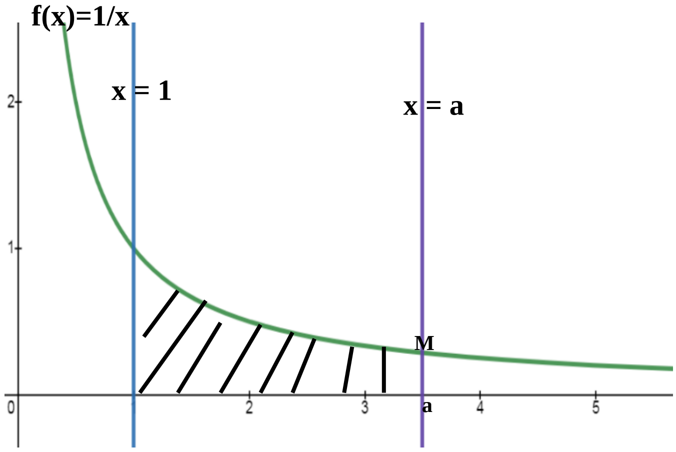
Proposé par : ***Hajer Msolly &Fridhi Zied***

Lycée Ahmed NourEddine Sousse	***4ème Sciences Informatiques 1+2*** — ***Durée : x H***
	Révision BAC 2023 n°02
Avril 2023	***Algorithmique & Programmation***

Exercice n°1 :

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction **f** définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle]**0**,+∞[**.**

Etant donné que $\int_1^a \frac{1}{x}\,dx \begin{cases} <1 & si \quad a<e \\ =1 & si \quad a=e \\ >1 & si \quad a>e \end{cases}$



On remarque que la surface délimitée par les deux droites d'équations **x =1** et **x = a**, l'axe des abscisses et la courbe **f(x)**, varie selon la valeur de l'abscisse **a** du point **M** (la surface hachurée dans la Figure) .
Cette surface sera égale à **1** lorsque la valeur de **a** est égale au nombre d'Euler **e**.

Travail demandé :
Ci-dessous une partie d'un algorithme de la fonction **Surface**, qui permet de calculer la surface hachurée en fonction de l'abscisse **a** du point **M** et en utilisant la méthode des rectangles à gauche.

N.B : **n** représente le nombre de rectangles.

```
Fonction Surface ( a : réel , n :entier) : réel
Début
    S ← 0
    ……………………..
    h←( a – 1 ) / n
    Pour i de 1 à n faire
        ……………………………
        x←x + h
    Fin pour
    Retourner  ……………………………
Fin
```

1) Compléter les vides de l'algorithme de la fonction **Surface** par les trois instructions convenables à partir de la liste d'instructions suivante :

x←1	S ← S + 1/x	S * h
x←0	S←S + ½*(1/x + 1/(x + h))	S * n * h

2) En faisant appel à la fonction **Surface**, écrire un algorithme d'une fonction **Calcul (a, n)** permettant de déterminer une valeur approchée du nombre d'Euler **e**, qui correspond à une valeur de la surface proche de **1** avec une précision de 10^{-4}.
   N.B : On pourra calculer le nombre d'Euler **e** en variant l'abscisse **a** par pas de 10^{-4}.

Exercice n°2 :

Soit l'algorithme ci-dessous de la fonction **Rectangle** permettant de calculer, en utilisant la méthode des rectangles, l'aire résultante de la fonction $f(x)=\frac{6}{1+x}$ sur l'intervalle **[a, b]** subdivisé en **N** rectangles.

```
Fonction Rectangle (a,b : Réel , N :Entier) : Réel
Début
    h ←(b-a)/n
    S ←0
    x←a
    Pour i de 1 à n faire
        S ← S + 6/(1+x)
        x←x + h
    Fin Pour
Retourner  S * h
Fin
```

Travail demandé :

Pour chacune des questions suivantes, valider chaque proposition par **V** si la réponse est correcte ou **F** dans le cas contraire.

1) La fonction **Rectangle** permet de calculer l'aire résultante de la courbe de la fonction **f** sur un intervalle **[a, b]** selon la méthode des :

☐ Rectangles à gauche ☐ Rectangles du point milieu ☐ Rectangles à droite

2) Pour les valeurs **a=1**, **b=5** et **N=4**, le résultat retourné par la fonction **Rectangle** est :

☐ 5.5 ☐ 7.5 ☐ 10.12

3) Pour appliquer la méthode des trapèzes au lieu de la méthode des rectangles, on remplace l'instruction de calcul de la somme **S** par :

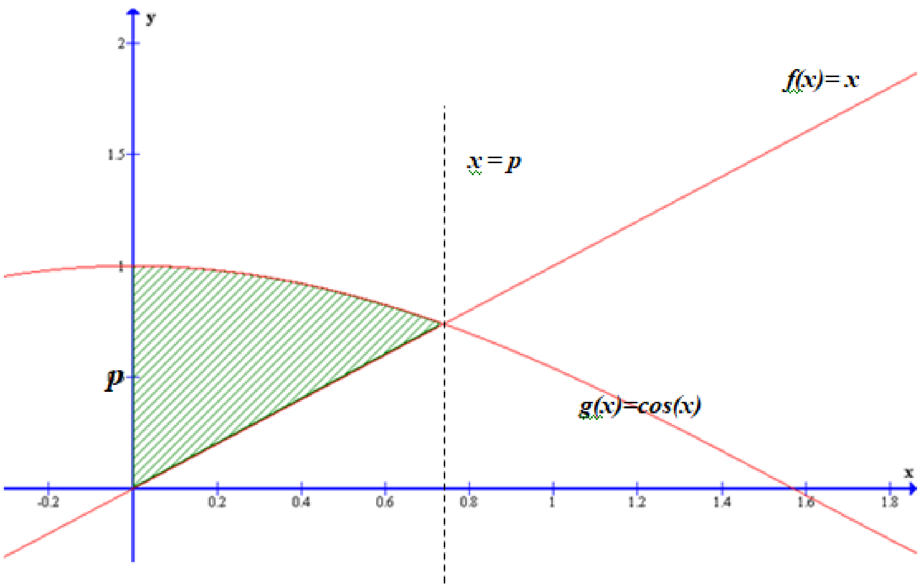
☐ S←S + (6(1+x) + 6/(1+x+h))/2 ☐ S←S + 6 / (1+x+h) /2 ☐ S←S + (6(1+x) – 6 / (1+x+h)) /2

Exercice n°3 :

Soient les deux fonctions **f** et **g** définies comme suit :

- *f(x)= x avec x ϵ IR*
- *g(x)=cos(x) avec x ϵ IR*

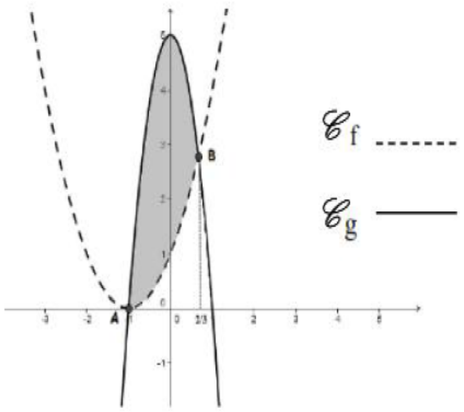
1. Ecrire un algorithme d'une fonction Calcul (epsilon) permettant de calculer une valeur approchée, à epsilon près de p tel que cos(p)=p.
2. Soit le graphique représentant les courbes des deux fonctions ***f*** et ***g*** et de la droite **x=p**.



Ecrire un algorithme d'une fonction **Surface (epsilon)** qui permet de calculer une valeur approchée, à epsilon près, de l'aire délimitée par les deux courbes des deux fonctions **f** et **g**, l'axe des ordonnés et la droite **x=p** (l'aire hachurée dans la **figure ci-dessus**).

Exercice n°4 :

Afin de calculer le coût de la réalisation d'un lac artificiel, un paysagiste a besoin de déterminer sa surface, qui est représenté par l'air S délimitée par les courbes de deux fonctions f et g qui se croisent en deux points A et B, ayant respectivement les abscisses -1 et 2/3 comme le montre la figure.



Les deux fonctions f et g sont définies par :

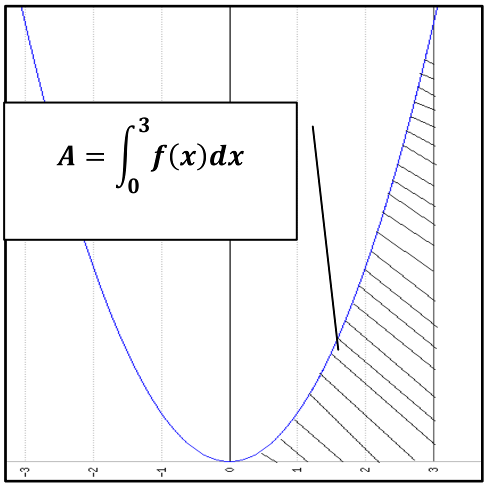
* $f(x) = x^2 + 2x + 1$
* $g(x) = -5 * x^2 + 5$

Travail demandé :

Ecrire un algorithme d'un module permettant de déterminer une valeur approchées de l'aire **S** délimitée par les deux courbes des deux fonctions **f** et **g** définies dans l'intervalle **[A, B]**

Exercice n°5 :

On considère la fonction continue, f définie dans IR par $\mathbf{f(x)=x^2}$. On veut comparer la méthode des trapèzes et celle des rectangles dans le calcul approximatif de l'aire A, donnée par la formule $\boldsymbol{A = \int_0^3 f(x)dx}$ et de chercher, dans l'intervalle [**0,3**], laquelle des deux méthodes qui converge la première vers l'aire exacte à epsilon près, sachant que l'aire exacte est égale à 9.



On se propose d'écrire un programme qui permet de :

- Stocker dans un fichier d'enregistrements "**Calcul.dat**", pour chaque nombre de subdivisions, le nombre lui-même, l'aire trouvée par la méthode des rectangles et l'aire trouvée par la méthode des trapèzes.

N.B : *Le traitement s'arrête lorsque l'aire calculée par l'une de deux méthodes converge vers l'aire exacte à epsilon prés* (***10^{-3} ≤ epsilon ≤ 10^{-1}***).

- Afficher le contenu du fichier "**Calcul.dat**", la méthode qui converge la première vers l'aire exacte à epsilon près, le nombre de subdivisions et l'aire calculée correspondants.

Travail demandé :

1) Ecrire l'algorithme du programme principal en le décomposant en modules.

2) Ecrire l'algorithme de chaque module envisagé.

Exercice n°6 :

Le but du problème est de déterminer une valeur approchée de l'intégrale **I** = $\int_1^2 \boldsymbol{e^{-x^2}\, dx}$

On se propose d'utiliser deux méthodes et d'en dégager la différence entre les deux valeurs approchées trouvées.

On choisit dans les deux cas, un entier **N** tel que **100 < N < 1000**. **N** sera le nombre de subdivisions qu'on va utiliser dans les deux méthodes.

1) Méthode des trapèzes.

On utilise la méthode des trapèzes pour déterminer une première valeur approchée $\mathbf{I_1}$ de **I.**

2) Méthode d'une subdivision aléatoire.

Soit **V** un tableau de **n+1** réels tel que **V[0] = 1** et **V[N] = 2**

On remplit les autres éléments du tableau **V** par **n-1** réels distincts générés au hasard de l'intervalle [1,2] ausens strict.

Ensuite, on trie le tableau **V** par ordre croissant en utilisant une méthode de tri.

On aura formé ainsi une suite $\mathbf{(X_i)_{0 \le i \le N}}$ **où** $\mathbf{X_i = V[i]}$

On définit les sommes **S1** et **S2** par :

$$S1 = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * f(x_i)$$

$$S2 = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) * f(x_{i+1}) \quad \text{avec } f(x) = e^{-x^2}$$

Une valeur approchée de **I** = $\int_1^2 \boldsymbol{e^{-x^2}\, dx}$ est égale à $\mathbf{I_2} = \boldsymbol{\frac{S1+S2}{2}}$

On se propose d'écrire un programme qui calcule $\int_1^2 e^{-x^2}\,dx$ par les deux méthodes comme expliqué ci-dessus et affiche les deux approchées ainsi que la valeur absolue de leur différence.

Travail demandé :

1. Ecrire un algorithme modulaire pour le problème.
2. Ecrire l'algorithme de chaque module envisagé.

Exercice n°7 :

Partie A :

On se propose d'écrire un programme permettant de :

- remplir une matrice carrée **M** de taille (**n x n**) selon le principe décrit ci-dessous. **n** est un entier donné (**5 ≤ n ≤10**)

  remplir, à partir de **M**, un fichier texte nommé **diagonal.txt** situé sur la racine du disque dur C:

Le remplissage de la matrice **M** et du fichier **diagonal.txt** est décrit ci-dessous :

1) le remplissage de la matrice **M**, doit tenir compte des règles suivantes :
   - La première ligne de la matrice **M** est remplie, **d'une façon aléatoire (au hasard)**, par des chiffres de 1 à 9.
   - A partir de la deuxième ligne de la matrice **M**, un élément quelconque **M[*l*,*c*]** est déterminé en faisant la somme des éléments de la ligne **(*l*-1)**, en commençant à partir de l'élément **M[*l*-1,*c*]**
   - Le nombre de cases remplies pour une ligne ***l*** est : ***n* - *l*+*1***.

	1	2	3	4	5	6
1	2	5	1	8	3	1
2	20	18	13	12	4	
3	67	47	29	16		
4	159	92	45			
5	296	137				
6	433					

Exemple : (voir la figure ci-contre)

M [2, 1] = 2 + 5 +1 + 8 + 3 + 1 = 20 **M [3, 4]** = 12 + 4 = 16

2) Chaque ligne du fichier **diagonal.txt** contiendra les éléments de **M** se trouvant sur une diagonale droite, en commençant par celle à gauche et de haut en bas, de telle sorte que :
   - La ligne N°1 du fichier contient M [1, 1] c'est à dire **2**
   - La ligne N°2 du fichier contient M [1, 2] suivi de M [2, 1] c'est-à-dire **520**
   - La ligne N°3 du fichier contient M [1, 3] suivi de M [2, 2] suivi de M [3, 1] c'est-à-dire **11867**
   - ....

Pour l'exemple précédant, le contenu du fichier **diagonal.txt** sera comme suit :

```
2
520
11867
81347159
3122992296
141645137433
```

Partie B :

Réaliser l'interface graphique comme illustré dans l'annexe au dessous :