



– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Considere as matrizes:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ .

[15pts]

(a) Calcule um produto (que esteja definido) das três matrizes.

[20pts]

(b) Usando o método de eliminação de Gauss-Jordan, determine a matriz escalonada por linhas reduzida equivalente a  $C$ . Indique, justificando, a característica e a nulidade de  $C$ .

[15pts]

(c) Justifique que  $A$  é invertível. Sendo  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , determine a matriz  $X$  tal que  $XA^{-1} = D$ .

2. Considere  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , e  $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

[40pts]

(a) Discuta, em função do parâmetro  $a$ , o sistema  $AX = B$ .

[12pts]

(b) Para  $a = 3$ ,  $B$  pertence ao espaço das colunas de  $A$ ? Justifique.

[13pts]

(c) Para  $a = 1$ , determine  $\mathcal{N}(A)$ , o espaço nulo de  $A$ .

3. Sejam  $A(-1, 0, 2)$ ,  $B(1, 2, 3)$  e  $C(0, 1, 3)$  pontos de  $\mathbb{R}^3$ .

[15pts]

(a) Calcule o volume do paralelepípedo com vértice em  $O = (0, 0, 0)$  e arestas  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$ .

[20pts]

(b) Calcule a área de um dos paralelogramos com vértices em  $O$ ,  $A$  e  $B$ .

4. Seja  $A$  a matriz  $4 \times 4$  invertível tal que  $\text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

[15pts]

(a) Verifique que  $\det(\text{adj } A) = -8$

[20pts]

(b) Calcule  $A^{-1}$ .

[15pts]

5. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação. Caso seja falsa, apresente um contra-exemplo.

$$(X \times Y) \cdot (X + Y) = 0, \text{ quaisquer que sejam } X, Y \in \mathbb{R}^3.$$