



1. Indique quais as ocorrências livres e ligadas de cada uma das variáveis das seguintes fórmulas:

- (a)  $(\exists y)(P(x, y))$
- (b)  $((\forall x)(P(x) \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow (\neg(P(x)) \vee Q(y))$
- (c)  $\exists x(P(y, z) \wedge \forall y(\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$ ;
- (d)  $P(a, f(a, b))$ ;
- (e)  $\exists x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$ ;
- (f)  $\forall x((P(x) \wedge C(x)) \Rightarrow \exists y L(x, y))$ .

2. Exprima por meio de fórmulas bem formadas as seguintes afirmações:

- (a) Todas as aves têm penas.
- (b) Todas as crianças são mais novas que os seus pais.
- (c) Todos os insectos são mais leves do que algum mamífero.
- (d) Nenhum número é menor do que zero.
- (e) Zero é menor do que qualquer número.
- (f) Alguns números primos não são pares.
- (g) Todo o número par é número primo.

3. Sejam  $c(x)$ ,  $s(x)$  e  $d(x)$ , as afirmações “ $x$  é uma explicação clara”, “ $x$  é satisfatória” e “ $x$  é uma desculpa”, respectivamente. Admita que o universo do discurso para  $x$  é o conjunto de todos os textos em Português. Traduza as seguintes fórmulas bem formadas para linguagem comum:

- (a)  $\forall x c(x) \Rightarrow s(x)$ ;
- (b)  $\exists x d(x) \wedge \neg s(x)$ ;
- (c)  $\exists x d(x) \wedge \neg c(x)$ .

4. Seja  $\Pi$  o conjunto dos subconjuntos de pontos de um certo plano. Tomando  $\Pi$  para universo e utilizando apenas os três predicados

$r(x) \equiv$  “ $x$  é uma recta”,

$c(x) \equiv$  “ $x$  é uma circunferência”,

$i(x, y) \equiv$  “a intersecção de  $x$  e  $y$  é não vazia”,

traduza em lógica de predicados cada uma das afirmações seguintes:

- (a) Toda a recta intersecta alguma circunferência.
- (b) Alguma recta não intersecta alguma circunferência.
- (c) Nenhuma recta intersecta todas as circunferências.

5. Escreva as seguintes frases usando lógica de primeira ordem, com recurso aos predicados  $Casa(x) \equiv$  “ $x$  é uma casa”;  $Grande(x) \equiv$  “ $x$  é grande”;  $Cara(x) \equiv$  “ $x$  é cara”;  $Apartamento(x) \equiv$  “ $x$  é um apartamento”;  $PMenor(x, y) \equiv$  “preço de  $x$  é menor do que o preço de  $y$ ”.

- (a) Todas as casas grandes são caras.
- (b) Qualquer apartamento custa menos do que pelo menos uma casa grande.

6. Usando o predicado  $gosta(x, y) \equiv x$  “gosta de”  $y$ , exprima por meio de uma proposição lógica a afirmação:

- (a) Toda a gente tem alguém que gosta de si;
- (b) As pessoas de quem todos gostam também gostam de si próprias.
- (c) Formule a negação da proposição indicada na alínea (a) e escreva uma frase em linguagem comum que traduza essa negação.

7. Obtenha, na forma mais simplificada possível, a negação da seguinte proposição

$$\forall y \exists x ( (q(x) \Rightarrow p(y)) \vee (p(y) \wedge q(x)) ) .$$

8. Considere a proposição

$$Q : \forall x \exists y ( (t(x) \wedge v(y, x)) \Rightarrow \neg p(x, y) )$$

onde  $t(x) \equiv “x > 1”$ ,  $v(y, x) \equiv “y = x + 1”$  e  $p(x, y) \equiv “x$  divide  $y”$ .

- (a) Diga, justificando, qual o valor lógico de  $Q$  para uma interpretação que considera  $\mathbb{N}$  como sendo o domínio das variáveis.
  - (b) Qual o valor lógico da proposição  $(t(1) \wedge v(2, 1)) \Rightarrow \neg p(1, 2)$ .
9. Considere um universo  $X$  com os objetos  $A$ ,  $B$  e  $C$  (isto é,  $X = \{A, B, C\}$ ) e uma linguagem definida em  $X$ , onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes,  $f$  é um símbolo de função com um argumento e  $R$  é um símbolo de predicado com dois argumentos. Considere a seguinte interpretação:

**constantes:**  $\alpha = A$ ,  $\beta = A$  e  $\gamma = B$ ;

**função  $f$ :**  $f(A) = B$ ,  $f(B) = C$ ,  $f(C) = C$ .

**predicado  $R$ :**  $R(B, A) = R(C, B) = R(C, C) = 1$ , nos restantes casos o valor lógico é 0.

Com esta interpretação, avalie as seguintes fórmulas:

- (a)  $R(\alpha, \beta)$ ;
  - (b)  $\exists x f(x) = \beta$ ;
  - (c)  $\forall w R(f(w), w)$ .
10. Para cada fórmula seguinte determine, se possível, um modelo e uma interpretação em que a mesma seja avaliada com valor lógico 0:

- (a)  $\forall x (P(x, a) \Rightarrow \neg Q(x, a))$ , onde  $a$  denota uma constante;
- (b)  $\exists x \exists y ((P(x, y) \wedge \forall z (\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$ .

11. Transforme as seguintes fórmulas na forma normal disjuntiva prenex e na forma normal conjuntiva prenex:

- (a)  $(\forall x)S(x) \Rightarrow (\exists z)P(z)$ ;
- (b)  $\neg((\forall x)(S(x) \Rightarrow P(x)))$ ;
- (c)  $(\forall x)(P(x) \Rightarrow (\exists y)Q(x, y))$ ;
- (d)  $(\exists x)(\neg((\exists y)P(x, y)) \Rightarrow ((\exists z)Q(z) \Rightarrow R(x)))$ ;
- (e)  $(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$ .

12. Encontre a forma standard de Skolem das seguintes fórmulas:

- (a)  $\neg((\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)P(y))$
- (b)  $\neg((\forall x)P(x) \Rightarrow (\exists y)(\forall z)Q(y, z))$
- (c)  $(\forall x)(\exists y)(\exists z)((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$

13. Mostre que o conjunto

$$S = \{P \vee R, \neg Q \vee R, \neg S \vee Q, \neg P \vee S, \neg Q, \neg R\}$$

é inconsistente.

14. Calcule  $E\Theta$  em cada um dos seguintes casos:

(a)  $\Theta = \{a/x, f(z)/y, g(x)/z\}, E = P(h(x), z, f(z));$

(b)  $\Theta = \{f(y)/x, a/y\}, E = F(a, h(a), x, h(y));$

15. Para cada um dos seguintes conjuntos de fórmulas indique, justificando, se são ou não unificáveis. Em caso afirmativo, encontre um seu unificador mais geral. Tenha em atenção que “a” e “b” denotam constantes.

(a)  $\{P(f(x), z), P(y, a)\};$

(b)  $\{P(f(x), x), P(z, a)\};$

(c)  $\{P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z, w), f(w))\};$

(d)  $\{S(x, y, z), S(u, g(v, v), v)\};$

(e)  $\{P(x, x), P(y, f(y))\};$

(f)  $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\};$

(g)  $\{Q(f(x), y), Q(z, g(w))\}.$

16. Considerando o conjunto de fórmulas bem formadas

$$\{C(x, \text{SenhorAneis}, y), C(\text{Maria}, z, f(t)), C(w, \text{SenhorAneis}, f(\text{MesaAzul}))\}$$

indique se é unificável e, no caso afirmativo, determine o unificador mais geral.

17. Averigüe se as seguintes cláusulas admitem um factor. Em caso afirmativo, determine-o.

(a)  $P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(f(a));$

(b)  $P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x, y).$

18. Encontre as possíveis resolventes (se existirem) dos seguintes pares de cláusulas:

(a)  $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, b)$  e  $C_2 : P(a) \vee Q(a, b);$

(b)  $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, x)$  e  $C_2 : \neg Q(a, f(a)).$

19. Considere as seguintes fórmulas da lógica de primeira ordem:

F1:  $\forall x[G(x) \Rightarrow \forall y(P(y) \Rightarrow L(x, y))]$

F2:  $\exists x G(x)$

F3:  $\exists x \forall y(P(y) \Rightarrow L(x, y))$

Usando o princípio da resolução mostre que F3 é consequência de F1 e F2.

20. Considere as seguintes afirmações:

- Todo o aluno da Universidade de Aveiro que estuda com afinco passa a Matemática Discreta.
- O João é um aluno da Universidade de Aveiro.
- O João estuda com afinco.

(a) Exprima as afirmações anteriores como fbf's do cálculo de predicados.

(b) Prove, usando o princípio da resolução, que o João passa a Matemática Discreta.

21. Considere as seguintes afirmações, no universo dos animais:

- Os animais com pelos são mamíferos.
- Os ursos são animais com pelos.
- Os coelhos são mamíferos.
- O Winnie é um urso.
- O Bugsbunny é um coelho.
- O Sylvester é um animal com pelos.

(a) Represente-as em lógica de primeira ordem.

(b) Usando o Princípio de Resolução, responda às seguintes perguntas:

- (i) O Winnie é mamífero?
- (ii) Quais são os mamíferos?
- (iii) Quem é que tem pelos?

22. Considere cada um dos predicados  $SH(x)$ ,  $IH(x)$  e  $TSP(x)$  cuja interpretação é a seguinte:

- $SH(x) \equiv "x \text{ é um super-herói}";$
- $IH(x) \equiv "x \text{ é um infra-herói}";$
- $TSP(x) \equiv "x \text{ tem super poderes}."$

Vamos admitir que são conhecidos os seguintes factos: **(i)** Os super-heróis têm super poderes; **(ii)** Existe alguém que não tem super poderes; **(iii)** Só existem super-heróis ou infra-heróis.

- (a) Explicita os factos (i), (ii) e (iii) com fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem, utilizando os predicados acima definidos.
- (b) Admitido (i), (ii) e (iii) como factos verdadeiros, aplicando o princípio da resolução, demonstre que existe pelo menos um infra-herói.

23. São conhecidos os seguintes factos:

- Todo e qualquer cavalo é mais rápido do que todo e qualquer galgo;
- Existe pelo menos um galgo que é mais rápido do que todo e qualquer coelho;
- Para todos e quaisquer  $x$ ,  $y$  e  $z$ , se  $x$  é mais rápido do que  $y$  e  $y$  é mais rápido do que  $z$ , então  $x$  é mais rápido do que  $z$ .
- Roger é um coelho;
- Harry é um cavalo.

(a) Usando os predicados

- $Cavalo(x) \equiv "x \text{ é um cavalo}";$
- $Galgo(x) \equiv "x \text{ é um galgo}";$
- $Coelho(x) \equiv "x \text{ é um coelho}";$
- $MaisRápido(x, y) \equiv "x \text{ é mais rápido do que } y";$

represente os factos conhecidos na lógica de primeira ordem.

(b) Mostre, usando resolução, que Harry é mais rápido do que Roger.

## Soluções:

1. (a)  $x$  livre,  $y$  ligada  
(b)  $x$  livre e ligada,  $y$  livre  
(c)  $x$  ligada,  $y$  livre e ligada,  $z$  livre  
(d)  $a$  e  $b$  livres  
(e)  $x$  ligada  
(f)  $x$  ligada,  $y$  ligada.
2. (a)  $\forall x \text{ ave}(x) \Rightarrow \text{tempenas}(x)$   
(b)  $\forall x \forall y (\text{criança}(x) \wedge \text{pai}(x, y)) \Rightarrow \text{maisnovo}(x, y)$   
(c)  $\forall x \text{ insecto}(x) \Rightarrow \exists y \text{ mamifero}(y) \wedge \text{maisleve}(x, y)$   
(d)  $\forall x (\text{numero}(x) \Rightarrow x \geq 0)$   
(e)  $\forall x (\text{numero}(x) \Rightarrow 0 < x)$   
(f)  $\exists x \text{ primo}(x) \wedge \neg \text{par}(x)$   
(g)  $\forall x \text{ par}(x) \Rightarrow \text{primo}(x)$
3. (a) Todas as explicações claras são satisfatórias;  
(b) Algumas desculpas não são satisfatórias;  
(c) Há desculpas que não são explicações claras.
4. (a)  $\forall x ( r(x) \Rightarrow \exists y ( c(y) \wedge i(x, y) ) )$   
(b)  $\exists x \exists y ( r(x) \wedge c(y) \wedge \neg i(x, y) )$   
(c)  $\forall x ( r(x) \Rightarrow \exists y ( c(y) \wedge \neg i(x, y) ) )$
5. (a)  $\forall x \text{ Casa}(x) \wedge \text{Grande}(x) \Rightarrow \text{Cara}(x)$   
(b)  $\forall x (\text{Apartamento}(x) \Rightarrow \exists y (\text{Casa}(y) \wedge \text{Grande}(y) \wedge \text{PMenor}(x, y)))$
6. (a)  $\forall x \exists y \text{ gosta}(y, x)$   
(b)  $\forall x ( \forall y \text{ gosta}(y, x) \Rightarrow \text{gosta}(x, x) )$   
(c)  $\exists x \forall y \neg \text{gosta}(y, x)$ ; Existe alguém de quem ninguém gosta.
7.  $\exists y \forall x \neg (q(x) \Rightarrow p(y))$
8. (a) A proposição  $Q$  é *Verdadeira*.  
(b) Valor lógico da proposição: *Verdadeiro*;
9. (a) Falsa;  
(b) Falsa;  
(c) Verdadeira.

11. (a)  $\exists x \exists z (\neg S(x) \vee P(z))$   
 (b)  $\exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$   
 (c)  $\forall x \exists y (\neg P(x) \vee Q(x, y))$   
 (d)  $\exists x \exists y \forall z (P(x, y) \vee \neg Q(z) \vee R(x))$   
 (e)  $\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x, y) \vee R(x, y, z)) \wedge (Q(x, z) \vee R(x, y, z)))$ ,  
 na forma normal conjuntiva.
12. (a)  $\forall x \forall y (P(x) \wedge \neg P(y))$   
 (b)  $\forall x \forall y P(x) \wedge \neg Q(y, f(x, y))$   
 (c)  $\forall x (\neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x))) \wedge (Q(x, g(x)) \vee R(x, f(x), g(x)))$
14. (a)  $E\Theta = P(h(a), g(x), f(g(x)))$   
 (b)  $E\Theta = F(a, h(a), f(y), h(a))$
15. (a)  $\{f(x)/y, a/z\}$   
 (b)  $\{a/x, f(a)/z\}$   
 (c) Não  
 (d)  $\{u/x, g(v, v)/y, v/z\}$   
 (e) Não.  
 (f) Não.  
 (g)  $\{f(x)/z, g(w)/y\}$
17. (a)  $P(a) \vee Q(f(a))$   
 (b)  $P(f(y)) \vee Q(f(y), y)$
18. (a)  $Q(a, b)$   
 (b) Não existe