Capítulo 7

Aplicações Lineares

- Sejam V e W espaços vetoriais reais.
- aplicação linear → é uma função $\phi: V \to W$, $X \to \phi(X)$ tal que:

1- $\phi(X+Y) = \phi X + \phi Y, \ \forall X, Y \in V$

2- $\phi(cX) = c\phi X, \ \forall c \in \mathbb{R}, \ \forall X \in V$

Se $W = V$ então ϕ diz-se operador linear de V

exemplos:

1- Em $\mathbb{R}^2$, a reflexão em relação ao eixo dos xx é dada pelo operador linear:

$$\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to (x,-y)$$

2- A Rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo dos zz de ângulo θ é o operador linear:

$$\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \to (x\cos\theta - y\sin\theta, \ x\sin\theta + y\cos\theta, \ z)$$

3- A derivada de polinómios (funções derivaveis) é a aplicação linear:

$$\phi: P_n \to P_{n-1}$$
$$p(x) \to p'(x)$$

4- A primitiva (nula em a) de um polinómio é obtida pela aplicação linear:

$$\phi: P_n \to P_{n+1}$$
$$p(x) \to \int_a^x p(t)\,dt$$

TEOREMA

➡ Seja $\phi: V \to W$ uma aplicação linear. Então

- $\phi(0_V) = 0_W$
- ϕ é uma aplicação linear se e só se

$$\phi(c_1 X_1 + \dots + c_k X_k) = c_1\phi(X_1) + \dots + c_k\phi(X_k)$$

→ para quaisquer $X_1, \dots, X_k \in V$ e $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$, com $k \geq 2$

COROLÁRIO

⇒ Sejam $\phi : V \to W$ uma aplicação linear e $B_V = (x_1, \dots, x_n)$ uma base de V. Então, ϕ é completamente determinada por $\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)$

exemplo:

Determinar a aplicação linear $\phi : V \to W$, com $V = \mathbb{R}^2$ e $W = \mathbb{R}^3$, sabendo que:

$$\phi(1,1) = (2,3,1) \quad e \quad \phi(1,0) = (1,2,1)$$

- $(1,1)$ e $(1,0)$ são linearmente independente e, portanto, $B_V = ((1,1),(1,0))$ é base de $\mathbb{R}^2$;
- $\phi(c_1(1,1) + c_2(1,0)) = c_1\phi(1,1) + c_2\phi(1,0)$, para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- se $(x_1, x_2) = c_1(1,1) + c_2(1,0) = (c_1 + c_2, c_1)$ então

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_1 \\ c_1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = x_2 \\ c_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

- $\phi(x_1, x_2) = x_2\phi(1,1) + (x_1 - x_2)\phi(1,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \phi(x_1, x_2) = x_2(2,3,1) + (x_1 - x_2)(1,2,1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \phi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2, x_1)$

Matriz representativa de uma aplicação linear

- Teorema:

→ Sejam $\phi : V \to W$ uma aplicação linear, $B_V = (x_1, \dots, x_n)$ uma base de V e B_W ~~de~~ uma base de W.

Para cada $x \in V$:

$$[\phi(x)]_{B_W} = M(\phi, B_V, B_W)[x]_{B_V}$$

onde

$$\boxed{M(\phi, B_V, B_W) = [[\phi(x_1)]_{B_W} \dots [\phi(x_n)]_{B_W}]}$$

é a matriz representativa de ϕ relativamente às bases B_V e B_W

- As colunas desta matriz são os vetores das coordenadas na Base B_W das imagens dos vetores da base B_V

exemplo:

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\phi(1,1) = (2,3,1)$ e $\phi(1,0) = (1,2,1)$

Comecamos por verificar que $B = ((1,1),(1,0))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, visto que ~~são~~ é linearmente independente e dim $\mathbb{R}^2$ = 2 e B tem 2 vetores, então B é uma ordenada de $\mathbb{R}^2$

→ Determinar $M(\phi, B_r, C_3)$, onde C_3 é a base canónica de $\mathbb{R}^3$

$$M(\phi, B, C_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} [\phi(1,1)]_{C_3} & [\phi(1,0)]_{C_3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\phi(1,1) = (2,3,1)$

$(2,3,1) = 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 1(0,0,1) =$

$[\phi(1,1)] = (2,3,1)$

De forma análoga conclui-se que $[\phi(1,0)]_{C_3} = [(1,2,1)]_{C_3} = (1,2,1)$

→ Recorrendo à matriz $M(\phi, B, C_3)$ vamos calcular $\phi(1,-1)$

Sabemos que

$$[\phi(1,-1)]_{C_3} = M(\phi, B, C_3)\,[(1,-1)]_B$$

Calcular $[(1,-1)]_B$:

$$(1,-1) = \alpha(1,1) + \beta(1,0)$$

$$\begin{array}{cc} \alpha & \beta \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L'_2 = L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[L'_2 = -L_2]{L'_1 = L_1 + L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$[(1,-1)]_B = (-1, 2)$$

$$[\phi(1,-1)]_{C_3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(1,-1) = -2(1,0,0) + (-1)(0,1,0) + (1)(0,0,1)$$

→ Vamos determinar a matriz de mudança da base $D = ((1,0,1),(1,1,0),(0,1,1))$ de $\mathbb{R}^3$ para a base canónica de $\mathbb{R}^3$, C_3.

$$M(D, C_3) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} [(1,0,1)]_{C_3} & [(1,1,0)]_{C_3} & [(0,1,1)]_{C_3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

→ Calcular $M(C_3, D)$

Podemos calcular a matriz diretamente calculando os vetores de coordenadas

$$[(1,0,0)]_D,\ [(0,1,0)]_D,\ [(0,0,1)]_D$$

∘ Note que estes vetores de coordenadas podem ser calculados com uma só matriz ampliada porque a matriz dos coeficientes é a mesma.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

↳ Base D ↳ Base C_3

...

$$\left[\begin{array}{c|c} I_3 & \vdots \end{array}\right]$$

→ $M(C_3, D) = M^{-1}(D, C_3)$

$$M(C_3, D) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

→ Anteriormente obtivémos $M(\phi, B, C_3)$. Vamos determinar $M(\phi, B, D)$

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{array}{ccc} [x]_B & \xrightarrow{M(\phi, B, C_3)} & [\phi(x)]_{C_3} \\ \uparrow {\scriptstyle M(B,B) = I_2} & & \downarrow {\scriptstyle M(C_3, D)} \\ [x]_B & \xrightarrow{M(\phi, B, D)} & [\phi(x)]_D \end{array}$$

$M(B,B) = I_2$; $M(C_3, D)$ Calculada anteriormente

$$[\phi(x)]_D = \underbrace{M(C_3, D)\, M(\phi, B, C_3)}_{M(\phi, B, D)}\, \underbrace{M(B,B)}_{I_2}\, [x]_B =$$

$$= M(C_3, D)\, M(\phi, B, C_3)\, \underbrace{[x]_B}_{[\phi(x)]_{C_3}}$$

$$M(\phi, B, D) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

→ Calcular $\phi(1,-1)$ recorrendo à matriz $M(\phi, B, D)$

$$[\phi(1,-1)]_D = M(\phi, B, D)\, [(1,-1)]_B = M(\phi, B, D) \times (-1, 2) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cancel{0}\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi(1,-1) = 0(1,0,1) + \cancel{0}\,{-2}(1,1,0) + 1(0,1,1) = \cancel{\ldots} = (-2,-1,1)$$