Universidade de Aveiro - Departamento de Matemática

Matemática Discreta 2019/2020 - UC 47166 (1º Ano/2º Sem)

Exercícios de MD F. 3 - Lógica de Primeira Ordem

1. Indique quais as ocorrências livres e ligadas de cada uma das variáveis das seguintes fórmulas:
   (a) $(\exists y)(P(x, y))$
   (b) $((\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow (\neg(P(x)) \vee Q(y))$
   (c) $\exists x(P(y, z) \wedge \forall y(\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$;
   (d) $P(a, f(a, b))$;
   (e) $\exists x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$;
   (f) $\forall x((P(x) \wedge C(x)) \Rightarrow \exists y L(x, y))$.

2. Exprima por meio de fórmulas bem formadas as seguintes afirmações:
   (a) Todas as aves têm penas. (a) $(\forall x)(ave(x) \Rightarrow tempenas(x))$ (b)
   (b) Todas as crianças são mais novas que os seus pais. $(\forall x)(\forall y)((criança(x) \wedge pai(y, x)) \Rightarrow maisnova(x, y))$
   (c) Todos os insectos são mais leves do que algum mamífero.
   (d) Nenhum número é menor do que zero.
   (e) Zero é menor do que qualquer número.
   (f) Alguns números primos não são pares.
   (g) Todo o número par é número primo.

   (c) $(\forall x)((inseto(x)) \Rightarrow (\exists y)(mamífero(y) \wedge maisleve(x, y)))$

3. Sejam $c(x)$, $s(x)$ e $d(x)$, as afirmações "x é uma explicação clara", "x é satisfatória" e "x é uma desculpa", respectivamente. Admita que o universo do discurso para x é o conjunto de todos os textos em Português. Traduza as seguintes fórmulas bem formadas para linguagem comum:
   (a) $\forall x\ c(x) \Rightarrow s(x)$; Todas as explicações claras são satisfatórias
   (b) $\exists x\ d(x)\ \wedge\ \neg\ s(x)$; Existe uma desc. que não é satisfatória
   (c) $\exists x\ d(x)\ \wedge\ \neg\ c(x)$.

4. Seja Π o conjunto dos subconjuntos de pontos de um certo plano. Tomando Π para universo e utilizando apenas os três predicados

   $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

   $r(x) \equiv$ "x é uma recta",

   $c(x) \equiv$ "x é uma circunferência",

   $i(x, y) \equiv$ "a intersecção de x e y é não vazia",

   traduza em lógica de predicados cada uma das afirmações seguintes:
   (a) Toda a recta intersecta alguma circunferência. $(\forall x)(\exists y)(r(x) \wedge c(y) \wedge i(x, y))$
   (b) Alguma recta não intersecta alguma circunferência. $(\exists x)(\exists y)(r(x) \wedge c(y) \wedge \neg i(x, y))$
   (c) Nenhuma recta intersecta todas as circunferências. $(\forall x)(reta(x) \Rightarrow (\exists y)(c(y) \wedge \neg i(x, y)))$

5. Escreva as seguintes frases usando lógica de primeira ordem, com recurso aos predicados $Casa(x) \equiv$ "x é uma casa"; $Grande(x) \equiv$ "x é grande"; $Cara(x) \equiv$ "x é cara"; $Apartamento(x) \equiv$ "x é um apartamento"; $PMenor(x, y) \equiv$ "preço de x é menor do que o preço de y".

   $(\forall x)(\exists y)(\neg reta(x) \vee (c(y) \wedge \neg i(x, y)))$
   (a) Todas as casas grandes são caras.
   (b) Qualquer apartamento custa menos do que pelo menos uma casa grande.

5 (a) $(\forall x)((Casa(x) \wedge Grande(x)) \Rightarrow Caro(x))$

$(\forall x)(\exists y)(Apartamento(x) \wedge Casa(y) \wedge Grande(y) \wedge PMenor(x,y))$ ✓

$(\forall x)(Apartamento(x) \Rightarrow (\exists y)(Casa(y) \wedge PMenor(x,y)))$

6

(a) $(\forall x)(\exists y)(gosta(y,x))$

(b) $(\forall x)(\forall y)((gosta(x,y)) \Rightarrow gosta(x,x))$

(c) $(\exists x)(\forall y)(\neg gosta(y,x))$

Existe uma pessoa de quem ninguem gosta.

6. Usando o predicado $gosta(x, y) \equiv x$ "gosta de" y, exprima por meio de uma proposição lógica a afirmação:

   (a) Toda a gente tem alguém que gosta de si;

   (b) As pessoas de quem todos gostam também gostam de si próprias.

   (c) Formule a negação da proposição indicada na alínea (a) e escreva uma frase em linguagem comum que traduza essa negação.

7. Obtenha, na forma mais simplificada possível, a negação da seguinte proposição

$$\forall y \, \exists x \; (\, (\, q(x) \Rightarrow p(y) \,) \; \vee \; (\, p(y) \wedge q(x) \,) \,) \; .$$

8. Considere a proposição

$$Q: \;\; \forall x \quad \exists y \; (\, (\, t(x) \; \wedge \; v(y,x) \,) \; \Rightarrow \; \neg p(x,y) \,)$$

   onde $t(x) \equiv$ "$x > 1$" , $v(y,x) \equiv$ "$y = x + 1$" e $p(x,y) \equiv$ "x divide y" .

   (a) Diga, justificando, qual o valor lógico de Q para uma interpretação que considera $\mathbb{N}$ como sendo o domínio das variáveis.

   (b) Qual o valor lógico da proposição $(\, t(1) \; \wedge \; v(2,1) \,) \; \Rightarrow \; \neg p(1,2)$.

9. Considere um universo X com os objetos A, B e C (isto é, X=$\{A, B, C\}$) e uma linguagem definida em X, onde α, β e γ são constantes, f é um símbolo de função com um argumento e R é um símbolo de predicado com dois argumentos. Considere a seguinte interpretação:

   constantes: $\alpha = A$, $\beta = A$ e $\gamma = B$;

   função f: $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = C$.

   predicado R: $R(B, A) = R(C, B) = R(C, C) = 1$, nos restantes casos o valor lógico é 0.

   Com esta interpretação, avalie as seguintes fórmulas:

   (a) $R(\alpha, \beta)$;

   (b) $\exists x \; f(x) = \beta$;

   (c) $\forall w \; R(f(w), w)$.

10. Para cada fórmula seguinte determine, se possível, um modelo e uma interpretação em que a mesma seja avaliada com valor lógico 0:

   (a) $\forall x(P(x, a) \Rightarrow \neg Q(x, a))$, onde a denota uma constante;

   (b) $\exists x \; \exists y((P(x, y) \wedge \forall z(\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$.

11. Transforme as seguintes fórmulas na forma normal disjuntiva prenex e na forma normal conjuntiva prenex:

   (a) $(\forall x)S(x) \Rightarrow (\exists z)P(z)$;

   (b) $\neg((\forall x)(S(x) \Rightarrow P(x)))$;

   (c) $(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x, y))$;

   (d) $(\exists x)(\neg((\exists y)P(x, y)) \Rightarrow ((\exists z)Q(z) \Rightarrow R(x)))$;

   (e) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$.

12. Encontre a forma standard de Skolem das seguintes fórmulas:

   (a) $\neg((\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)P(y))$

   (b) $\neg((\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)(\forall z)Q(y, z))$

   (c) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$

7. Obtenha, na forma mais simplificada possível, a negação da seguinte proposição

$$\forall y \, \exists x \; (\, (\, q(x) \Rightarrow p(y) \,) \; \vee \; (\, p(y) \wedge q(x) \,) \,) \; .$$

$$\neg\left(\forall y \, \exists x \left(\left(q(x) \Rightarrow p(y) \right) \vee \left(p(y) \wedge q(x) \right) \right) \right)$$

$$\neg\left(\forall y \, \exists x \left(\underline{\neg q(x)} \vee p(y) \vee \underline{\left(p(y) \wedge q(x) \right)} \right) \right)$$

$$\neg\left(\forall y \, \exists x \left(p(y) \vee \left[\left(\neg q(x) \vee p(y) \right) \wedge \underbrace{\left(\neg q(x) \vee q(x) \right)}_{1} \right] \right) \right)$$

$$\neg\left(\forall y \, \exists x \left(\underline{p(y)} \vee \neg q(x) \vee p(y) \right) \right)$$

$$\neg\left(\forall y \, \exists x \left(p(y) \vee \neg q(x) \right) \right)$$

$\neg(A \Rightarrow B)$

$A \wedge \neg B$

$$\exists y \, \forall x \; \neg\left(p(y) \vee \neg q(x) \right)$$

$$\exists y \, \forall x \left(\neg p(y) \wedge q(x) \right)$$

8. Considere a proposição

$$Q: \; \forall x \quad \exists y \; (\, (\, t(x) \; \wedge \; v(y,x) \,) \; \Rightarrow \; \neg p(x,y) \,)$$

onde $t(x) \; \equiv \;$ "$x > 1$" , $v(y,x) \; \equiv \;$ "$y = x + 1$" e $p(x,y) \; \equiv \;$ "x divide y" .

(a) Diga, justificando, qual o valor lógico de Q para uma interpretação que considera $\mathbb{N}$ como sendo o domínio das variáveis.

(b) Qual o valor lógico da proposição $(\, t(1) \; \wedge \; v(2,1) \,) \; \Rightarrow \; \neg p(1,2)$.

0 0 1

(a) $\forall x \in \mathbb{N} \; \exists y \in \mathbb{N}$ tal que $x > 1$ e $y = x + 1 \Rightarrow x$ não div. y

se $x > 1$ então x não div. $x + 1$

Verdade.

(b) $t(1) \equiv 1 > 1$ Falso

Logo $t(1) \wedge v(2,1)$ é falso.

Portanto, $t(1) \wedge v(2,1) \Rightarrow \neg p(1,2)$ é verdadeira.

9. Considere um universo X com os objetos A, B e C (isto é, X=$\{A, B, C\}$) e uma linguagem definida em X, onde α, β e γ são constantes, f é um símbolo de função com um argumento e R é um símbolo de predicado com dois argumentos. Considere a seguinte interpretação:

   constantes: $\alpha = A$, $\beta = A$ e $\gamma = B$;

   função f: $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = C$.

   predicado R: $R(B, A) = R(C, B) = R(C, C) = 1$, nos restantes casos o valor lógico é 0.

   Com esta interpretação, avalie as seguintes fórmulas:

   (a) $R(\alpha, \beta)$;

   (b) $\exists x\ f(x) = \beta$;

   (c) $\forall w\ R(f(w), w)$.

x

(a) $R(A,A) = 0$

(b) $\exists x\ f(x) = \beta$ $\quad$ $\beta = A$ $\quad$ não existe x tal que $f(x) = A$

FALSA.

(c) $\forall w\ \underline{R(f(w), w)}$

1

w		
A	$R(f(A), A) \equiv R(B, A) \equiv 1$	
B	$R(f(B), B) \equiv R(C, B) \equiv 1$	
C	$R(f(C), C) \equiv R(C, C) \equiv 1$	

Verdadeiro

10. Para cada fórmula seguinte determine, se possível, um modelo e uma interpretação em que a mesma seja avaliada com valor lógico 0:

   (a) $\forall x(P(x, a) \Rightarrow \neg Q(x, a))$, onde a denota uma constante;

   (b) $\exists x\ \exists y((P(x, y) \wedge \forall z(\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$.

(a) $D = \mathbb{N}$, $P(x,y) =$ " x maior que y "

$Q(x,y) =$ " x maior que y " .

$a = 3$

$x = 4$, $P(4,3) \Rightarrow \neg Q(4,3)$

$\underbrace{4 > 3}_{V} \Rightarrow \underbrace{4 \leq 3}_{F}$

F

(b) $\exists x\, \exists y(\underbrace{(\underbrace{P(x,y)}_{\emptyset} \land \forall z(\neg Q(x,y) \lor P(y,z)))}_{\emptyset}).$

$\mathbb{D} = \mathbb{N}$, $P(x,y)$ = "x mais y menor que 1"

12. Encontre a forma standard de Skolem das seguintes fórmulas:

(a) $\neg((\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)P(y))$ $\equiv$ $\neg(\underbrace{(\forall x)\ \underline{P(x)}}\ \rightarrow (\exists x)\ \underline{P(x)})$

(b) $\neg((\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)(\forall z)Q(y,z))$

(c) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))$

$A \Rightarrow B \equiv$

$\neg A \vee B$

(a) $\neg(\neg((\forall x)\ P(x)) \vee (\exists y)\ P(y)) \equiv$

$\neg(\underbrace{(\exists x)(\neg P(x))}_{A} \vee \underbrace{(\exists y)\ P(y)}_{B}) \equiv$

$Q x\ \underline{M[x]} \equiv$

$Q y\ M[y]$

$\neg((\exists x)(\underbrace{\neg P(x)}_{F(x)}) \vee (\exists x)\underbrace{P(x)}_{G(x)}) \equiv$

$\neg((\exists x)(\underbrace{\neg P(x) \vee P(x)}_{1})) \equiv 0$

$\exists y\ P(x,y) \vee (\exists y)(Q(y)) \equiv$

$\underline{\exists y\ P(x,y)} \vee \underline{(\exists x)(Q(x))}$

(b) $\neg((\underbrace{(\forall x)P(x)}_{A} \Rightarrow \underbrace{(\exists y)(\forall z)Q(y,z)}_{B}) \equiv$

$\neg(A \Rightarrow B) \equiv$

$A \wedge \neg B$

$\equiv (\forall u)P(u) \wedge (\forall y)(\exists z)\neg Q(y,z) \equiv$

$\equiv (\forall u)(\forall y)(\exists z)\left(P(u) \wedge \neg Q(y,z)\right) \equiv$

$\equiv (\forall u)(\forall y)\left(P(u) \wedge \neg Q(y, f(u,y))\right)$

(c) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\underbrace{(\neg P(x,y) \wedge Q(x,z)) \vee R(x,y,z))}_{M} \equiv$

$(\forall u)(\exists y)(\exists z)\left(\left(\neg P(u,y) \vee R(u,y,z)\right) \wedge \left(Q(u,z) \vee R(u,y,z)\right)\right) \equiv$

$\forall u\left(\left(\neg P(u, f(u)) \vee R(u, f(u), g(u))\right) \wedge \left(Q(u, f(u)) \vee R(u, f(u), g(u))\right)\right)$

$F \equiv \neg(C_1 \wedge \dots C_6)$

13. Mostre que o conjunto

$C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4 \wedge C_5 \wedge C_6$

$$S = \{\underbrace{P \vee R}_{C_1}, \underbrace{\neg Q \vee R}_{C_2}, \underbrace{\neg S \vee Q}_{C_3}, \underbrace{\neg P \vee S}_{C_4}, \underbrace{\neg Q}_{C_5}, \underbrace{\neg R}_{C_6}\}$$

é inconsistente.

$C_1 : P \vee R$ $\quad$ $C_3 : \neg S \vee Q$ $\quad$ $C_5 : \neg Q$

$C_2 : \neg Q \vee R$ $\quad$ $C_4 : \neg P \vee S$ $\quad$ $C_6 : \neg R$

$$\frac{C_1 : P \vee R \qquad C_4 : \neg P \vee S}{C_7 : S \vee R}$$

$$\frac{C_7 : S \vee R \qquad C_6 : \neg R}{C_8 : S}$$

$$\frac{C_8 : S \qquad C_3 : \neg S \vee Q}{C_9 : Q}$$

$$\frac{C_9 : Q \qquad C_5 : \neg Q}{C_{10} : \Diamond}$$

$$\frac{C_1 : P \vee R \qquad C_4 : \neg P \vee S}{C_{14} : R \vee \cancel{S}}$$

$$\frac{C_{14} : R \vee S \qquad C_6 : \neg R}{C_{146} : S}$$

$$\frac{C_3 : \neg S \vee Q \qquad C_{146} : S}{C_{3146} : Q}$$

$$\frac{C_{3146} : Q \qquad C_5 : \neg Q}{\Diamond}$$

13. Mostre que o conjunto

$$S = \{P \vee R, \neg Q \vee R, \neg S \vee Q, \neg P \vee S, \neg Q, \neg R\}$$

é inconsistente.

14. Calcule $E\Theta$ em cada um dos seguintes casos:

    (a) $\Theta = \{a/x, f(z)/y, g(x)/z\}$, $E = P(h(x), z, f(z))$;
    (b) $\Theta = \{f(y)/x, a/y\}$, $E = F(a, h(a), x, h(y))$;

15. Para cada um dos seguintes conjuntos de fórmulas indique, justificando, se são ou não unificáveis. Em caso afirmativo, encontre um seu unificador mais geral. Tenha em atenção que "a" e "b" denotam constantes.

    (a) $\{P(f(x), z), P(y, a)\}$;
    (b) $\{P(f(x), x), P(z, a)\}$;
    (c) $\{P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z, w), f(w))\}$;
    (d) $\{S(x, y, z), S(u, g(v, v), v)\}$;
    (e) $\{P(x, x), P(y, f(y))\}$;
    (f) $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\}$;
    (g) $\{Q(f(x), y), Q(z, g(w))\}$.

16. Considerando o conjunto de fórmulas bem formadas

$$\{C(x, SenhorAneis, y), C(Maria, z, f(t)), C(w, SenhorAneis, f(MesaAzul))\}$$

indique se é unificável e, no caso afirmativo, determine o unificador mais geral.

17. Averigúe se as seguintes cláusulas admitem um factor. Em caso afirmativo, determine-o.

    (a) $P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(f(a))$;
    (b) $P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x, y)$.

18. Encontre as possíveis resolventes (se existirem) dos seguintes pares de cláusulas:

    (a) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, b)$ e $C_2 : P(a) \vee Q(a, b)$;
    (b) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, x)$ e $C_2 : \neg Q(a, f(a))$.

19. Considere as seguintes fórmulas da lógica de primeira ordem:

    F1: $\forall x[G(x) \Rightarrow \forall y(P(y) \Rightarrow L(x, y))]$
    F2: $\exists x\, G(x)$
    F3: $\exists x\, \forall y(P(y) \Rightarrow L(x, y))$

    Usando o princípio da resolução mostre que F3 é consequência de F1 e F2.

20. Considere as seguintes afirmações:

    - Todo o aluno da Universidade de Aveiro que estuda com afinco passa a Matemática Discreta.
    - O João é um aluno da Universidade de Aveiro.
    - O João estuda com afinco.

    (a) Exprima as afirmações anteriores como fbf's do cálculo de predicados.
    (b) Prove, usando o princípio da resolução, que o João passa a Matemática Discreta.

21. Considere as seguintes afirmações, no universo dos animais:

    - Os animais com pelos são mamíferos.
    - Os ursos são animais com pelos.
    - Os coelhos são mamíferos.
    - O Winnie é um urso.
    - O Bugsbunny é um coelho.
    - O Sylvester é um animal com pelos.

    (a) Represente-as em lógica de primeira ordem.
    (b) Usando o Princípio de Resolução, responda às seguintes perguntas:
        (i) O Winnie é mamífero?
        (ii) Quais são os mamíferos?
        (iii) Quem é que tem pelos?

22. Considere cada um dos predicados SH(x), IH(x) e TSP(x) cuja interpretação é a seguinte:

    - SH(x) $\equiv$ "x é um super-herói";
    - IH(x) $\equiv$ "x é um infra-herói";
    - TSP(x) $\equiv$ "x tem super poderes".

    Vamos admitir que são conhecidos os seguintes factos: **(i)** Os super-heróis têm super poderes; **(ii)** Existe alguém que não tem super poderes; **(iii)** Só existem super-heróis ou infra-heróis.

    (a) Explicite os factos (i), (ii) e (iii) com fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem, utilizando os predicados acima definidos.
    (b) Admitido (i), (ii) e (iii) como factos verdadeiros, aplicando o princípio da resolução, demonstre que existe pelo menos um infra-herói.

23. São conhecidos os seguintes factos:

    - Todo e qualquer cavalo é mais rápido do que todo e qualquer galgo;
    - Existe pelo menos um galgo que é mais rápido do que todo e qualquer coelho;
    - Para todos e quaisquer x, y e z, se x é mais rápido do que y e y é mais rápido do que z, então x é mais rápido do que z.
    - Roger é um coelho;
    - Harry é um cavalo.

    (a) Usando os predicados
        - Cavalo(x) $\equiv$ "x é um cavalo";
        - Galgo(x) $\equiv$ "x é um galgo";
        - Coelho(x) $\equiv$ "x é um coelho";
        - MaisRápido(x, y) $\equiv$ "x é mais rápido do que y";

        represente os factos conhecidos na lógica de primeira ordem.
    (b) Mostre, usando resolução, que Harry é mais rápido do que Roger.

Soluções:

1. (a) x livre, y ligada
   (b) x livre e ligada, y livre
   (c) x ligada, y livre e ligada, z livre
   (d) a e b livres
   (e) x ligada
   (f) x ligada, y ligada.

2. (a) $\forall x\ \textbf{ave}(x) \Rightarrow \textbf{tempenas}(x)$
   (b) $\forall x \forall y\ \ (\textbf{criança}(x) \wedge \textbf{pai}(x, y)) \Rightarrow \textbf{maisnovo}(x, y)$
   (c) $\forall x\ \textbf{insecto}(x) \Rightarrow \exists y\ \textbf{mamifero}(y) \wedge \textbf{maisleve}(x, y)$
   (d) $\forall x(\textbf{numero}(x) \Rightarrow x \geq 0\textbf{)}$
   (e) $\forall x\ (\textbf{numero}(x) \Rightarrow 0 < x)$
   (f) $\exists x\ \textbf{primo}(x) \wedge \neg \textbf{par}(x)$
   (g) $\forall x\ \textbf{par}(x) \Rightarrow \textbf{primo}(x)$

3. (a) Todas as explicações claras são satisfatórias;
   (b) Algumas desculpas não são satisfatórias;
   (c) Há desculpas que não são explicações claras.

4. (a) $\forall x\ (\ r(x)\ \ \Rightarrow\ \ \exists y\ \ \ (\ c(y)\ \ \wedge\ \ i(x, y)\ )\ )$
   (b) $\exists x\ \exists y\ (\ r(x)\ \ \wedge\ \ c(y)\ \ \wedge\ \ \neg\ i(x, y)\ )$
   (c) $\forall x\ (\ r(x)\ \ \Rightarrow \exists y\ \ (\ c(y)\ \ \wedge\ \ \neg i(x, y))\ )$

5. (a) $\forall x\ Casa(x) \wedge Grande(x) \Rightarrow Cara(x)$
   (b) $\forall x\ \big(Apartamento(x) \Rightarrow \exists y\ (Casa(y) \wedge Grande(y) \wedge PMenor(x, y))\big)$

6. (a) $\forall x\ \exists y\ gosta(y, x)$
   (b) $\forall x\ \ (\ \forall y\ gosta(y, x)\ \ \Rightarrow\ \ gosta(x, x)\ )$
   (c) $\exists x\ \forall y\ \neg gosta(y, x)$; Existe alguém de quem ninguém gosta.

7. $\exists y \forall x\ \neg\, (q(x) \Rightarrow p(y))$

8. (a) A proposição Q é *Verdadeira.*
   (b) Valor lógico da proposição: *Verdadeiro*;

9. (a) Falsa;
   (b) Falsa;
   (c) Verdadeira.

11. (a) $\exists x\, \exists z\ (\neg S(x) \vee P(z))$
    (b) $\exists x\, (S(x) \wedge \neg P(x))$
    (c) $\forall x\, \exists y (\neg P(x) \vee Q(x,y))$
    (d) $\exists x\ \exists y\ \forall z\ \ (P(x,y)\ \vee\ \neg Q(z)\ \vee\ R(x))$
    (e) $\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x,y) \vee R(x,y,z)) \wedge (Q(x,z) \vee R(x,y,z)))$,
    na forma normal conjuntiva.

12. (a) $\forall x\ \forall y\ (P(x)\ \wedge\ \neg P(y))$
    (b) $\forall x\ \forall y\ P(x)\ \wedge\ \neg Q(y, f(x,y))$
    (c) $\forall x\ (\neg P(x, f(x))\ \vee\ R(x, f(x), g(x)))\ \wedge\ (Q(x, g(x))\ \vee\ R(x, f(x), g(x)))$

14. (a) $E\Theta = P(h(a), g(x), f(g(x)))$
    (b) $E\Theta = F(a, h(a), f(y), h(a))$

15. (a) $\{f(x)/y, a/z\}$
    (b) $\{a/x, f(a)/z\}$
    (c) Não
    (d) $\{u/x, g(v,v)/y, v/z\}$
    (e) Não.
    (f) Não.
    (g) $\{f(x)/z, g(w)/y\}$

17. (a) $P(a) \vee Q(f(a))$
    (b) $P(f(y)) \vee Q(f(y), y)$

18. (a) $Q(a,b)$
    (b) Não existe

14. Calcule $E\Theta$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $\Theta = \{a/x, f(z)/y, g(x)/z\}$, $E = P(h(x), z, f(z))$;

(b) $\Theta = \{f(y)/x, a/y\}$, $E = F(a, h(a), x, h(y))$;

Θ_T

(a) $\Theta_T\, P(h(x), z, f(z)) = P(\Theta_T(h(x)), \underline{\Theta_T(z)}, \Theta_T(f(z))) =$

$= P(h(\Theta_T(x)), \Theta_V(z), f(\Theta_T(z))) =$

$= P(h(\Theta_V(x)), g(x), f(\Theta_V(z))) =$

$= P(h(a), g(x), f(g(x)))$

(b) $\Theta_T\, F(a, h(a), x, h(y)) = F(a, h(a), f(y), h(a))$

15. Para cada um dos seguintes conjuntos de fórmulas indique, justificando, se são ou não unificáveis. Em caso afirmativo, encontre um seu unificador mais geral. Tenha em atenção que "a" e "b" denotam constantes.

(a) $\{P(f(x), z), P(y, a)\}$;

(b) $\{P(f(x), x), P(z, a)\}$;

(c) $\{P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z, w), f(w))\}$;

$K = 0$, $\sigma_0 = \varepsilon$, $W_0 = W$

$D_0 = \{f(x), y\}$

$K = 1$, $\sigma_1 = \underline{\{f(x)/y\} \triangle \sigma_0} = \{f(x)/y\}$, $W_1 = W_0\{f(x)/y\} = \{P(f(x), z), P(f(x), a)\}$

$D_1 = \{z, a\}$

$K = 2$, $\sigma_2 = \{a/z\} \triangle \sigma_1$, $W_2 = W_1\{a/z\} = \{P(f(x), a), P(f(x), a)\} =$

$= \{P(f(x), a)\}$ STOP

$\sigma_2 = \{f(x)/y, a/z\}$ unificador mais geral.

(b) $\{P(\underline{f(x)}, x), P(\underline{z}, a)\}$;

$K = 0, \quad \sigma_0 = \varepsilon, \quad W_0 = W$

$D_0 = \{f(x), z\}$

$K = 1, \quad \sigma_1 = \{f(x)/z\} \circ \sigma_0 = \underline{\{f(x)/z\}}, \quad W_1 = W_0\{f(x)/z\} =$

$= \{P(f(x), x), P(f(x), a)\}$

$D_1 = \{x, a\}$

$K = 2, \quad \sigma_2 = \{a/x\} \circ \sigma_1 = \{a/x, f(a)/z\},$

$W_2 = W_1\{a/x\} = \{P(f(a), a), P(f(a), a)\} = \{P(f(a), a)\}$

$\sigma = \{a/x, f(a)/z\}$ é um unificador mais geral.

17. Averigúe se as seguintes cláusulas admitem um factor. Em caso afirmativo, determine-o.

(a) $P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(f(a))$; $\Big\}\ C$

(b) $P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x, y)$.

(a) $\sigma = \{a/x\}$

$C\sigma = P(a) \vee P(a) \vee Q(f(a)) \vee Q(f(a))$

$= P(a) \vee Q(f(a)) \vee Q(f(a)) = P(a) \vee Q(f(a))$

18. Encontre as possíveis resolventes (se existirem) dos seguintes pares de cláusulas: $(C_1\sigma - L_1\sigma) \cup (C_2\sigma - L_2\sigma)$

(a) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, b)$ e $C_2 : P(a) \vee Q(a, b)$;

(b) $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, x)$ e $C_2 : \neg Q(a, f(a))$.

(a) $\sigma = \{a/x\}$

$C_1\sigma : \cancel{\neg P(a)} \vee Q(a, b)$

$C_2\sigma : \cancel{P(a)} \vee Q(a, b)$

$Q(a, b) \vee Q(a, b) = Q(a, b)$

19. Considere as seguintes fórmulas da lógica de primeira ordem:

F1: $\forall x[G(x) \Rightarrow \forall y(P(y) \Rightarrow L(x,y))]$

F2: $\exists x\, G(x)$

F3: $\exists x\, \forall y(P(y) \Rightarrow L(x,y))$

Usando o princípio da resolução mostre que F3 é consequência de F1 e F2.

$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

F1: $\forall x [\neg G(x) \vee \forall y (P(y) \Rightarrow L(x,y))]$

$\forall x [\neg G(x) \vee \forall y (\neg P(y) \vee L(x,y))]$

C1: $\forall x \forall y (\underline{\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y)})$

F2: $\exists x\, G(x)$

C2: $\underline{G(a)}$

F3: $\exists x \forall y (\neg P(y) \vee L(x,y))$

C_3: $\forall y (\underline{\neg P(y) \vee L(b,y)})$

Considere as seguintes frases :
Se uma UC é fácil, alguns estudantes são felizes.
Se uma UC tem exame, nenhum estudante é feliz.

a) Exprima estas frases em LPO.
b) Prove, usando PRR que:
   se uma UC tem exame então ela não é fácil.

20. Considere as seguintes afirmações:

- Todo o aluno da Universidade de Aveiro que estuda com afinco passa a Matemática Discreta.
- O João é um aluno da Universidade de Aveiro.
- O João estuda com afinco.

(a) Exprima as afirmações anteriores como fbf's do cálculo de predicados.

(b) Prove, usando o princípio da resolução, que o João passa a Matemática Discreta.

(a)

(1) $\forall u \left(\overbrace{Aluno(u) \land Estuda(u)}^{A}\right) \Rightarrow \overbrace{Passa(u)}^{B}$

(2) $Aluno(J)$

(3) $Estuda(J)$

$C1: \neg Aluno(u) \lor \neg Estuda(u) \lor Passa(u)$

$C2: Aluno(J)$

$C3: Estuda(J)$

$\sigma = \{J/u\}$

$$\frac{\begin{array}{l} C_1\sigma : \neg Aluno(J) \lor \neg Estuda(J) \lor Passa(J) \\ C_2\sigma : Aluno(J) \end{array}}{C_4 : \neg Estuda(J) \lor Passa(J)}$$

$$\frac{\begin{array}{l} C_3 : Estuda(J) \\ C_4 : \neg Estuda(J) \lor Passa(J) \end{array}}{Passa(J).}$$

21. Considere as seguintes afirmações, no universo dos animais:

- Os animais com pelos são mamíferos. (P, M)
- Os ursos são animais com pelos. (U)
- Os coelhos são mamíferos. (C)
- O Winnie é um urso. (W)
- O Bugsbunny é um coelho. (B)
- O Sylvester é um animal com pelos. (S)

$\forall x (P(x) \Rightarrow M(x))$ C1: $\neg P(x) \vee M(x)$

$\forall x (U(x) \Rightarrow P(x))$ C2: $\neg U(x) \vee P(x)$

$\forall x (C(x) \Rightarrow M(x))$ C3: $\neg C(x) \vee M(x)$

C4: $U(W)$

C5: $C(B)$

C6: $P(S)$

(a) Represente-as em lógica de primeira ordem.

(b) Usando o Princípio de Resolução, responda às seguintes perguntas:

   (i) O Winnie é mamífero?

   (ii) Quais são os mamíferos?

   (iii) Quem é que tem pelos?

(i)

(b) (iii) O Sylvester tem pelos

C4: $U(W)$

$C2\sigma_1$: $\neg U(W) \vee P(W)$

$P(W)$

O Winnie também tem pelos.

Não sabemos se o Bugsbunny tem ou não pelos.

22. Considere cada um dos predicados SH(x), IH(x) e TSP(x) cuja interpretação é a seguinte:

- SH(x) $\equiv$ "x é um super-herói";
- IH(x) $\equiv$ "x é um infra-herói";
- TSP(x) $\equiv$ "x tem super poderes".

Vamos admitir que são conhecidos os seguintes factos: **(i)** Os super-heróis têm super poderes; **(ii)** Existe alguém que não tem super poderes; **(iii)** Só existem super-heróis ou infra-heróis.

(a) Explicite os factos (i), (ii) e (iii) com fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem, utilizando os predicados acima definidos.

(b) Admitido (i), (ii) e (iii) como factos verdadeiros, aplicando o princípio da resolução, demonstre que existe pelo menos um infra-herói.

(a) (i) $\forall x\,(SH(x) \Rightarrow TSP(x))$

(ii) $\exists x\,(\neg TSP(x))$

(iii) $\forall x\,(SH(x) \vee IH(x))$

$\left.\right\}$ H.p.

(b) $\exists x\,(IH(x))$ Negação: $\forall x\,\neg IH(x)$

$$W = \{\underbrace{\neg SH(x) \vee TSP(x)}_{C_1},\ \underbrace{\neg TSP(a)}_{C_2},\ \underbrace{SH(x) \vee IH(x)}_{C_3},\ \underbrace{\neg IH(x)}_{C_4}\}$$

23. São conhecidos os seguintes factos:

- Todo e qualquer cavalo é mais rápido do que todo e qualquer galgo;
- Existe pelo menos um galgo que é mais rápido do que todo e qualquer coelho;
- Para todos e quaisquer x, y e z, se x é mais rápido do que y e y é mais rápido do que z, então x é mais rápido do que z.
- Roger é um coelho;
- Harry é um cavalo.

(a) Usando os predicados

- Cavalo$(x) \equiv$ "x é um cavalo";
- Galgo$(x) \equiv$ "x é um galgo";
- Coelho$(x) \equiv$ "x é um coelho";
- MaisRápido$(x, y) \equiv$ "x é mais rápido do que y";

represente os factos conhecidos na lógica de primeira ordem.

(b) Mostre, usando resolução, que Harry é mais rápido do que Roger.

1) $\forall x \forall y ((\text{Cavalo}(x) \land \text{Galgo}(y)) \Rightarrow \text{MaisRapido}(x,y))$

2) $\exists x\, \text{Galgo}(x) \land (\forall y\, (\text{Coelho}(y) \Rightarrow \text{MaisRapido}(x,y)))$

3) $\forall x \forall y \forall z (\text{MaisRapido}(x,y) \land \text{MaisRapido}(y,z)) \Rightarrow \text{MaisRapido}(x,z))$

4) $\text{Coelho}(\text{Roger})$

5) $\text{Cavalo}(\text{Harry})$

2) $\exists x\, \text{Galgo}(x) \land \forall y\, (\neg \text{Coelho}(y) \lor \text{MaisRapido}(x,y))$

$\forall y\, \text{Galgo}(g) \land (\neg \text{Coelho}(y) \lor \text{MaisRapido}(x,y))$