

Matemática Discreta

Apresentação e Introdução aos Sistemas Matemáticos

Universidade de Aveiro 2020/2021

Moodle <http://elearning.ua.pt>

MS Teams <http://bit.ly/30oFHIB>

Programa da disciplina

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

- 1** Linguagem Matemática e Lógica Informal
 - Lógica proposicional
 - Relações
 - Lógica de primeira ordem
- 2** Contextos e Estratégias de Demonstração
 - Estratégias de demonstração da implicação
 - Princípios de indução e de indução completa
 - Princípio da gaiola dos pombos
- 3** Princípios de Enumeração Combinatória.
 - Princípio da bijecção.
 - Princípios da adição e da multiplicação.
 - Princípio de inclusão-exclusão.
- 4** Permutações.
 - Composição de permutações e permutações inversas.
 - Partição cíclica de uma permutação e tipos de permutações.
 - Transposições, inversões e sinal de uma permutação.

Programa da disciplina (cont.)

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias.

- Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples.
- Combinações e permutações (com e sem repetição).
- Identidades combinatórias.

6. Recorrência e Funções geradoras.

- Relações de recorrência.
- Funções geradoras

7. Elementos de Teoria dos Grafos.

- Conceitos e resultados fundamentais.
- Conexidade, caminhos e árvores.

Bibliografia principal

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

- *Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos*; D. M. Cardoso, J. Szymanski, M. Rostami; Escolar Editora, 2009 (versão revista em 2011), ♣.
- *Noções de Lógica Matemática*; D.M. Cardoso, P. Carvalho; Universidade de Aveiro; 2007 (versão revista em 2015), ♣.
- *Estudo Autónomo: um objeto de aprendizagem ativa*; António Jorge Neves, Maria Paula Carvalho; Matemática Discreta 2016-2017, Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, Setembro de 2017, ♣.

♣ PDF disponível no Moodle (em <https://elearning.ua.pt>)

Bibliografia adicional também no Moodle.

Avaliação Contínua (AC)

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

- **Participação em Atividades nas aulas (PA) + Testes T1, T2 e T3:**
 - **PA - 10%**, completando com sucesso **4 atividades realizadas para avaliação** nas aulas da turma;
 - **Teste T1 - 30%**, 28 de abril, quarta-feira, avalia a matéria lecionada até 21 de Abril;
 - **Teste T2 - 30%**, 28 maio, sexta-feira, avalia a matéria dada até 21 de maio, não avaliada em **T1**;
 - **Teste T3 - 30% ou 40%**,
nas aulas da semana de 21 de junho, avalia a matéria dada até 18 de junho, não avaliada em **T1** e **T2**.
- **Classificação Final da Avaliação Contínua (CFAC):** arredondamento às unidades do valor dado por
$$\text{CFAC} = 0.3 \text{ T1} + 0.3 \text{ T2} + \max(0.3 \text{ T3} + 0.1 \text{ PA}, 0.4 \text{ T3})$$

Os estudantes ficam inscritos em **AC** no PACO, podendo, até **26 de março**, mudar para **Avaliação Final (AF)**:

- **Exame Final (EF)]** na época de exames com toda a matéria, sendo a classificação final **CFE** obtida como

$$\text{CFE} = \max(0.9 \text{ EF} + 0.1 \text{ PA}, \text{ EF}) .$$

Época de Recurso (ER): para os alunos que não tenham obtido aprovação e melhorias de nota (inscrição no PACO).

- **Classificação Final da época de Recurso (CFR)**:

$$\text{CFR} = \max(0.9 \text{ ER} + 0.1 \text{ PA}, \text{ ER}) .$$

CFAC, CFE, CFR > 16: pode exigir **prova de defesa de nota**.

Regime de faltas

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

- Todos os **alunos frequentam apenas uma turma TP.**
- **Registo de presenças** em todas aulas, não havendo reprovação por faltas.

Alfabeto grego

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

α	A	alfa	ν	N	niu
β	B	beta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gama	\omicron	O	omicrom
δ	Δ	delta	π	Π	pi
$\epsilon(\varepsilon)$	E	epsilon	$\rho(\varrho)$	P	ró
ζ	Z	zeta	$\sigma(\varsigma)$	Σ	sigma
η	H	eta	τ	T	tau
$\theta(\vartheta)$	Θ	teta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	$\phi(\varphi)$	Φ	fi
κ	K	kapa	χ	X	chi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	miu	ω	Ω	ómega

- **Proposição:** afirmação que ou é verdadeira ou é falsa.

Sistemas matemáticos

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

- **Proposição:** afirmação que ou é verdadeira ou é falsa.
- **Axioma:** proposição evidente ou que, no contexto matemático em que se está a trabalhar, aceitamos como verdadeira.

Sistemas matemáticos

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

- **Proposição:** afirmação que ou é verdadeira ou é falsa.
- **Axioma:** proposição evidente ou que, no contexto matemático em que se está a trabalhar, aceitamos como verdadeira.
- **Teorema:** proposição verdadeira que decorre dos axiomas por aplicação de certas regras, designadas por regras de inferência, ou dos desenvolvimentos determinados pela lógica.

Sistemas matemáticos

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

- **Proposição:** afirmação que ou é verdadeira ou é falsa.
- **Axioma:** proposição evidente ou que, no contexto matemático em que se está a trabalhar, aceitamos como verdadeira.
- **Teorema:** proposição verdadeira que decorre dos axiomas por aplicação de certas regras, designadas por regras de inferência, ou dos desenvolvimentos determinados pela lógica.
- **Lema:** teorema “considerado” mais simples, que usualmente é utilizado para facilitar a demonstração de teoremas mais difíceis.

Sistemas matemáticos

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

- **Proposição:** afirmação que ou é verdadeira ou é falsa.
- **Axioma:** proposição evidente ou que, no contexto matemático em que se está a trabalhar, aceitamos como verdadeira.
- **Teorema:** proposição verdadeira que decorre dos axiomas por aplicação de certas regras, designadas por regras de inferência, ou dos desenvolvimentos determinados pela lógica.
- **Lema:** teorema “considerado” mais simples, que usualmente é utilizado para facilitar a demonstração de teoremas mais difíceis.
- **Corolário:** consequência de um ou vários teoremas.

Sistemas matemáticos

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

- **Proposição:** afirmação que ou é verdadeira ou é falsa.
- **Axioma:** proposição evidente ou que, no contexto matemático em que se está a trabalhar, aceitamos como verdadeira.
- **Teorema:** proposição verdadeira que decorre dos axiomas por aplicação de certas regras, designadas por regras de inferência, ou dos desenvolvimentos determinados pela lógica.
- **Lema:** teorema “considerado” mais simples, que usualmente é utilizado para facilitar a demonstração de teoremas mais difíceis.
- **Corolário:** consequência de um ou vários teoremas.
- **Teoria ou sistema matemático:** conjunto de axiomas, regras de inferência e teoremas (onde se incluem lemas e corolários).

Exemplo de sistema matemático

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$

Exemplo de sistema matemático

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$

■ **Axioma:** xyz .

■ **Regras de inferência:**

- 1 Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo x por xyz , são proposições verdadeiras.
- 2 Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo xyz por yxz são proposições verdadeiras.

Exemplo de sistema matemático

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$

■ **Axioma:** xyz .

■ **Regras de inferência:**

- 1 Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo x por xyz , são proposições verdadeiras.
- 2 Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo xyz por yxz são proposições verdadeiras.

Exercício

Mostrar que $yyxzz$ é um teorema do sistema matemático considerado no exemplo anterior.

Propriedades dos sistemas de axiomas

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Um sistema de axiomas deve ser consistente e independente:

Consistente: i.e. não permite a dedução de um teorema e a sua negação.

Propriedades dos sistemas de axiomas

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Um sistema de axiomas deve ser consistente e independente:

Consistente: i.e. não permite a dedução de um teorema e a sua negação.

Independente: não inclui axiomas que são consequência de outros axiomas.

Propriedades dos sistemas de axiomas

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Um sistema de axiomas deve ser consistente e independente:

Consistente: i.e. não permite a dedução de um teorema e a sua negação.

Independente: não inclui axiomas que são consequência de outros axiomas.

Saturado: a adição de um qualquer axioma que não é consequência dos axiomas do sistema, torna o sistema não consistente.

Propriedades dos sistemas de axiomas

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Um sistema de axiomas deve ser consistente e independente:

Consistente: i.e. não permite a dedução de um teorema e a sua negação.

Independente: não inclui axiomas que são consequência de outros axiomas.

Saturado: a adição de um qualquer axioma que não é consequência dos axiomas do sistema, torna o sistema não consistente.

Completo: se para toda a proposição p , correctamente formulada no contexto desta teoria, " p " ou "não p " é um teorema. A teoria diz-se incompleta no caso contrário.

Exemplo de sistema saturado

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Axiomas da geometria euclidiana:

- 1 Dados dois pontos existe uma recta que os contém.

Exemplo de sistema saturado

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Axiomas da geometria euclidiana:

- 1 Dados dois pontos existe uma recta que os contém.
- 2 Todo o segmento de recta está contido numa recta.

Exemplo de sistema saturado

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Axiomas da geometria euclidiana:

- 1 Dados dois pontos existe uma recta que os contém.
- 2 Todo o segmento de recta está contido numa recta.
- 3 Dado um ponto C e um real $r > 0$, existe uma única circunferência de centro C e raio r .

Exemplo de sistema saturado

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Axiomas da geometria euclidiana:

- 1 Dados dois pontos existe uma recta que os contém.
- 2 Todo o segmento de recta está contido numa recta.
- 3 Dado um ponto C e um real $r > 0$, existe uma única circunferência de centro C e raio r .
- 4 Todos os ângulos rectos são iguais.

Exemplo de sistema saturado

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Axiomas da geometria euclidiana:

- 1 Dados dois pontos existe uma recta que os contém.
- 2 Todo o segmento de recta está contido numa recta.
- 3 Dado um ponto C e um real $r > 0$, existe uma única circunferência de centro C e raio r .
- 4 Todos os ângulos rectos são iguais.
- 5 *Axioma das paralelas*: dada uma recta e um ponto não pertencente a essa recta, existe uma única recta que contém o ponto e é paralela à recta dada.

Exemplo de sistema saturado (cont.)

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Axiomas da geometria euclidiana (noções comuns):

6 Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.

Exemplo de sistema saturado (cont.)

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Axiomas da geometria euclidiana (noções comuns):

- 6** Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.
- 7** Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.

Exemplo de sistema saturado (cont.)

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Axiomas da geometria euclidiana (noções comuns):

- 6** Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.
- 7** Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.
- 8** Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.

Exemplo de sistema saturado (cont.)

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Axiomas da geometria euclidiana (noções comuns):

- 6** Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.
- 7** Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.
- 8** Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.
- 9** Objectos coincidentes são iguais.

Exemplo de sistema saturado (cont.)

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Axiomas da geometria euclidiana (noções comuns):

- 6** Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.
- 7** Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.
- 8** Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.
- 9** Objectos coincidentes são iguais.
- 10** O todo é maior do que a parte.

Exemplo de uma conjectura

Trata-se de uma afirmação não provada, para a qual existe a expectativa de se vir a encontrar uma prova.

Conjectura de Goldbach

Todo o inteiro par superior a 2 é a soma de dois primos

Por exemplo, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, ...

Referências bibliográficas

Matemática
Discreta

Apresentação
e Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

Apresentação

Regime de
faltas

Introdução
aos Sistemas
Matemáticos

- **Referência bibliográfica principal:**

D. M. Cardoso, J. Szymanski e M. Rostami,
Matemática Discreta: combinatória, teoria dos grafos e algoritmos, Escolar Editora, 2009.