Álgebra Linear e Geometria Analítica

Espaços Vetoriais

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Definição de espaço vetorial

Ao longo deste capítulo considera-se um conjunto não vazio $\mathcal{V}$, com uma operação $\oplus$ definida para cada $X \in \mathcal{V}$ e para cada $Y \in \mathcal{V}$,

$$X \oplus Y,$$

e uma operação $\odot$ definida para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e para cada $X \in \mathcal{V}$,

$$\alpha \odot X.$$

Diz-se que o conjunto $\mathcal{V}$ está munido com as operações $\oplus$ e $\odot$.

As operações $\oplus$ e $\odot$ são usualmente designadas por

adição e multiplicação por escalar,

(respectivamente) porque, como se verá a seguir, estas operações têm muitas propriedades em comum com outras operações de adição e multiplicação por escalar conhecidas, tais como a adição e a multiplicação por escalar de vetores de $\mathbb{R}^n$ e de matrizes $m \times n$.

Definição de espaço vetorial

O conjunto $\mathcal{V}$, munido das operações $\oplus$ e $\odot$, é um espaço vetorial (e.v.) real se, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{V}$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

1. $\mathcal{V}$ é fechado relativamente a $\oplus$ — $X \oplus Y \in \mathcal{V}$
2. $\oplus$ é comutativa — $X \oplus Y = Y \oplus X$
3. $\oplus$ é associativa — $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$
4. existe (único) o el. neutro $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V}$ (zero de $\mathcal{V}$) para $\oplus$ — $0_{\mathcal{V}} \oplus X = X$
5. existe (único) o simétrico $\ominus X \in \mathcal{V}$ de X em relação a $\oplus$ — $\ominus X \oplus X = 0_{\mathcal{V}}$
6. $\mathcal{V}$ é fechado relativamente a $\odot$ — $\alpha \odot X \in \mathcal{V}$
7. $\odot$ é distributiva em relação a $\oplus$ — $\alpha \odot (X \oplus Y) = \alpha \odot X \oplus \alpha \odot Y$
8. $\odot$ é "distributiva" em relação a $+$ — $(\alpha + \beta) \odot X = \alpha \odot X \oplus \beta \odot X$
9. os produtos (o de $\mathbb{R}$ e $\odot$) são "associativos" — $(\alpha\beta) \odot X = \alpha \odot (\beta \odot X)$
10. o escalar 1 é o "elemento neutro" para $\odot$ — $1 \odot X = X$

Daqui em diante, designaremos os espaços vetoriais reais apenas por espaços vetoriais (e.v.)

Exemplos de espaços vetoriais

1. $\mathbb{R}^n$ munido das operações adição e multiplicação por escalar usuais.

2. $\mathbb{R}^+$ munido das operações:
$$x \oplus y = xy \qquad \text{e} \qquad \alpha \odot x = x^\alpha, \qquad\qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. O conjunto $\mathbb{R}^{m \times n}$ das matrizes $m \times n$ munido das operações adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar real.

4. O conjunto de todas as funções reais de variável real, com o mesmo domínio, munido da adição de funções e multiplicação de uma função por um escalar real.

5. O conjuntos $\mathcal{P}$ de todos os polinómios (de qualquer grau) e o conjunto $\mathcal{P}_n$ dos polinómios de grau menor ou igual a n (incluindo o polinómio nulo), com as operações usuais.

O conjunto dos polinómios de grau n, com as operações usuais, não é e.v.

Mais algumas propriedades dos espaços vetoriais

Proposição: Seja $\mathcal{V}$ um e.v. Então

(a) $0 \odot X = 0_{\mathcal{V}}$, $\forall\, X \in \mathcal{V}$;

(b) $\alpha \odot 0_{\mathcal{V}} = 0_{\mathcal{V}}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$;

(c) $\alpha \odot X = 0_{\mathcal{V}} \;\Rightarrow\; \alpha = 0$ ou $X = 0_{\mathcal{V}}$;

(d) $(-1) \odot X = \ominus X$ é o simétrico de X em relação a $\oplus$, $\forall\, X \in \mathcal{V}$.

Para simplificar as notações, daqui em diante, escreve-se

i. $X + Y$ em vez de $X \oplus Y$, para $X, Y \in \mathcal{V}$;

ii. αX em vez de $\alpha \odot X$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{V}$;

iii. $-X$ em vez de $\ominus X$, para $X \in \mathcal{V}$.

Definição de subespaço

O subconjunto não vazio $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço (vetorial) do e.v. $\mathcal{V}$ se, munido das mesmas operações de $\mathcal{V}$, for ele próprio um e.v.

Teorema: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço do e.v. $\mathcal{V}$ se e só se

1. $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{S}$, onde $0_{\mathcal{V}}$ representa o elemento neutro de $\mathcal{V}$ em relação à adição;
2. $\mathcal{S}$ é fechado em relação à adição em $\mathcal{V}$:
$$X + Y \in \mathcal{S}, \quad \text{para } X, Y \in \mathcal{S};$$
3. $\mathcal{S}$ é fechado em relação à multiplicação por escalar em $\mathcal{V}$:
$$\alpha X \in \mathcal{S}, \quad \text{para } \alpha \in \mathbb{R}, X \in \mathcal{S}.$$

Exemplos de subespaços

Exemplo:

1. $\mathcal{V}$ e $\{0_{\mathcal{V}}\}$ são os subespaços triviais de $\mathcal{V}$;
2. $\{(0, y, z) : \ y, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$;
3. $\{(1, y) : \ y \in \mathbb{R}\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$;
4. o espaço nulo da matriz A $m \times n$,

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : \ AX = 0\},$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Subespaço gerado por um conjunto

Dados os elementos $X_1, \dots, X_k$ de $\mathcal{V}$ e os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, o elemento $X \in \mathcal{V}$ tal que

$$X = \alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k$$

é uma combinação linear dos elementos $X_1, \dots, X_k$.

Teorema:
Seja $\mathcal{V}$ um e.v., $K = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \mathcal{V}$ e S o conjunto das combinações lineares de elementos de K, ou seja, $S = \{\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\}$. O conjunto S é um subespaço de $\mathcal{V}$.

O subespaço S designa-se por subespaço gerado por K, e escreve-se

$$S = \langle K \rangle \text{ ou } S = \langle X_1, \dots, X_k \rangle.$$

Diz-se, também, que K gera o subespaço $\mathcal{S}$ ou é um conjunto gerador do subespaço $\mathcal{S}$.

Subespaço gerado por um conjunto

Exercício: Confirme que se $X_1, \cdots, X_k \in \mathcal{V}$, então $S = \langle X_1, \ldots, X_k \rangle$ é um subespaço de $\mathcal{V}$.

Exemplo: Dados os vetores não colineares $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,

1. $\langle X_1 \rangle$ é a reta que passa pela origem e tem vetor director X_1;
2. $\langle X_1, X_2 \rangle$ é o plano que passa pela origem e que contém X_1 e X_2.

Espaço das linhas e espaço das colunas de uma matriz

Seja A uma matriz $m \times n$ com linhas $L_1, \ldots, L_m \in \mathbb{R}^n$ e colunas $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}^m$

$$A = \begin{bmatrix} {L_1}^T \\ \vdots \\ {L_m}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

- O espaço das linhas de A é o subespaço de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}(A) = \langle L_1, \ldots, L_m \rangle \subseteq \mathbb{R}^n.$$

- O espaço das colunas de A é o subespaço de $\mathbb{R}^m$

$$\mathcal{C}(A) = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Espaço das linhas e espaço das colunas de uma matriz

Lema: Dados $X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{V}$ e $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, com $i \neq j$,

i. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle$;

ii. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, \alpha X_i, \ldots, X_k \rangle$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

iii. $\langle X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_i + \beta X_j, \ldots, X_k \rangle$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Como consequência deste resultado, conclui-se o seguinte:

Teorema: Se as matrizes A e B são equivalentes por linhas, $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$.

Independência linear

Um subconjunto não vazio $\mathcal{K}=\{X_1,\ldots,X_k\}$ de um e.v. $\mathcal{V}$ diz-se linearmente independente (l.i.) se

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}} \qquad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0,$$

caso contrário, $\mathcal{K}$ é linearmente dependente (l.d.) em $\mathcal{V}$.

Nota: $0_{\mathcal{V}} \in \mathcal{K} \ \Rightarrow \ \mathcal{K}$ é linearmente dependente.

Exemplos:

- Dois vetores não nulos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ são colineares se e só se são l.d.
- Três vetores não colineares de $\mathbb{R}^3$ definem um plano se e só se são l.d.

Independência linear

Seja $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\}$ um subconjunto de um e.v. $\mathcal{V}$.

$\mathcal{K}$ é linearmente dependente se e só se o sistema que se obtém da equação

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = 0_{\mathcal{V}}$$

é possível e indeterminado, isto é, se tem uma solução com os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ não todos nulos.

Se existe $1 \leq j \leq k$ tal que $\alpha_j \neq 0$, então

$$X_j = \frac{\alpha_1}{\alpha_j} X_1 + \cdots + \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} X_{j-1} + \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} X_{j+1} + \cdots \frac{\alpha_k}{\alpha_j} X_k$$

concluindo-se que X_j pertence ao subespaço gerado por $\mathcal{K} \setminus \{X_j\}$.

Geradores e independência linear

Sejam $\mathcal{V}$ um e.v. e $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

Lema: Seja $X \in \mathcal{K}$. Então X é combinação linear dos elementos de $\mathcal{K} \setminus \{X\}$ se e só se $\langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle = \langle K \rangle$.

Teorema: $\mathcal{K}$ é um conjunto linearmente

- dependente $\iff$ existe $X \in \mathcal{K}$ tal que $X \in \mathcal{K} \setminus \{X\}$, ou seja, $\langle \mathcal{K} \setminus \{X\} \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle$;
- independente $\iff$ para cada $X \in \mathcal{V} \setminus \langle \mathcal{K} \rangle$, o conjunto $\mathcal{K} \cup \{X\}$ é l.i.

Geradores e independência linear

Corolário:

Seja $\mathcal{V}$ um e.v. e $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

- Se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$ mas não é l.i., é possível retirar um elemento de $\mathcal{K}$, obtendo-se ainda um conjunto gerador de $\mathcal{V}$.
- Se $\mathcal{K}$ é l.i. mas não gera $\mathcal{V}$, é possível acrescentar um elemento de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{K}$, obtendo-se ainda um conjunto l.i.

Corolário:

Se $\mathcal{V}$ é um e.v. gerado por um número finito de elementos ($\mathcal{V}$ é finitamente gerado), então $\mathcal{V}$ tem um conjunto gerador que é linearmente independente.

Base de um espaço vetorial

Uma base de um e.v. $\mathcal{V} \neq \{0_{\mathcal{V}}\}$ é um

- conjunto linearmente independente,
- conjunto gerador de $\mathcal{V}$.

Nota:

- Por convenção, o e.v. trivial $\{0_{\mathcal{V}}\}$ tem como base o conjunto vazio.
- Um conjunto l.i. é base do subespaço por ele gerado.

Base de um espaço vetorial

Exemplos:

1. Sejam $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Então $\mathcal{C}_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$.

2. Seja E_{ij} a matriz $m \times n$ que tem a entrada (i, j) igual a 1 e todas as outras iguais a 0. Então $\mathcal{C}_{m\times n} = \{E_{ij} : i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^{m\times n}$.

3. A base canónica do e.v. $\mathcal{P}_n$ dos polinómios na variável x de grau menor ou igual a n (incluindo o polinómio nulo) é $\mathcal{P}_n = \{1, x, \ldots, x^n\}$.

4. O e.v. $\mathcal{P}$ de todos os polinómios não admite uma base com um número finito de elementos. O conjunto $\{1, x, x^2, \cdots\}$ é uma base de $\mathcal{P}$.

Base de um espaço vetorial

Sejam $\mathcal{V}$ um e.v. e $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_k\} \subset \mathcal{V}$.

Proposição:

- Se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$, então qualquer elemento de $\mathcal{V}$ pode escrever-se como combinação linear dos elementos de $\mathcal{K}$, de pelo menos uma maneira.
- Se $\mathcal{K}$ é l.i., então qualquer elemento de $\mathcal{V}$ pode escrever-se como combinação linear dos elementos de $\mathcal{K}$, de no máximo uma maneira.

Proposição:
Se $\mathcal{K}$ é uma base de $\mathcal{V}$, então

cada elemento de $\mathcal{V}$ escreve-se de forma única como combinação linear dos elementos de $\mathcal{K}$.

Dimensão de um espaço vetorial

Teorema: Seja $\mathcal{V}$ um e.v. com uma base que contém n elementos e $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ um subconjunto com r elementos.

i. $\mathcal{K}$ é l.i. $\Rightarrow$ $r \leq n$
Neste caso, existe uma base de $\mathcal{V}$ que contém $\mathcal{K}$.

ii. $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V} \Rightarrow r \geq n$
Neste caso, existe uma base de $\mathcal{V}$ que é um subconjunto de $\mathcal{K}$.

Corolário:

Todas as bases de $\mathcal{V}$ possuem o mesmo número de elementos.

A dimensão de um e.v. $\mathcal{V}$ é o número de elementos de uma base de $\mathcal{V}$ e denota-se por $\dim \mathcal{V}$.

Dimensão de um espaço vetorial

Consequência do teorema anterior:

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial com dimensão n e $\mathcal{K}$ um subconjunto de $\mathcal{V}$ com r elementos.

i. $r > n \Rightarrow \mathcal{K}$ é l.d.

ii. $r < n \Rightarrow \mathcal{K}$ não gera $\mathcal{V}$

iii. $r = n \Rightarrow \mathcal{K}$ é uma base de $\mathcal{V}$ se e só se $\mathcal{K}$ é l.i.,
se e só se $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$.

Se $\mathcal{B}$ é um e.v. com dimensão n e $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $\mathcal{V}$ com n elementos, para verificar se $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{V}$ é suficiente verificar uma das condições:

(i) $\mathcal{B}$ é linearmente independente, ou,

(ii) $\mathcal{B}$ gera $\mathcal{V}$.

Exemplos

Exemplos:

1. $\dim\{0_{\mathcal{V}}\} = 0$,
2. $\dim \mathbb{R}^n = n$,
3. $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$,
4. $\dim \mathcal{P}_n = n+1$.

Teorema:
Se $\mathcal{K} = \{X_1, \ldots, X_n\} \subset \mathcal{V}$ e $\dim \mathcal{V} = n$, então

i. $\mathcal{K}$ l.i. $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ é base de $\mathcal{V}$;

ii. $\mathcal{K}$ gera $\mathcal{V}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{K}$ é base de $\mathcal{V}$.