Cálculo I

- 1ª pergunta - 10 valores
  - 3 primitivas
    - substituição
    - por partes
    - fração racional
- 2ª pergunta - 7 valores
  - Calcular os pontos de interseção entre curvas/funções
  - Desenhar um esboço da área definida
  - Calcular a área recorrendo aos integrais de Riemann
- 3ª pergunta - 3 valores
  - Aula de dia 14
  - Slides 100/103

Primitivação

o Por partes

- $P u v = u'v + P u v'$
- $P u' v = uv + P u v'$
- $P u v' = uv + P u' v$

NOTA!

As primitivas da $\sec x$ e da $\operatorname{cosec} x$ não vão estar presentes no formulário do teste!

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C, \; C \in \mathbb{R}$$

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x| + C, \; C \in \mathbb{R}$$

Teorema Fundamental da Álgebra

- Um polinómio de coeficientes reais com grau $K \in \mathbb{N}$ tem exatamente K raízes reais ou complexas, contada a sua multiplicidade

$$\int F(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = F(g(x)) + C$$

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x)$$

exemplo:

$$\int \underbrace{2x}_{g'(x)} \cos(\underbrace{x^2}_{g(x)}) \, dx = \sin(x^2) + C, \; C \in \mathbb{R}$$

o Substituições

1. $\sqrt{a^2 + x^2}$, $a > 0$ → $x = a \cdot \operatorname{tg} t$, com $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
2. $\sqrt{a^2 - x^2}$, $a > 0$ → $x = a \cdot \operatorname{sen} t$, com $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
3. $\sqrt{x^2 - a^2}$, $a > 0$ → $x = a \cdot \sec t$, com $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
4. $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$, $a, b > 0$ → x → Reduz-se ao caso 1
5. $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$, $a, b > 0$ → x → Reduz-se ao caso 2
6. $\sqrt{-a^2 + b^2 x^2}$, $a, b > 0$ → x → Reduz-se ao caso 3

Integral de Riemann

monotonia do integral definido

Dadas as funções, contínuas e não negativas, f e g, no intervalo [a, b], se para todo $x \in [a,b]$, $g(x) \leq f(x)$, então:

$$\boxed{\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx}$$

Teorema fundamental do cálculo integral

Seja f uma função contínua e não negativa num intervalo [a, b], isto é, uma função integrável em [a, b].
A função F_a definida em [a, b] por:

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

é a primitiva de f no intervalo [a, b], nula em a.

Para funções não negativas "

Fórmula de Barrow

Seja f uma função contínua no intervalo [a, b], com $a<b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a)$$

onde F é uma qualquer primitiva de f no intervalo [a, b].

Condições de Integrabilidade

1. Caso f seja contínua em [a,b]
2. Se f fôr limitada em [a,b] e descontínua num número finito de pontos
3. Caso f seja monótona em [a,b]

Então é integrável em [a,b] "

Teorema do Valor Médio

Seja f uma função contínua no intervalo [a, b]. Então existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)\,(b-a)$$

Linearidade do Integral

Sejam f e g funções integráveis em [a,b] com $a \leq b$.

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b K f(x)\,dx = K\int_a^b f(x)\,dx,\ K \in \mathbb{R}$$

Relação de Chasles

f contínua em [a,b]
$c \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$