Primitivação

Primitivação Imediata

- Sejam I e J intervalos de números reais,

  - $f: I \to \mathbb{R}$ → uma função primitivável
  - $g: J \to \mathbb{R}$ → uma função tal que a composta $f \circ g$ está definida

- Se g é diferenciável em J, então $(f \circ g)g'$ é primitivável e tem-se que:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

→ onde F é uma primitiva de f.

exemplo:

$$\int 2x \cos(x^2)\, dx = \operatorname{sen}(x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Primitivação por Partes

- Tendo em conta a derivada do produto:

$$(u(x) \cdot v(x))' = ((u(x))' \cdot (v(x))) + ((u(x)) \cdot (v(x))')$$

obtemos por primitivação:

- $\int u \cdot v\, dx = u'v + \int uv'\, dx$ → PRIMITIVAÇÃO POR PARTES

→ Sejam u e v funções de x diferenciáveis, então:

- $\int u'v\, dx = uv - \int uv'\, dx$

exemplo:

$$\int \underbrace{x}_{u'}\, \underbrace{\ln x}_{v}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Primitivação por partes

Quando usar?

- Quando a função pode ser escrita sob a forma do produto de 2 funções sendo conhecida a derivada de uma delas.
- Se souber primitivar 1 das funções, escolhe-se essa para primitivar e deriva-se a outra.
- Quando ambas as primitivas são conhecidas, devemos escolher a função que mais simples fica depois da derivação, para derivar (às vezes é indiferente).
- Por vezes, é necessário aplicar sucessivamente a fórmula de primitivação por partes.
- Pode acontecer, depois de aplicada a fórmula, voltar a obter a primitiva que se pretende determinar, nesse caso devemos interpretar a igualdade obtida como uma equação em que a incógnita é a primitiva que queremos determinar.

Primitivação de Funções Racionais

→ Uma função Racional é do tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$ onde $N(x)$ e $D(x)$ são polinómios de coeficientes Reais.
exemplo:

$$D(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + (\dots) + a_{k-(k-1)} x^1 + a_0 x^0$$

↳ $a_k \neq 0$
↳ $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2 \dots k-1$

Teorema Fundamental da Álgebra

Um polinómio de coeficientes ~~mais~~ ~~com~~ Reais com grau $k \in \mathbb{N}$ tem exatamente k raízes Reais ou complexas, contada a sua multiplicidade.

NOTA!
As Raízes complexas surgem aos pares conjugados, ou seja, se o polinómio admite a Raiz $\alpha + \beta i$ também admite a raiz $\alpha - \beta i$. Diz-se que tem um par de raízes complexas conjugadas $\alpha \pm \beta i$.

→ No caso geral é possível decompor um polinómio em fatores irredutíveis "exibindo as suas Raízes.

Exemplos:

$D(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$
Fatorização do polinómio
$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

$D(x) = x^2 + 4 = (x+2i)(x-2i) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 2i \vee x = -2i \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0 \pm 2i$

$x^2 = -4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-1} \times \sqrt{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = \pm 2i$

Representação de D(x) na forma fatorizada irredutível

$\Delta = \beta_1 - 4\gamma_1 < 0$ $\qquad$ $\Delta = \beta_m - 4\gamma_m < 0$

$$D(x) = d\,(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\cdots(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{q_1}\cdots(x^2+\beta_m x+\gamma_m)^{q_m}$$

$d \neq 0$

Raiz Real $x = \alpha_1$ com multiplicidade p1

um par de raízes conjugadas $a \pm bi$ com multiplicidade q1

grau R < grau D

$$\frac{1}{d}\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{p1}}{(x-\alpha_1)^{p1}} + \frac{B_1}{(x-\alpha_n)} + \frac{B_2}{(x-\alpha_n)^2} + \cdots + \frac{B_n}{(x-\alpha_n)^n} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1}$$

tipo 1 $\quad$ tipo 2 → potência conjugada $\quad$ tipo 1 $\quad$ tipo 2 $\quad$ tipo 3 → logaritmo e/ou arctg

$$\frac{1}{d} = \frac{R(x)}{D(x)} = \cdots \text{(continuação)} + \frac{C_2x+D_1}{(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{C_nx+D_n}{(x^2+\beta_nx+\gamma_n)^n}$$

tipo 4
saem raramente

→ Propriedades

Se $\begin{cases} D(x) = 0 \\ D'(x) \neq 0 \end{cases}$ a raiz R é simples (multiplicidade 1)

Se $\begin{cases} D(x) = D'(x) = 0 \\ D''(x) \neq 0 \end{cases}$ a raiz R é dupla (multiplicidade 2)

exemplo:

$$\int \frac{x^4-4x^2+3}{x^2-9}\,dx$$

N(x) → grau N(x) > grau D(x) → a fração é impossível

D(x)

$$\begin{array}{r|l} x^4-4x^2+3 & x^2-9 \\ \cline{2-2} -x^4+9x^2 & x^2+5 \rightarrow Q(x) \\ \hline 0+5x^2+3 & \\ -5x^2+45 & \\ \hline 48 \rightarrow R(x) & \end{array}$$

$$\boxed{\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}}$$

Fração Própria → Grau R < Grau D

$$\int \frac{x^4-4x^2+3}{x^2-9}\,dx = \int x^2+5+\frac{48}{x^2-9}\,dx = \int x^2+5\,dx + 48\int\frac{1}{x^2-9}\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 5x + 48\int\frac{1}{x^2-9}\,dx$$

Cálculo Auxiliar

$$\int\frac{1}{x^2-9}\,dx = \int\frac{1}{(x-3)(x+3)}\,dx$$

Raízes: $x = 3 \vee x = -3$

Existem valores únicos A e B ∈ ℝ, tal que:

$$\frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-3)} = \frac{-\frac{1}{6}}{(x+3)} + \frac{\frac{1}{6}}{(x-3)}, \text{ logo}$$

$$\int\frac{dx}{(x+3)(x-3)} = \int\frac{-\frac{1}{6}}{x+3}\,dx + \int\frac{\frac{1}{6}}{x-3} = -\frac{1}{6}\ln(x+3) + \frac{1}{6}\ln(x-3) + C,\ C \in \mathbb{R}$$