



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

## Trabajo Práctico III

---

Algoritmos y Estructuras de Datos III  
Segundo Cuatrimestre de 2015

Integrante	LU	Correo electrónico
Bouzón, María Belén	128/13	belenbouzon@hotmail.com
Jiménez, Paula	655/10	puly05@gmail.com
Montepagano, Pablo	205/12	pablo@montepagano.com.ar
Rey, Maximiliano	037/13	rey.maximiliano@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://www.fcen.uba.ar>

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Problema 1: Algoritmo Exacto para 2-List Coloring</b>	<b>4</b>
2.1. Descripción de la problemática . . . . .	4
2.2. Resolución propuesta y justificación . . . . .	4
2.3. PseudoCódigo . . . . .	4
2.4. Análisis de la complejidad . . . . .	6
2.5. Experimentación . . . . .	7
2.5.1. El triángulo . . . . .	7
2.5.2. El pentagono . . . . .	7
2.5.3. El señor de los anillos . . . . .	7
2.5.4. Grafos bipartitos completos . . . . .	7
2.5.5. Testeos de complejidad . . . . .	7
2.5.6. Complejidad en grafos completos . . . . .	7
<b>3. Problema 2: Algoritmo Exacto para List Coloring</b>	<b>8</b>
3.1. Descripción de la problemática . . . . .	8
3.2. Resolución propuesta y justificación . . . . .	8
3.2.1. Podas . . . . .	8
3.3. Análisis de la complejidad . . . . .	9
<b>4. Problema 3: Heurística Constructiva Golosa</b>	<b>10</b>
4.1. Descripción de la problemática . . . . .	10
4.2. Resolución propuesta y justificación . . . . .	10
4.3. PseudoCódigo y Análisis de la complejidad . . . . .	15
4.4. Experimentación . . . . .	16
4.4.1. Peor caso . . . . .	18
4.4.2. Mejor caso . . . . .	19
<b>5. Apéndice: Código fuente</b>	<b>20</b>
5.1. 2-List Coloring . . . . .	20
5.2. List Coloring . . . . .	22
5.3. Heurística Constructiva Golosa . . . . .	23
5.4. Búsqueda Local . . . . .	24

## 1. Introducción

En este trabajo práctico se nos pide colaborar en la asignación de aulas con diversos recursos a un conjunto de materias (con un horario establecido e invariable) que necesitarían hacer uso de ellos durante el dictado de clase.

Como nos interesa distinguir las aulas de acuerdo a sus recursos, le asignaremos a cada una un color y uniremos con aristas aquellas materias que se han querido reservar para horarios cuya intersección no es vacía. Posteriormente, generaremos distintos algoritmos que permitan resolver la problemática presentada y realizaremos experimentos y análisis teóricos que nos permitan elaborar conclusiones en relación a la performance y la calidad - en términos de la solución obtenida - de cada algoritmo implementado.

## 2. Problema 1: Algoritmo Exacto para 2-List Coloring

### 2.1. Descripción de la problemática

Este ejercicio está centrado en la resolución de un problema particular de coloreo, 2-listColoring. En este caso, cada nodo se puede colorear solo con uno o dos colores específicos. El algoritmo debe determinar si existe o no un coloreo en donde no existen dos nodos consecutivos del mismo color y, en caso afirmativo, encontrar una solución. Este problema es fácilmente reducible a 2-SAT, por lo cual existen algoritmos polinomiales que lo resuelven.

### 2.2. Resolución propuesta y justificación

Como mencionamos antes, el problema del 2-ListColoring es fácilmente reducible a un problema de 2-SAT, y en esto se basa el algoritmo implementado. Si existe una coloración posible, entonces el hecho de que un determinado nodo esté pintado de un color implica que ninguno de sus vecinos está pintado del mismo. Además, si un nodo tiene dos colores posibles, el nodo está pintado de un color C1 si y solo si no está pintado del color C2. El 2-SAT se representa con un grafo dirigido en donde un nodo A (que representa una proposición) apunta a un nodo B si A implica B.

Sean  $x$ ,  $y$ ,  $z$  proposiciones representadas por nodos de nuestro grafo dirigido, si en el grafo existe una arista desde el nodo que representa a  $x$  al nodo que representa a  $y$ , y otra arista entre el nodo que representa a  $y$  al nodo que representa a  $z$ , esto significa que  $x \rightarrow y$  y  $y \rightarrow z$ , de lo cual se deduce que  $x \rightarrow z$ . Generalizando se puede decir que, dadas  $x$ ,  $z$  proposiciones,  $x \rightarrow z$  si y solo si existe un camino desde el nodo que representa a  $x$  hasta el nodo que representa a  $z$ . Es decir, en este contexto una componente fuertemente conexa representa un conjunto de proposiciones de las cuales se puede afirmar que todas son válidas o todas son falsas.

Para la resolución del 2-SAT, se implementa el algoritmo de Kosaraju. Este algoritmo recibe como entrada un grafo dirigido y devuelve como resultado las componentes fuertemente conexas que se encuentran en el mismo.

Como el algoritmo de Kosaraju encuentra todas las componentes fuertemente conexas, entonces, dadas dos componentes C1 y C2, si existe un camino entre C1 y C2, no puede existir un camino desde C2 a C1 (de lo contrario ambas debería estar en la misma componente). Además, si existe un camino entre C1 y C2, con el algoritmo de Kosaraju C1 será detectada antes que C2. Nuestra implementación fue diseñada para que la lista de componentes fuertemente conexas resultante del algoritmo preserve este orden de detección. Posteriormente de la ejecución del Kosaraju, nuestro algoritmo registra, para cada componente conexa, cual es la componente conexa que contiene la negación de sus proposiciones. En caso de que una misma componente conexa contenga a una proposición y su negación, entonces se determina que el problema no tiene solución, ya que implicaría que, sea  $x$  la proposición en cuestión,  $x \leftrightarrow \neg x$ .

Finalmente comienzan a fijarse los valores de verdad, recorriendo las componentes fuertemente conexas en el orden en que fueron obtenidas en el paso anterior. Si a la componente aún no se le asignó un valor de verdad, se le asigna false. Cuando se fija un valor para una componente determinada, a la componente que contiene la negación de sus proposiciones se le asigna el valor opuesto. Además, si a una componente se le asigna false, todas las componentes que implican a la misma (es decir, todas las componentes desde las cuales existe un camino hasta la componente evaluada) también se les asigna false (recursivamente). Y, si a una componente se le asigna true, a todas las componentes que son implicadas por la misma se les asigna también true. Si el algoritmo encuentra una contradicción (es decir, una componente que a la que se busca asignar false ya tiene true o viceversa), determina que el problema no tiene solución.

Una vez determinados los valores de verdad, se deduce la coloración de los nodos del grafo original a partir de las proposiciones que forman parte de las componentes evaluadas como verdaderas.

### 2.3. PseudoCódigo

A continuación se presenta el pseudocódigo para 2-List Coloring:

**Function** algoritmo2ListColoring(*grafoOriginal*)

```
grafoDirigido = crearGrafoDirigidoConProposiciones(grafoOriginal)
listaComponentesConexas = Kosaraju(grafoDirigido)
grafoCompacto = generarGrafoCompacto(listaComponentesConexas)
if grafoCompacto es INVALIDO then
    return NO_HAY_SOLUCION
end if
asignacionDeVerdad = asignarValoresDeVerdad(listaComponentesConexas, grafoCompacto)
if asignacionDeVerdad == INVALIDO then
    return NO_HAY_SOLUCION
end if
return obtenerColoreoParaGrafoOriginal(listaComponentesConexas)
```

**EndFunction****Function** crearGrafoDirigidoConProposiciones(*grafoOriginal*)

```
grafoDirigido = VACIO
for cada nodo A del grafoOriginal do
    if cantidadColores(A) == 1 then
        grafoDirigido.agregar( $\neg$ Acolor  $\rightarrow$  Acolor)
    else
        grafoDirigido.agregar(Acolor1  $\leftrightarrow$   $\neg$ Acolor2)
        grafoDirigido.agregar(Acolor2  $\leftrightarrow$   $\neg$ Acolor1)
    end if
end for
for cada arista (A, B) do
    for cada color comun c entre A y B do
        grafoDirigido.agregar(Ac  $\rightarrow$   $\neg$ Bc)
        grafoDirigido.agregar(Bc  $\rightarrow$   $\neg$ Ac)
    end for
end for
return grafoDirigido
```

**EndFunction****Function** Kosaraju(*grafoDirigido*)

```
listaComponentesConexas = VACIO
pila = VACIO
for cada nodo A de grafoDirigido do
    if (pila no contiene A) then
        apilar nodos partiendo de A utilizando BFS
    end if
end for
grafoDirigidoInverso = grafoDirigido.invertirAristas()
while pila no vacia do
    A = pila.SacarPrimero
    if (no marcada A) then
        componente = VACIO
        agregar a componente todos los nodos partiendo de A utilizando BFS en grafoDirigidoInverso
        marcar(A)
        listaComponentesConexas.agregarAlFinal(componente)
    end if
end while
return listaComponentesConexas
```

**EndFunction**

**Function** generarGrafoCompacto(*listaComponentesConexas*)

```
grafoCompacto = VACIO
for cada componente en listaComponentesConexas do
  for cada nodo A de componente do
    for cada arista (A, B) do
      componente.agregarArista(componenteDe(B))
    end for
  for cada nodo B negado por A do
    componente.asociarComoNegacion(componenteDe(B))
    componenteDe(B).asociarComoNegacion(componente)
    if componente == componenteDe(B) then
      return INVALIDO
    end if
  end for
end for
return grafoCompacto
```

**EndFunction**

**Function** asignarValoresDeVerdad(*listaComponentesConexas*, *grafoCompacto*)

```
for cada componente en listaComponentesConexas do
  if no esta marcada componente then
    marcar(componente, FALSE)
    propagar FALSE a todas las componentes que poseen un camino hasta
      esta componente en grafoCompacto
    if inconsistencia al propagar then
      return INVALIDO
    end if
    marcar(componente.negacionAsociada, TRUE)
    propagar TRUE a todas las componentes accesibles desde
      componente.negacionAsociada en grafoCompacto
    if inconsistencia al propagar then
      return INVALIDO
    end if
  end if
end for
return VALIDO
```

**EndFunction**

**Function** obtenerColoreoParaGrafoOriginal(*listaComponentesConexas*)

```
colores = VACIO
for cada componente con valor TRUE en listaComponentesConexas do
  for cada nodo con proposicion afirmativa de componente do
    colores.asignarColor(nodo.nodoDeGrafoOriginal.identidad, nodo.proposicion.colorPropuesto)
  end for
end for
return colores
```

**EndFunction**

## 2.4. Análisis de la complejidad

El grafo dirigido contiene a los sumo cuatro veces más nodos que el grafo de entrada, y el grafo compacto tiene a los sumo tantos nodos como el grafo dirigido. Por lo tanto, podemos afirmar que, sea  $n$

la cantidad de nodos inicial,  $n'$  la cantidad de nodos del grafo dirigido y  $n''$  la cantidad de nodos del grafo compacto,  $\mathcal{O}(f(n)) = \mathcal{O}(f(n')) = \mathcal{O}(f(n''))$  (si no se conocen datos adicionales para la entrada).

Generar el grafo dirigido a partir del grafo de entrada tiene una complejidad de  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ , ya que para cada nodo del grafo, es necesario crear los nodos dirigidos que lo representan y definir sus aristas con otros nodos. A medida que se van creando, los nodos se guardan y se buscan en un `TreeSet`.

El algoritmo utilizado para encontrar las componentes fuertemente conexas no recorre más de dos veces todos los nodos, por lo cual su complejidad es lineal, al igual que el algoritmo que determina el valor de verdad de los nodos compactos.

## 2.5. Experimentación

Casos de test:

### 2.5.1. El triángulo

En este test existen tres nodos interconectados en donde cada nodo comparte un color con uno de sus vecinos. El algoritmo debería encontrar la única solución posible. Posteriormente, se le añade al triángulo un nodo extra vecino del primero con el color con el cual estaba pintado el primero, con lo cual no existe solución.

### 2.5.2. El pentagono

En esta oportunidad, se dibuja un  $K_5$ . Cada nodo tiene como opción un color que no se repite en sus compañeros y otro que es compartido por más de uno. El algoritmo debería encontrar una solución.

### 2.5.3. El señor de los anillos

En este caso se prueba un ciclo de seis nodos. A los pares se les asigna 0 y a los impares uno, y además todos poseen un segundo color que comparten con uno de sus vecinos. Como el grafo es bipartito, el algoritmo debería hallar una solución.

### 2.5.4. Grafos bipartitos completos

Otro de los casos se basa en generar grafos bipartitos completos. En este caso, se les asigna a todos los nodos 0 y 1. Como un grafo bipartito (en particular, uno completo) puede colorearse con dos colores, el algoritmo debería encontrar una solución para el mismo. Posteriormente, se le añade al gráfico una arista que une dos nodos que no estaban conectados, con lo que el grafo deja de ser bipartito y se necesitan 3 colores para colorearlo. En este caso, el algoritmo debería determinar que no existe solución.

### 2.5.5. Testeos de complejidad

Para testear la complejidad, se generan grafos al azar en donde todos los nodos poseen como opciones de coloreo a un color que no se repite en los demás nodos y otro que es seleccionado al azar. En una de las estrategias se deja fija la cantidad de aristas, en otra se fija la cantidad de nodos, y en la otra se incrementan las aristas y los nodos en igual proporción.

### 2.5.6. Complejidad en grafos completos

En un último caso se generan grafos completos en donde se va incrementando la cantidad de nodos (y, lógicamente, de aristas). Debido al consumo de memoria, este último caso se ha testado con valores inferiores que al resto de los test.

### 3. Problema 2: Algoritmo Exacto para List Coloring

#### 3.1. Descripción de la problemática

En esta oportunidad se nos pide resolver el problema List Coloring que consiste en (si es posible) colorear un grafo de forma que ningún nodo tenga el mismo color que un nodo adyacente, respetando la lista de colores de cada nodo, lo cual quiere decir que no se le puede asignar un color a un nodo si este no pertenecía a su lista de colores posibles.

#### 3.2. Resolución propuesta y justificación

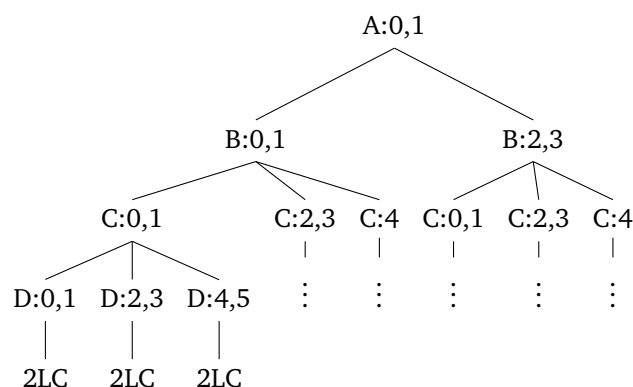
Para desarrollar un algoritmo exacto para este problema decidimos usar backtracking y de esta forma recorrer todas las opciones de colores y poder encontrar la solución si esta existe.

Como el enunciado pide que al llegar a un caso de 2-List Coloring se utilice el algoritmo del primer punto, decidimos cambiar el enfoque de la resolución para poder adaptarlo a instancias del ejercicio 1. Por lo tanto en lugar de usar el enfoque convencional que sería fijar un color para cada nodo y ver si es solución, optamos por recorrer todos los nodos del grafo fijando dos colores por cada uno y al llegar al último nodo llamar a 2-list Coloring para que chequee si con esa configuración de colores hay solución. Si la respuesta es "X" entonces se selecciona el siguiente color del último nodo y se vuelve a probar. Cuando se acaban los colores del último, se elije el próximo color del ante último y se vuelve a empezar de cero con los colores del siguiente y así hasta que se prueben todos los colores de todos los nodos. De esta forma siempre se llega a un caso base que es resoluble por 2-List Coloring.

Para evitar repetir o saltar colores se utiliza un iterador (*it*) que siempre arranca desde el primer color de la lista y dentro del *while* se seleccionan dos colores consecutivos si hay o se selecciona uno solo (ver pseudocódigo de la sección 3.3) y luego se llama recursivamente a ListColoring para seleccionar los colores del nodo siguiente.

A continuación ilustramos la forma en la que se construye el árbol de soluciones para la siguiente lista de nodos:

Grafo:  $\{A, B, C, D\}$   
Cada nodo tiene la siguiente cantidad de colores:  $A : 2, B : 4, C : 5$  y  $D : 6$



Como se puede ver en la imagen, cada nivel representa los llamados de *ListColoring* para un determinado nodo y se puede ver como se seleccionan los índices de los colores de forma que en las hojas se llama se llama a 2-List Coloring (2LC) con todas las combinaciones de colores.

##### 3.2.1. Podas

- La primera poda que se realiza es la de ordenar la lista de nodos de forma que queden primero los nodos con menor cantidad de colores ya que de esta forma si se eligen los colores de un nodo  $a$



con dos colores primero y luego se pasa a uno  $b$  de cinco, se estaría recorriendo el subgrafo que no contiene a  $a$  dos veces en lugar de las cinco que se recorrería si estuviera primero el nodo  $b$ .

- Al revisar el código de la primer entrega nos dimos cuenta que no era necesario hacer todas las permutaciones de los colores de un nodo ya que alcanzaba con seleccionar una sola vez cada color para cada nodo y llamar a 2-List Coloring dado que la recursión se encarga de que los colores se prueben todos con todos.
- Si se llega a una solución, se corta el backtracking y se devuelve esa. De esta forma en el caso promedio y mejor, no se recorrería todo el árbol de soluciones ya que no necesita encontrar todas las posibles.

### 3.3. Análisis de la complejidad

Para analizar la complejidad utilizaremos el siguiente pseudocódigo, en el cual se utilizan los términos:

- **grafo**: para referirse al que viene por parámetro.
- **grafo2colores**: para el grafo que se construye para pasárselo al algoritmo del problema 1 y que admite hasta 2 colores por nodo.
- **ListColoring**: es el algoritmo que estamos analizando y representa el llamado recursivo a la misma función.
- **2ListColoring**: es el algoritmo del problema 1 y se usa para obtener la solución a un grafo con a lo sumo dos colores por nodo.
- **count**: es una variable pasada por parámetro que se utiliza para avanzar y retroceder en la lista de nodos.
- **c**: es la cantidad máxima de colores que puede tener un nodo y que está dada por la entrada del problema.

**Algoritmo 1:** ListColoring Exacto Sin Podas

---

```
count = índice en la lista de nodos del grafo (inicializada en cero, viene por parámetro)  $\{\mathcal{O}(1)\}$ 
if count == cantidad de nodos del grafo then
    Llamar a 2ListColoring para resolver grafo2colores  $\{\mathcal{O}(n^2 \log n)\}$ 
    Retornar
end if
nodo = Obtener el nodo a procesar del grafo con el índice count  $\{\mathcal{O}(1)\}$ 
it = Obtener un iterador de la lista de colores de nodo  $\{\mathcal{O}(1)\}$ 
coloresSeleccionados = Obtener la lista de colores del nodo en el grafo2colores  $\{\mathcal{O}(1)\}$ 
Incrementar count  $\{\mathcal{O}(1)\}$ 
while Haya próximo en la lista de colores do  $\{\mathcal{O}(c/2)$  en cantidad de ejecuciones. $\}$ 
    color1 = Próximo en la lista  $\{\mathcal{O}(1)\}$ 
    Asignar color1 en la primer posición de la lista coloresSeleccionados  $\{\mathcal{O}(1)\}$ 
    if Hay próximo en la lista de colores then
        color2 = Próximo en la lista  $\{\mathcal{O}(1)\}$ 
        Asignar color2 en la segunda posición de la lista coloresSeleccionados  $\{\mathcal{O}(1)\}$ 
    end if
    Llamar a ListColoring con el count ya incrementado
end while
Retornar
```

---

## 4. Problema 3: Heurística Constructiva Golosa

### 4.1. Descripción de la problemática

En este apartado nuestra tarea consiste en generar un algoritmo que implemente una heurística cuyo objetivo sea encontrar alguna forma de colorear los nodos (es decir, asignar a cada materia un aula), minimizando en la medida de lo posible la cantidad de conflictos (entendidos estos como instancias que impiden que el coloreo generado sea válido, es decir, que verifique para toda arista que a sus nodos adyacentes se les haya asignado distinto color.)

### 4.2. Resolución propuesta y justificación

Para resolver la problemática presentada, nuestra idea fue la de realizar un barrido del grafo mediante BFS utilizando una función de peso que permitiera decidir para cada nodo cuál sería el color - potencialmente - de menor riesgo en una vecindad reducida (es decir, aquel que perjudicaría menos el coloreo de sus adyacentes) y asignárselo.

Supóngase que se tiene el siguiente grafo, donde los números dentro de cada nodo indican su índice y los que se encuentran fuera enumeran sus colores posibles.

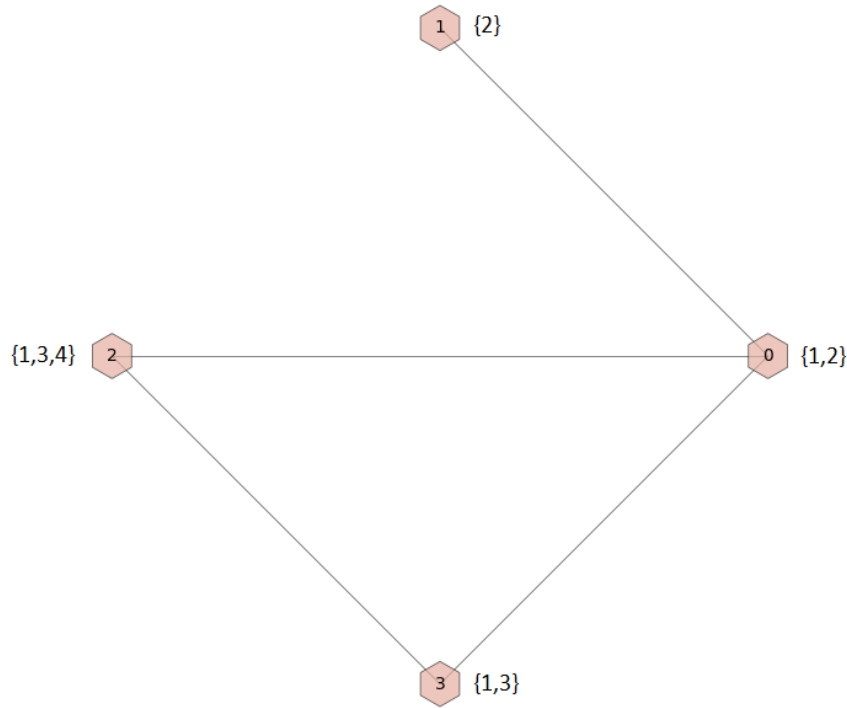


Figura 1: Grafo sin colorear

Defínase  $X_{(c,p)}$  como el valor relativo  $X$  del color  $c$  para el nodo  $p$  (es decir,  $X_{(c,p)} = (c \in \{\text{colores de } p\} ? 1 : 0) / (\# \{\text{colores de } p\})$ ),  $\text{Peso}(N_c)$  como la función que determina la magnitud del perjuicio ocasionable al elegir colorear el nodo  $N$  de color  $c$ <sup>1</sup> (con  $c \in \{\text{colores de } N\}$ ). Entonces en un primer paso, los valores son los siguientes:

■ **Nodo 0**

- Color 1:
  - $\frac{0}{1}(1,1)$
  - $\frac{1}{3}(1,2)$
  - $\frac{1}{2}(1,3)$
- Color 2:
  - $\frac{1}{1}(2,1)$
  - $\frac{0}{3}(2,2)$

---

<sup>1</sup>Formalmente, si llamamos *ValoresRelativos* a una lista de ordenada que contiene un valor relativo  $X_{(c,p)}$  para cada nodo  $p$  adyacente a  $N$  en relación al color  $c$ , entonces  $\text{Peso}(N_c) =$

$$\sum_{i=0}^{\#\{\text{ValoresRelativos}\}} \frac{\text{ValoresRelativos}[i]}{i+2}$$

$$\circ \frac{0}{2}(2,3)$$

Por lo tanto,

$$\text{Peso}(0_1) = \frac{\frac{1}{2}(1,3)}{2} + \frac{\frac{1}{3}(1,2)}{3} + \frac{\frac{0}{1}(1,1)}{4} \simeq 0.36$$

$$\text{Peso}(0_2) = \frac{\frac{1}{1}(2,1)}{2} + \frac{\frac{0}{3}(2,2)}{3} + \frac{\frac{0}{2}(2,3)}{4} \simeq 0.5$$

Como  $\text{Peso}(0_1) \leq \text{Peso}(0_2)$ , el color del que se pintará al nodo es del 1 (tal como se muestra en la figura 2 )

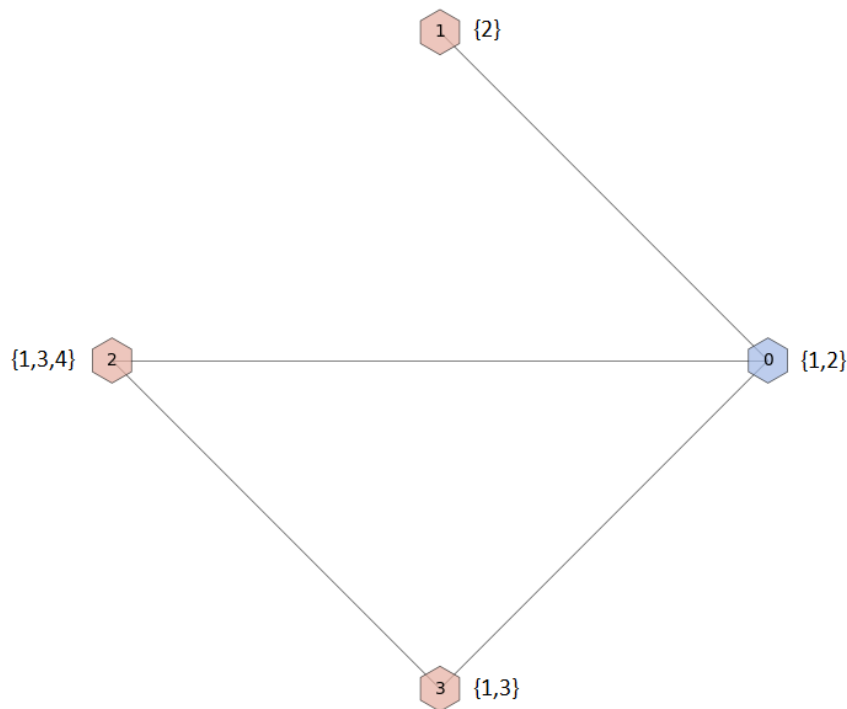


Figura 2: Al nodo 0 se le asigna el color 1

Prosigamos con el nodo 1. Su valor es el siguiente:

■ **Nodo 1**

● **Color 2:**

$$\circ \frac{0}{2}(2,0)$$

Nótese que el valor  $\frac{0}{2}(2,0)$  no es  $\frac{1}{2}(2,0)$  porque el nodo 0 ya fue coloreado y de un color distinto al 2. Es por esto que al nodo 0 “no le importa” que su vecino, el nodo 1, se coloree del color 2 y por lo tanto el peso que retorna para dicho color es 0. Además, este es el único peso que tiene en cuenta el nodo 1, puesto que no tiene más nodos adyacentes ni otros colores disponibles. Por lo tanto, como se muestra en la figura 3, el nodo 1 se pinta del color 2.

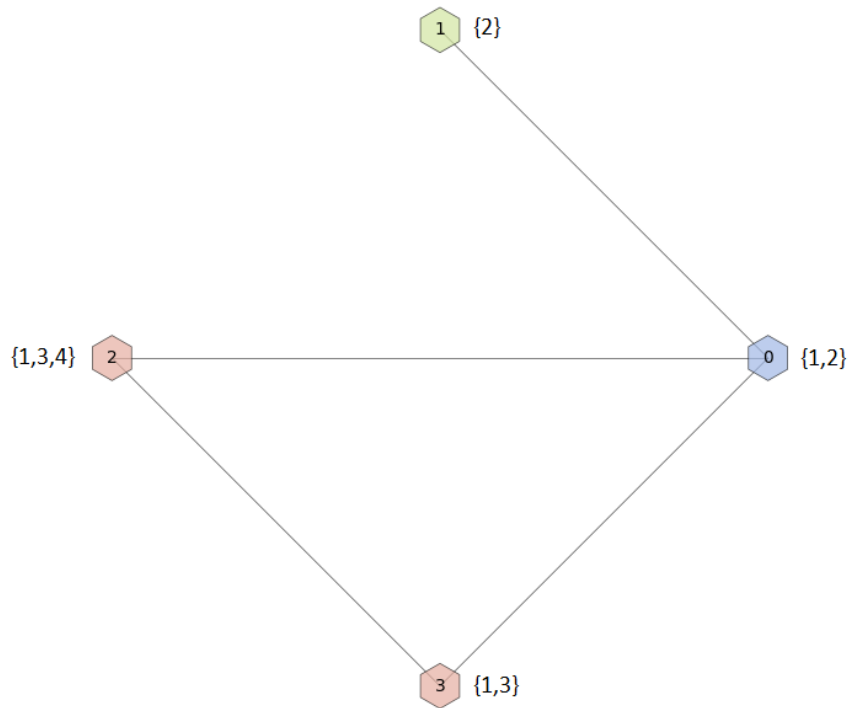


Figura 3: Al nodo 1 se le asigna el color 2

Continuemos el coloreo con el nodo 2:

■ **Nodo 2**

• **Color 1:**

- $\frac{0}{2}(1,0)$
- $\frac{1}{2}(1,3)$

• **Color 3:**

- $\frac{0}{2}(3,0)$
- $\frac{1}{2}(3,3)$

• **Color 4:**

- $\frac{0}{2}(4,0)$
- $\frac{0}{2}(4,3)$

Nuevamente, los colores posibles del nodo 0 no tienen injerencia a menos que el valor por el que se pregunte sea equivalente al color con el cual se pretende colorear un nodo adyacente.

Como en este caso  $\text{Peso}(2_4) \leq \text{Peso}(2_3) \leq \text{Peso}(2_1)$ , se le asigna al nodo 2 el color 4 (ver 4)

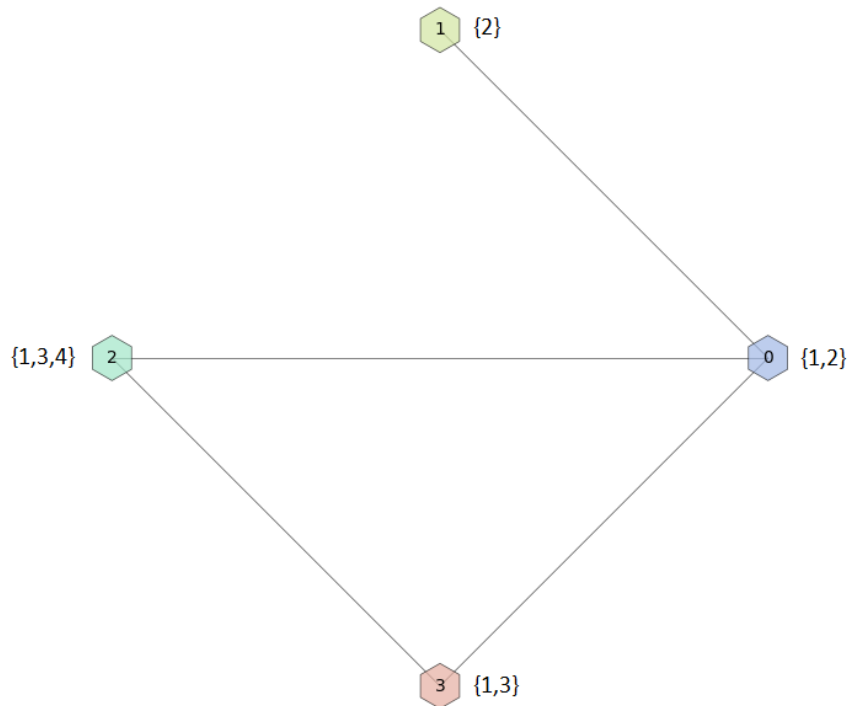


Figura 4: Al nodo 2 se le asigna el color 4

Por último, definamos el coloreo del nodo 3:

■ **Nodo 3**

• **Color 1:**

- $\frac{1}{1}(1,0)$
- $\frac{0}{3}(1,2)$

• **Color 3:**

- $\frac{0}{2}(3,0)$
- $\frac{0}{3}(3,2)$

Obsérvese que  $\frac{1}{1}(1,0)$  es distinto del esperado  $\frac{1}{2}(1,0)$ . Esto se debe a que el valor escogido representa una medida de la importancia que se le da al nodo ya coloreado “0”. Como queremos evitar la mayor cantidad de conflictos, ante casos de este estilo se define que el nodo coloreado retorne el valor absoluto “1” (recordemos que, cuanto más grande este valor, mayor es la restricción de pintar un nodo de dicho color).

De esta forma, queda coloreado todo el grafo como se muestra en la figura 5

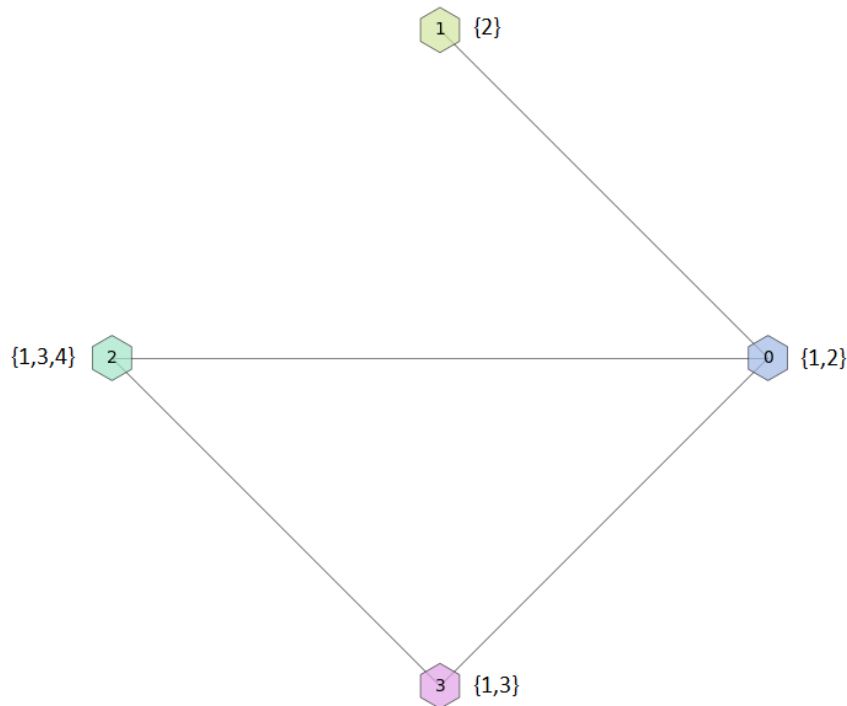


Figura 5: Al nodo 3 se le asigna el color 3

### 4.3. PseudoCódigo y Análisis de la complejidad

A continuación se presenta el pseudocódigo del coloreo implementado:

```
while nodos pintados  $\leq$  cantidad de nodos //O(n) do  
  Elegir un nodo no visitado del grafo // O(n) (Porque para determinar cuál no fue visitado recorre  
  una lista de booleanos que contiene una posición por cada nodo)  
  Encolarlo //O(1)  
  while hay elementos en la cola do  
    Tomar el primer elemento de la cola //O(1)  
    if no fue coloreado //O(1) then  
      Agregar a todos sus vecinos a la cola //O(n)  
      Pintar nodo //O(n*c*log(n))  
    end if  
  end while  
end while
```

El ciclo principal (el externo) tiene razón de ser porque dentro del bucle anidado sólo se colorea una componente conexa por el grafo que recibimos puede ser no conexo, por lo tanto debemos iterar sobre las distintas componentes. Verificando que el algoritmo funcione hasta que la cantidad de nodos pintados sea efectivamente la cantidad de nodos total, y escogiendo cada vez un nodo de una componente no visitada podemos asegurarnos de que el coloreo se realiza sobre la totalidad del grafo.

El método *PintarNodo()* tiene como cota superior  $O(n*c*\log(n))$ . Como se puede ver en el código, dicha complejidad la alcanza al calcular el color menos perjudicial (método *CalcularColorMenosPerjudicial(nodo*

$V, grafo G$ ). Mediante el mismo, se calcula el peso de cada color posible  $C$  de  $V$  mediante la verificación de la existencia de  $C$  entre el conjunto de los colores posibles de cada uno de sus nodos adyacentes a  $V$ . Gracias a que cada nodo lleva un array de booleanos que responde a dicha operación en  $O(1)$ , la cota no es mayor.

Como la condición de que el nodo no haya sido visitado se valida exactamente  $n$  veces y cada vez se agregan a lo sumo  $n-1$  elementos a la cola (con un costo  $O(1)$  cada uno), dicha parte del algoritmo cuesta  $O(n^2)$ . Sin embargo un costo mayor se paga al ejecutar el método *PintarNodo()*:  $n$  veces  $O(n*c*\log(n))$ . Esto hace que la complejidad final del algoritmo ascienda a  $O(n^2*c*\log(n))$ .

#### 4.4. Experimentación

Nos interesa analizar cómo se comporta nuestro algoritmo en función de ciertas características del grafo a ser coloreado: su cantidad de nodos, su cantidad de aristas y el número máximo de colores que puede llegar a tener como opción cada uno de sus nodos.

Es por ello que nuestro primer experimento consistió en evaluar el tiempo necesario para el cómputo de distintos grafos en los cuales se incrementó paulatinamente la cantidad de nodos. Los resultados se pueden observar en la figura 6

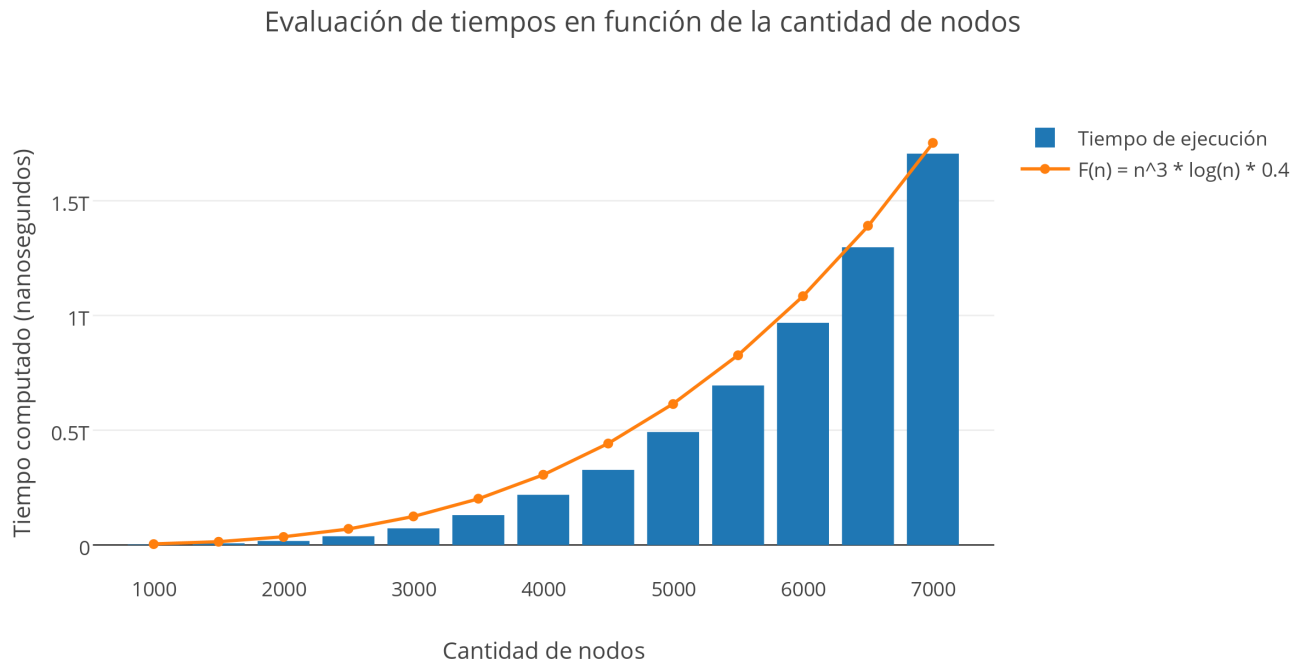


Figura 6: Tiempos de cómputo en función de la cantidad de nodos

Como se puede observar, la función que permite acotar los resultados obtenidos se aproxima asintóticamente a los calculados previamente en forma teórica para estas instancias.

Por otro lado, generamos grafos que diferían entre sí únicamente en su cantidad de aristas. Al medir los tiempos obtuvimos los resultados que se exponen en la figura 7



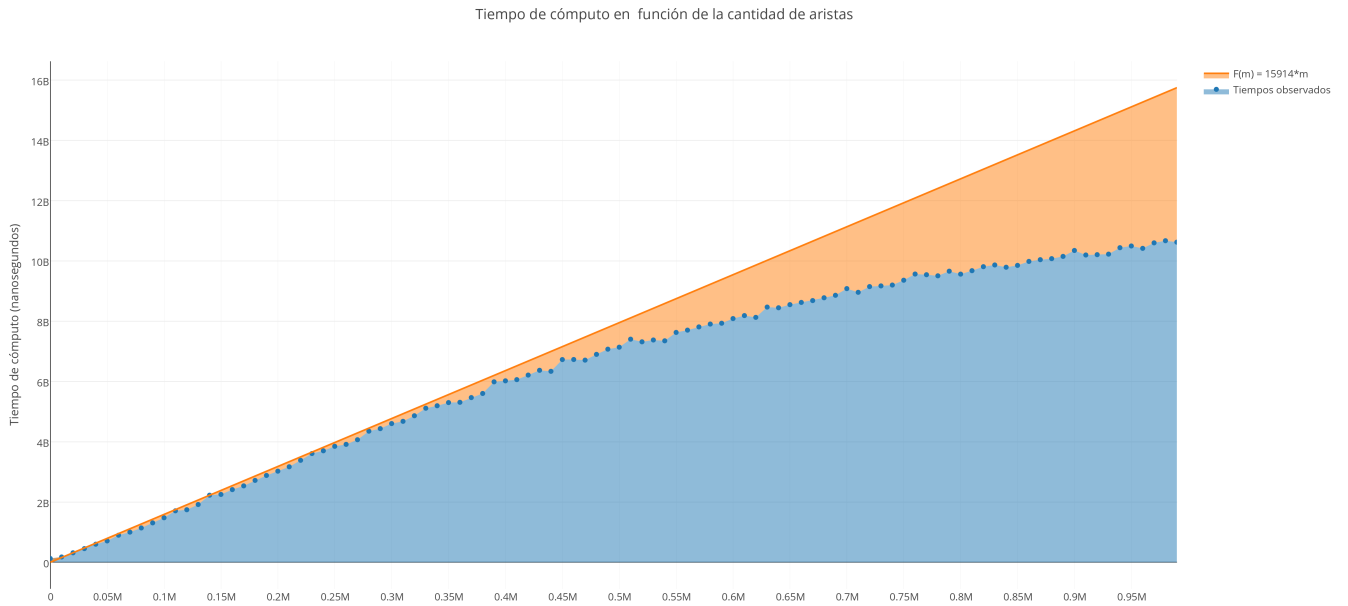


Figura 7: Tiempos de cómputo en función de la cantidad de aristas

Así mismo, realizamos una serie de experimentos en los que modificamos para cada grafo la cantidad máxima de colores que cada uno de ellos podía tener. Con los resultados obtenidos se generó la ilustración 8

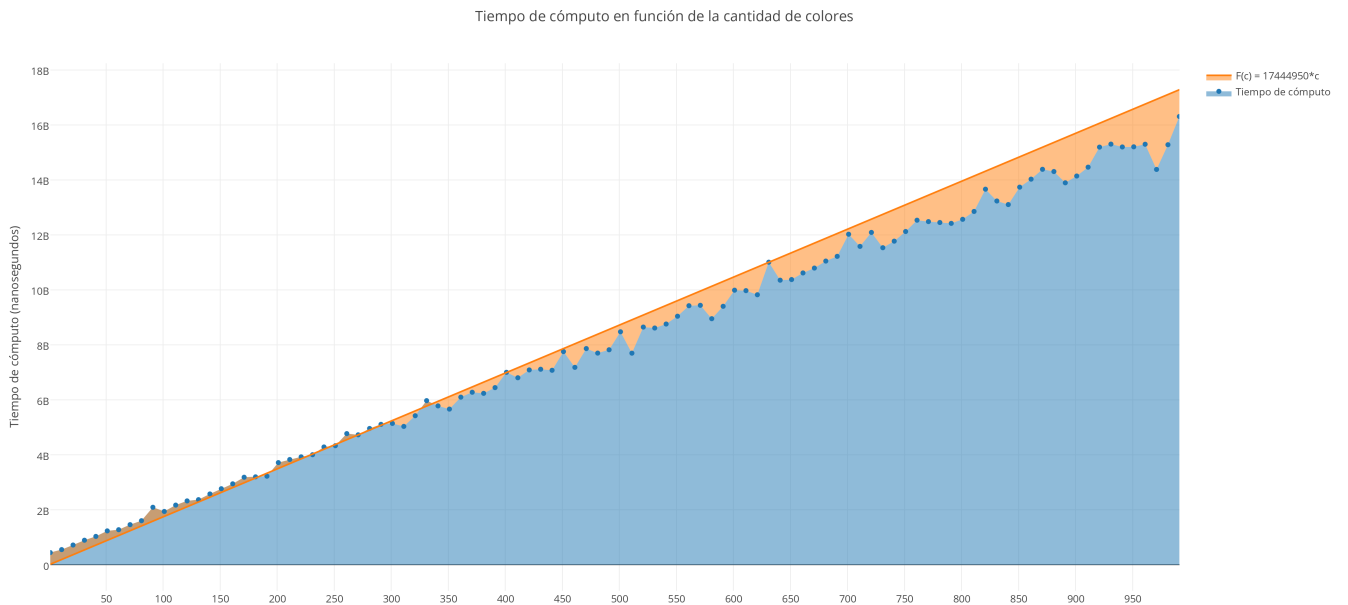


Figura 8: Tiempos de cómputo en función de la cantidad de colores

La misma parece indicar que el tiempo de cómputo dependiera linealmente de la cantidad de colores máxima del grafo. Para entenderlo, hay que considerarlo que la elección de un color para cada vértice implica haber recorrido cada uno de sus colores. Es decir, es necesario hacer  $N$  veces  $C$  (a lo sumo). De esta forma, al incrementar la cantidad de colores se realiza una iteración más costosa por cada nodo que

no deja de ser lineal.

Por último analizamos qué ocurre con la cantidad de conflictos presentes luego del coloreo en función de la cantidad de colores disponibles para realizarlo. Tal como esperábamos a medida que se incrementa el módulo del conjunto de colores, disminuye la cantidad de conflictos.

En este caso los resultados resultan intuitivos, puesto que si se dispone de un único color entonces todos aquellos nodos que tengan adyacentes generarán conflictos, puesto que todos ellos tienen una única opción para colorearse. En contrapartida, sabemos que cualquier grafo requiere para ser coloreado a lo sumo tantos colores como cantidad de vértices contenga. En un punto intermedio, como cada nodo tiene potencialmente una cantidad de restricciones intermedia, también la cantidad de conflictos se espera que sea media (es decir, si dos nodos adyacentes comparten colores, siempre existe la posibilidad de que elijan uno distinto cada uno)

Los resultados se pueden observar en la imagen 9

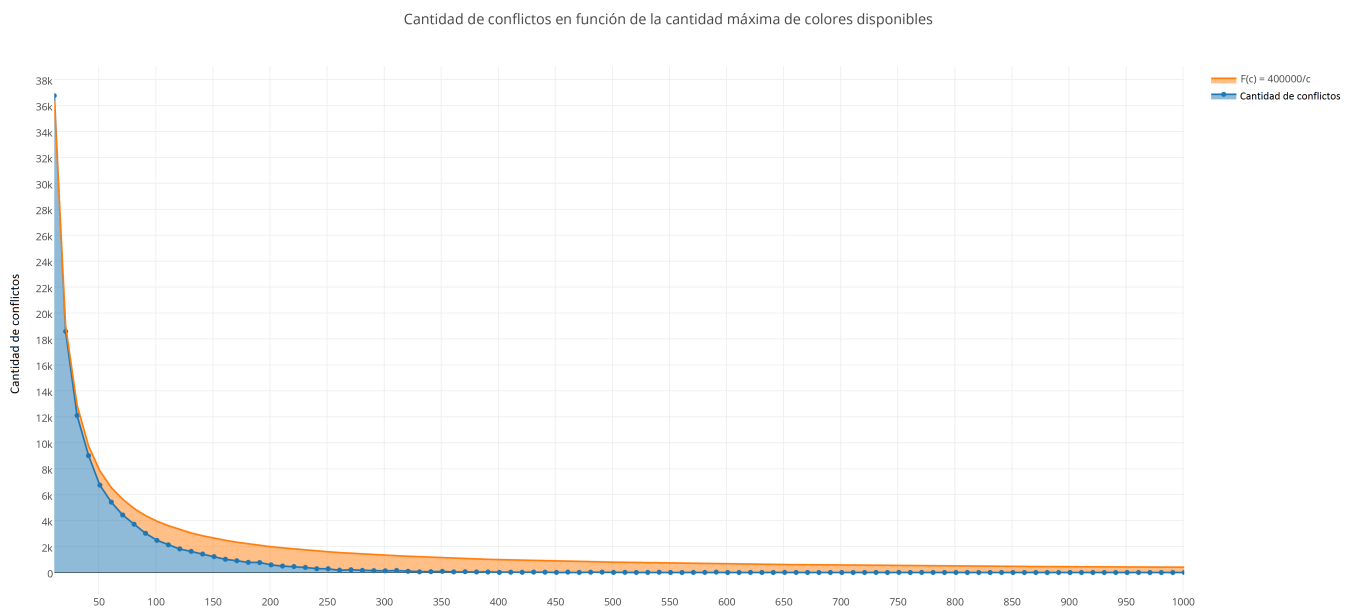


Figura 9: Total de conflictos en función de la cantidad de colores máxima.  $N = 1001$

#### 4.4.1. Peor caso

Considerando la heurística propuesta, el peor caso a considerar es aquel en que todos los nodos tienen  $n - 1$  nodos adyacentes (es decir un grafo completo). En esta situación el método `PintarNodo()` - que se encarga de decidir qué color de los disponibles parecería el apropiado para cada vértice - cumple la cota teórica propuesta, pues debe hacer tantas operaciones como cantidad de vecinos del nodo que se examina.

Además se debe considerar la relación entre la cantidad de colores y la de nodos, puesto que al estar la complejidad fuertemente influida por ambos valores, el que determine finalmente los tiempos de ejecución en el peor caso será aquel cuya cota inferior sea la mayor entre ambas. En otras palabras, si el valor de  $C$  fuese equivalente en cada caso a  $N^N$  (un caso irrisorio - dado que cualquier grafo necesita a lo sumo  $N$  colores para colorearse - pero posible) entonces la cota superior estaría determinada en última instancia por el valor de  $C$ , absorbiendo asintóticamente la complejidad aportada por  $N$ .

Por el contrario, si  $C$  fuese menor que la cantidad de vértices entonces la cota superior de la heurística propuesta pertenecería a  $O(N^3 * \log(N))$

#### 4.4.2. Mejor caso

Por lo antedicho, el mejor caso se constituye tomando un grafo donde todos sus vértices son aislados. De esta manera, todos y cada uno de ellos podría ser coloreado indistintamente con cualquiera de sus colores disponibles. Sin embargo el conjunto de colores seguiría siendo iterado en su totalidad.

## 5. Apéndice: Código fuente

A continuación se incluyen las partes más relevantes del código.

### 5.1. 2-List Coloring

La clase lector se encarga de leer la entrada y transforla en un grafo. Como en los test de complejidad es importante no medir el tiempo que se tarda en cargar el archivo en memoria, el Lector posee funciones para cargar la información sin procesar.

---

```
1 private void cargar_y_procesar() throws IOException{
2     if(this.is==null){
3         throw new IOException("error, lector no vinculado a archivo");
4     }
5
6     String parametros = this.leer_palabra();
7     String [] parametros_procesados = parametros.split("_");
8     this._cantidad_nodos = Integer.parseInt(parametros_procesados[0]);
9     this._cantidad_aristas = Integer.parseInt(parametros_procesados[1]);
10    this._cantidad_colores = Integer.parseInt(parametros_procesados[2]);
11    this._nodos_del_grafo = new ArrayList<Nodo_Coloreable>(_cantidad_nodos);
12    for(int i = 0;i<this._cantidad_nodos;i++){
13        String nodo_string = this.leer_palabra();
14        String [] nodo_string_procesado = nodo_string.split("_");
15        Nodo_Coloreable nuevo = new Nodo_Coloreable(i);
16        nuevo.cantidad_colores = Integer.parseInt(nodo_string_procesado[0]);
17        for(int j=1;j<=nuevo.cantidad_colores;j++){
18            nuevo.colores.agregar_color(Integer.parseInt(nodo_string_procesado[j]));
19        }
20        this._nodos_del_grafo.add(nuevo);
21    }
22    for(int i = 0;i<this._cantidad_aristas;i++){
23        String arista_string = this.leer_palabra();
24        String [] arista_string_procesada = arista_string.split("_");
25        int nodo_1 = Integer.parseInt(arista_string_procesada[0]);
26        int nodo_2 = Integer.parseInt(arista_string_procesada[1]);
27        Nodo_Coloreable n_1 = this._nodos_del_grafo.get(nodo_1);
28        Nodo_Coloreable n_2 = this._nodos_del_grafo.get(nodo_2);
29        n_1.adyacentes.add(n_2);
30        n_2.adyacentes.add(n_1);
31    }
32    this.is.close();
33 }
34
35 private void procesar_informacion_cargada(){
36     for(int i = 0;i<this._cantidad_nodos;i++){
37         String nodo_string = this.nodos_sin_procesar[i];
38         String [] nodo_string_procesado = nodo_string.split("_");
39         Nodo_Coloreable nuevo = new Nodo_Coloreable(i);
40         nuevo.cantidad_colores = Integer.parseInt(nodo_string_procesado[0]);
41         for(int j=1;j<=nuevo.cantidad_colores;j++){
42             nuevo.colores.agregar_color(Integer.parseInt(nodo_string_procesado[j]));
43         }
44         this._nodos_del_grafo.add(nuevo);
45     }
46     for(int i = 0;i<this._cantidad_aristas;i++){
47         String arista_string = this.aristas_sin_procesar[i];
48         String [] arista_string_procesada = arista_string.split("_");
49         int nodo_1 = Integer.parseInt(arista_string_procesada[0]);
50         int nodo_2 = Integer.parseInt(arista_string_procesada[1]);
51         Nodo_Coloreable n_1 = this._nodos_del_grafo.get(nodo_1);
52         Nodo_Coloreable n_2 = this._nodos_del_grafo.get(nodo_2);
53         n_1.adyacentes.add(n_2);
54         n_2.adyacentes.add(n_1);
55     }
56 }
57 }
```

---

Los metodos que construyen el coloreo se encuentran en Calculador\_de\_Coloracion\_Ej1

---

```
1 private void DFS_original(Stack<Nodo_Dirigido_SAT> pila){
2     Iterator<Nodo_Dirigido_SAT> it = this.grafo_dirigido.iterator();
3     while(it.hasNext()){
4         auxiliar_DFS_original(it.next(),pila);
5     }
6 }
```

---

```
5     }
6 }
7 private void DFS_inverso_auxiliar(Nodo_Dirigido_SAT nodo,TreeSet<Nodo_Dirigido_SAT> conjunto,int
8     id_componente_conexa_actual){
9     if(nodo.id_componente_conexa==1){
10         conjunto.add(nodo);
11         nodo.id_componente_conexa = id_componente_conexa_actual;
12         for(Nodo_Dirigido_SAT vecino: nodo.adyacentes_inverso){
13             if(vecino.id_componente_conexa==2){
14                 System.out.printf("error!_1\n");
15             }
16             DFS_inverso_auxiliar(vecino,conjunto,id_componente_conexa_actual);
17         }
18     }
19 }
20 private void DFS_inverso(Stack<Nodo_Dirigido_SAT> pila){
21     this.componentes_fuertemente_conexas = new LinkedList<TreeSet<Nodo_Dirigido_SAT>> ();
22     int id_componente_conexa_actual = 0;
23     while(!pila.empty()){
24         Nodo_Dirigido_SAT nodo = pila.pop();
25         if(nodo.id_componente_conexa==2){
26             System.out.printf("error!_2\n");
27         }
28         if(nodo.id_componente_conexa==1){
29             TreeSet<Nodo_Dirigido_SAT> nuevo = new TreeSet<Nodo_Dirigido_SAT>();
30             this.DFS_inverso_auxiliar(nodo, nuevo, id_componente_conexa_actual);
31             this.componentes_fuertemente_conexas.add(nuevo);
32             id_componente_conexa_actual++;
33         }
34     }
35 }
36 public void DFS(){
37     Stack<Nodo_Dirigido_SAT> pila = new Stack<Nodo_Dirigido_SAT>();
38     this.DFS_original(pila);
39     this.DFS_inverso(pila);
40 }
41 private boolean generar_grafo_compacto(){
42     int size = this.componentes_fuertemente_conexas.size();
43     this.grafo_dirigido_compacto = new ArrayList<Nodo_Dirigido_Compacto>(size);
44
45     for(int i = 0;i<size;i++){
46         this.grafo_dirigido_compacto.add(new Nodo_Dirigido_Compacto(i,i,null));
47     }
48
49     int i = 0;
50     for(TreeSet<Nodo_Dirigido_SAT> conj: this.componentes_fuertemente_conexas){
51         Nodo_Dirigido_Compacto nodo_compacto = this.grafo_dirigido_compacto.get(i);
52         nodo_compacto.componente_conexa = conj;
53
54         for(Nodo_Dirigido_SAT nodo: conj) {
55             if(nodo.hermano.id_componente_conexa==i){
56                 return false;
57             }else{
58                 nodo_compacto.agregar_hermano(this.grafo_dirigido_compacto.get(nodo.hermano.
59                     id_componente_conexa));
60             }
61
62             for(Nodo_Dirigido_SAT vecino: nodo.adyacentes){
63                 if(vecino.id_componente_conexa!=i){
64                     nodo_compacto.agregar_adyacentes(this.grafo_dirigido_compacto.get(vecino.
65                         id_componente_conexa));
66                 }
67             }
68             i++;
69         }
70     }
71     return true;
72 }
```

---

## 5.2. List Coloring

La clase *Main.java* se encarga de hacer el backtracking para recorrer todos los nodos fijando de a dos colores:

```
1 private static boolean listColoring(int count){
2     if (count == cantNodos) {
3         //llamo a 2listColoring
4         solucion = new Calculador_de_Coloracion_Ej1(cantNodos, grafo2colores).obtener_resolucion();
5         boolean x = !solucion.equals("X");
6         if (!podas) {x = false;}
7         return x;
8     }
9     //Count se utiliza para recorrer la lista en orden.
10    Nodo_Coloreable_ej2 nodo = grafo.get(count);
11    ListIterator<Integer> it = nodo.colores.listIterator();
12    //uso nodo.identidad porque las listas no estan en el mismo orden.
13    ColoresPosibles coloresSeleccionados = grafo2colores.get(nodo.identidad).colores;
14    count++; //aumento el count para llamar al proximo nodo.
15
16    while(it.hasNext()){
17        int color1 = it.next();
18        //Agrego color1 a la lista de colores
19        coloresSeleccionados.set_color(0, color1);
20        // ListIterator<Integer> it2 = nodo.colores.listIterator(it.nextIndex());
21        if(it.hasNext()){
22            int color2 = it.next();
23            //Agrego color2
24            coloresSeleccionados.set_color(1, color2);
25        }
26        // cuando no hay podas nunca entra al if y recorre todo el arbol de soluciones.
27        if(listColoring(count)){
28            return true;
29        }
30    }
31    return false;
32 }
```

La clase *LectorEj2.java* se encarga de leer el input y transformarlo en dos grafos, uno que contiene todos los colores y el otro que tiene un máximo de dos colores para poder pasarselo como parámetro a *2ListColoring*.

```
1 public void inicializar_lector() throws IOException{
2     String parametros = this.leer_palabra();
3     String [] parametros_procesados = parametros.split("_");
4     this.cantidad_nodos = Integer.parseInt(parametros_procesados[0]);
5     this.cantidad_aristas = Integer.parseInt(parametros_procesados[1]);
6     this.cantidad_colores = Integer.parseInt(parametros_procesados[2]);
7
8     this.nodos_del_grafo = new ArrayList<Nodo_Coloreable_ej2>(cantidad_nodos);
9     this.grafo_2colores = new ArrayList<Nodo_Coloreable>(cantidad_nodos);
10
11    for(int i = 0; i < this.cantidad_nodos; i++){
12        String nodo_string = this.leer_palabra();
13        String [] nodo_string_procesado = nodo_string.split("_");
14
15        //creo nodo con todos los colores
16        int cantidad_colores_nodo = Integer.parseInt(nodo_string_procesado[0]);
17        Nodo_Coloreable_ej2 nuevo = new Nodo_Coloreable_ej2(i, cantidad_colores_nodo);
18
19        for(int j = 1; j <= nuevo.cantidad_colores; j++){
20            nuevo.colores.add(Integer.parseInt(nodo_string_procesado[j]));
21        }
22        this.nodos_del_grafo.add(nuevo);
23
24        //creo nodo de 2 colores
25        Nodo_Coloreable nodo2color = new Nodo_Coloreable(i);
26        nodo2color.cantidad_colores = 1;
27        nodo2color.colores.agregar_color(nuevo.colores.get(0));
28        if (cantidad_colores_nodo > 1) {
29            nodo2color.cantidad_colores = 2;
30            nodo2color.colores.agregar_color(nuevo.colores.get(1));
31        }
32        this.grafo_2colores.add(nodo2color);
33    }
34    for(int i = 0; i < this.cantidad_aristas; i++){
35        String arista_string = this.leer_palabra();
36        String [] arista_string_procesada = arista_string.split("_");
37        int nodo_1 = Integer.parseInt(arista_string_procesada[0]);
```

```
38     int nodo_2 = Integer.parseInt(arista_string_procesada[1]);
39     Nodo_Coloreable n_1 = this.grafo_2colores.get(nodo_1);
40     Nodo_Coloreable n_2 = this.grafo_2colores.get(nodo_2);
41     n_1.adyacentes.add(n_2);
42     n_2.adyacentes.add(n_1);
43 }
44 }
45 }
```

La clase *Nodo\_Coloreable\_ej2* es muy similar a la clase *Nodo\_Coloreable\_ej1*, lo único que cambia es que esta acepta una lista de mas de dos colores.

```
1 public Nodo_Coloreable_ej2(int id, int cantColores){
2     this.identidad = id;
3     this.cantidad_colores = cantColores;
4     this.colores = new ArrayList<Integer>(cantColores);
5 }
```

### 5.3. Heurística Constructiva Golosa

La clase *Lector.java* se encarga de tomar los datos del archivo de entrada y procesarlos para construir el grafo mediante el método *MakeGraph()*:

```
1 public Grafo MakeGraph() throws IOException
2 {
3     Grafo grafo = new Grafo();
4     int[] nodosAristasColores = Ej3Utils.ToIntegerArray(this.getArchivo().readLine().split("_"));
5     grafo.cantidadDeNodos = nodosAristasColores[0];
6     grafo.setCantidadDeAristas(nodosAristasColores[1]);
7     grafo.setCantidadDeColores(nodosAristasColores[2]);
8
9     try { grafo.setNodos(this.ObtenerListaDeNodos(grafo.cantidadDeNodos, grafo.getCantidadDeColores
10         ()));}
11     catch (IOException e) { System.out.println("Se produjo un error al generar los nodos del grafo.");
12         };}
13     boolean[][] matrizDeAdyacencia = GenerarMatrizDeAdyacencia(grafo.getCantidadDeNodos(), grafo.
14         getCantidadDeAristas(), false);
15     grafo.setListaDeAdyacencia(Ej3Utils.matrizDeAdyacenciaToListDeAdyacencia(matrizDeAdyacencia,
16         grafo.getNodos()));
17
18     return grafo;
19 }
```

La clase *Grafo.java* contiene el método *MakeRainbow()* que colorea el grafo con la heurística propuesta:

```
1 public void MakeRainbow() // O(n^2*c*log(n))
2 {
3     int nodosPintados = 0;
4     LinkedList<Nodo> colaNodos = new LinkedList<Nodo>();
5
6     while(nodosPintados < this.cantidadDeNodos)
7     {
8         colaNodos.add(PicANode(this)); //O(1)
9
10        while (!colaNodos.isEmpty()) //O(n)
11        {
12            Nodo nodoActual = colaNodos.removeFirst(); //O(1)
13
14            if (!nodoActual.isVisitado())
15            {
16                colaNodos.addAll(this.getVecinosDe(nodoActual)); //O(n)
17                LinkedList<Integer> coloresRestantes = nodoActual.getColoresRestantes(); //O(1)
18                PintarNodo(nodoActual, coloresRestantes, this); //O(c*n*log(n))
19                nodosPintados ++;
20                nodoActual.setVisitado(true); //O(1)
21            }
22        }
23    }
24 }
25
26 private static Nodo PicANode(Grafo grafo)
27 {
```

```
28     Nodo next = new Nodo();
29     for(Nodo nodo : grafo.getNodos())
30     {
31         if (!nodo.isVisitado())
32         {
33             next = nodo;
34             break;
35         }
36     }
37     return next;
38 }
39
40 private static void PintarNodo(Nodo nodoActual, LinkedList<Integer> coloresRestantes, Grafo grafo)
41     //O(c*n*log(n))
42 {
43     int colorAPintar = CalcularColorMenosPerjudicial(nodoActual, grafo); //O(c*n*log(n))
44     nodoActual.setColor(colorAPintar);
45 }
46
47 private static int CalcularColorMenosPerjudicial(Nodo nodoActual, Grafo grafo) //O(c*n*log(n))
48 {
49     Double pesoColor = 1.0;
50     int colorAPintar = -1;
51     for (int color : nodoActual.getColoresRestantes()) //O(c)
52     {
53         Double peso = CalcularPeso(color, grafo.getVecinosDe(nodoActual)); //O(nlog(n))
54         if (peso <= pesoColor)
55         {
56             pesoColor = peso;
57             colorAPintar = color;
58         }
59     }
60     return colorAPintar;
61 }
62
63 private static Double CalcularPeso(int color, List<Nodo> vecinos)
64 {
65     ArrayList<Double> pesos = new ArrayList<Double>();
66     for (Nodo nodo : vecinos) //O(n)
67     {
68         if (nodo.LeImportaQueSuVecinoSePinteDelColor(color)) //O(1)
69             pesos.add(nodo.PeligroDePintarUnVecinoDelColor(color)); //O(1) (amortizado)
70     }
71     Collections.sort(pesos); //O(nlog(n))
72     Double pesoTotal = 0.0;
73     for (int k = 0; k < pesos.size(); k++) //O(n)
74         pesoTotal += pesos.get(k)/(k+2); //O(1)
75
76     return pesoTotal;
77 }
78 }
```

## 5.4. Búsqueda Local