{(2\pi)^2 a^2}{T^2 c^2},$$

$$e_1 + e_2 = \frac{2}{a(1 - \varepsilon^2)}.$$

Орынларына қойыў арқалы табамыз:

$$\omega = 24\pi^3\frac{a^2}{T^2 c^2(1 - \varepsilon^2)}.$$

Бул жүдә киши шама. Меркурий планетасы ушын 100 жыл даўамындағы бурылыў ушын, яғный $\Omega = (100/T')\omega$, T’ Меркурийдиң Жер жылларындағы айланыў дәўири, аламыз

$$\Omega = 43''.$$

Бул тәжирийбе менен дәл сәйкес келетуғын шама болып табылады. Арнаўлы гипотезаларды пайдаланыў жолы менен дүзилген ҳеш бир басқа теория бул шаманы түсиндире алмайды.

Басқа планеталар ушын Ω шамасы әдеўир киши болып Меркурийдеги жайдағыдай әҳмийетке ийе бола алмайды.

Материаллық ноқаттың туўрыдан туўры Қуяшқа туўры сызық бойынша келип түсиўин қараймыз. Усындай қозғалысқа сәйкес келиўши геодезиялық сызықлардың бар екенлигин көрсетиўге болады. Бундай жағдайда $\varphi = \text{const}$ ҳәм r диң t дан ғәрезлилиги

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3}$$

теңлемеси жәрдеминде анықланады. Бул теңлемедеги жақтылықтың тезлиги бирге тең етип алынған. Биз

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r-\alpha}{r} = \frac{c_r}{\sqrt{3}}$$

болса тезлениўдиң мәнисиниң оң, ал

$$\frac{dr}{dt} < \frac{c_r}{\sqrt{3}}$$

болса тезлениўдиң терис мәниске ийе болатуғынлығын көремиз. Ал c_r шамасы болса, ол r ноқатындағы жақтылықтың тезлигине тең.

Биз есаплаўларымызда қозғалыўшы планетаның массасын бирге тең етип алдық. Сонлықтан әдеттеги механиканың көз-қарасы бойынша биз d^2r/dt^2 ушын жазылған аңлатпаны масса бирлигине тәсир етиўши күш деп қабыл етиўимиз керек болады. Бул жерде Эйнштейн механикасына күш ҳаққындағы түсиниктиң керек емес екенлигин көремиз. Бирақ сораў пайда болады: Ньютон нызамларын сәйкес түрде өзгертсек Эйнштейн теориясы берген нәтийжелерди бере алarма еди? Бул сораўға мақуллаўшы жуўап берилмейди. Ҳақыйқатында да туўры сызықлы қозғалыс ушын Ньютон күши ушын аңлатпа мына түрге ийе болады:

$$F_d = -\frac{\alpha}{2r^2} + \frac{\alpha^2}{2r^3} + \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Бул аңлатпа шекте, жүдә киши α ушын классикалық аңлатпаға өтеди:

$$F = -k\frac{M}{r^2}.$$

Бирақ биз жоқарыда Эйнштейн теориясы бойынша шеңбер бойынша қозғалыс ушын күш мынаған тең болыўы керек еди:

$$F_c = \frac{\alpha}{2r^2}.$$

Әлбетте F_d менен F_c бир улыўмалық нызамның дара жағдайларының болыўы мүмкин емес Егер F_d дағы радиал тезлик dr/dt ны ҳәм шеңбер бойынша қозғалғанда нолге тең болатуғын ағзаларды алып тасласақ, онда қалған ағзалар F_c болып табылады. Эйнштейн теориясындағы күш ушын жазылған аңлатпа (егер «күш» терминин киргизиў талап етилсе ҳәм оған масса менен тезлениўдиң көбеймесине тең мәнис берилсе) материаллық ноқаттың траекториясына ғәрезли болады, яғный Ньютонның пүткил дүньялық тартылыс нызамының әҳмийетиндей универсаллық әҳмийетке ийе болмай қалады. Шекте, яғный жүдә киши α де F_c менен F_d бирдей болады ҳәм F ти береди.

4-мысал. Енди жақтылықтың қозғалысын қараўға өтемиз. Жақтылық материаллық ноқат сыпатында геодезиялық сызықлар бойынша қозғалады. Бирақ оннан парқы (арнаўлы салыстырмалық принципиндегидей) бул геодезиялық сызықлардың узынлығы нолге тең ҳәм олар ушын биз

$$ds^2 = 0$$

аңлатпасына ийе боламыз. Усыған сәйкес биз (7)-теңлемелерде A = 0 деп алыўымыз керек ҳәм жақтылық нурларының траекториялары

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{B^2} - \rho^2 - \alpha\rho^3$$

аңлатпасын интеграллаўдан анықланған иймекликлер болады. lima = 0 шегинде аңлатпа дым аңсат интегралланады ҳәм биз аламыз:

$$B\rho = \sin(\varphi - \varphi_0).$$

Бул аңлатпадағы φ_0 интеграллаў турақлысы. Бул туўры сызық болып табылады, яғный

$$r = \frac{B}{\sin(\varphi - \varphi_0)}.$$

Бул аңлатпадағы B Қуяштан ең киши қашықлық болып табылады.

Енди шектеги емес жағдайды қараймыз (шектеги жағдай α = 0 еди). Бунда α ни Қуяшқа ең жақын болған траекторияның ноқатына салыстырғанда жеткиликли дәрежеде киши болсын. Мейли

$$\frac{2}{B^2} - \rho^2 + \alpha\rho = 0$$

теңлемелесиниң коренлери e_1, e_2, e_3 лер болсын ҳәм мейли limα=0 шегинде e_1 менен e_2 лер

$$\frac{2}{B^2} - \rho^2 = 0$$

теңлемесиниң коренлери болсын. Яғный

$$\lim e_1 = \frac{1}{B} \text{ ҳәм } \lim e_2 = -\frac{1}{B}.$$

$$\frac{d\rho}{\sqrt{1/B^2 - \rho^2 + \alpha\rho^3}} = d\varphi \qquad (10)$$

аңлатпасы (9)-аңлатпа сыяқлы жуўық түрде интегралланады. Биз жуўық интеграллаў нәтийжесинде аламыз:

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{\alpha}{2}\sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)} + \left[1 + \frac{3}{4}\alpha(e_1 + e_2)\right]\arcsin\frac{(e_1 + e_2)/2 - \rho}{(e_1 - e_2)/2}. \qquad (9')$$

Бул аңлатпа жәрдеминде e_1 ҳәм e_2 ушын жуўық мәнислерди аңсат есаплаўға болады ҳәм биз аламыз:

$$e_1 = \frac{1}{B} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{B^2}; \qquad e_2 = -\frac{1}{B} - \frac{1}{2}\frac{\alpha}{B^2}.$$

Егер (9’) ты мына түрде жазсақ

$$r = \frac{2}{e_1 + e_2}\left\{1 - \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1}\sin\left[\varphi - \varphi_0 + \frac{\alpha}{2}\sqrt{(\rho - e_1)(e_2 - \rho)}\right]\right\}^{-1},$$

онда эксцентритети

$$\varepsilon = \frac{e_2 - e_1}{e_2 + e_1} = \frac{2B}{\alpha}$$

болған гиперболаға жүдә уқсас болған иймеклик пенен ис алып баратырғанымызды көремиз.

B шамасы Қуяштан траекторияның ең жақын ноқатына шекемги жуўық түрде алынған қашықлықты береди (яғный α ге салыстырғанда жүдә үлкен шама). Солай етип бул гипербола жүдә үлкен эксцентритетке ийе болып, туўры сызықтан аз парық қылады.

Бул гиперболаның асимптоталары ушын $r = \infty$ ҳәм $\rho = 0$. Демек φ шамасы мына шәрттен анықланады:

$$1-\frac{e_2-e_1}{e_2+e_1}\sin\left(\varphi-\varphi_0+\frac{\alpha}{2}\sqrt{-e_1e_2}\right)=0.$$

Бул аңлатпаға e_1 ҳәм e_2 ниң мәнислерин қоямыз ҳәм ықтыярлы турақлы $\varphi_0=(\alpha/2)\sqrt{e_1e_2}$ шамасын аламыз. Бул ықтыярлы бағыттан баслап өлшенетуғын φ мүйеши мына шәрттен анықланады:

$$\sin\varphi=\sin(\pi-\varphi)=\frac{e_2+e_1}{e_2-e_1}=\frac{\alpha}{2B}.$$

φ_0 бағыты ҳәм асимптоталар арасындағы мүйешлер жүдә киши мәниске ийе болады ҳәм мыналарға тең:

$$\varphi=\pm\frac{\alpha}{2B}.$$

Ал олар арасындағы мүйеш мынаған тең:

$$\Psi=\frac{\alpha}{B}.$$

Егер жақтылық нуры усындай гипербола бойынша қозғалатуғын болса, онда Қуяш оның фокусында жайласқан болады. Қуяштан жеткиликли дәрежеде қашықласқан гипербола бойынша қозғалысты асимптота бойынша қозғалысқа теңлестириў мүмкин. Солай етип биз мынадай жуўмаққа келемиз: ***Қуяштың қасынан өткен жақтылық нуры мынадай мүйешке бурылады***:

$$\Psi=\frac{\alpha}{B}=\frac{kM}{c^2B}.$$

Бул аңлатпадағы B Қуяштан ең киши қашықлық. Эйнштейн Қуяш бетине урынба түринде түсетуғын нур ушын бул мүйешти есаплады ҳәм Ψ = 1,7’’ мәнисин алды. 1919-жылы Бразилияда Англиялы экспедиция тәрепинен өткерилген тәжирийбелер Эйнштейнниң бурынырақ шығарған бул жуўмағының дурыс екенлигин тастыйықлады.

Жақтылықтың қозғалысын бериўши (10)-теңлемени изертлеў жүдә қызық нәтийжелерди береди. Биз қысқалық ушын бул изертлеўлерди толық келтире алмаймыз. Бирақ базы бир қызықлы жағдайларға итибар беремиз. Егер жақтылық нуры бетке жеткиликли дәрежеде жақын келсе ($r = 3\alpha/2$), онда нур беттиң дөгерегинде буралып, бул беттен қашықлап кете алмайды. $r=\alpha$ бети арқалы ҳеш бир нур өте алмайды. Егер нур Қуяштың орайы бағытында келсе, онда оның тезлиги мына теңлеме жәрдеминде анықланады:

$$\frac{dr}{dt}=c_r=1-\frac{\alpha}{r}.$$

(7’ аңлатпасына A = 0 мәнисин қойыў керек). Оның тезлениўи барлық ўақытта да терис мәниске ийе ҳәм $r = \alpha$ бетине нур $c_r = 0$ тезлиги менен шексиз үлкен ўақытта келеди.

Қуяштың дөгерегинде шеңбер тәризли орбиталар бойынша айланыўшы планеталар Қуяшқа қанша жақын болған с айын үлкен тезлик пенен қозғалады. Планета тәризли радиусы $r = 3\alpha/2$ болған шеңбер тәризли орбита бойынша айланса, онда оның тезлиги жақтылықтың тезлигине тең, бирақ бул жақтылықтың тезлиги с ға емес, ал $c/\sqrt{3}$ ке тең болады. Радиусы $r = 3\alpha/2$ болған шеңбер ишинде шеңбер бойынша қозғалыстың орын алыўы мүмкин емес.

Қуяш ушын $\alpha = 1{,}5*10^5$ см ҳәм бул шама Қуяштың радиусына салыстырғанда жүдә киши шама. Сонлықтан радиуслары $r = \alpha$ ҳәм $r = 3\alpha/2$ болған бетлер ҳеш бир әмелий әҳмийетке ийе емес. Водород молекуласы ушын $\alpha = 10^{-49}$.

5-мысал. Арнаўлы салыстырмалылық принципи бизди қозғалыўшы ҳәм тынышлықта турған бақлаўшылардың өлшеген ўақытлары бир бирине тең емес деп үйретти. Мейли x_1, y_1, z_1 шамалары t ның функциялары болсын ҳәм бизге базы бир ноқаттың қозғалысын берсин. Тынышлықта турған бақлаўшы тәрепинен өлшенетуғын ўақыт элементи dt болады. Ал ноқат пенен қозғалыўшы бақлаўшы тәрепинен өлшенетуғын ўақыт $d\tau$ мына аңлатпадан анықланады:

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Бул аңлатпадағы τ ноқаттың «меншикли» ўақыты болып табылады. Улыўмалық салыстырмалық принципинде де биз қандай да бир ноқаттың төртинши координатасы dt ның «меншикли» ўақыт $d\tau$ ға салыстырғандағы өсимин айырыўымыз керек. «Улыўмалық» хә $d\tau^2$ «арнаўлы» салыстырмалылық принциплери арасындағы айырма мынадан ибарат: арнаўлыда тынышлықта турған ноқат ушын $dt = d\tau$, яғный «меншикли» ўақыт төртинши координата болған ўақыттың өсимине сәйкес келеди. Ал улыўмалық салыстырмалылық принципинде бундай болмайды. Мысал ретинде 3-мысалда келтирилген гравитация майданын қараймыз. Егер ноқат тынышлықта турса, онда dx, dy, dz лер нолге тең (ямаса поляр координаталарда dr, $d\varphi$, $d\vartheta$ лер нолге тең) хәм хәр бир тынышлықта турған ноқат ушын «меншикли» ўақыт

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right)dt^2$$

арқалы анықланады. Яғный төртинши координата болған ўақыттың осими «меншикли» ўақыттың өсимине тең емес, ал r менен α дан ғәрезли болады (Қуяшқа шекемги қашықлықтан хәм оның массасынан ғәрезли болады).

Енди қандайда бир молекулалық процессти, айтайық нурланыў процессин қарайық. Молекула ушын ямаса молекуладағы тербелиўши бөлекше ушын усы молекулаға характерли болған хәм оның ишки қәсийетлеринен келип шығатуғын нурланыў дәўири болады деп болжаў тәбийий. Бул дәўир оның «меншикли» ўақтынан келип шығады. Бул ўақыт ықтыярлы түрде алынған x, y, z, t координаталар системасынан ғәрезли емес, демек ықтыярлы түрде берилген координата t дан, яғный t ўақтынан ғәрезли болмайды. Солай етип молекула ушын дәўир барлық орынларда бирдей болады. Бул дәўирди киши деп болжайық хәм $d\tau$ арқалы белгилейик. Тербелис тезлиги жүдә киши деп есапласақ $d\tau$ дың аңлатпасындағы $dr = d\varphi = d\vartheta = 0$ деп жаза аламыз. Бирақ биз бақлаўларымызды биз тәрептен сайлап алынған координаталар системасында өткеремиз. Биз өлшеген дәўир $d\tau$ емес, ал dt болады. Енди $d\tau$ барлық орынларда бирдей деген шәртти жазамыз. Дәслеп Қуяштың бетинде, яғный $r = d$ (Қуяштың радиусы) $d\tau$ ды жазамыз, екинши рет $r = D$ (жер орбитасының ярымы) тап сондай $d\tau$ ды жазамыз. Онда

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{d}\right)dt_d^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{D}\right)dt_D^2$$

екенлиги өз-өзинен түсиникли. Бул аңлатпада dt_d менен dt_D сәйкес Қуяш пенен Жерде өлшенген дәўирлер. Бирақ α/D шамасы α/d шамасына салыстырғанда жүдә киши шама. Соның ушын бул киши шаманы есапқа алмаймыз. Екинши тәрептен, егер dt_d менен dt_D дәўирлер болса, онда оларға кери шамалар ν_d хәм ν_D жийиликлери болып табылады. Бундай жағдайда бизиң шәртимизди былайынша жазыўға болады:

$$\nu_d = \nu_D\left(1 - \frac{\alpha}{d}\right)\frac{1}{2} = \nu_D\left(1 - \frac{\alpha}{2d}\right)$$

Енди ν_D ны тек ν, ал $\nu_d - \nu_D$ ны $d\nu$ арқалы белгилеймиз. Өз-өзинен түсиникли:

$$d\nu = -\frac{\alpha}{2d}\nu \text{ ямаса егер } \nu = \frac{1}{\lambda} \text{ болса}$$

$$d\lambda = +\frac{\alpha}{2d}\lambda.$$

Қандай да бир жақтылық шығарыўшы газ тәрепинен шығарылған жақтылық жоқарыда көрсетилгендей дәўирли қозғалыс характерине ийе. Биз Қуяштың ***гравитациялық потенциалы*** $\alpha/2d$ ***ның газ тәрепинен нурландырылған сызықлардың қызыл тәрепке*** ($d\lambda > 0$) ***аўыстыратуғынын көрдик***. Эйнштейн бул аўысыўдың мәнисин есаплады хәм тәжирийбелер, шамасы, теория тәрепинен болжанған бул нәтийжелерди тастыйықлады.