Folha 3

exercício 1

a) $(\exists y)\ (P(x,y))$

-> x livre, y ligada

b) $((\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow (\sim(P(x)) \vee Q(y))$

-> x ligada (1º membro)

-> x e y livres (2º membro)

c) $\exists x\ (P(y,z) \wedge \forall y\ (\sim Q(x,y) \vee P(y,z)))$

-> y livre e ligada, z livre e x ligada

d) $P(a, f(a,b))$

-> a e b livres

e) $\exists x\ (P(x) \Rightarrow \sim Q(x))$

-> x ligada

f) $\forall x\ ((P(x) \wedge C(x)) \Rightarrow \exists y\ \alpha(x,y))$

-> x e y ligadas

exercício 2

a) Todas as aves têm penas

-> $\forall x$ ave$(x) \Rightarrow$ tempenas(x)

b) Todas as crianças são mais novas que os seus pais

-> $\forall x \forall y$(criança$(y) \wedge$ pai$(x,y)) \Rightarrow$ mais novo(x,y)

c) Todos os insetos são mais leves do que algum mamífero

-> $\forall x$ (inseto$(x)) \Rightarrow \exists y$ mamífero$(y) \wedge$ mais leve(x,y)

d) Nenhum número é menor do que zero

-> $\forall x$ (numero$(x) \Rightarrow x \geqslant 0)$

e) Zero é menor do que qualquer número

-> $\forall x$ (numero$(x) \Rightarrow x > 0)$

f) Alguns números primos não são pares

-> $\exists x$ primo$(x) \Rightarrow \sim$par(x)

g) Todo o número par é número primo

-> $\forall x$ par$(x) \Rightarrow$ primo(x)

exercício 3

a) $\forall x \quad c(x) \Rightarrow s(x)$

-> Todos os textos em português que são explicações claras são satisfatórias.

- $c(x) \rightarrow$ "x é uma explicação clara"
- $s(x) \rightarrow$ "x é satisfatória"
- $d(x) \rightarrow$ "x é uma desculpa"

b) $\exists x \; d(x) \wedge \sim s(x)$

-> Existem algumas desculpas que não são satisfatórias

c) $\exists x \; d(x) \wedge \sim c(x)$

-> Existem algumas desculpas que não são explicações claras

exercício 4

π -> conjunto dos subconjuntos de pontos de um certo plano

$R(x) \equiv$ "x é uma reta"

$c(x) \equiv$ "x é uma circunferência"

$i(x,y) \equiv$ "a interseção de x e y é não vazia"

a) Toda a reta interseta alguma circunferência

-> $\forall x \; (R(x) \Rightarrow \exists y \; (c(y) \wedge i(x,y))$

b) Alguma reta não interseta alguma circunferência

-> $\exists x \; \exists y \; (R(x) \wedge c(y) \wedge \sim i(x,y))$

c) Nenhuma reta interseta todas as circunferências

-> $\forall x \; (R(x) \Rightarrow \exists y \; (c(y) \wedge \sim i(x,y)))$

exercício 5

$Casa(x) \equiv$ "x é uma casa"

$Grande(x) \equiv$ "x é grande"

$Cara(x) \equiv$ "x é cara"

$Apartamento(x) \equiv$ "x é apartamento"

$PMenor(x,y) \equiv$ "preço de x é menor do que o preço de y"

a) Todas as casas grandes são caras

-> $\forall x \; (Casa(x) \wedge Grande(x)) \Rightarrow Cara(x)$

b) Qualquer apartamento custa menos do que pelo menos uma casa grande

-> $\forall x \; (Apartamento(x) \Rightarrow \exists y \; (Casa(y) \wedge Grande(y) \wedge PMenor(x,y)))$

exercício 6

gosta $(x, y) \equiv x$ "gosta de" y

a) Toda a gente tem alguém que gosta de si

-> $\forall x \, \exists y$ gosta (x, y)

b) As pessoas de quem todos gostam também gostam de si próprias

-> $\forall x \, (\forall y$ gosta $(x, y) \Rightarrow$ gosta (x, x)

c) $\neg(\forall x \, \exists y$ gosta $(x, y)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x \, \exists y \, \sim$ gosta (x, y) //

-> Existe pelo menos 1 pessoa de quem ninguém gosta.

exercício 7

$\forall y \, \exists x \, ((q(x) \Rightarrow p(y)) \vee (p(y) \wedge (q(x))))$

$[(q(x) \Rightarrow p(y)) \vee (p(y) \wedge q(x))] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\sim q(x) \vee p(y)] \vee [p(y) \wedge q(x)] \Leftrightarrow$ distributividade

$\Leftrightarrow [(\sim q(x) \vee p(y)) \vee p(y)] \wedge [(\sim q(x) \vee p(y)) \vee q(x)] \Leftrightarrow$

tautologia

$\Leftrightarrow [(\sim q(x) \vee p(y))] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [q(x) \Rightarrow p(y)]$ -> implicação válida para $\forall y \, \exists x$

Negação: $\forall x \, \exists y \, \sim[q(x) \Rightarrow p(y)]$ //

exercício 8

$Q: \forall x \, \exists y \, ((t(x) \wedge v(y, x)) \Rightarrow \sim p(x, y))$

- $t(x) \equiv$ "$x > 1$"
- $v(y, x) \equiv$ "$y = x + 1$"
- $p(x, y) \equiv$ "x divide y"

a) Q trata-se de uma proposição verdadeira, traduzindo Q lê-se "Não existe nenhum número y, consecutivo a $x > 1$, tal que x divida y", o que é verdade, não existe qualquer x maior que 1, tal que:

$y = x + 1$ e $y : x = n, \; n \in \mathbb{N}$

Contra-exemplo:

Supondo que existe um número y, consecutivo a $x > 1$, tal que x divida y, temos que:

seja $y = 3$, $x = 2$ $\quad 3 : 2 = 1,5 \notin \mathbb{N}$ -> logo não se aplica a todo o x, y e Q é verdadeira.

exercício 8

b) $(t(1) \wedge v(2,1)) \Rightarrow \sim p(1,2)$

Visto que $t(1)$ tem valor lógico falso temos:

$F \Rightarrow \sim p(1,2)$ ➔ obtemos uma tautologia e deste modo podemos concluir que a proposição é verdadeira

exercício 9

universo X $\rightarrow X = \{A, B, C\}$

constantes $\rightarrow \alpha = A$, $\beta = A$, $\gamma = B$

função $\rightarrow f$: $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = C$

predicado $\rightarrow R$: $R(B,A) = R(C,B) = R(C,C) = 1$, nos restantes casos o v.l. é 0.

a) $R(\alpha, \beta) = R(A, A) = 0 \rightarrow$ Falsa

b) $\exists x \; f(x) = \beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x \; f(x) = A$

Tendo em conta que:

$f(A) = B \quad f(B) = C \quad f(C) = C$ e $X = \{A, B, C\}$

não existe nenhum $x \in X$ tal que $f(x) = A$, logo a fórmula é falsa.

e) $\forall w \; R(f(w), w)$

$R(f(A), A) = R(B, A) = 1$ Fórmula Verdadeira

$R(f(B), B) = R(C, B) = 1$

$R(f(C), C) = R(C, C) = 1$

exercício 10

a) $\forall x \, (P(x,a) \Rightarrow \sim Q(x,a))$, onde a é constante

Caso o universo seja $\mathbb{N}$, a constante $a = 1$ e

$P(x, a) \equiv$ "x é múltiplo de a"

$Q(x, a) \equiv$ "x é divisível por a"

Sendo que, para todo $x \in \mathbb{N}$, $P(x,a)$ será sempre verdadeira, bem como $Q(x,a)$ vamos obter sempre uma expressão do tipo

$1 \Rightarrow \sim 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 \Rightarrow 0 = 0$

exercício 11

a) $(\forall x)\ S(x) \Rightarrow (\exists z)\ P(z) \equiv$

$\equiv (\forall x)\ (\exists z)\ [S(x) \Rightarrow P(z)] \equiv$

$\equiv (\forall x)(\exists z)\ [\sim S(x) \vee P(z)] \equiv \rightarrow$ forma normal conjuntiva prenex

b) $\sim ((\forall x)(S(x) \Rightarrow P(x))) \equiv$

$\equiv \sim (\forall x\ (\sim S(x) \vee P(x)) \equiv$

$\equiv \exists x\ \sim(\sim S(x) \vee P(x)) \equiv$

$\equiv \exists x\ (S(x) \wedge \sim P(x))$ //

c) $(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow (\exists y)\ Q(x,y)) \equiv$

$\equiv \forall x\ \exists y\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y)) \equiv$

$\equiv \forall x\ \exists y\ (\sim P(x) \vee Q(x,y))$

d) $(\exists x)\ (\neg((\exists y)\ P(x,y)) \Rightarrow ((\exists z)\ Q(z) \Rightarrow R(x))) \equiv$

$\equiv (\exists x)\ (\forall y\ \sim P(x,y)) \Rightarrow ((\exists z)\ Q(z) \Rightarrow R(x))) \equiv$

$\equiv (\exists x)\ [\sim(\forall y \sim P(x,y))] \vee [(\sim(\exists z)\ Q(z)) \vee R(x)] \equiv$

$\equiv \exists x\ \exists y\ \ P(x,y) \vee (\forall z) \sim Q(z) \vee R(x) \equiv$

$\equiv \exists x\ \exists y\ \forall z\ [P(x,y \vee \sim Q(z) \vee R(x)]$ //

e) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)\ ((\sim P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z)) \equiv$

$\equiv (\forall x)(\exists y)(\exists z)\ ([\sim P(x,y) \vee R(x,y,z)] \wedge [Q(x,y) \vee R(x,y,z)]$ //

exercício 12

a) $\neg((\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\exists y)\, P(y)) \equiv$

$\equiv \neg(\sim[(\forall x)\, P(x)] \vee (\exists y)\, P(y)) \equiv$

$\equiv (\forall(x)\ P(x) \wedge \sim[\exists y\, P(y)] \equiv$

$\equiv \forall x\ \forall y\ [P(x) \wedge \sim P(y)]$

b) $\neg((\forall x)\, P(x) \Rightarrow (\exists y)(\forall z)\, Q(y,z)) \equiv$

$\equiv \neg(\neg[(\forall x)\, P(x)] \vee [(\exists y)(\forall z)\, Q(y,z)] \equiv$

$\equiv [(\forall x)\, P(x)] \wedge \sim[(\exists y)(\forall z)\, Q(y,z)] \equiv$

$\equiv \forall x\ P(x) \wedge (\forall y)(\exists z) \sim Q(y,z) \equiv$

$\equiv (\forall x)(\forall y)(\exists z)\ [P(x) \wedge Q(y,z)] \equiv$

$\equiv \forall x\ \forall y\ [P(x) \wedge Q(y, g(x,y))]$

Substituição: $\exists z \rightarrow$ eliminar e substituir todas as ocorrências de z por $g(x,y)$

c) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z)) \equiv$

$\equiv (\forall x)(\exists y)((\neg P(x,y) \wedge Q(x, f(x,y))) \vee$

$\equiv (\forall x)(\neg P(x, h(x,w)) \wedge Q(x, f(x,y)) \vee R(x, h(x,w), f(x,y)) \equiv$

$\equiv \forall x\ \neg P(x, j(x)) \wedge Q(x, K(x)) \vee R(x, j(x), K(x))$ //

exercício 13

$S = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$, onde

$C_1 = P \vee R$ $C_4 = \neg P \vee S$

$C_2 = \neg Q \vee R$ $C_5 = \neg Q$

$C_3 = \neg S \vee Q$ $C_6 = \neg R$

$C_2 : \neg Q \vee R$
$C_3 : \neg S \vee Q$
$\overline{C_7 : \neg S \vee R}$

$C_7 : \neg S \vee R$
$C_4 : \neg P \vee S$
$\overline{C_8 : \neg P \vee R}$

$C_6 : \neg R$
$C_8 : \neg P \vee R$
$\overline{C_9 : \neg P}$

$C_1 : P \vee R$
$C_9 : \neg P$
$\overline{C_{10} : R}$

$C_6 : \neg R$
$C_{10} : R$
$\overline{\emptyset}$ $\Rightarrow S$ é inconsistente.

exercício 14

a) $\Theta_T = \{a/x, f(z)/y, g(x)/z\}$

$E = P(h(x), z, f(z))$

$\Theta_T\, P(h(w), z, f(z)) = P(\Theta_T(h(w)), \Theta_T(z), \Theta_T(f(z))) =$

$= P(h(\Theta(x)), g(x), f(\Theta_v(z))) =$

$= P(h(\Theta_v(x)), g(x), f(\Theta_v(z))) =$

$= P(h(a), g(x), f(g(x)))$

b) $\Theta = \{f(y)/x, a/y\}$

$E = F(a, h(a), x, h(y))$

$E = \Theta_T(F(a, h(a), x, h(y))) =$

$= F(\Theta_T(a), \Theta_T(h(a)), \Theta_T(x), \Theta_T((h(y))) =$

$= F(\Theta_T(a), h(\Theta_T(a)), \Theta_T(x), h(\Theta_T(y)) =$

$= F(\Theta_v(a), h(\Theta_v(a)), \Theta_v(x), h(\Theta_v(y)) =$

$= F(a, h(a), f(y), h(a))$.

exercício 15

a) $\{P(f(x), z), P(y, a)\}$

$K := 0 \quad W_0 = \{P(f(x), z), P(y, a)\} \quad \theta_0 = \varepsilon$

$D_0 = \{f(x), y\}$

$K = 1 \quad \alpha_1 = \{f(x)/y\} \Delta \alpha_0 = \{f(x)/y\}$

$W_1 = W_0\{f(x)/y\} = \{P(f(x), z), P(f(x), a)\}$

$K = 2 \quad \alpha_2 = \{a/z\} \quad W_2 = W_1\{a/z\} = \{P(f(x), a), P(f(x), a)\}$

$= \{P(f(x), a)\}$

$\alpha_2 = \{f(x)/y, a/z\}$