Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I – Agrupamento 4 2019/2020

Ficha de Exercícios 3

Integral de Riemann; Teorema Fundamental do Cálculo Integral; Cálculo de áreas.

Exercícios Propostos

1. Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis nos respetivos domínios.

   (a) $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$.

   (b) $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

   (c) $f : [-2,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \in [-2,0[\\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in]0,1]. \end{cases}$

2. Determine F' sendo F a função real de variável real dada por, indicando o domínio de F',

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{t^2+1}\,dt$

   (b) $F(x) = \displaystyle\int_x^0 e^{-s^2}\,ds$

   (c) $F(x) = \displaystyle\int_2^{\sqrt{x}} \cos t^4\,dt$

   (d) $F(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{x^3} \ln(t^2+1)\,dt$

   (e) $F(x) = x^3 \displaystyle\int_1^x e^{-s^2}\,ds$

3. Seja F a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-u^2}\,du \right) dt$. Calcule $F''(x)$.

4. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_1^{x^2} (1 + e^{t^2})\,dt.$$

   (a) Calcule $F'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Estude a função F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

5. Seja $H \colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} (x+1)^2 \cdot \operatorname{arcsen} t\,dt$.

   (a) Justifique que H é uma função contínua.

   (b) Mostre que H é diferenciável em $]0, \frac{\pi}{2}[$ e calcule $H'(x)$.

   (c) Mostre que H tem extremos globais. Identifique os respetivos extremantes.

6. Usando a Regra de Cauchy, calcule o seguinte limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\displaystyle\int_1^{x^2} t\,\cos(1 - e^{1-t})\,dt}{x^2 - 1}.$$

7. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^2 6x^4\,dx$ (b) $\displaystyle\int_3^2 \left(\frac{t^2}{3}-\sqrt{t}\right) dt$ (c) $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{e^t}{3}\,dt$ (d) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$ (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \operatorname{tg} x\,dx$ (g) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \operatorname{sen}(3x)\,dx$ (j) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$ (l) $\displaystyle\int_3^{11} \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\,dx$

(m) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x}(x-1)\,dx$ (n) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$ (o) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (p) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$

8. Calcule

(a) $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x+4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$ (e) $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x\,dx$

9. Calcule

(a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$ onde $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0\le x<1 \\ \frac{1}{x} & \text{se} \quad 1\le x\le 2\end{cases}$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$ onde $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{se} \quad x\in[-1,0[\\ 7 & \text{se} \quad x=0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{se} \quad x\in]0,1]\end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ onde $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & \text{se} \quad x\neq 1 \\ 5 & \text{se} \quad x=1\end{cases}$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ onde $f(x)=\begin{cases} -2 & \text{se} \quad x\in[0,\frac{\pi}{2}[\\ \cos x & \text{se} \quad x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}] \\ \operatorname{sen} x & \text{se} \quad x\in]\frac{3\pi}{2},2\pi]\end{cases}$

10. Suponha que f é contínua em $[a,b]$ e que $f(x)\ge 0$ para todo o $x\in[a,b]$.

(a) Mostre que se existe $\bar{x}$ em $[a,b]$ tal que $f(\bar{x})>0$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx>0$.

(b) Considerando apenas que f é contínua em $[a,b]$, diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:

$$\text{Se} \int_a^b f(x)\,dx=0, \quad \text{então } f(x)=0 \ \text{ para todo o } x\in[a,b]\,.$$

11. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x=0$ e $x=2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função g definida por $g(x)=x\ln(x+1)$.

12. Calcule o valor da área da região (limitada) do plano situada entre $x=0$ e $x=2$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função g definida por $g(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^x+1}$.

13. Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Calcule a área da região limitada do plano situada entre as rectas de equação $x = 0$ e $x = 2$ e limitada pelo gráfico de f e pelo eixo Ox.

14. Calcule a área da região limitada do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.

15. Calcule a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = e^{2x+1}$ e $g(x) = xe^{2x+1}$, e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = -\frac{1}{2}$.

16. Calcule a área da região (limitada) de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = x^2$, e pelas retas $x = 2$ e $y = 0$.

17. Determine a área da região limitada do plano delimitada pelo gráfico da função f definida por $f(x) = x \cos x$ e pelas retas de equação $y = x$, $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

18. Exprima, em termos de integrais definidos, o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = -\pi$ e $x = \pi$ e limitada pelos gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$, respetivamente.

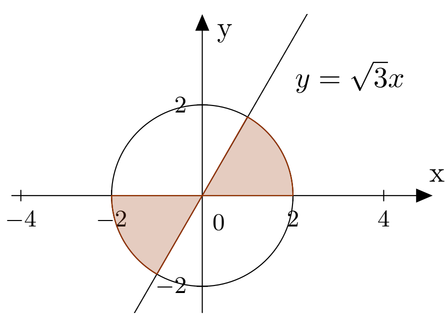
19. Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2,\ y \geq x - 1,\ y \leq 4\}$.

    (a) Represente geometricamente a região A.

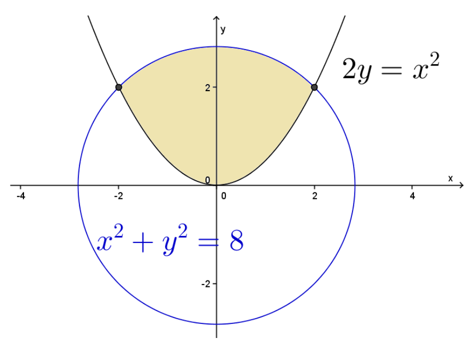
    (b) Calcule o valor da área da região A.

20. Recorrendo ao cálculo integral, determine o valor da área da região sombreada representada nas figuras seguintes:

    (a)



    (b)



21. Usando o cálculo de integrais, mostre que a área da região do plano delimitada pela elipse de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{onde } a, b \in \mathbb{R}^+,$$

    é πab.

22. [1] A probabilidade do eletrão de um átomo de hidrogénio se encontrar a uma distância inferior a x do seu núcleo é dada por

$$F(x) = \int_0^x \frac{4}{\beta^3} r^2 e^{-\frac{2r}{\beta}}\, dr,$$

    onde $\beta \in \mathbb{R}^+$ é o chamado raio de Bohr ($\beta \simeq 0.5292$Å). Calcule a probabilidade do eletrão se encontrar a uma distância do núcleo inferior a 2β.

[1] A partir deste exercício, retomam-se assuntos já abordados em exercícios anteriores. Exceto os dois primeiros, os exercícios foram retirados de provas de avaliação de edições anteriores.

23. Do fundo de um tanque de armazenamento fluí água a uma taxa $r(t) = 200 - 4t$, $0 \leq t \leq 50$, em ℓ/min.

    (a) Calcule a quantidade de água debitada durante os 10 primeiros minutos.

    (b) Determine a expressão analítica da função que representa o volume total de água debitada, em litros, até um dado instante t, $0 \leq t \leq 50$.

    (c) Qual o instante t em que o tanque terá debitado um volume total de 3 m^3 de água?

24. Mostre que a função F definida em $[1, +\infty[$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\ln x} \frac{e^t}{t+1}\, dt$ é estritamente crescente.

25. Calcule a área da região do plano situada entre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$ e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função h definida por
$$h(x) = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

26. Seja f uma função contínua em $[2, 5]$ e $F(x) = \displaystyle\int_2^x f(t)\, dt$, com $x \in [2, 5]$.

    (a) Justifique que a função F é integrável em $[2, 5]$.

    (b) Mostre que existe $c \in]2, 5[$ tal que $\displaystyle\int_2^5 F(t)\, dt = 3 \int_2^c f(t)\, dt$.

27. Diga, justificando, se a função h definida por
$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{arccotg}(x^2 - 4) & \text{se} \quad x < 2 \\ \pi & \text{se} \quad x = 2 \\ \cos(1 - e^{x-2}) & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$
é integrável (no sentido de Riemann) no intervalo $[-1, 4]$.

28. Considere a função F definida em $\mathbb{R}$ por $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^3} te^{\operatorname{sen} t} dt$.

    (a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $F'(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

    (b) Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{F(x)}{\operatorname{sen} x}$.

29. Considere a função f definida por $f(x) = \dfrac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$.

    (a) Determine $\displaystyle\int f(x)\, dx$.

    (b) Calcule o valor da área da região delimitada pelo gráfico da função f, pelo eixo das abcissas e pelas retas de equações $x = -1$ e $x = \sqrt{3}$.

30. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 (isto é, tal que f'' é contínua). Observando que $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t) dt$, mostre que
$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \int_a^x (x - t)f''(t) dt, \quad \forall x \in I.$$
(Sugestão: use o método de integração por partes).

31. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e par. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \int_0^{2x} f(t)\, dt.$$

Mostre que F é uma função ímpar. (Sugestão: use o método de integração por substituição)

32. Seja $F : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(4-t^2)}}\, dt.$

   (a) Justifique que F é diferenciável e mostre que $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - \operatorname{sen}^2 x}}$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

   (b) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{\operatorname{sen} x \cos x}$.

33. Considere a função F de domínio $[-1, 1]$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{arcsen} x}^{0} \frac{(\operatorname{sen} t)^2}{e^t + 1}\, dt.$

   (a) Justifique que F é diferenciável em $]-1, 1[$ e determine $F'(x)$ para $x \in]-1, 1[$.

   (b) Estude F quanto à monotonia e identifique os extremantes globais de F.

Exercícios Resolvidos

1. Considere a função real de variável real definida por $H(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^3}\, dt$. Indique o domínio de H e mostre que nesse domínio a função é diferenciável. Calcule $H'(x)$.

   Resolução: O domínio de H é $\mathbb{R}$.

   Sejam F e g dadas por $F(x) = \int_0^x e^{t^3}\, dt$ e $g(x) = x^2$, respetivamente. Notar que,

   $$H(x) = F(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

   A função F é diferenciável em $\mathbb{R}$, dado que f definida por $f(t) = e^{t^3}$ é contínua em $\mathbb{R}$, e $F'(x) = e^{x^3}$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo Integral. Por outro lado, a função g, que é uma função quadrática, é também diferenciável em $\mathbb{R}$ e $g'(x) = 2x$. Então, usando a regra da cadeia, H é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $H'(x) = f(g(x))g'(x)$, ou seja,

   $$\begin{aligned} H'(x) &= e^{(x^2)^3} \cdot 2x \\ &= 2x\, e^{x^6}, \text{ para todo o } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Considere a função f de domínio $]1, +\infty[$ definida por $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

   (a) Determine a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$.

   (b) Calcule o valor da área da região do plano situada entre as retas de equações $x = e$ e $x = e^3$, limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico de f.

   Resolução:

   (a) Atendendo ao Teorema Fundamental do Cálculo Integral, uma vez que f é contínua em qualquer subintervalo fechado e limitado de $]1, +\infty[$, essa primitiva é a função dada por

   $$F(x) = \int_{e^2}^{x} f(t)dt = \int_{e^2}^{x} \frac{1}{t \ln t} dt = \int_{e^2}^{x} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} dt = \ln|\ln x| - \ln(\ln(e^2))$$

   ou seja, a primitiva de f que se anula no ponto $x = e^2$ é dada por $F(x) = \ln|\ln x| - \ln(2)$.

(b) Uma vez que para todo o $x \geq e$, $\ln x \geq 1$, podemos concluir que para todo o $x \in [e, e^3]$, $x \ln x > 0$ e, portanto,

$$\frac{1}{x \ln x} > 0.$$

Como f é contínua e positiva em $[e, e^3]$ a área pedida é dada por

$$\int_e^{e^3} f(x)dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_e^{e^3} = \ln|\ln(e^3)| - \ln|\ln e| = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

3. Calcule o valor da área da região do plano situada entre os gráficos das funções f e g definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \frac{4 + \text{sen}^2 x}{1 + 4x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\text{sen}^2 x}{1 + 4x^2}$$

e pelas retas de equações $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

Resolução: Uma vez que as funções f e g são contínuas em $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e, para todo o $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$f(x) = \frac{4 + \text{sen}^2 x}{1 + 4x^2} > \frac{\text{sen}^2 x}{1 + 4x^2} = g(x)$$

podemos afirmar que a área pedida é dada pelo seguinte integral de Riemann:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g(x))\, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1 + 4x^2} dx.$$

Como

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4}{1 + 4x^2} dx = \frac{4}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1 + (2x)^2} dx = 2\Big[\text{arctg}(2x)\Big]_0^{\frac{1}{2}} = 2\left(\text{arctg}(1) - \text{arctg}(0)\right) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

podemos concluir que a área é igual a $\dfrac{\pi}{2}$.