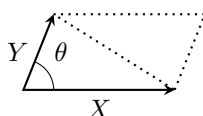


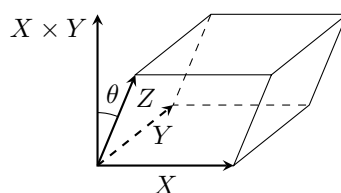


## Vetores, produto interno e produto externo

1. Considere os vetores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $X = (1, -2, 1)$  e  $Y = (-1, 1, 0)$ .
  - (a) Indique, justificando, se  $X$  e  $Y$  são vetores perpendiculares. E colineares?
  - (b) Determine o ângulo entre os vetores: i.  $X$  e  $Y$ ; ii.  $X$  e  $-Y$ ; iii.  $X + Y$  e  $X - Y$ .
  - (c) Apresente um vetor unitário com a direção do vetor  $X$ .
  - (d) Encontre todos os vetores com a direção de  $X$  e comprimento 2. De entre estes, indique os que têm: i. o sentido de  $X$ ; ii. o sentido oposto a  $X$ .
  - (e) Escreva o vetor  $X$  como soma de um vetor com a direção de  $Y$  e um vetor ortogonal a  $Y$ .
  - (f) Determine todos os vetores perpendiculares a  $X$  e a  $Y$ .
  - (g) Encontre todos os vetores perpendiculares a  $X$ .
2. Mostre que o triângulo de vértices  $P_1(2, 3, -4)$ ,  $P_2(3, 1, 2)$  e  $P_3(-3, 0, 4)$  é isósceles.
3. Encontre todos os vetores que fazem um ângulo de  $\frac{\pi}{3}$  com  $(1, 0, 0)$ .
4. Sendo  $X$  e  $Y$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ , mostre que
  - (a)  $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$  (Regra do Paralelogramo);
  - (b) se  $X$  e  $Y$  são ortogonais, então  $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$  (Teorema de Pitágoras).
5. Sejam  $X = (2, -1, 1)$  e  $Y = (0, 2, -1)$  dois vetores em  $\mathbb{R}^3$ .
  - (a) Calcule o produto externo (ou produto vetorial)  $X \times Y$ .
  - (b) Verifique que o vetor  $X \times Y$  é ortogonal quer a  $X$  quer a  $Y$ .
6. Mostre que, sendo  $X$  e  $Y$  vetores não nulos de  $\mathbb{R}^3$ ,
  - (a)  $X$  e  $Y$  são colineares se e só se  $X \times Y = (0, 0, 0)$ ;
  - (b)  $\|X \times Y\|^2 + (X \cdot Y)^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2$ .
7. Considere o paralelogramo (e o triângulo) com lados correspondentes aos vetores  $X$  e  $Y$  como na figura.



- (a) Verifique que:
  - i. a altura do paralelogramo é igual a  $\|Y\| \sin(\theta)$ , sendo a base do paralelogramo o lado correspondente ao vetor  $X$  e  $\theta = \angle(X, Y)$ ;
  - ii. a área do paralelogramo é  $A_{\square} = \|X \times Y\|$ ;
  - iii. a área do triângulo é  $A_{\triangle} = \frac{1}{2} \|X \times Y\|$ .
- (b) Determine a área:
  - i. do paralelogramo de lados dados pelos vetores  $(3, -1, -1)$  e  $(1, 2, 1)$ ;
  - ii. do triângulo de vértices  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$ ;
  - iii. dos vários paralelogramos com vértices em  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  e  $(1, 2, 1)$ .
8. Sejam  $X = (1, 2, 0)$  e  $Y = (1, -1, 1)$  dois vetores em  $\mathbb{R}^3$ .
  - (a) Determine todos os vetores ortogonais a  $X$  e  $Y$ .
  - (b) Calcule a área do paralelogramo de vértice na origem e lados correspondentes aos vetores  $X$  e  $Y$ .
9. Considere o paralelepípedo com arestas correspondentes aos vetores  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .



- (a) Verifique que:
- o paralelepípedo tem altura igual a  $||Z|| |\cos(\theta)|$ , considerando como base do paralelepípedo o paralelogramo de lados correspondentes aos vetores  $X$  e  $Y$  e sendo  $\theta = \angle(X \times Y, Z)$ ;
  - o volume do paralelepípedo é  $V = |(X \times Y) \cdot Z|$ .
- (b) Calcule o volume do paralelepípedo com um vértice na origem e arestas dadas pelos vetores:
- $(3, -2, 1)$ ,  $(1, 2, 3)$  e  $(2, -1, 2)$ ;
  - $(2, 1, 1)$ ,  $(2, 3, 4)$  e  $(1, 0, -1)$ .

## Retas e planos

10. Determine uma equação vetorial da reta  $\mathcal{R}$  definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases},$$

assim como uma equação vetorial e uma equação geral do plano  $\mathcal{P}$  que passa pelo ponto  $P(2, 2, 1)$  e que contém a reta  $\mathcal{R}$ .

11. Determine os pontos de  $\mathbb{R}^3$  equidistantes dos pontos  $A(-1, 0, 2)$  e  $B(1, -1, 1)$ .
12. Considere o ponto  $A(3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$  e o plano  $\mathcal{P}$  de equação geral  $y + z = -1$ .
- Escreva uma equação vetorial da reta ortogonal ao plano  $\mathcal{P}$  que passa pelo ponto  $A$ .
  - Calcule a distância do ponto  $A$  ao plano  $\mathcal{P}$  por dois processos distintos.
13. Considere o ponto  $P(-1, 1, 2)$  e a reta  $\mathcal{R}$  que passa pelos pontos  $A(1, 0, 0)$  e  $B(0, 0, 1)$ .
- Escreva uma equação geral do plano que contém o ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $\mathcal{R}$ .
  - Calcule a distância do ponto  $P$  à reta  $\mathcal{R}$ .
14. Considere os planos  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  de equações  $x + y + 2z = 3$  e  $2x + 2y + 4z = 2$ , respectivamente. Determine a distância entre  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$ .
15. Determine a distância entre o plano de equação geral  $x - y + z = 1$  e a reta definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 3. \end{cases}$$

16. Considere a reta  $\mathcal{R}$  definida por  $x = 2y = z - 1$ . Determine equações gerais dos planos perpendiculares a  $\mathcal{R}$ , cuja distância à origem é 1.
17. Considere a reta  $\mathcal{R}_1$  que passa pelo ponto  $(1, 1, -1)$  e tem vetor diretor  $(-1, 2, -1)$  e a reta  $\mathcal{R}_2$  que passa pelos pontos  $(1, -1, 0)$  e  $(0, 1, -1)$ . Calcule a distância entre  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ .
18. Considere as retas  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  de equações vetoriais

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \alpha(-1, 0, 1), \alpha \in \mathbb{R}, \quad (x, y, z) = (0, 1, 0) + \alpha(0, -1, 1), \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Determine o plano que contém  $\mathcal{R}_2$  e é paralelo a  $\mathcal{R}_1$ .
- Calcule a distância e o ângulo entre as retas  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ .

19. Considere os planos de equações

$$(x, y, z) = (1, 1, -1) + s(0, 1, -1) + t(4, -1, -1), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

e  $x + \alpha y + 2z = \beta$ . Determine os valores dos parâmetros reais  $\alpha$  e  $\beta$  para os quais a distância entre os dois planos é igual a 3.

20. Determine equações cartesianas das retas contidas no plano de equação  $x + y = 0$  cuja distância ao plano de equação  $x + y + z = 1$  é igual a  $\sqrt{3}/3$ .

21. Sabendo que  $M_1(2, 1, 3)$ ,  $M_2(5, 3, -1)$  e  $M_3(3, -4, 0)$  são os pontos médios dos lados do triângulo  $ABC$ , determine

- (a) uma equação da reta que contém o lado  $AB$ , cujo ponto médio é  $M_1$ ;
- (b) a área do triângulo.

1. (a)  $X+Y=(0, -1, 1)$  e  $3X-2Y=(5, -8, 3)$ . (b) Não. Não. (c) i.  $\frac{5\pi}{6}$ ; ii.  $\frac{\pi}{6}$ ; iii.  $\arccos(\frac{2}{\sqrt{7}})$ . (d)  $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ .  
 (e) i.  $\frac{2}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ ; ii.  $-\frac{2}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ . (f)  $X = -\frac{3}{2}(-1, 1, 0) + (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$ . (g)  $\alpha(1, 1, 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 (h)  $\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 2)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
2. Dois lados do triângulo têm comprimento  $\sqrt{41}$ .
3.  $(\frac{1}{3}\sqrt{3y^2 + 3z^2}, y, z)$ ,  $y, z \in \mathbb{R}$ ,  $y$  e  $z$  não simultaneamente nulos.
5. (a)  $(-1, 2, 4)$ .
7. (b) i.  $\sqrt{66}$ . ii.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . iii. 2.
8. (a)  $\alpha(2, -1, -3)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . (b)  $\sqrt{14}$ .
9. (b) i. 8. ii. 3.
10. Uma equação vetorial da reta  $\mathcal{R}$  é  $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \alpha(0, 1, 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; uma equação vetorial do plano  $\mathcal{P}$  é  $(x, y, z) = (2, 2, 1) + \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 1, 1)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , e uma equação geral de  $\mathcal{P}$  é  $y - z = 1$ .
10.  $\mathcal{R}_a$  está contida em  $\mathcal{P}_b$  se  $a = b = 1$ ;  $\mathcal{R}_a$  e  $\mathcal{P}_b$  são concorrentes se  $a \neq 1$  e  $b \neq 0$ ; estritamente paralelos se  $(a = 1 \text{ e } b \neq 1)$  ou  $(a \in \mathbb{R} \text{ e } b = 0)$ .
11. Todos os pontos do plano de equação geral  $2x - y - z + 1 = 0$ .
12. (a)  $(x, y, z) = (3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) + \alpha(0, 1, 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . (b)  $\sqrt{2}$ .
13. (a)  $x - z + 3 = 0$ . (b) 1.
14.  $\frac{2}{\sqrt{6}}$
15.  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ .
16.  $2x + y + 2z = \pm 3$ .
17.  $\frac{1}{6}\sqrt{30}$ .
18. (b)  $x + y + z = 1$ . (c)  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$  e  $\frac{1}{3}\pi$ .
19.  $\alpha = 2$  e  $(\beta = -8 \text{ ou } \beta = 10)$ .
20.  $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$  e  $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ .
21. (a)  $(x, y, z) = (2, 1, 3) + t(2, 7, -1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . (b)  $6\sqrt{110}$ .