01.
08.

Exercícios da Regra de Cauchy

(pag. 152) 26. (f) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p}$, $p \in \mathbb{R}^+$

14.f)

$\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{p\,x^{p-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{p\,x^p} = 0$$

14.g) 26. (g) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln(2-x)}$

$\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln(2-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\frac{-1}{2-x}} = \lim_{x\to 1} (2-x) = 1$$

14.k) 26 (h) $\lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left((x+1)^p\right) - \ln\left(x^p\right)\right]$ com $p \in \mathbb{R}$

indet $+\infty-\infty$

$$L = \lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left((x+1)^p\right) - \ln\left(x^p\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{(x+1)^p}{x^p}$$

$$L = \lim_{x\to+\infty} \ln \left(\frac{x+1}{x}\right)^p = \lim_{x\to+\infty} \left[p \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1}\right)\right]$$

$$L = p \ln\left(\frac{1+0}{1}\right) = 0$$

14.i) $\boxed{26. (i) \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}}$ $\leftarrow \left(+0^{+0}\right)$

Defina-se: $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)} \Leftrightarrow \ln y = \operatorname{tg}(2x) \ln(\operatorname{tg} x)$

($x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, pois y terá de ser positivo)

Calcule-se agora o seguinte limite:

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \left[tg(2x) \ln(tg\, x) \right]$$

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(tg\, x)}{\frac{1}{tg(2x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(tg\, x)}{cotg(2x)}$$

como $\lim_{x\to 0^+} \ln(tg\, x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} cotg(2x) = +\infty$

temos uma indet. $\frac{-\infty}{+\infty}$

Regra de Cauchy:

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{tg\, x} \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x \cos x}}{-\frac{2}{\sin^2(2x)}}$$

como $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cancel{2}}{\sin(2x)}}{-\frac{\cancel{2}}{\sin^2 2x}} = \lim_{x\to 0^+} \left[-\sin 2x \right] = 0$$

Mas se

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} (\ln y) = 0$$

Então

$$L_2 = \lim_{x\to 0^+} y = e^{L_1} = 1$$

//

14.j) 26. (j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$ $\qquad (1^{+\infty})$

Seja $y=\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} \Rightarrow \ln y=(x+3)\ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$

Calcule-se o limite:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}(\ln y)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)\ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)\right]$$

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)}{\frac{1}{x+3}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

Regra de Cauchy:

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-1}{x+3}\,\frac{(x-1)-(x+3)}{(x-1)^2}}{\frac{-1}{(x+3)^2}}$$

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+3)^{\cancel{2}}}{-1}\,\frac{x-1}{\cancel{x+3}}\,\frac{-1-3}{(x-1)^2}\right]$$

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4(x+3)(x-1)}{(x-1)^2}\right]$$

$$L_1=\lim_{x\to+\infty}\left(4\,\frac{x+3}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(4\,\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)=4$$

Então

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} (\ln y) = 4$$

Logo

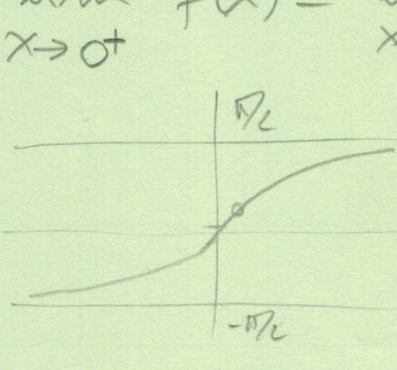
$$L_2 = \lim_{x \to +\infty} y = e^4$$

15 27. Sendo k um número real diferente de zero, considere a função f definida ~~por~~ em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ do modo seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{kx} & \text{se } x < 0 \\ \arctan \dfrac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Calcule os limites laterais de f no ponto zero e indique o valor de k para o qual é possível obter um prolongamento por continuidade de f a $\mathbb{R}$.

Seja $L_1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\arctan \frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$



Seja
$$L_2 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(\pi x)}{k x}$$

Como $k \neq 0$, temos uma indet $\frac{0}{0}$

Regra de Cauchy:

$$L_2 = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(\pi x)\cdot \pi}{k} = \frac{\pi}{k}$$

Se $k=2$, teríamos $L_2 = \frac{\pi}{2}$

pelo que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{2x} & \text{se } x<0 \\ \pi/2 & \text{se } x=0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x>0 \end{cases}$$

é o prolongamento por continuidade de f a $\mathbb{R}$.

\96

13 25. Mostre que existe

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Para aplicar a R.C. teriam de existir os limites

$$\lim_{x\to+\infty} \left[(x - \sin x)'\right] = \lim_{x\to+\infty} (1 - \cos x)$$

$\nexists$

$$\lim_{x\to+\infty} \left[(x + \sin x)'\right] = \lim_{x\to+\infty} (1 + \cos x)$$

$\nexists$

Então a R.C. não é aplicável

Mas:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}}$$

e é fácil de concluir que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \text{, pelo que}$$

(infinitésimo $\frac{1}{x}$) (limitada $\sin x$)

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

10 22. Seja f uma função real definida por

$$f(x)=\begin{cases} x\ln x & \text{se } x>0 \\ \sin(5x)-x & \text{se } x\leq 0 \end{cases}$$

(a) Estude f quanto à continuidade

Se $x\in\mathbb{R}^+$, f é cont. (o o o)

Se $x\in\mathbb{R}^-$, f é cont. (o o o)

Vamos averiguar para $x=0$:

$f(0)=\sin(5\times 0)-0=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\sin(5x)-x\right]=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

R.C:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

Logo f é contínua em $x=0$ pelo que $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

(b) Averigue se f é diferenciável para $x=0$

Derivadas laterais em $x=0$

$$f'_+(0) = \left[(x \ln x)'\right]_{x=0} = \left[(\ln x + 1)\right]_{x=0} = -\infty$$

$$f'_-(0) = \left[(\sin(5x) - x)'\right]_{x=0} = \left[5\cos(5x) - 1\right]_{x=0} = 4$$

Logo não existe $f'(0)$ pelo que f não é derivável nem diferenciável.

(c) Enuncie o T. Rolle. Mostre que é aplicável à função f no intervalo $[0,1]$ e det. o ponto b desse intervalo tal que $f'(b)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \ln 1 = 0 \end{array}\right\rangle f(0) = f(1)$$

Logo $\exists\, b \in \,]0,1[\, : f'(b) = 0$

$$f'(b) = \left[(x \ln x)'\right]_{x=b} = (\ln x + 1)\Big|_{x=b} = \ln b + 1$$

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow \ln b + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln b = -1$$

$$b = e^{-1}$$