Cálculo I

2015/2016

Ficha #3

2016/17

F1E24 (a) → (k)

01.

11

Problema 14 → (a) → (k)

continua Folla#2

Calcule, caso exista, o limite considerado em cada uma das alíneas que se seguem:

2016/17 (a)

(a) $L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$, indet $\left(\frac{0}{0}\right)$

Seja
- $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{3}\right)$, definida em $\mathbb{R}$
- $g(x) = x^2$, definida em $\mathbb{R}$
- I é um intervalo aberto que contém $c=0$. (por exemplo, $I =]-1, 1[$)

Como:
- f e g são diferenciáveis em $I \setminus \{c\}$
- $g(x) = x^2 \neq 0 \wedge g'(x) = 2x \neq 0$ para $x \in I \setminus \{c\}$
- $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$

Regra de Cauchy

$\boxed{\text{Se existir o limite } L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ então } L = L_1.}$

Ora,

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{\left[\sin^2 \frac{x}{3}\right]'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)}{2x}$$

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{3}}{3 \frac{x}{3}} \cdot \frac{\cos \frac{x}{3}}{3} \right) = \frac{1}{9} = L.$$

Usei limite notável $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$

<u>Nota:</u> Este limite não precisa da aplicação da R.C.

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\sin \frac{x}{3}}{x} \right)^2 \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\sin \frac{x}{3}}{3 \cdot \frac{x}{3}} \right)^2 \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{9} \Bigg(\underbrace{\frac{\sin \frac{x}{3}}{x/3}}_{\to 1} \Bigg)^2 \right] = \frac{1}{9}$$

2016/17 (b)

$$\boxed{\text{(b) } L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - x}{x}}$$

caso $\frac{1}{0} = \infty$

Não é indet. $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$

Não se aplica R.C.

$\leftarrow$ Pode multiplicar-se pelo conjugado

Não há dúvida que $\left| \frac{\sqrt{x+1} - x}{x} \right| \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$

Na verdade,

$$\lim_{x\to 0} (\underbrace{\sqrt{x+1} - x}_{u(x)}) = 1$$

Então $u(x)$ terá sinal positivo numa vizinhança $\mathcal{V}_\delta(0)$. Tome-se, por exemplo, $\mathcal{V}_\delta(0) =]-1,1[$.

Logo,

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{u(x)}^{>0 \text{ em }]-1,1[}}{x} = +\infty$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0^-} \frac{u(x)}{x} = -\infty$$

diferentes.

Logo L não existe.

2016/17 (c)

$\boxed{c)\ L = \lim_{x \to 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}}$ indet. $\frac{0}{0}$

Tendo em vista a aplicação da R.C.

Seja: $\begin{cases} \bullet\ f(x) = 2 \arcsin x \quad , D_f = [-1,1] \\ \bullet\ g(x) = 3.x \quad , D_g = \mathbb{R} \\ \bullet\ I =]-1,1[\quad \text{(por. ex.)} \end{cases}$

Como: $\begin{cases} \bullet\ f \text{ e } g \text{ são diferenciáveis em } I \setminus \{0\} \\ \bullet\ g(x) = 3x \neq 0 \text{ e } g'(x) = 3 \neq 0 \text{ para } x \in I \setminus \{0\} \\ \bullet\ \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0 \end{cases}$

Se existir o limite $L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ então $L = L_1$.

Ora,

$$L_1 = \lim_{x \to 0} \frac{(2 \arcsin x)'}{(3x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3}$$

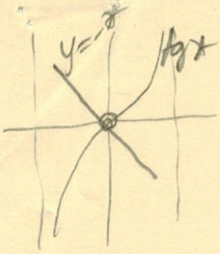
$$= \frac{2}{3}$$

Concluo: $L = \frac{2}{3}$.

2016/17 (d)

$\boxed{(d)\ L = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x}}$ indet. $\frac{0}{0}$

Seja: $\begin{cases} \bullet\ f(x) = \cos x - 1 \quad , D_f = \mathbb{R} \\ \bullet\ g(x) = x \sin x \quad , D_g = \mathbb{R} \\ \bullet\ I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \text{(por. ex.)} \end{cases}$



$g'(x)=0$
$\sin x + x\cos x = 0$
$\sin x = -x\cos x$
$\operatorname{tg} x = -x$

Como: $\begin{cases} \bullet\ f \text{ e } g \text{ são dif em } I\setminus\{0\} \\ \bullet\ \left.\begin{array}{l} g(x) = x\sin x \neq 0 \\ g'(x) = \sin x + x\cos x \neq 0 \end{array}\right\} \text{, para } x\in I\setminus\{0\} \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0 \end{cases}$

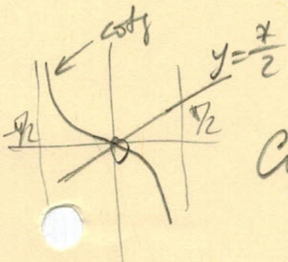
Se existir o limite $L_1 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ então $L = L_1$

Ora,

$$L_1 = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\sin x + x\cos x}$$

(Nova indet. $\frac{0}{0}$) Nova aplic. da R.C.

Seja: $\begin{cases} \bullet\ \varphi(x) = -\sin x \\ \bullet\ \psi(x) = \sin x + x\cos x \\ \bullet\ I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$



$2\cos x = x\sin x$
$\operatorname{cotg} x = \frac{x}{2}$

Como: $\begin{cases} \bullet\ \varphi \text{ e } \psi \text{ são dif em } I\setminus\{0\} \\ \bullet\ \left.\begin{array}{l} \psi(x) = \sin x + x\cos x \\ \psi'(x) = \cos x + \cos x - x\sin x \neq 0 \end{array}\right\} \text{, para } x\in I\setminus\{0\} \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0} \psi(x) = 0 \end{cases}$

Se existir $L_2 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ então $L_1 = L_2$

Ora,

$$L_2 = \lim_{x\to 0} \frac{(-\sin x)'}{(\sin x + x\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2\cos x - x\sin x} = -\frac{1}{2}$$

Logo $L = L_1 = L_2 = -\frac{1}{2}$

05.

2016/17

(e)

$$\boxed{(e)\ L = \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{1+\operatorname{cotg} x}}$$ indet $\frac{0}{0} = \frac{\cos(-\pi/2)}{1+\operatorname{cotg}(-\pi/2)}$

Seja: $\begin{cases} \bullet\ f(x) = \cos(2x) \\ \bullet\ g(x) = 1+\operatorname{cotg} x \\ \bullet\ I = \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\text{ e } c = -\frac{\pi}{4} \in \operatorname{int}(I) \end{cases}$

Como: $\begin{cases} \bullet\ f \text{ e } g \text{ são dif. em } I\setminus\{c\} \\ \bullet\ g(x) = 1+\operatorname{cotg} x \neq 0 \\ \quad g'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \neq 0 \end{cases}$, para $x \in I\setminus\{c\}$

Se existir $L_1 = \lim_{x \to -\pi/4} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ então $L = L_1$

Ora,

$$L_1 = \lim_{x \to -\pi/4} \frac{[\cos(2x)]'}{[1+\operatorname{cotg} x]'} = \lim_{x \to -\pi/4} \frac{-2\sin(2x)}{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$L_1 = \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} 2 \cdot \sin(2x) \cdot \sin^2 x$$

$$L_1 = 2 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$L_1 = 2 \cdot (-1) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2(-1)\frac{2}{4} = -1$$

Logo $L = L_1 = -1$.

06.

2016/17 (f)

$$\boxed{(f)\ L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^p}} \quad \text{indet } \frac{+\infty}{+\infty}$$

$(p \in \mathbb{R}^+)$

Seja: $\begin{cases} \bullet\ f(x) = \ln x \ , \ D_f = \mathbb{R}^+ \\ \bullet\ g(x) = x^p \ , \ D_g = \mathbb{R}^+ \\ \bullet\ I =]1, +\infty[\end{cases}$

Como: $\begin{cases} \bullet\ f \text{ e } g \text{ são dif em } I \\ \bullet\ g(x) = x^p \neq 0 \\ \quad g'(x) = p \cdot x^{p-1} \neq 0 \quad , \forall x \in I \\ \bullet\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$

Se existir $L_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então $L = L_1$.

Ora,

$$L_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{p \cdot x^{p-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{p\, x^p} = 0$$

Então $L = L_1$.

2016/17 (g)

$$\boxed{(g)\ L = \lim_{x \to 1} \frac{\overset{f(x)}{1 - x}}{\underset{g(x)}{\ln(2-x)}}} \quad \text{indet. } \frac{0}{0} \quad , x < 2$$

$I =]0, 2[$

f e g dif. em I

$g(x) = \ln(2-x) \neq 0 \ \wedge \ g'(x) = \frac{1}{2-x} \neq 0$ em $I \setminus \{1\}$

$$L = \lim_{x \to 1} \frac{1-x}{\ln(2-x)} \overset{R.C.}{=\!=} \lim_{x \to 1} \frac{-1}{\frac{-1}{2-x}} = \lim_{x \to 1} (2-x) = 1$$

//

07.

2016/17

(h)

$$\boxed{(h)\ L = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2 \sin\frac{1}{x} - x\right)}$$

$$L = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\right]$$

x^2 não é limf

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

Faço agora $t = \frac{1}{x}$

$$L = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t - t}{t^2} \quad , \text{indet.}\left(\frac{0}{0}\right)$$

Regra de Cauchy:

$$L = \lim_{t\to 0^+} \frac{\cos t - 1}{2t} \quad , \text{indet}\left(\frac{0}{0}\right)$$

De novo, R.C:

$$L = \lim_{t\to 0^+} \frac{-\sin t}{2} = 0$$

//

2016/17

1 (i) $\boxed{L = \lim_{x \to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}}$ indet 0^0

Defina-se: $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$ para $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$

Nestas condições $y > 0$ e podemos escrever

$$\ln y = \operatorname{tg}(2x) \ln(\operatorname{tg} x)$$

Calcule-se agora o seguinte limite:

$$L_1 = \lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \left[\operatorname{tg}(2x) \cdot \ln(\operatorname{tg} x) \right]$$

$$L_1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{\operatorname{tg}(2x)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{cotg}(2x)}$$

Como $\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \ln(\operatorname{tg} x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} \operatorname{cotg}(2x) = +\infty \end{cases}$

temos uma indet $\frac{-\infty}{+\infty}$

Regra de Cauchy:

$$L_1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2(2x)}}$$

$$L_1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{\sin^2(2x)}}$$

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sin x \cos x}}{-\frac{2}{\sin^2(2x)}}$$

Como $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{\sin^2(2x)}{2\sin x\cos x}\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[-\sin(2x)\right] = 0$$

Mas se

$$L_1 = \lim_{x\to 0^+} (\ln y) = 0$$

Então

$$L_2 = \lim_{x\to 0^+} y = e^{L_1} = 1 \,//$$

2016/17

(j)

$$\boxed{(j)\ L = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}} \quad \text{indet. } 1^{+\infty}$$

Seja $y = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$, para $x > 1$

Nestas condições $y > 0$ e podemos escrever

$$\ln y = (x+3)\ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)$$

Calcule-se o limite:

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty}(\ln y) = \lim_{x\to+\infty}\left[(x+3)\ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)\right]$$

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+3}{x-1}\right)}{\frac{1}{x+3}} \quad , \text{ indet } \left(\frac{0}{0}\right)$$

R.C.

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-1}{x+3}\,\frac{(x-1)-(x+3)}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{(x+3)^2}}$$

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{(x+3)^2}{-1}\,\frac{x-1}{x+3}\,\frac{-1-3}{(x-1)^2}\right]$$

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{4(x+3)(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} 4\,\frac{x+3}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} 4\,\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 4$$

Então:

$$L_1 = \lim_{x\to+\infty} (\ln y) = 4$$

logo

$$L = \lim_{x\to+\infty} y = e^4$$

2016/[illegible]

$x > 0$

(k) $L = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left((x+1)^p\right) - \ln\left(x^p\right) \right], \; p \in \mathbb{R}$

indet $+\infty - \infty$

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left[\ln\left(\frac{(x+1)^p}{x^p} \right) \right]$$

$$L = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\left(\frac{x+1}{x} \right)^p \right)$$

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left[p \ln\left(\frac{x+1}{x} \right) \right]$$

$$L = \lim_{x \to +\infty} \left[p \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1} \right) \right]$$

$$L = p \ln\left(\frac{1+0}{1} \right) = p \ln(1) = 0. \; //$$

//