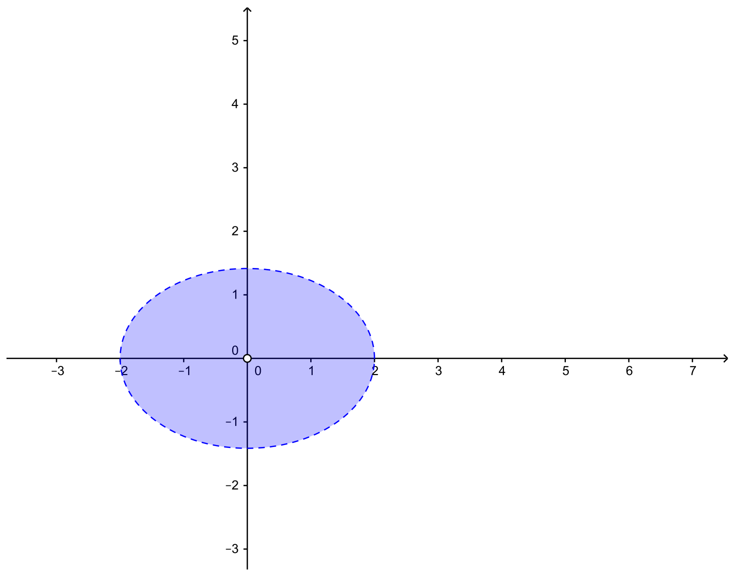
Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4 **2020/21**

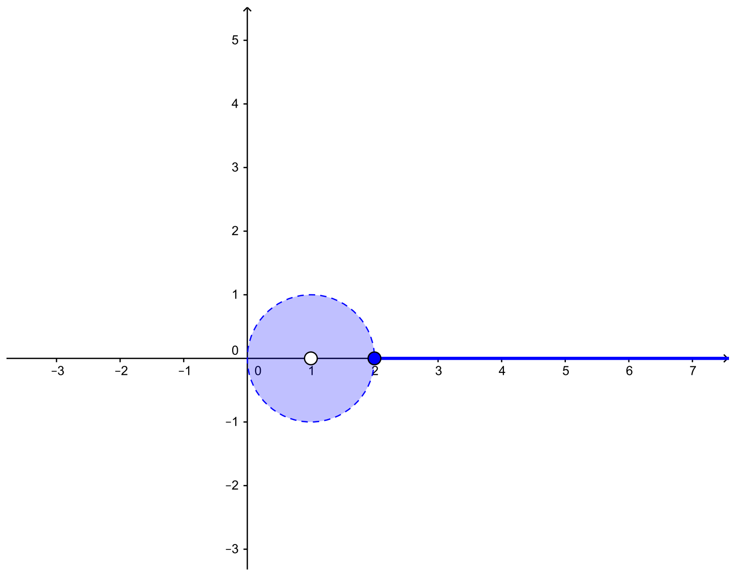
Folha 3: *Soluções*

---

1. (a) É aberto e não é fechado.



(b) Não é aberto nem fechado.

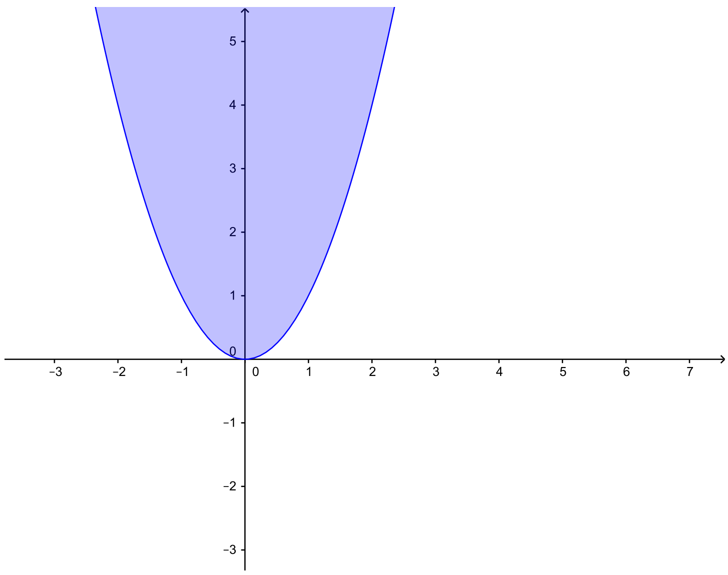


(c) Não é aberto nem fechado.

(d) É fechado e não é aberto.

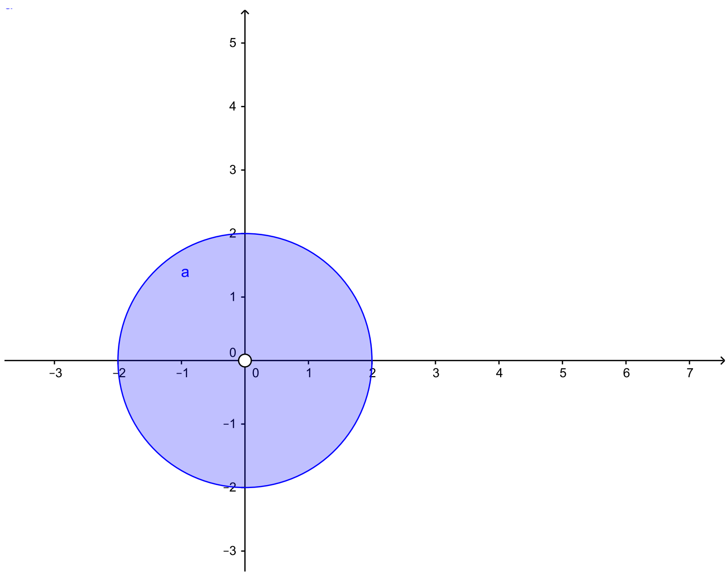
(e) É fechado e não é aberto.

2. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.

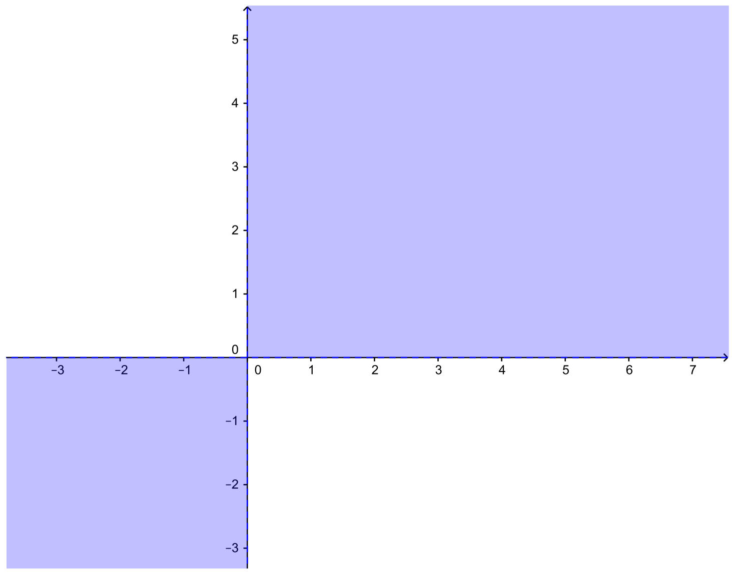


(b) $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2\}$.

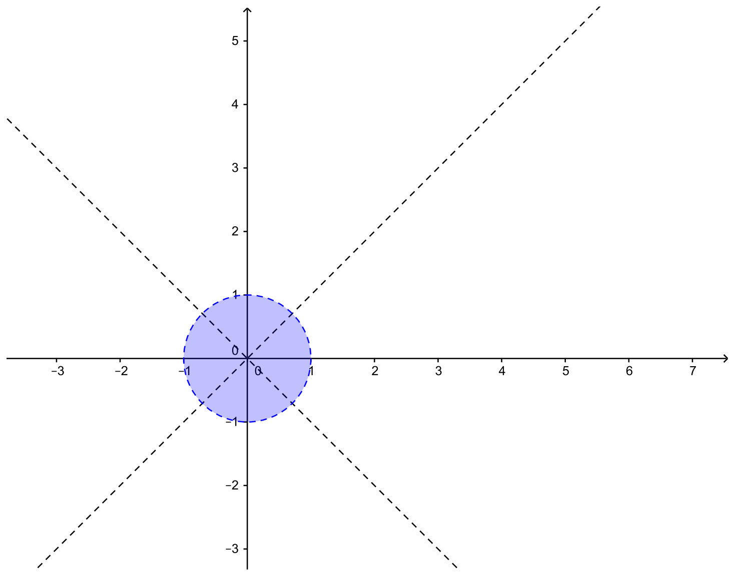
(c) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x, y) \neq (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$.



(d) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)$.

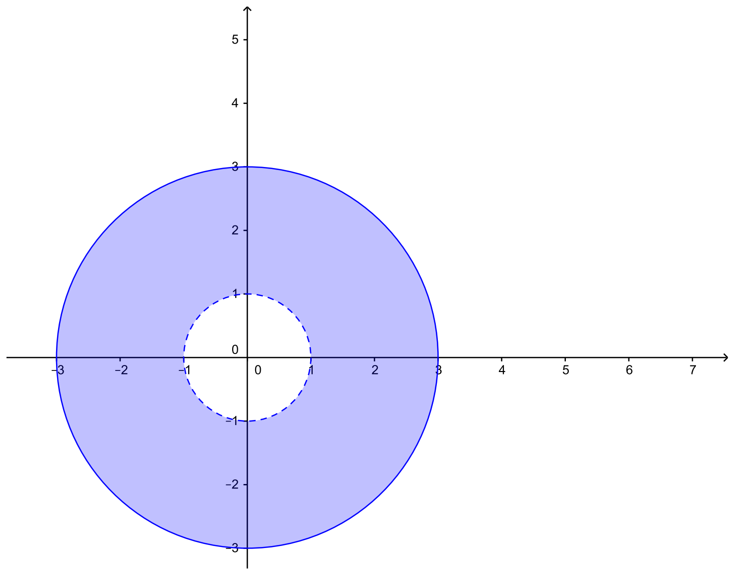


(e) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \wedge y \neq x \wedge y \neq -x\}$.



(f) $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(g) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}$.



(h) $D_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0) \wedge z^2 \leq x^2+y^2\}$.

3. (a) $\mathcal{N}_1 = \{(0,0)\}$ é um ponto. Para cada $k \in]1,+\infty[$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = \frac{k^2-1}{k^2}\}$ é uma circunferência de centro $(0,0)$ e raio $\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}$.

   (b) $\mathcal{N}_1 = Ox \cup Oy$ é a união de duas retas concorrentes (cónica degenerada). Para $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = \ln(k)\}$ é uma hipérbole.

   (c) Para $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+3z = k\}$ é o plano ortogonal ao vetor (1,1,3) que contém o ponto $(k,0,0)$.

   (d) $\mathcal{N}_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2+z^2\}$ é uma superfície cónica;
   para $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2-y^2-z^2 = k\}$ é um hiperbolóide de duas folhas;
   para $k \in \mathbb{R}^-$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2-y^2-z^2 = k\}$ é um hiperbolóide de uma folha.

   (e) $\mathcal{N}_0 = \{(0,0,0)\}$ é um ponto (quádrica degenerada). Para cada $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{N}_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = k\}$ é uma superfície esférica de centro $(0,0,0)$ e raio $\sqrt{k}$.

4. $\{(x,y) : T(x,y) = T(3,2)\} = \{(x,y) : x^2+y^2 = 13\}$
   (circunferência de centro em $(0,0)$ e raio $\sqrt{13}$).

5. Para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, temos
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$,
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3\operatorname{sen}(z-3y)$,
   $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\operatorname{sen}(z-3y)$.

6. (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,2) = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,2) = \dfrac{1}{2}$.

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 0$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,0)$ não existe.

   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

7. Para $y > -x$ e $x > y$, temos
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2y}{y^2-x^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2x}{x^2-y^2}$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{4xy}{(x^2-y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$.

8. $f(x,y) = x^3y^2 - 6xy + \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$.

9. –

10. –

11. –

12. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
    (b) Plano tangente: $5x + 4y - z - 9 = 0$.
    Reta normal:
    $(x,y,z) = (1,2,4) + \alpha(5,4,-1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (equação vetorial) ou
    $\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = 4 - z$ (equações cartesianas).

13. (a) $\nabla f(x,y,z) = (\operatorname{sen}(yz), xz\cos(yz), xy\cos(yz))$.
    (b) $D_{\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)}f(1,3,0) = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

14. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
    (é aberto e não é fechado).
    (b) As curvas de nível $k \in \mathbb{R}$ de f são $C_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = e^k\}$ (circunferências de centro $(0,0)$).
    (c) $D_{(u,v)}f(1,0) = 2u$.

15. Reta normal: $(x,y,z) = (3,4,-2) + \alpha(3,4,5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
    Plano tangente: $3x + 4y + 5z - 15 = 0$.

16. (a) $\nabla f(x,y,z) = (3y, 3x, 2z)$.
    (b) $3x + 3y + 2z - 8 = 0$.

17. (a) D é um losango centrado na origem com os vértices situados nos eixos coordenados.
    (b) A função é do tipo polinomial, logo contínua no seu domínio de definição $\mathbb{R}^2$ e, consequentemente, também é contínua em D. Por outro lado, este conjunto é fechado e limitado. Nestas condições, o Teorema de Weierstrass garante a existência de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que são, respetivamente, o menor e o maior valor que f atinge.
    Observar que $f(x,y)$ expressa o quadrado da distância de um ponto $P = (x,y)$ à origem. Assim, o máximo absoluto é 1, atingido nos pontos $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$, e o mínimo absoluto é 0, atingido no ponto $(0,0)$.

18. Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque $\mathcal{S}$ não é fechado.

19. Como $f(x,y) = -x^2 \leq 0 = f(0,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então todos os pontos da forma $(0,y)$, com $y \in \mathbb{R}$, são maximizantes da função.

20. (a) Não. O Teorema de Weierstrass não é aplicável, porque $\mathbb{R}^3$ não é limitado.
    (b) Como $f(0,0,0) = 0 \leq x^2+y^2+z^2 = f(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, então $(0,0,0)$ é (o único) minimizante global de f.

21. (a) f não é diferenciável em $(0,0)$, porque não existe $f'_x(0,0)$.
    (b) Tem-se $f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2} \leq 0 = f(0,0)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, $(0,0)$ é (o único) maximizante absoluto de f.

22. (a) Como g é contínua e o conjunto B é fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremos globais de g em B.
    (b) g é diferenciável e não possui pontos críticos no interior de B, logo os extremantes situam-se na fronteira. Claramente $(0,-1)$ é minimizante global e $(0,1)$ é maximizante global.
    (c) Não, pois g é diferenciável no aberto A e não possui pontos críticos nesse conjunto (notar que $\nabla g(x,y) = (0,1) \neq (0,0)$). Portanto, g não tem extremantes globais em A (nem em $\mathbb{R}^2$).

23. Na origem a função h vale $\frac{1}{2}$, enquanto que, por exemplo, em $(\sqrt{3\pi/2}, 0)$ vale $\frac{3}{2}$ que é um valor maior.

24. (a) $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$;
    (b) $(2,3)$ e todos os pontos situados nos eixos coordenados;
    (c) $(0,0,0)$, $(-1,-1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(1,1,1)$.

25. Como $(x-1)^2 + (y-2)^2 \geq 0$ então $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 \geq -1$. Ora $f(1,2) = -1$ e para todo $(x,y) \neq (1,2)$ tem-se $f(x,y) = (x-1)^2+(y-2)^2-1 > -1$.

26. (a) O gradiente de f, se considerado no seu domínio de definição, anula-se apenas em $(-4,6)$. No entanto, $(-4,6) \notin int(D)$. Consequentemente, f não possui pontos críticos em $int(D) =]0,1[\times]0,2[$.
    (b) A existência de extremos absolutos é garantida pelo Teorema de Weierstrass, uma vez que D é fechado e limitado e f é contínua neste conjunto. Os extremos são então atingidos na fronteira (recordar a conclusão obtida na alínea anterior).
    O máximo absoluto de f em D é 17 e é atingido no ponto $(1,2)$; o mínimo absoluto de f em D é -3 e é atingido no ponto $(1,0)$.

27. (a) Os pontos críticos são $(0,0)$ e $(1,1)$. A função f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.
    Como $det(H_f(0,0)) = -1 < 0$, então $(0,0)$ não é extremante (é ponto de sela).
    Como $det(H_f(1,1)) = e^{-4} > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -e^{-2} < 0$, então $f(1,1) = e^{-2}$ é máximo local.
    (b) Os pontos críticos de g são $(0,0)$, $(2,1)$ e $(1,1/4)$. Aplicando o teste das segundas derivadas, conclui-se que os dois primeiros são pontos de sela e o terceiro ponto é minimizante local.

28. –

29. –

30. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que f tem extremos globais em D. $(0,0)$ é o único ponto crítico no interior de D, mas não é extremante (o hessiano é negativo neste ponto). Usando o método dos multiplicadores de Lagrange identificamos os candidatos $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$. Calculando o valor de f nestes pontos, conclui-se que o máximo global de f é 2 (atingido nos pontos $(1,0)$ e $(-1,0)$) e o mínimo global de f é -2 (atingido nos pontos $(0,1)$ e $(0,-1)$).

31. Tratando-se de uma função contínua definida num conjunto fechado e limitado, o Teorema de Weierstrass garante que f tem extremos globais em D. Não existem pontos críticos no interior de D (ambas as derivadas parciais anulam-se $(0,0)$, mas este ponto situa-se na fronteira). A fronteira $fr(D)$ é constituída pela semicircunferência D_1 e pelo segmento de reta D_2:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1 \wedge y \geq 0\}\,; \quad D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -1 \leq x \leq 1\}.$$

Como f é constante em D_2 (pois $f(x,0) = 0$) todos os pontos situados neste segmento são candidatos a extremantes. Os candidatos em D_1 são $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (obtidos através do método dos multiplicadores de Lagrange). Como

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\,, \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\,, \quad f(x,0) = 0\,,$$

o máximo global de f é $1/2$ e o mínimo global é $-1/2$.

32. $(4,8)$ é o que se encontra mais próximo (à distância $3\sqrt{5}$) e $(-4,-8)$ é o que se encontra mais afastado (à distância $5\sqrt{5}$).

33. $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.

34. A distância entre um qualquer ponto (x,y,z) e o ponto $(1,0,-2)$ é dada por $d(x,y,z) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2}$. Para pontos (x,y,z) do plano dado temos $z = 4 - x - 2y$. Assim, podemos minimizar $d(x,y,z)$, ou mais simplesmente $d(x,y,z)^2$, tendo em conta esta última relação. Considerando

$$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2 + (6 - x - 2y)^2$$

vemos que o único ponto crítico de f é $(\frac{11}{6}, \frac{5}{3})$ e que este é um minimizante local (atendendo ao teste das segundas derivadas). A distância mais curta pretendida é $f(\frac{11}{6}, \frac{5}{3}) = \frac{5\sqrt{6}}{6}$.

35. Aplicando o métodos dos multiplicadores de Lagrange identificamos os pontos

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{e} \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right).$$

O primeiro é o mais próximo e o segundo ponto é o mais distante.

36. (a) –
    (b) $(0,1)$.
    (c) $f(0,1) = 0$ é mínimo global e $f(0,4) = 9$ é máximo global.

37. (a) –
    (b) $int(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \wedge 1 - x < y < 1\}$; f não possui pontos críticos em $int(D)$.
    (c) $f(1/2, 1/2) = 1$ é mínimo global e $f(1,1) = 4$ é máximo global.

38. O lucro máximo da empresa é 100 (milhões de euros), sendo realizado (ou atingido) com um gasto de 11 em investigação e de 9 em publicidade.

39. O custo mínimo para uma produção de 12 unidades é $C(4,16) = 56$.