

# Álgebra Linear e Geometria Analítica

## Cónicas e Quádricas

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

# Equação geral de uma cónica

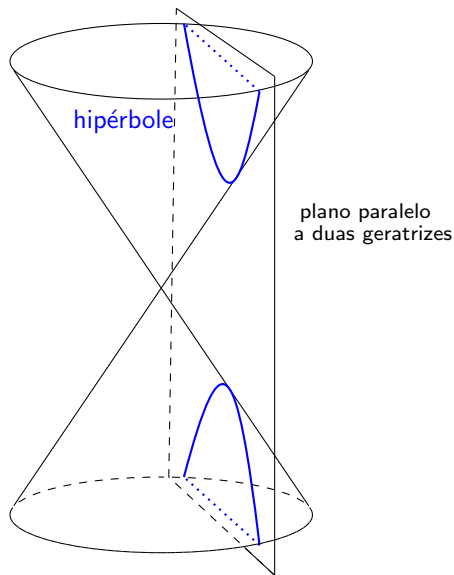
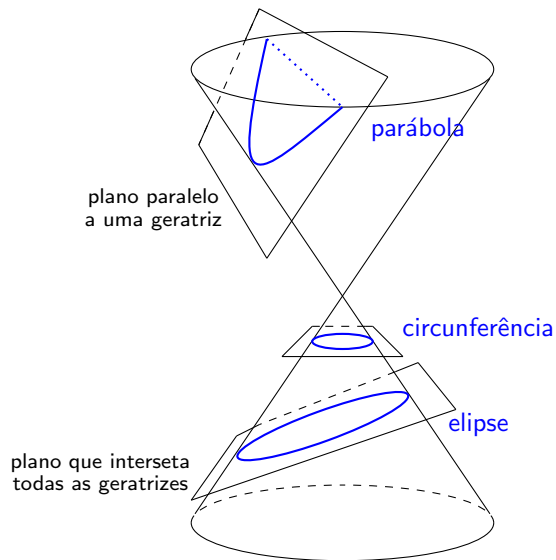
Dados  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  não simultaneamente nulos e  $\delta, \eta, \mu \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma xy + \delta x + \eta y + \mu &= 0 \\ \Leftrightarrow [x \ y] \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [\delta \ \eta] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \mu &= 0 \\ \underbrace{[x \ y]}_{X^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X + \underbrace{[\delta \ \eta]}_B \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X + \mu &= 0 \\ \Leftrightarrow X^T A X + B X + \mu &= 0, \end{aligned}$$

com  $A$  matriz simétrica  $2 \times 2$  não nula e  $B$  matriz  $1 \times 2$ , é a equação geral que as coordenadas  $X \in \mathbb{R}^2$  dos pontos de uma cónica satisfazem.

As cónicas são curvas obtidas pela interseção de um plano com uma superfície cónica.

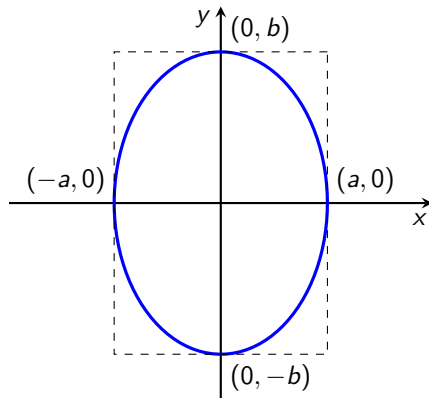
# Secções cónicas



[https://github.com/ridlo/tikz\\_by\\_example/blob/master/conicSection.tex](https://github.com/ridlo/tikz_by_example/blob/master/conicSection.tex)

# Equação reduzida de uma elipse

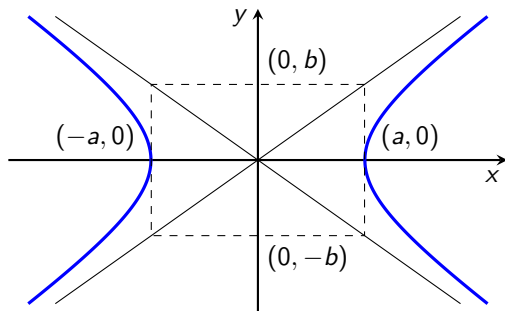
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad 0 < a \leq b$$



Caso particular:  $a = b$  (=raio)  $\Leftrightarrow$  circunferência

# Equação reduzida de uma hipérbole

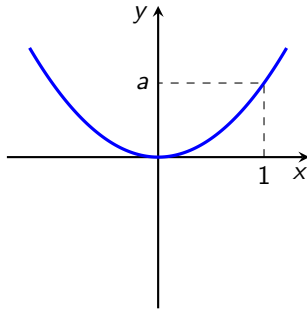
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$



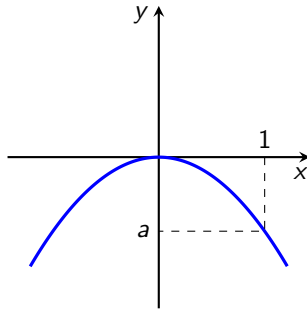
# Equação reduzida de uma parábola

$$y = ax^2$$

$$a > 0$$



$$a < 0$$



# Diagonalização ortogonal de $A$

Pode simplificar-se a equação geral de uma cónica

$$X^T A X + B X + \mu = 0$$

efetuando a diagonalização ortogonal da matriz simétrica  $A$ .

Seja  $P$  uma matriz ortogonal tal que

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

onde os valores próprios  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de  $A$  estão ordenados do seguinte modo:

- ▶  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , se ambos são não nulos;
- ▶  $\lambda_2 = 0$ , se um dos valores próprio é nulo.

# Redução da equação de uma cónica

Considerando  $X = P\hat{X}$  e  $\hat{B} = BP$  na equação das cónicas, obtém-se

$$\hat{X}^T P^T A P \hat{X} + B P \hat{X} + \mu = \hat{X}^T D \hat{X} + \hat{B} \hat{X} + \mu = 0$$

que, para  $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$  e  $\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\delta} & \hat{\eta} \end{bmatrix}$ , é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\delta} & \hat{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \mu = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 + \hat{\delta} \hat{x} + \hat{\eta} \hat{y} + \mu = 0,$$

onde o termo cruzado (termo em “xy”) foi eliminado.

A técnica para eliminar os termos  $\hat{B}\hat{X}$  ou  $\mu$ , quando possível, será mostrada nos exemplos.

**Nota:** Se  $|P| > 0$ , esta mudança de variável corresponde a uma rotação.



# Exemplo 1

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 2y - 6 = 0$$



$$X^T A X + B X - 6 = 0$$

com

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

No Exemplo 5 do Capítulo 5 (slide 18) efetuou-se a diagonalização ortogonal da matriz simétrica  $A$ , tendo-se obtido

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

uma matriz ortogonal.

## Exemplo 1 – continuação

Considerando  $X = P\hat{X}$ , obtém-se

$$\hat{X}^T P^T A P \hat{X} + B P \hat{X} = 6.$$

Tomando  $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$  e atendendo a que  $B P = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$ , obtém-se

$$3\hat{x}^2 - \hat{y}^2 + 2\sqrt{2}\hat{y} = 6 \iff 3\hat{x}^2 - (\hat{y}^2 - 2\sqrt{2}\hat{y} + 2) = 6 - 2$$

$$\iff 3\hat{x}^2 - \underbrace{(\hat{y} - \sqrt{2})^2}_{\tilde{y}} = 4$$

$$\iff \frac{\tilde{x}^2}{\frac{4}{3}} - \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1.$$

Esta última é a equação reduzida de uma **hipérbole**.

**Nota:** A mudança de variável  $\tilde{y} = \hat{y} - \sqrt{2}$  corresponde a uma translação.

## Exemplo 2

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 18 = 0$$



$$2(x^2 + 6x + 9) - 18 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 18 = 0$$



$$2(\underbrace{x+3}_{\tilde{x}})^2 + (\underbrace{y+2}_{\tilde{y}})^2 = 4$$



$$\frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1.$$

Esta última é a equação reduzida de uma [elipse](#).

## Exemplo 3

$$\begin{aligned} 2x^2 + 12x + 3y + 15 &= 0 \\ \Updownarrow \\ 2(x^2 + 6x + 9) - 18 + 3y + 15 &= 0 \\ \Updownarrow \\ 2(\underbrace{x+3}_{\tilde{x}})^2 + 3(\underbrace{y-1}_{\tilde{y}}) &= 0 \\ \Updownarrow \\ \tilde{y} &= -\frac{2}{3} \tilde{x}^2. \end{aligned}$$

Esta é a equação reduzida de uma **parábola**.

# Exemplos de equações que não correspondem a curvas

Exemplo 4:

$$\begin{aligned}2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 24 &= 0 \\ \Updownarrow \\ 2(x^2 + 6x + 9) - 18 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + 24 &= 0 \\ \Updownarrow \\ 2(x + 3)^2 + (y + 2)^2 &= -2.\end{aligned}$$

Esta é a equação de um conjunto vazio.

Exemplo 5:

$$\begin{aligned}2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 22 &= 0 \\ \Updownarrow \\ 2(x + 3)^2 + (y + 2)^2 &= 0. \\ \Updownarrow \\ x = -3 \quad \text{e} \quad y = -2.\end{aligned}$$

Esta é a equação de um ponto.

# Cónicas degeneradas

Situações degeneradas que podem ocorrer:

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \rightarrow$  conjunto vazio;
2.  $\frac{x^2}{a^2} = -1 \rightarrow$  conjunto vazio;
3.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow$  um ponto (origem do referencial);
4.  $\frac{x^2}{a^2} = 0 \rightarrow$  duas retas coincidentes (eixo  $Oy$ ,  $x = 0$ );
5.  $\frac{x^2}{a^2} = 1 \rightarrow$  duas retas estritamente paralelas ( $x = \pm a$ );
6.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow$  duas retas concorrentes ( $y = \pm \frac{b}{a}x$ ).

# Identificação de cónicas com 2 valores próprios não nulos

Identificação da cónica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0.$$

Caso 1.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm o mesmo sinal, ou seja,  $|A| > 0$

$\mu$ e $\lambda_1$ têm sinais contrários	elipse
$\mu$ e $\lambda_1$ têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	um ponto: $(0, 0)$

Caso 2.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm sinais contrários, ou seja,  $|A| < 0$

$\mu \neq 0$	hipérbole
$\mu = 0$	duas retas concorrentes: $y = \pm \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x$

# Identificação de cónicas com 1 valor próprio não nulo

Identificação da cónica representada pela equação (onde  $|A| = 0$ )

$$\lambda_1 x^2 + \eta y + \mu = 0.$$

Caso 1.  $\eta \neq 0 \rightarrow$  parábola

Caso 2.  $\eta = 0$

$\mu$ e $\lambda_1$ têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu$ e $\lambda_1$ têm sinais contrários	duas retas estritamente paralelas: $x = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}$
$\mu = 0$	duas retas coincidentes: $x = 0$ (eixo $Oy$ )



# Equação geral de uma quádrlica

A equação geral (na forma matricial) de uma quádrlica é

$$X^T A X + B X + \mu = 0, \quad (1)$$

com  $A$  matriz simétrica  $3 \times 3$  não nula,  $B$  matriz  $1 \times 3$ ,  $X \in \mathbb{R}^3$  e  $\mu \in \mathbb{R}$ .

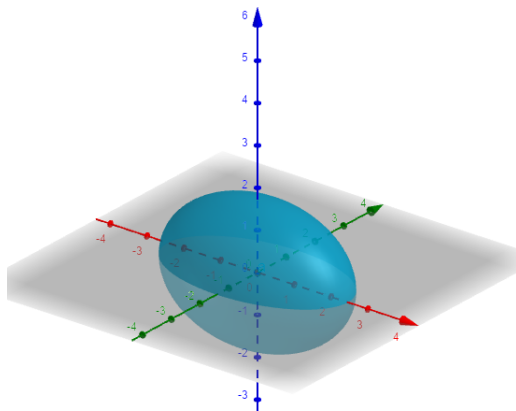
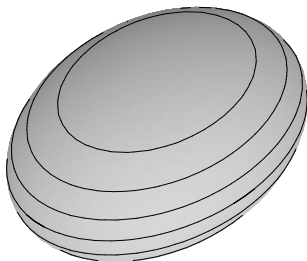
A partir desta equação geral podem ser obtidas as equações reduzidas das quádrlicas por um processo análogo ao levado a cabo para as cónicas:

1. “rotação” dos eixos (diagonalização ortogonal de  $A$ ) e
2. “translação” dos eixos.

**Exercício:** Determine as interseções com os planos coordenados ( $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ ) de todas as quádrlicas apresentadas nos próximos 5 slides.

# Equação reduzida do elipsóide

Equação reduzida de um elipsóide:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

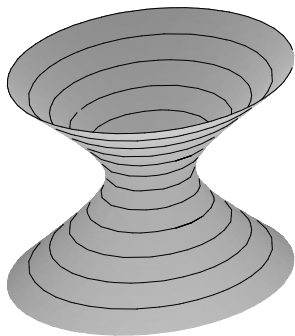


**Nota:** No caso particular  $a = b = c$ , tem-se uma **esfera**.

# Equações reduzidas dos hiperbolóides

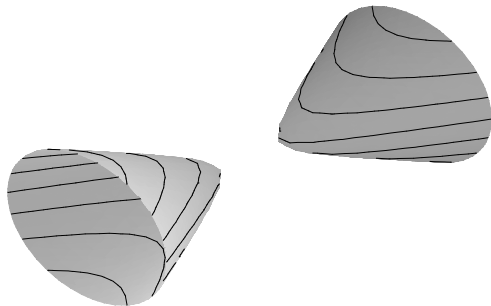
Equação reduzida de um  
hiperbolóide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



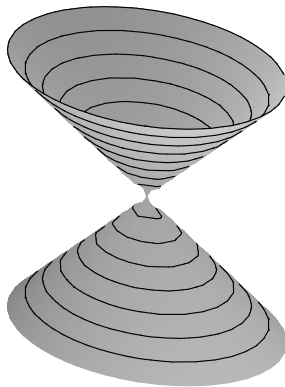
Equação reduzida de um  
hiperbolóide de duas folhas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



# Quádricas degeneradas: o cone

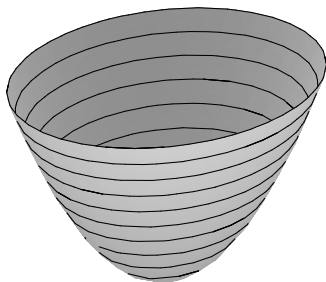
Equação reduzida de um cone:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ .



# Equações reduzidas dos parabolóides

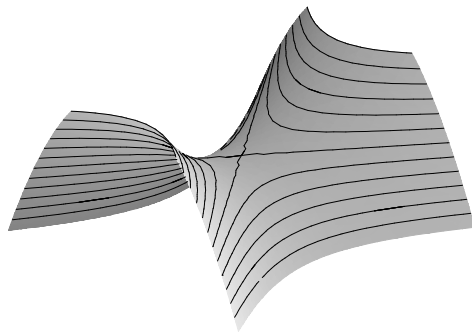
Equação reduzida de um  
parabolóide elíptico:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$



Equação reduzida de um  
parabolóide hiperbólico:

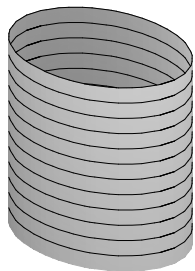
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$



# Quádricas degeneradas: os cilindros

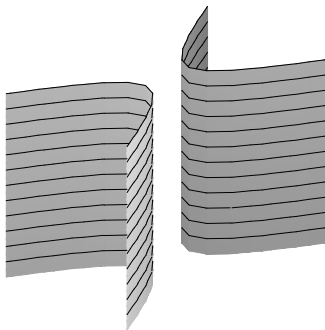
Equação reduzida de  
um cilindro elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



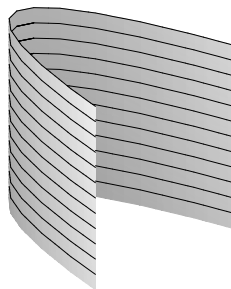
Equação reduzida de  
um cilindro hiperbólico:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Equação reduzida de  
um cilindro parabólico:

$$y = ax^2.$$



## Exemplo 6

$$-8x^2 - 8y^2 + 10z^2 + 32xy - 4xz - 4yz - 24 = 0$$



$$X^T A X = 24,$$

com

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} -8 & 16 & -2 \\ 16 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Como os valores próprios de  $A$  são  $12$ ,  $6$  e  $-24$ , existe  $P$  ortogonal tal que

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo 6 – continuação

Considerando  $X = P \hat{X}$  na equação geral, com  $\hat{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ , obtém-se

$$\begin{aligned} X^T A X = 24 &\iff \hat{X}^T D \hat{X} = 24 \\ &\iff 12\hat{x}^2 + 6\hat{y}^2 - 24\hat{z}^2 = 24 \\ &\iff \frac{\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{y}^2}{4} - \hat{z}^2 = 1 \end{aligned}$$

que é a equação reduzida de um hiperbolóide de uma folha.

**Nota:** As interseções com os eixos coordenados são:

$$\begin{array}{lll} \hat{x} = 0 & \rightarrow & \frac{\hat{y}^2}{4} - \hat{z}^2 = 1 \quad \text{hipérbole no plano } \hat{y}O\hat{z} \\ \hat{y} = 0 & \rightarrow & \frac{\hat{x}^2}{2} - \hat{z}^2 = 1 \quad \text{hipérbole no plano } \hat{x}O\hat{z} \\ \hat{z} = 0 & \rightarrow & \frac{\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{y}^2}{4} = 1 \quad \text{elipse no plano } \hat{x}O\hat{y} \end{array}$$



# Identificação de quádricas com 3 valores próprios não nulos

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \mu = 0.$$

Caso 1.  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  têm o mesmo sinal

$\mu$ e $\lambda_1$ têm sinais contrários	elipsóide
$\mu$ e $\lambda_1$ têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	ponto $(0, 0, 0)$

Caso 2.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm o mesmo sinal que é contrário ao de  $\lambda_3$

$\mu$ e $\lambda_1$ têm sinais contrários	hiperbolóide de uma folha
$\mu$ e $\lambda_1$ têm o mesmo sinal	hiperbolóide de duas folhas
$\mu = 0$	cone

# Identificação de quádricas com 2 valores próprios não nulos

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \eta z + \mu = 0.$$

Caso 1.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm o mesmo sinal

$\eta \neq 0 \rightarrow$  parabolóide elíptico

$\eta = 0 \rightarrow$	$\mu$ e $\lambda_1$ têm sinais contrários	<i>cilindro elíptico</i>
	$\mu$ e $\lambda_1$ têm o mesmo sinal	conjunto vazio
	$\mu = 0$	eixo $Oz$

Caso 2.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  têm sinal contrário

$\eta \neq 0 \rightarrow$  parabolóide hiperbólico

$\eta = 0 \rightarrow$	$\mu \neq 0$	<i>cilindro hiperbólico</i>
	$\mu = 0$	dois planos concorrentes $y = \pm \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} x$ que se intersectam no eixo $Oz$

# Identificação de quádricas com **1** valor próprio não nulo

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \eta y + \mu = 0.$$

Caso 1.  $\eta \neq 0 \rightarrow$  *cilindro parabólico*

Caso 2.  $\eta = 0$

$\mu$ e $\lambda_1$ têm sinais contrários	dois planos estritamente paralelos: $x = \pm \sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}$
$\mu$ e $\lambda_1$ têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	dois planos coincidentes: $x = 0$ (plano $yOz$ )

**Nota:** Na equação  $\lambda_1 x^2 + \eta y + \nu z + \mu = 0$ , o termo em  $z$  elimina-se com uma oportuna escolha da base do espaço próprio associado a zero.