



DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Práctico II

Algoritmos y Estructuras de Datos III
Segundo Cuatrimestre de 2015

Integrante	LU	Correo electrónico
Bouzón, María Belén	128/13	belenbouzon@hotmail.com
Jiménez, Paula	655/10	puly05@gmail.com
Montepagano, Pablo	205/12	pablo@montepagano.com.ar
Rey, Maximiliano	037/13	rey.maximiliano@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://www.fcen.uba.ar>

Índice

1. Problema 1: Saliendo del Freezer	3
1.1. Descripción de la problemática	3
1.2. Algoritmo desarrollado	3
1.3. Tests de correctitud	4
1.4. Análisis de la complejidad	4
1.5. Código fuente	5
1.6. Medición empírica de la complejidad	5
2. Problema 2: Algo Rush	6
2.1. Descripción de la problemática	6
2.2. Resolución propuesta y justificación	6
2.3. Análisis de la complejidad	7
2.4. Código fuente	7
2.5. Experimentación	7
2.5.1. Piensa con portales	7
2.5.2. Encontre un atajo	7
2.5.3. ¿y_como_llegue_aqui?	7
2.5.4. Linea recta	7
2.5.5. cuello_botella	7
2.5.6. No quiero caminar	7
2.5.7. la_venganza_de_los_ciclos	8
2.5.8. salidas_de_emergencia	8
2.5.9. Constrastación Empírica de la complejidad	8
3. Problema 3: Perdidos en los Pasillos	9
3.1. Descripción de la problemática	9
3.2. Resolución propuesta y justificación	9
3.3. Análisis de la complejidad	10
3.4. Código fuente	10
3.5. Experimentación	10
3.5.1. Constrastación Empírica de la complejidad	10

1. Problema 1: Saliendo del Freezer

1.1. Descripción de la problemática

Este problema modela un edificio de N pisos (y planta baja) en el cual en vez de tener escaleras o ascensores, hay portales que lo transportan a uno desde un piso a otro. Los portales solo permiten ascender de un piso más bajo a uno más alto. En cada piso puede haber cualquier cantidad de portales, teniendo en cuenta que no hay dos portales que salgan del mismo piso y lleguen a un mismo piso. Todas las instancias del problema deben tener al menos un camino de portales entre la planta baja y el piso N .

Se pide diseñar un algoritmo de complejidad $O(n^2)$ que encuentre un camino que llegue desde planta baja hasta el piso N y utilice la mayor cantidad de portales posible.

El formato de entrada es un archivo de texto. Cada problema está representado en dos líneas de texto. La primera es el valor de N . La segunda es una lista de portales que sigue el siguiente formato:

```
pd ph[; pd ph] // pd (piso desde), ph (piso hasta) enteros, pares de p separados por "; "
```

Para la salida, lo único que interesa es la cantidad de portales que hay que utilizar para recorrer el camino que usa la cantidad máxima posible de portales. La salida es una línea de texto que tiene ese valor.

Por ejemplo, un edificio de cinco pisos que tiene, desde cada piso, un portal para llegar a todos los pisos superiores se escribiría de este modo en el formato de entrada:

```
5
0 1; 0 2; 0 3; 0 4; 0 5; 1 2; 1 3; 1 4; 1 5; 2 3; 2 4; 2 5; 3 4; 3 5; 4 5;
```

Y el resultado a este ejemplo es, por supuesto, 5, ya que el camino más largo es el que pasa por todos los pisos.

1.2. Algoritmo desarrollado

El algoritmo diseñado utiliza la técnica de programación dinámica con un enfoque *bottom-up*. Podemos subdividir el problema original en sub-problemas. Los subproblemas implican resolver lo mismo pero, en vez de partiendo desde la planta baja, partiendo desde un piso más alto. Cuanto más cercano al piso superior (N) esté el piso desde el que partimos, más chico es el subproblema.

En primer lugar *parseamos* los datos de entrada, generando una tabla de tamaño N . La tabla contiene una lista de enteros en cada posición. La lista que se encuentra en la posición i -ésima de la tabla representa a los portales que salen desde el piso i . Los valores de la lista son los pisos a los que se llega desde ese piso usando un portal.

Luego, inicializamos en -1 una tabla de resultados parciales. Nos referimos a resultados parciales porque en la posición i -ésima de la tabla resultados encontraremos la respuesta al subproblema de “máxima cantidad de portales que se pueden utilizar para llegar al piso N partiendo desde el piso i ”. Si no es posible llegar al piso N desde el piso i , guardaremos el valor -1 en esa posición.

Nótese que ninguna de las dos tablas tiene un lugar para el piso N , ya que no hay portales que partan desde el piso N ni tiene sentido el problema de llegar al piso N desde el mismo piso N .

Finalmente, el algoritmo itera por cada piso del edificio desde el piso $N - 1$ hasta el 0 , iterando en cada piso por todos los portales del piso. Para cada portal calculamos la cantidad máxima de portales que se pueden usar para llegar a N usando ese portal. Esto se hace en tiempo constante, ya que hay que verificar solo tres cosas:

1. leer el valor de N del archivo de entrada
2. inicializar la tabla `portales` con listas (de enteros) vacías
3. inicializar la tabla `resultados` con -1
4. llenar la tabla `portales` con los portales de cada piso
5. Para cada piso p desde $N - 1$ hasta 0 :

- 5.1. Inicializar variable MAX en -1
 - 5.2. Para cada portal `l` en `portales[p]`:
 - 5.2.1. inicializamos una variable `costo` en -1 para representar la máxima cantidad de portales que se pueden utilizar para llegar a `N` usando el portal `l`
 - 5.2.2. Tenemos tres opciones:
 - 5.2.2.1. Si el portal va directo a `N`, el costo es 1
 - 5.2.2.2. Si el portal va a un piso que tiene en la tabla `resultados` valor -1, no es posible llegar a `N` usando ese portal, y dejamos el costo en -1
 - 5.2.2.3. Finalmente, si el portal va a un piso que tiene en la tabla `resultados` un valor distinto a -1, entonces el costo será ese valor + 1 (por el portal `l`)¹
 - 5.2.3. Ahora que ya tenemos el costo, si el costo obtenido para este portal es mayor a la variable MAX, actualizamos el valor de ésta con el costo obtenido en esta iteración
 - 5.3. Guardar en `resultados[p]` en valor de MAX
6. El resultado del problema completo se encontrará en `resultados[0]`

1.3. Tests de correctitud

Los casos de test provistos por la cátedra fueron replicados en el script `test.sh`. Para correrlo, primero es necesario tener el código del ejercicio compilado, lo cual se hace ejecutando el comando `make` en el directorio del código fuente.

1.4. Análisis de la complejidad

En el código fuente hemos comentado las distintas partes indicando los costos de cada una. Si llamamos N a la cantidad de pisos del edificio y P a la cantidad total de portales, la conclusión a la que llegamos es que el algoritmo tiene un costo de $\mathcal{O}(N + P)$.

Ahora bien, la cantidad de portales pertenece a $\mathcal{O}(N^2)$. En un edificio con la máxima cantidad posible de portales tendremos N portales en el piso 0, $N-1$ portales en el piso 1, etc. hasta el piso $N-1$, donde tendremos un solo portal. Esa sumatoria se escribe de este modo:

$$\sum_{i=1}^N i = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N^2 + N}{2}$$

Por lo tanto, podemos reescribir el costo del algoritmo en función de N como perteneciente a $\mathcal{O}(N + N^2)$, lo cual pertenece a $\mathcal{O}(N^2)$, que es lo que se pide en el enunciado.

¹Nótese que, como los portales siempre van a pisos más altos, las posiciones de `resultados` de los pisos más altos ya van a haber sido completadas en iteraciones anteriores del algoritmo.

1.5. Código fuente

```

1  int resolver(){
2      int i = n-1;
3      while (i>=0){ // este ciclo corre N veces (una vez por cada piso entre 0 y N-1)
4          int max = -1; // 0(1)
5          for (std::list<unsigned int>::iterator it=portales[i].begin(); it != portales[i].end(); ++it){
6              // este ciclo corre tantas veces como portales haya en este piso
7              int costo = -1; // 0(1)
8              if (*it == n){ // 0(1)
9                  // el portal va directo a N
10                 costo = 1; // 0(1)
11             } else if (resultados[*it] == -1){ // 0(1)
12                 // no se puede llegar a N por este portal
13                 costo = -1; // 0(1)
14             } else{
15                 costo = resultados[*it] + 1; // 0(1)
16             }
17             if (costo > max){ // 0(1)
18                 max = costo; // 0(1)
19             }
20         }
21         resultados[i] = max; // 0(1)
22         i--; // 0(1)
23     }
24     int res = resultados[0]; // 0(1)
25     return res; // 0(1)
26 }

```

1.6. Medición empírica de la complejidad

Para la medición de tiempos agregamos código al ejercicio de manera tal de que el programa pueda ser llamado con el argumento `--tiempos`. Al llamarlo de ese modo, vamos generando peores casos de tamaño creciente, y ejecutando, para cada uno, cincuenta veces el algoritmo. De cada corrida se toma la medición en milisegundos de la ejecución utilizando la biblioteca `chrono` de la STL de C++.

Los peores casos que generamos son aquellos donde existe la máxima cantidad posible de portales.

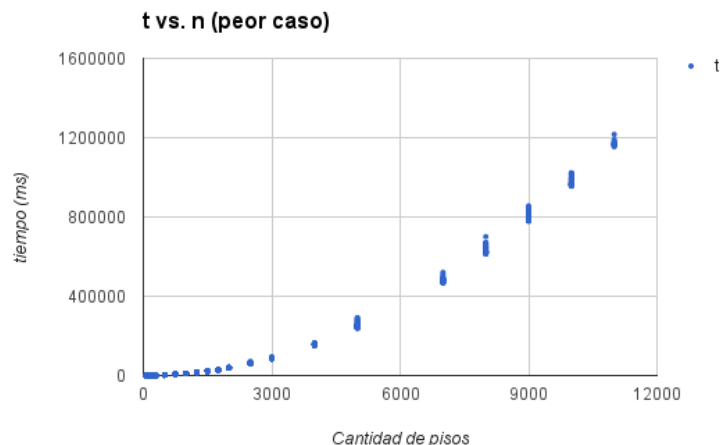


Figura 1: Relación entre tiempo de ejecución y cantidad de pisos (peor caso).

DIBUJAR DOS CURVAS DE N^2 QUE ENCIERREN A LA GRÁFICA EN EL GRAFICO 1.

Como se puede apreciar en los gráficos, el crecimiento de los tiempos de ejecución coincide con la complejidad calculada de forma analítica.

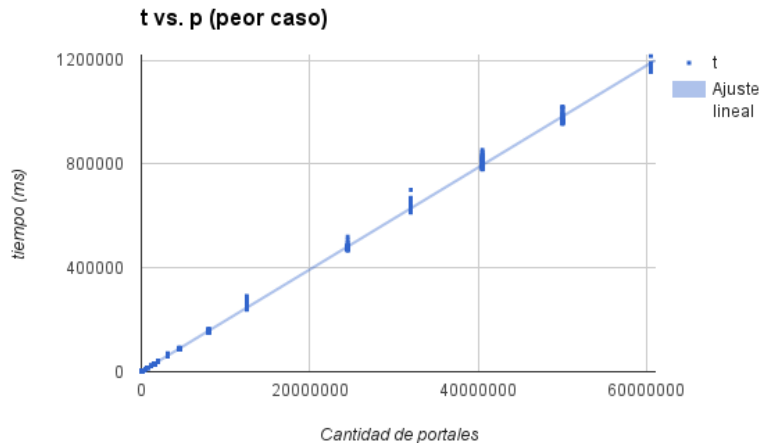


Figura 2: Relación entre tiempo de ejecución y cantidad de portales (peor caso).

2. Problema 2: Algo Rush

2.1. Descripción de la problemática

En este caso, se tiene un edificio con N pisos y con pasillos de longitud L y existen portales bidireccionales que comunican dos puntos determinados del mismo. Utilizar un portal consume dos segundos y caminar un metro consume un segundo. Se sabe que no hay más de un portal que comunique las mismas posiciones del mismo par de pisos. Se requiere un algoritmo que determine la cantidad mínima de segundos en ir desde el inicio del piso 0 hasta el final del último piso.

2.2. Resolución propuesta y justificación

Lo primero que hace el algoritmo es transformar la entrada en un grafo. Según nuestra representación, cada portal es considerado como un nodo. Las aristas que parten de un nodo llegan a todos aquellos otros nodos a los que se puede alcanzar desde el actual, ya sea porque son un punto de destino de teletransporte del mismo, o porque se encuentran en el mismo piso y se puede alcanzar caminando.

Como estructura auxiliar para construir el grafo se utiliza un diccionario de diccionarios de nodos, cuyas claves para acceder a un nodo son el piso y la distancia respectivamente. Un nodo contiene: un identificador (un int propio de cada nodo), la posición en el pasillo donde se encuentra, un conjunto de nodos a los cuales se puede llegar caminando y un conjunto de nodos que son puntos de destino de teletransporte.

Posteriormente un segundo algoritmo, utilizando el grafo generado por el primero, se encarga de determinar el camino entre ambos extremos del grafo (desde el principio del piso 0 hasta el final del último piso, basándose en el BFS relajando ejes. El BFS se utiliza para calcular caminos mínimos en ejes sin peso; para esto, determina en cada paso la distancia al inicio de todos los adyacentes a determinado nodo X , considerando que, o bien el camino mínimo desde la raíz hasta el nodo evaluado pasaba por X , por lo cual es el camino mínimo hasta X más uno, o existía un camino más rápido hasta el nodo, pero entonces, el mismo ya se habrá evaluado anteriormente, por lo cual ya se conocerá el camino mínimo. El BFS relajando ejes consiste en adaptar un grafo pesado para simular un grafo sin pesos en aristas. Para esto, cuando una arista contiene un peso superior a 1, coloca nodos “fantasma” entre ambos para aumentar la distancia entre los nodos. El algoritmo utilizado en el TP utiliza una cola en donde ingresa los adyacentes de los nodos evaluados para procesarlos luego de forma ordenada. Para emular los nodos fantasma, el algoritmo crea un solo nodo extra, que almacena la cantidad de nodos fantasma que deberían existir, y si el algoritmo detecta que el nodo evaluado emula a más de un fantasma, altera dicho valor y lo vuelve a encolar.

2.3. Análisis de la complejidad

Inicialmente, se debe construir un diccionario de N elementos y luego N diccionarios de L elementos, lo cual tiene un costo de $O(nL)$. Luego se procesa la entrada que determina las posiciones de los portales y se van creando los nodos y clasificando en los diccionarios. Como la consulta y escritura en el diccionario es $O(1)$, la complejidad total es de $O(P)$. Finalmente, la complejidad de formar el grafo es de $O(P+NL)$. Para la búsqueda del camino mínimo se crea inicialmente un diccionario de $N*L$ elementos, lo cual tiene una complejidad de $O(NL)$. Luego comienza a ejecutarse el algoritmo que calcula el camino mínimo. En el peor caso, el algoritmo debe recorrer cada uno de los nodos. Sabemos que el grafo no tiene más de $2*N*L$ nodos, incluyendo los nodos fantasma, ya que dos nodos calificados en un mismo piso no pueden estar separados por una distancia superior a L y se debe agregar un nodo fantasma para marcar el paso de un nodo a otro por teletransporte. Entonces, la complejidad del algoritmo de camino mínimo es $O(NL)$. Finalmente, el costo de construir el grafo y hallar el camino mínimo entre sus extremos es $O(P+NL)$.

2.4. Código fuente

2.5. Experimentación

2.5.1. Piensa con portales

En este test existe un portal que lleva directamente desde la entrada al aula. El algoritmo debería utilizarlo y llegar al aula en dos segundos.

2.5.2. Encontre un atajo

En este test existen dos portales en el primer piso con una longitud considerable. El primero de ellos toma un camino largo hacia el aula y el otro uno más corto. Como debido a la distancia entre el origen de ambos caminos, el algoritmo comenzará a adentrarse en el camino largo antes del corto. Se pretende testear si el algoritmo finalmente devuelve la solución correcta a pesar de esto.

2.5.3. ¿y como llegue aqui?

En esta oportunidad se introduce un ciclo en el grafico. Existen dos portales en el piso cero, uno de los cuales entra al ciclo y otro que lleva a la dirección correcta.

2.5.4. Línea recta

Este test se basa en probar la correctitud algoritmo cuando existen portales superpuestos. Existe un único camino entre el inicio y el aula, en donde todos los portales intermedios tienen otro superpuesto que lleva a otro piso, por lo que no es necesario caminar, excepto en el primer y el último piso.

2.5.5. cuello botella

Este test también esta centrado en probar el algoritmo cuando existen portales superpuestos. En este caso, existen muchos portales con un extremo en un mismo punto.

2.5.6. No quiero caminar

Este test se centra en explotar la posibilidad de utilizar un portal que comunica dos puntos del mismo piso. En el mismo, existen dos pisos con un portal en cada extremo y se necesita llegar de uno a otro dentro de cualquier camino existente; sin embargo, otro portal que cuyos extremos son muy cercanos a cada uno de los portales, por lo cual el camino mínimo debería utilizar estos portales intermedios.

2.5.7. la_venganza_de_los_ciclos

En la entrada de este test se presentan dos ciclos en el grafo; dentro del camino mínimo se incluyen algunos nodos pertenecientes a los mismos. Nuevamente se pretende evaluar el comportamiento del algoritmo frente a los ciclos, pero en esta ocasión incluyéndolos dentro de un camino simple hasta el aula.

2.5.8. salidas_de_emergencia

En esta ocasión se prueba el uso intensivo de nodos fantasma. En este test solo existen portales que comunican el principio de un piso con el final del piso anterior.

2.5.9. Contrastación Empírica de la complejidad

3. Problema 3: Perdidos en los Pasillos

3.1. Descripción de la problemática

En este ejercicio se nos presenta un pabellón con M pasillos de longitudes -potencialmente- distintas, representados por las aristas de un grafo y un conjunto vértices que pueden ser tanto intersecciones en las cuales dos o más de ellos convergen, o extremos incididos por un sólo corredor. A partir de este contexto se nos pide desarrollar un algoritmo que elimine cualquier ciclo del grafo dado, logrando crear un árbol generador cuyo peso (dado por la sumatoria de los pesos de cada arista) sea mayor o igual al de cualquier otro árbol generador posible (conocido como árbol generador máximo). Cabe destacar que queremos encontrar el árbol generador máximo ya que de esta manera nos aseguramos de que los pasillos a clausurar sean los de menor longitud en el ciclo y por lo tanto los que tienen menor costo de clausura.

Nota: Para correr el programa con un input específico ya sea para obtener el output y/o las mediciones de tiempo, utilizar la clase `Main.java`. En el caso que se quieran correr los tests, utilizar la clase `TestEj3.java` la cual utiliza la clase `Ejercicio3.java`. `Main` y `Ejercicio3` hacen exactamente lo mismo salvo que la primera implementa las mediciones de tiempo y los métodos para leer y escribir archivos que no son necesarios para correr los tests.

3.2. Resolución propuesta y justificación

Para resolver el problema, desarrollamos un método que hace uso de una adaptación del algoritmo de Kruskal, mediante el cuál es posible encontrar un árbol generador máximo con una complejidad de $\mathcal{O}(m \log m)$ (siendo m la cantidad de aristas).

El algoritmo propuesto inicialmente ordena de mayor a menor cada pasillo de acuerdo a sus longitudes y los toma uno a uno verificando si conectan vértices entre los cuales ya existe un camino o no. De ser cierto, la arista en cuestión es descartada. De ser falso, la misma pasa a ser parte del árbol y se repite el procedimiento con la siguiente hasta que se hayan analizado todas. Las longitudes de las aristas descartadas se suman para llevar la cuenta de los metros de pasillo que deben ser clausurados.

Para que las complejidades se ajustaran a los requerimientos, fue necesario desarrollar la clase *Union-Find*, la cual implementa los métodos *findSet*, *unionSet* e *isSameSet*. El primero de ellos permite, dado un elemento, hallar al representante del conjunto en el que se encuentra. El segundo, por su parte, realiza la unión de dos conjuntos. Por último, el tercero analiza si los dos valores parametrizados están incluidos en el mismo conjunto.

El pseudocódigo de nuestro algoritmo es el siguiente:

```
Ordenar pasillos de mayor a menor
suma = metros a clausurar (inicializada en cero)
for Cantidad de pasillos do
    if El pasillo conecta dos conjuntos disjuntos de pasillos then
        Unir el conjunto mas chico al mas grande
    else
        suma += la longitud del pasillo actual
    end if
end for
devolver suma
```

El algoritmo para ordenar la lista de pasillos asumimos que es correcto ya que estamos utilizando el método *sort* de *java.util.Collections* para ordenar de mayor a menor. Luego decimos que el ciclo termina ya que al utilizar un iterador de una lista finita y ciclar mientras exista un elemento siguiente, se puede asegurar que el ciclo va a llegar al último elemento y terminar por poscondición de la función *hasNext()*.

Dentro del ciclo analizamos cada arista para decidir si pasa a formar parte del árbol generador máximo ya que esa arista une dos componentes conexas o en caso contrario, al agregarla se estaría generando

un ciclo, entonces solo se guarda la longitud y se continúa con la próxima en la lista. Al tener las aristas ordenadas de mayor a menor nos aseguramos que siempre vamos a intentar agregar las de mayor peso primero y que si al probar con un eje se forma un ciclo C , ese eje va a ser el de menor peso de C .

Para probar que esto es correcto tenemos que analizar el funcionamiento de la clase *UnionFind* dado que se encarga de decirle a kruskal, de manera eficiente, si tiene que poner la arista o no. El constructor crea dos arreglos y utiliza un *for* para inicializarlos, el cual tiene un invariante simple que asegura que cuando se cumple que $\{i \geq n\}$ termina. Al crear estas estructuras definimos un bosque que no tiene ninguna arista y cada nodo es su propio padre. También definimos un *rank* que nos va a servir para comparar los tamaños de las componentes conexas que vaya creando kruskal.

En *isSameSet* no hay nada que analizar ya que solo llama a *findSet* con los parámetros de entrada y devuelve true si dio el mismo resultado para i y para j . *findSet* se encarga de averiguar cual es la raíz del árbol² al que pertenece el nodo que le llega por parámetro y lo hace de la siguiente manera:

- obtiene el padre directo del nodo.
- copia el nodo en una nueva variable *elemento*.
- cicla mientras el padre del elemento no sea si mismo.
- Dentro del ciclo el elemento pasa a ser el padre y se obtiene el padre de este nuevo elemento, de esta manera se van actualizando las variables obteniendo los ancestros hasta que eventualmente se llega a la raíz, la cual es la condición de terminación del ciclo ya que todo árbol tiene raíz, y por lo tanto termina.
- Comprime el árbol modificando al nodo para que su padre directo se la raíz, saltando a todos los ancestros que hubiera en el medio.
- Por último devuelve al nodo raíz.

Por último tenemos a *unionSet* que se encarga de encontrar la mejor manera de unir dos componentes conexas. Para eso obtiene las raíces de los dos nodos a unir y los respectivos ranks de las raíces. Luego une el árbol de menor rango al de mayor ya que es menos costoso unir el mas chico al mas grande que al revés. La unión es simplemente definir a la raíz de árbol mas grande, como el padre de la raíz del mas chico, agregando así una nueva rama. En el caso que los dos tuvieran el mismo rango se le suma uno a la nueva raíz para constatar que el árbol que se formó es mas grande que los dos que se tenía anteriormente.

En conclusión, podemos asegurar que en cada paso de kruskal agregamos una arista al árbol generador o sumamos la longitud, del pasillo a clausurar, a la solución del problema y como el AG que se genera es máximo, entonces se cumple que la suma de los metros a clausurar es mínima.

3.3. Análisis de la complejidad

Nuestra solución tiene una complejidad temporal de $\mathcal{O}(m \log m)$ siendo m la cantidad de aristas del grafo.

3.4. Código fuente

3.5. Experimentación

[Pensar casos borde](#)

3.5.1. Contrastación Empírica de la complejidad

²Definimos *raíz* al nodo que se tiene como padre a si mismo y que un árbol tiene una sola raíz.