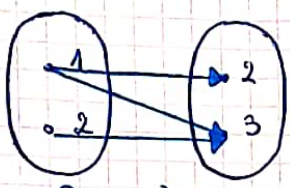
# Folha de Exercícios 2

1 → a)



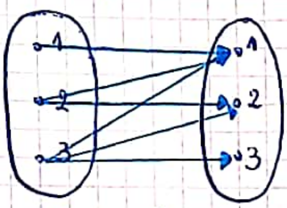
Relação $<$

→ Domínio = $\{1, 2\}$ → Imagem = $\{2, 3\}$

→ $R = \{(1,2);\ (1,3);\ (2,3)\}$

- I não pertence a $R$, logo não é reflexiva
- Não é simétrica ( $(3,1)$ e $(2,1) \notin R$ )
- É transitiva ( $(1,2) \wedge (2,3) \subseteq R$ )

b)



Relação $\geq$

→ Domínio = Imagem = $\{1, 2, 3\}$

→ $R = \{(1,1);\ (2,1);\ (2,2);\ (3,1);\ (3,2);\ (3,3)\}$

- I pertence a $R$, logo é reflexiva
- Não é simétrica ( $(1,2); (1,3); (2,3) \notin R$ )
- É transitiva ( $(1,1) \wedge (2,1)$ / $(2,2) \wedge (3,2) \ldots \subseteq R$ )
- É anti-simétrica ( $(1,1), (2,2), (3,3) \in R$ )

c) Relação $\subset$

- $P(\{1,2,3\})$

→ Domínio = $P(\{1,2,3\}) \setminus \{\{1,2,3\}\}$

→ Imagem = $P(\{1,2,3\}) \setminus \emptyset$

→ $R = \{(\emptyset, \{1\});\ (\emptyset, \{2\});\ (\emptyset, \{3\});\ (\emptyset, \{1,2\});\ (\emptyset, \{1,3\}) \ldots\}$

- I não pertence a $R$, logo não é uma relação reflexiva (ver domínio)
- $R$ não é uma relação simétrica, visto que, por exemplo $\emptyset$ não pertence à imagem de $R$, no entanto faz parte do domínio.
- É transitiva, por exemplo: $\{(\emptyset, \{2\}) \in R \wedge (\{2\}, \{1,2,3\}) \in R\}$

2 → a)

$0 \sim 4$
$1 \sim 3$
$2 \sim 2$
$3 \sim 1$
$4 \sim 0$

$R = \{(0,4), (1,3), (2,2), (3,1), (4,0)\}$

$R^{-1} = \{(4,0), (3,1), (2,2), (1,3), (0,4)\}$

$R = R^{-1}$ //

b) $R(1) = \{3\}$

$R(3) = \{1\}$

c) $R^{-1}(0) = \{4\}$

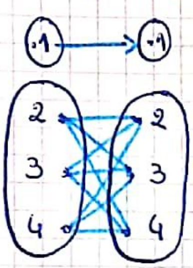
$R^{-1}(2) = \{2\}$

$R^{-1}(4) = \{0\}$

3- a) ~~As diferentes classes de equivalência de uma relação de equivalência num conjunto A decompõem A em subconjuntos mutuamente disjuntos e não vazios cuja união resulta no conjunto A. Neste caso, temos $a, b \in A$ e $[a]_R$ e $[b]_R$ duas classes de equivalência de R, uma vez que $a \in [b]_R$ e que $a \in [a]_R$, visto que estes subconjuntos teriam de ser~~ mutuamente disjuntos, o que não se verifica, podemos concluir então que $[a]_R = [b]_R$ //

3- b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P_1 = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$

Relação $P_1$




$$R_1 = \{(1,1); (2,2); (2,3); (2,4); (3,2); (3,3); (3,4); (4,2); (4,3); (4,4)\}$$

4- a) É reflexiva pois $I \subseteq R \Rightarrow \{(a,a), (b,b)\}$

É transitiva $\Rightarrow [(a,a) \subseteq R \land (a,b) \subseteq R] \land [(b,b) \subseteq R \land (a,b) \subseteq R]$

Não é simétrica $\Rightarrow (b,a) \notin R$

É anti-simétrica $\Rightarrow [(a,a) \in R \land (a,a) \in R] \Rightarrow a = a$

$\Rightarrow [(b,b) \in R \land (b,b) \in R] \Rightarrow b = b$

4- b) A única relação possível é $(\emptyset, \emptyset)$, logo podemos concluir que:

É transitiva, simétrica, antisimétrica, porém não é reflexiva pois I não pertence a R.

4- c) Não é simétrica, uma vez que a subtração não é comutativa.

Não é reflexiva, caso subtraíssemos 2 números reais iguais, o valor seria 0 e não 1

É anti-simétrica pois caso $xRy$, o inverso, isto é $yRx$ não se verifica (visto que a subtração não é comutativa)

Não é transitiva, visto que: $(1,0) \land (0,-1) \subseteq R$

no entanto: $(1,-1) \notin R$

4-▸ d) Uma vez que a relação não admite comutação, esta não é simétrica.

O igual presente em $\leq$ garante que se trata de uma relação reflexiva, e que $I \subseteq R$

É transitiva visto que: $\begin{matrix} 1 \leq 2 \\ 2 \leq 3 \end{matrix} \Rightarrow 1 \leq 3$

e o mesmo se verifica em todos os elementos pertencentes a $\mathbb{R}$

Não é anti-simétrica pois $|x| \neq x$, por exemplo:

$|-1| \leq |1| \rightarrow (-1) \neq (1)$ //

4-▸ e) A comutatividade da multiplicação garante que tanto $(x,y)$, como $(y,x)$ pertencem a $R$ e por isso a relação é simétrica

A relação identidade pertence a $R$, logo $R$ é reflexiva

Não é transitiva pois: $(-\frac{1}{2}) \cdot 0 \geq 0$

$0 \cdot (2) \geq 0$ ) Porém

$(-\frac{1}{2}) \cdot (2) < 0$

Não é anti-simétrica

4-▸ f) É uma relação transitiva, pois desde que $z, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ qualquer fração do tipo $\frac{x}{y} / \frac{y}{z} / \frac{x}{z} \ldots$ pertence a $\mathbb{Q}$

Também se trata de uma relação simétrica visto que, caso $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tanto $\frac{x}{y}$ como $\frac{y}{x}$ pertencem a $\mathbb{Q}$

A relação identidade pertence a $R$, logo $R$ é reflexiva.

4-▸ g) Visto que a adição admite a comutatividade $R$ é uma relação simétrica

Uma vez que $R$ admite $(a,b) R (c,d) : (a,b) = (c,d)$, trata-se de uma relação reflexiva.

É uma relação transitiva visto que:

$$2^2 + (\sqrt{12})^2 = 0^2 + 4^2$$
$$0^2 + 4^2 = 1^2 + (\sqrt{15})^2$$
$$2^2 + (\sqrt{12})^2 = 1^2 + (\sqrt{15})^2 \text{ //}$$

5-▸ a) A relação $C$ está definida de $A$ em $A$, aplica-se a $\forall x, y \in \mathbb{R}$

b) Uma relação de equivalência é reflexiva, simétrica e transitiva.

As relações f) e g) são relações de equivalência

f) $\begin{cases} \text{Classe de equivalência} = \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ X_y = \{x : x = R \cdot y, R \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\} \end{cases}$ → y representa todos os nºs $\mathbb{Q}$

$X_y = [y]$

5 → e) Uma relação é parcial quando é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, um exemplo é a relação a)

5 → d) Uma relação é de ordem total quando todos os elementos do conjunto estão ligados a todos os outros elementos como é o caso da relação a).

6 → a) $R \Rightarrow B \cap X = B \cap Y$

Visto que $B \cap X = B \cap Y \Leftrightarrow B \cap Y = B \cap X$, $R$ é simétrica

Caso $X = Y \Rightarrow B \cap X = B \cap Y$, logo $R$ é reflexiva

Sejam $X, Y, Z \subseteq A$, caso $B \cap X = B \cap Y$ e $B \cap Y = B \cap Z$, então: $B \cap X = B \cap Z$, logo $R$ é transitiva

Uma vez que $R$ é simétrica, transitiva e reflexiva, trata-se de uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$, tal como queríamos demonstrar.

6 → b) $A = \{a, b, c\}$ $B = \{a, b\}$ $\boxed{R: B \cap X = B \cap Y}$

$R = \{ \{\emptyset, \{c\}\}, \{a, \{a, c\}\}, \{b, \{b, c\}\}, \{\{a, b\}, \{a, b, c\}\} \}$

6 → c)

Classe de Equivalência

Seja $R$ uma relação de equivalência em $A$ e $x \in A$

$[x]$ é o conjunto de todos os elementos de $A$ relacionados a $x$:

$[x] = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$

→ Classe de equivalência de $x$

$[\{a, c\}] = \{\{a, c\}, \{a, c, d\}\}$

6 → d) $R = \{ \{\emptyset, \{d\}\}, \{\emptyset, \{e\}\}, \{\emptyset, \{d, e\}\},$

$\{a, \{a, d\}\}, \{a, \{a, e\}\}, \{a, \{a, d, e\}\},$

$\{b, \{b, d\}\}, \{b, \{b, e\}\}, \{b, \{b, d, e\}\},$

$\{\{a, b\}, \{a, b, d\}\}, \{\{a, b\}, \{a, b, d, e\}\}, \{\{a, b\}, \{a, b, d, e\}\}$

$\{c, \{c, d\}\}, \{c, \{c, e\}\}, \{c, \{c, d, e\}\}$

$\{\{a, c\}, \{a, c, d\}\}, \{\{a, c\}, \{a, c, e\}\}, \{\{a, c\}, \{a, c, d, e\}\}$

...

6 - d) $R = \{\ldots \{\{b,c\},\{b,c,d\}\}, \{\{b,c\},\{b,c,e\}\}, \{\{b,c\},\{b,c,d,e\}\}$
$\{\{a,b,c\},\{a,b,c,d\}\}, \{\{a,b,c\},\{a,b,c,e\}\}, \{\{a,b,c\},\{a,b,c,d,e\}\}\}$

Existem 8 classes de equivalência.

7 - a)

| x | y | x+y | x − y | x · y |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | −1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 0 | 1 |

$R_1 \rightarrow x+y \geq 0$
- é simétrica $(x+y = y+x)$
- é reflexiva, $I \subseteq R_1$
- é transitiva
- não é anti-simétrica

$R_2 \rightarrow x-y \geq 0$
- não é simétrica $(x-y \neq y-x)$
- é reflexiva $I \subseteq R_2$
- ~~não~~ é anti-simétrica
- é transitiva

$R_3 \rightarrow x \cdot y \geq 0$
- é simétrica $(x \cdot y = y \cdot x)$
- é reflexiva, $I \subseteq R_3$
- é transitiva
- não é anti-simétrica

7 - b) $\bar{R} = \{(x,y) \in A \times A : (x,y) \notin R\}$

Uma relação é reflexiva caso a ~~mat~~ relação I faça parte da mesma, para que isto aconteça, a relação identidade não poderá fazer parte da relação complementar de uma dada relação reflexiva.

Podemos portanto concluir que: uma relação R é apenas reflexiva caso a relação complementar não o seja.

8 - opção e)
- ~~única~~ relação transitiva, reflexiva e simétrica mais curta

9 - a) $x R y$ se $f(x) = f(y)$

Visto que $f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x)$, podemos concluir que R é simétrica.

Caso $x = y$, $f(x) = f(y)$, então $I \subseteq R$, logo R é reflexiva

Sejam $x, y, z \in X$, então, caso: $f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)$
então: $f(x) = f(z)$

Logo R é transitiva, posto isto podemos concluir que R é uma relação de equivalência.

9 → b) Função injetiva → a objetos ($x$'s) diferentes correspondem sempre imagens diferentes

Sendo $R$ uma relação de equivalência definida em $X$, então $\#(X/R) = \#X$, visto que $f$ é injetiva.

10 → a) Caso $x-y$ seja divisível por 3, $y-x$, embora possua um resultado com diferente sinal, também será divisível por 3, logo $R$ é simétrica.

Caso $x=y$, $x-y=0$, sendo 0 divisível por 3, podemos concluir que $I \subseteq R$ e portanto $R$ é reflexiva

$R$ é também transitiva, pois para todo $x, y, z \in R$ temos que: $\frac{x-y}{3} \Rightarrow \frac{y-z}{3} \Rightarrow \frac{x-z}{3}$

exemplo: $\frac{5-2}{3} \Rightarrow \frac{2-11}{3} \Rightarrow \frac{5-11}{3}$

Podemos deste modo concluir que $R$ é uma relação de equivalência.

10 → b)

**Conjunto Quociente**

- Sendo $R$ uma relação de equivalência definida num conjunto $A$, o conjunto das classes de equivalência de $A$ designa-se por conjunto Quociente:

$$A/R = \{[x] : x \in A\}$$

$$\mathbb{Z}/R = \left\{ \{x \in \mathbb{Z} : x \bmod 3 = 0\}, \{x \in \mathbb{Z} : x \bmod 3 = 1\}, \{x \in \mathbb{Z} : x \bmod 3 = 2\} \right\}$$

→ opção 1 ⇒ $x$ é múltiplo de 3

→ opção 2 ⇒ $y = 1$

→ opção 3 ⇒ $y = 2$

11 → a) Uma relação de ordem parcial é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Caso $a=b$, então $R=1$, logo $I \subseteq R$ e por isso $R$ é uma relação reflexiva.

Assumindo que $a = b^R$ e $b^R = c^R \Rightarrow a = c^R$, logo $R$ é uma relação transitiva

O facto de $a = b^R$ não implica que $b = a^R$, logo $R$ é anti-simétrica.

Podemos deste modo concluir que $R$ é uma relação de ordem parcial.

11 → b) Para que $R$ seja uma relação de ordem total, todos os elementos do seu conjunto têm de estar relacionados a todos os outros.

Caso $a = 10$ e $b = 13 \Rightarrow b = a^R \Leftrightarrow 13 = 10^R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log 13 = R$, não pertence ao conjunto dos nºs inteiros positivos

Logo $R$ não é uma relação de ordem total

12 → $(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)$

→ $R$ é reflexiva, pois admite pares ordenados em que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ e portanto $I \subseteq R$

→ Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$: caso $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$, logo $R$ é transitiva visto que esta condição se dá tanto em $x_1 \leq x_2$ como em $y_1 \leq y_2$.

→ Esta relação é anti-simétrica, pois a não ser quando $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, a mesma não admite simétrico

Posto isto, podemos concluir que $R$ se trata de uma relação de ordem parcial.

13 → a) $a\, R_1\, b$ → S após R

$a\, R\, c$ → $c\, S\, b$ ⇒ c é pai de a e b é irmão de c, logo b é tio de a

b) $a\, R_2\, b$

↳ c é pai de a e b é pai de c, logo b é avô de a

c) $a\, R_3\, b$

↳ c é pai de a, d é irmão de c e d é pai de b

Logo b é primo de a

3- a) Uma vez que $a \in [b]$, podemos concluir que o par ordenado $(b,a) \in R$, dado que $R$ é uma relação de equivalência, é simétrica e portanto $(a,b) \in R$.

Seja $x \in [a]$, então $aRx$, logo $bRa$ e $aRx$, pela transitividade, obtemos $bRx$, ou seja $x \in [b]$.

Isto demonstra que $[a] \subseteq [b]$

Seja $x \in [b]$, então, pela definição de classe de equivalência, $bRx$, logo como $aRb$ e $bRx$, pela transitividade, $aRx$.

Logo $x \in [a]$, isto demonstra que $[b] \subseteq [a]$

Posto isto podemos concluir que $[b] = [a]$