Exercícios de MD F. 2 - Relações e Funções

1. Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Para cada uma das relações binárias $\mathcal{R}$ indicadas a seguir, determine os elementos de $\mathcal{R}$, o domínio e o contradomínio de $\mathcal{R}$ e, finalmente, as propriedades (de reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade) que possui $\mathcal{R}$:
   (a) $\mathcal{R}$ é a relação $<$ em A.
   (b) $\mathcal{R}$ é a relação $\geq$ em A.
   (c) $\mathcal{R}$ é a relação $\subset$ em $\mathcal{P}(A)$.

2. Considere a relação $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N}_0^2 : a + b = 4\}$
   (a) Determine $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}^{-1}$.
   (b) Determine as imagens de 1 e 3 por $\mathcal{R}$.
   (c) Determine as imagens recíprocas por $\mathcal{R}$ de $0,\ 2$ e 4.

3. Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência definida num conjunto A e denote por $[x]_{\mathcal{R}}$ a classe de equivalência de $x \in A$.
   (a) Mostre que
   $$\forall\, a, b \in A \quad a \in [b]_{\mathcal{R}} \;\Leftrightarrow\; [a]_{\mathcal{R}} \;=\; [b]_{\mathcal{R}}.$$
   (b) Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, determine a relação de equivalência $\mathcal{R}_1$ induzida pela partição $\mathcal{P}_1 = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ em A .

4. Em cada uma das seguintes alíneas diga se a relação binária $\mathcal{R}$ definida no conjunto A é reflexiva, simétrica, anti-simétrica e transitiva.
   (a) $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b)\}$; $A = \{a, b\}$;
   (b) $\mathcal{R} = \emptyset$; $A \neq \emptyset$;
   (c) $x\mathcal{R}y$ se e só se $x - y = 1$; $A = \mathbb{R}$;
   (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times A\ :\ |x| \leq |y|\}$, onde $A = \mathbb{R}$;
   (e) $x\mathcal{R}y$ se e só se $x \cdot y \geqslant 0$; $A = \mathbb{Q}$;
   (f) $x\mathcal{R}y$ se e só se $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$; $A = \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
   (g) $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ se e só se $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$; $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

5. Das relações binárias definidas no exercício anterior diga quais são:
   (a) funções de A em A;
   (b) relações de equivalência e para essas determine o conjunto quociente $A/\mathcal{R}$;
   (c) relações de ordem parcial;
   (d) relações de ordem total.

6. Seja A um conjunto não vazio e $B \subseteq A$. Considere-se a relação $\mathcal{R}$ definida em $\mathcal{P}(A)$ (conjunto das partes de A) da seguinte forma: $X\mathcal{R}Y$ se $B \cap X = B \cap Y$, com $X, Y \subseteq A$.
   (a) Verifique que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{P}(A)$.
   (b) Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, b\}$, qual a partição induzida em $\mathcal{P}(A)$ por $\mathcal{R}$?
   (c) Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{a, b, c\}$, determine a classe de equivalência $[\{a, c\}]$.
   (d) Se $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, b, c\}$, quantas classes de equivalência constituem a partição definida por $\mathcal{R}$?

7. (a) Exiba todas as relações binárias distintas que se podem definir no conjunto $\{0,1\}$, explicitando cada uma delas numa tabela adequada, e, em cada caso, diga se se trata de uma relação reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva.

   (b) Uma relação binária, $\mathcal{R}$ definida num conjunto A diz-se anti-reflexiva se para todo $x \in A$ se tem $(x,x) \notin \mathcal{R}$.

   A relação complementar de uma relação $\mathcal{R}$, denota-se por $\overline{\mathcal{R}}$, e $\overline{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in A \times A \,:\, (x,y) \notin \mathcal{R}\}$.

   Mostre que uma relação $\mathcal{R}$ num conjunto A é reflexiva se e só se a relação complementar $\overline{\mathcal{R}}$ é anti-reflexiva.

8. Considere o conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$. A relação de equivalência R definida em A com menor número de elementos e que contém os pares $(1,2)$, $(1,3)$ e $(4,5)$ é

   (A) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(4,5),(5,4)\}$;

   (B) $R = \{(1,2),(1,3),(4,5)\}$;

   (C) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4)\}$;

   (D) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(1,4),(4,1),(4,5),(5,4)\}$.

9. Sejam X e Y conjuntos finitos não vazios e f uma função de X em Y. Considere a relação binária definida em X por

$$x\mathcal{R}y \text{ se } f(x) = f(y), \text{ para todos } x,y \in X.$$

   (a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

   (b) Determine o cardinal do conjunto quociente definido por R, X/R, se f é injetiva.

10. Considere a relação binária definida em $\mathbb{Z}$ por: $x\,R\,y$ se $x - y$ é divisível por 3.

   (a) Prove que R é uma relação de equivalência.

   (b) Determine o conjunto quociente de $\mathbb{Z}$ por R.

11. Considere o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros e defina aRb por $b = a^r$ para algum inteiro positivo r.

   (a) Mostre que R é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{Z}$.

   (b) Verifique se R é uma relação de ordem total em $\mathbb{Z}$.

12. Considere uma estrutura de dados contendo pares ordenados $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, onde estão definida uma relação $\mathcal{R}$, tal que,

$$(x_1,y_1)\mathcal{R}(x_2,y_2) \Leftrightarrow (x_1 \leq x_2) \wedge (y_1 \leq y_2), \quad \text{onde } (x_i,y_i) \in \mathbb{R}^2,\ i = 1,2.$$

   Diga, justificando, se $\mathcal{R}$ é uma relação de ordem e, em caso afirmativo, indique se se trata de uma relação de ordem parcial ou total.

13. Seja A um conjunto de pessoas e definam-se em A as relações binárias:

$$\begin{array}{ll} a\mathcal{R}b & \text{se e só se } b \ \textit{ é pai de } \ a; \\ a\mathcal{S}b & \text{se e só se } b \ \textit{ é irmão de } \ a; \end{array}$$

   Diga qual é o grau de parentesco entre a e b e defina a relação, em cada um dos seguintes casos:

   (a) $a\,\mathcal{R}_1\,b$ onde $\mathcal{R}_1 = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$;

   (b) $a\,\mathcal{R}_2\,b$ onde $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$;

   (c) $a\,\mathcal{R}_3\,b$ onde $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

14. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f : A \to A$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 6 \\ 1 & \text{se } x = 6 \end{cases}$$

(a) Determine $f(3), f(6), (f \circ f)(3)$ e $f(f(2))$.

(b) Mostre que f é injectiva.

15. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é injectiva e sobrejectiva enquanto que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 - 1$ não é injectiva nem sobrejectiva.

16. Qual é a cardinalidade de cada um dos seguintes conjuntos

$$\{1, 2, \emptyset\}, \quad \{1, \{1, \emptyset\}\}, \quad \{\emptyset\}, \quad \{1\}, \quad \{\{1\}\}, \quad \emptyset.$$

17. Demonstre que os pares de conjuntos a seguir indicados são equipotentes:

(a) $\{1, \{1, 2\}\}$ e $\{1, 2\}$;

(b) $\mathbb{N}$ e $2\mathbb{N}$, onde $2\mathbb{N}$ denota o conjunto de números naturais pares;

(c) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.

18. Sejam A e B conjuntos infinitos numeráveis, i.e. existem funções bijectivas $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$. Encontre uma função bijectiva entre A e B, se tal existir. Neste caso, defina explicitamente a sua inversa. Poder-se-á concluir que $|A| = |B|$?

19. Seja A um conjunto finito e $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A, mostre que $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

20. Mostre que $]0, 1[$ não é numerável. Conclua que $\mathbb{R}$ não é numerável.

Soluções:

1. (a) Não reflexiva, não simétrica, anti-simétrica, transitiva; (b) Reflexiva, não simétrica, anti-simétrica, transitiva; (c) Não reflexiva, não simétrica, anti-simétrica, transitiva

2. (a) $\mathcal{R} = \{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$; $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$; (b) $\mathcal{R}(1) = 3$; $\mathcal{R}(3) = 1$; $\mathcal{R}^{-1}(0) = 4$; $\mathcal{R}^{-1}(2) = 2$; $\mathcal{R}^{-1}(4) = 0$.

3. (b) $\mathcal{R}_1 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

4. (a) Reflexiva, não simétrica, anti-simétrica, transitiva; (b) Não reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva; (c) Não é reflexiva, não simétrica, anti-simétrica, não transitiva; (d) $\mathcal{R}$ é reflexiva e transitiva mas não é simétrica, nem anti-simétrica; (e) Reflexiva, simétrica, não transitiva; (f) Reflexiva, simétrica, transitiva; (g) Reflexiva, simétrica, transitiva.

5. (a) A relação em (c) é uma função de A em A.

   (b) As relações em (f) e (g) são relações de equivalência;

   Em (f): o conjunto quociente $A/\mathcal{R}$ é formado pela classe de equivalência $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ e pela coleção de classes de equivalência $X_y = \{x : x = r \cdot y, r \in Q \setminus \{0\}\}$, onde y percorre os irracionais ($X_y = [y]$).

   Em (g): $A/\mathcal{R} = \big\{C_r = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r\big\}\,,\ r \in \mathbb{R}_0^+\big\}$ (conjunto das circunferências de raio r, com $r \geq 0$).

   (c) A relação em (a).

   (d) A relação em (a).

6. (b) $\big\{\{\emptyset,\{c\}\},\{\{a\},\{a,c\}\},\{\{b\},\{b,c\}\},\{\{a,b\},\{a,b,c\}\}\big\}$; (c) $\big\{\{a,c\},\{a,c,d\}\big\}$; (d) 8

8. (C)

9. (b) $|X/\mathcal{R}| = |X|$.

10. (b) $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \Big\{\{x \in \mathbb{Z} : x \mod 3 = 0\},\{x \in \mathbb{Z} : x \mod 3 = 1\},\{x \in \mathbb{Z} : x \mod 3 = 2\}\Big\}$, onde $a \mod b = c$ significa que o resto da divisão de a por b é c.

11. (b) Não é.

12. É relação de ordem parcial.

13. (a) $a\mathcal{R}_1 b$ se e só se b *é tio de* a; $\mathcal{R}_1 = \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a,b) \in A^2 :$ existe $s \in A$ tal que $(a,s) \in \mathcal{R} \wedge (s,b) \in \mathcal{S}\}$.

    (b)$a\mathcal{R}_2 b$ se e só se b *é avô de* a; $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \{(a,b) \in A^2 :$ existe $r \in A$ tal que $(a,r) \in \mathcal{R} \wedge (r,b) \in \mathcal{R}\}$.

    (c)$a\mathcal{R}_3 b$ se e só se b *é primo de* a;
    $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(a,b) \in A^2 :$ existem $u,v \in A$ tal que $(a,u) \in \mathcal{R} \wedge (u,v) \in \mathcal{S} \wedge (v,b) \in \mathcal{R}^{-1}\}$.

16. $3; 2; 1; 1; 1, 0$.

17. Ver Exemplo 1.24 do Livro MD, Bibliografia principal.