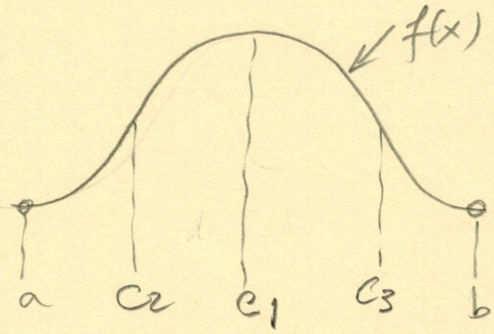
Cálculo I
2015/2016
Ficha #3

2016/17
F1 E22

01.

Problema 12

Seja f uma f.r.v.r. Mostre que se f admite terceira derivada no intervalo $[a,b]$ e $f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'''(c)=0$.



T. Rolle:

Como $f(a)=f(b)$, existe $c_1 \in]a,b[$ tal que $f'(c_1)=0$.

Como $f'(c_1)=0$ e $f'(a)=0$, existe $c_2 \in]a,c_1[$ tal que $f''(c_2)=0$.

Por outro lado, como $f'(c_1)=0$ e $f'(b)=0$ existe $c_3 \in]c_1,b[$ tal que $f''(c_3)=0$.

Deste modo, aplicando novamente o T. de Rolle no intervalo $[c_2,c_3]$ para f'', temos que existe $c \in]c_2,c_3[$ tal que

$$f'''(c)=0.$$

Considere a função polinomial p definida por $p(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Prove que a equação $p'(x)=0$ tem exatamente três raízes reais.

$$p(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1 \vee x=-2 \vee x=-3$$

Pelo T. Rolle (corolário #1)

$$\exists \alpha \in]-3,-2[: p'(\alpha)=0$$

$$\exists \beta \in]-2,-1[: p'(\beta)=0$$

$$\exists \gamma \in]-1,0[: p'(\gamma)=0$$

Assim $p'(x)=0$ tem 3 raízes reais. Resta provar que não tem uma 4.ª raiz.

Aplico T. Rolle a p'

$$\exists a \in]\alpha,\beta[: p''(a)=0$$

$$\exists b \in]\beta,\gamma[: p''(b)=0$$

$p''(x)$ é um polinómio do 2.º grau que não pode ter mais de duas raízes reais. São $x=a$ e $x=b$. Se supusermos a existência de uma 4.ª raiz de $p'(x)$ então p'' teria uma 3.ª raiz (o que é absurdo).