exercício 14

a)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se} \quad x \neq 6 \\ 1 & \text{se} \quad x = 6 \end{cases}$$

$f(3) = 3+1 = 4$

$f(6) = 1$

$f \circ f(3) = f(3+1) = f(4) = 5$

$f(f(2)) = f(3) = 4$

b) Uma função $f: A \to B$ diz-se injetiva se:

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, para quaisquer $x, y \in A$

Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, temos que:

$f(1) = 2$ $\quad f(5) = 6$

$f(2) = 3$ $\quad f(4) = 5$

$f(3) = 4$ $\quad f(6) = 1$

Visto que para quaisquer $x, y \in A$, não existe qualquer hipótese da equação:

$f(x) = f(y)$

ter uma solução diferente de $x = y$, podemos concluir que $f(x)$ é injetiva.

exercício 15

$f(x) = x^3$

injetividade $\to$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, não existe qualquer hipótese da equação:

$f(x) = f(y)$

ter uma solução diferente de $x = y$, uma vez que o expoente é ímpar, o sinal de posição de x será sempre preservado e portanto não existe nenhum y diferente de x tal que: $x^3 = y^3$ //

sobretijuidade $\to$ todos os números reais possuem uma raiz cúbica, logo para todo o $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$ e $f(x)$ é portanto uma função sobrejetiva.

Tal como queríamos demonstrar

$g(x) = x^2 - 1$

$\Rightarrow$ x possui um expoente par, o que significa que: $x^2 = (-x)^2$ e leva a que existam x e y distintos tais que: $g(x) = g(y)$ e portanto $g(x)$ não é injetiva, por exemplo $x = 2$ e $y = -2$, porém $g(x) = g(y)$

$\Rightarrow$ $g(x)$ não está definida para todo $y \in \mathbb{R}$, visto que o expoente de x é par, ~~[illegible]~~ o valor mínimo desta função será -1 (para $x = 0$), sendo equações como:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 1 = -8 \\ x^2 - 1 = -2 \end{array}\right\} \text{impossíveis em } \mathbb{R}$$

Podemos concluir que $g(x)$ não é sobrejetiva

exercício 16

Cardinalidade de A → número de elementos de A

$\{1, 2, \emptyset\}$ → cardinalidade = 3

$\{1, \{1, \emptyset\}\}$ → cardinalidade = 2

$\{\emptyset\}$ → cardinalidade = 1

$\{1\}$ → cardinalidade = 1

$\{\{1\}\}$ → cardinalidade = 1

$\emptyset$ → cardinalidade = 0

exercício 17

a)

Conjuntos Equipotentes
→ conjuntos de igual cardinalidade

$B = \{1, \{1,2\}\}$ $|B| = 2$

$D = \{1, 2\}$ $|D| = 2$

$|D| = |B|$, logo são equipotentes

b) $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$

$f(n) = 2n$ → trata-se de uma bijeção entre $\mathbb{N}$ e $2\mathbb{N}$, logo são conjuntos equipotentes

Bijeção
→ função bijetiva, ou seja, função injetiva e sobrejetiva

injetiva:

$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

sobrejetiva:

$y \in B$
$x \in A$ $f(x) = y$
$f: A \to B$

c) $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

$f(n) = n + \frac{1}{n+3}$ → bijeção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$, logo são 2 conjuntos equipotentes.

Para cada $x \in \mathbb{Q}$, $\exists^1 p \in \mathbb{N}_0$, $\exists^1 q \in \mathbb{N}$:

$|x| = \frac{p}{q}$ e $\text{mod}(p, q) = d$
→ fração irredutível

$\frac{4}{16} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, para cada $x \in \mathbb{Q}$ designa-se:

$\text{num}(x) = p$ $\text{den}(x) = q$ $\text{sig}(x) \begin{cases} 0 \text{ se } x \geq 0 \\ 1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$

A função $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$
$x \to 2^{\text{num}(x)} \times 3^{\text{den}(x)} \times 4^{\text{sig}(x)}$

→ é bijetiva //

exercício 18

A e B → conjuntos infinitos numeráveis

$f: \mathbb{N} \to A$
$g: \mathbb{N} \to B$ } funções bijetivas → podemos então concluir que A, B e $\mathbb{N}$ são conjuntos equipotentes e portanto:

$|\mathbb{N}| = |B| = |A|$ → logo existe $h(x)$ tal que:

$h: A \to B$
$x \to h(x)$

é uma bijeção entre A e B

Seja: $h(x) = 2x$

Sejam α e $\beta \in A$:

$h(\alpha) = h(\beta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\alpha = 2\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \beta$ → podemos concluir que h é injetiva

Seja $y \in B$, $\exists x \in A$, tal que $f(x) = y$:

$f(x) = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{y}{2}$

→ $f(x) = f\left(\frac{y}{2}\right) =$

$= \frac{y}{2} \times 2 = y$, logo $h(x)$ é sobrejetiva

Dado isto podemos concluir que $h(x)$ é uma bijeção entre A e B, logo admite inversa $h^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

exercício 19

Seja $A = \{1, 2\}$ e $|A| = 2$

$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$|\mathcal{P}(A)| = 4$ → $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} \Leftrightarrow 4 = 2^{|A|} \Leftrightarrow 2^2 = 2^{|A|} \Leftrightarrow 2 = |A|$

→ tal como queríamos demonstrar

exercício 20

Qualquer número $x \in]0,1[$ tem uma representação decimal da forma $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ em que $x_i \in \{0, 1, 2, 3, \dots 9\}$

Supondo que $]0,1[$ é numerável. Então existe uma função bijetiva

$\phi: \mathbb{N} \to]0,1[$

$1 \to 0, x_{11}\, x_{12}\, x_{13} \dots$

$2 \to 0, x_{21}\, x_{22}\, x_{23} \dots$

$3 \to 0, x_{31}\, x_{32}\, x_{33} \dots$

Considere-se $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$

definido por: $\alpha_n \begin{cases} 1 \text{ se } & x_{nn} = 0 \\ 0 \text{ se } & x_{nn} \neq 0 \end{cases}$

Nota: $\alpha_n \neq x_{nn}$

Logo, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) \neq \alpha$

Logo ϕ não é sobrejetiva, pelo que não é bijetiva → Contradição