Decision tree

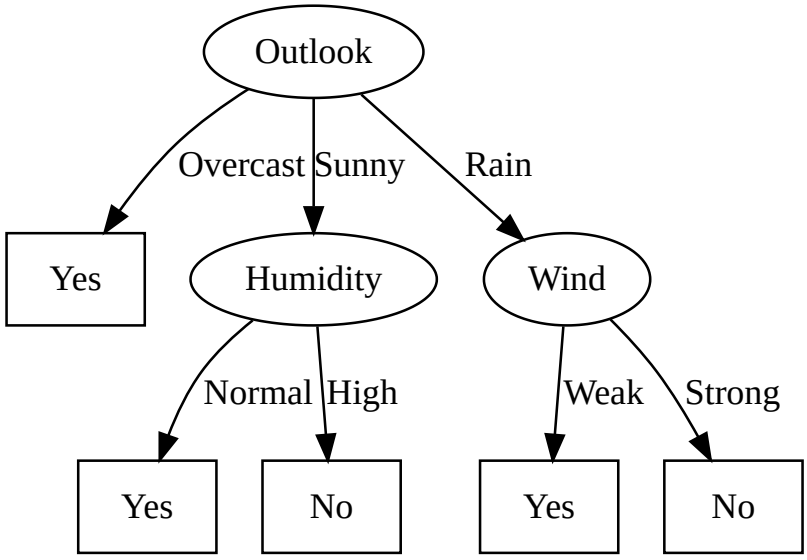
1. Introduzione

Gli alberi decisionali sono un metodo d'apprendimento per approssimare funzioni a valori discreti, .
Vengono impiegati per la risoluzione di problemi aventi le seguenti caratteristiche (a grandi linee):

- Le istanze sono rappresentate da coppie *attributo-valore*, descritte dunque da un insieme finito di attributi e i loro rispettivi, disgiunti e finiti, valori (ad esempio l'attributo *Temperatura* che può assumere valori in {*Calda, Fredda, Mite*})
- La funzione target è a valori discreti (estendibile a funzioni a valori reali)
- La funzione da apprendere può essere descritta da disgiunzioni
- Il training set può contenere errori
- Il training set può contenere attributi con valore mancante

2. Rappresentazione

Ogni **nodo** rappresenta il test di un qualche attributo dell'istanza e ogni **ramo** che parte da tale nodo corrisponde ad uno dei possibili valori che l'attributo in questione può assumere. Le **foglie** rappresentano l'output della funzione target (la classificazione, dunque).
Un'istanza è classificata partendo dalla root dell'albero, testando l'attributo specificato dal nodo e muovendosi seguendo il ramo dell'albero che corrisponde al valore assunto dall'attributo in quell'esempio fino al raggiungimento di una foglia.
In generale un albero decisionale rappresenta **disgiunzioni di congiunzioni** di vincoli sui valori degli attributi delle istanze.
Ogni cammino dalla root ad una foglia è una congiunzione di test sugli attributi, l'albero è la disgiunzione di tali congiunzioni.



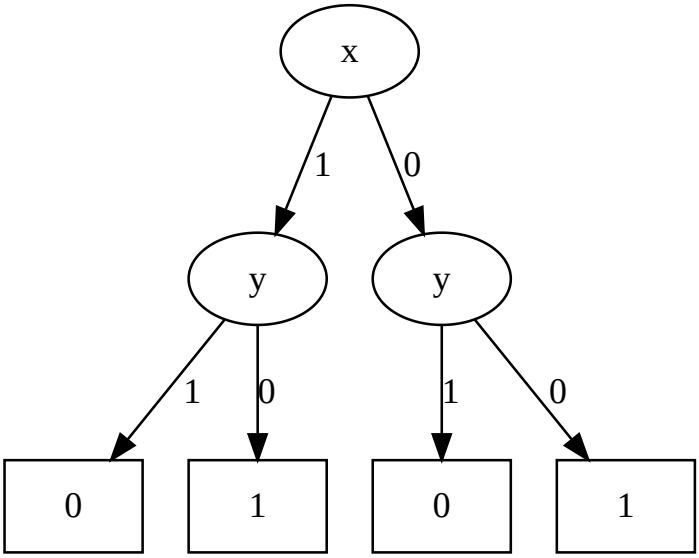
L'albero sopra rappresentato codifica la seguente funzione booleana:
$(Outlook = Sunny \wedge Humidity = Normal) \vee (Outlook = Overcast) \vee (Outlook = Rain \wedge Wind = Weak)$

2.1. Esempio

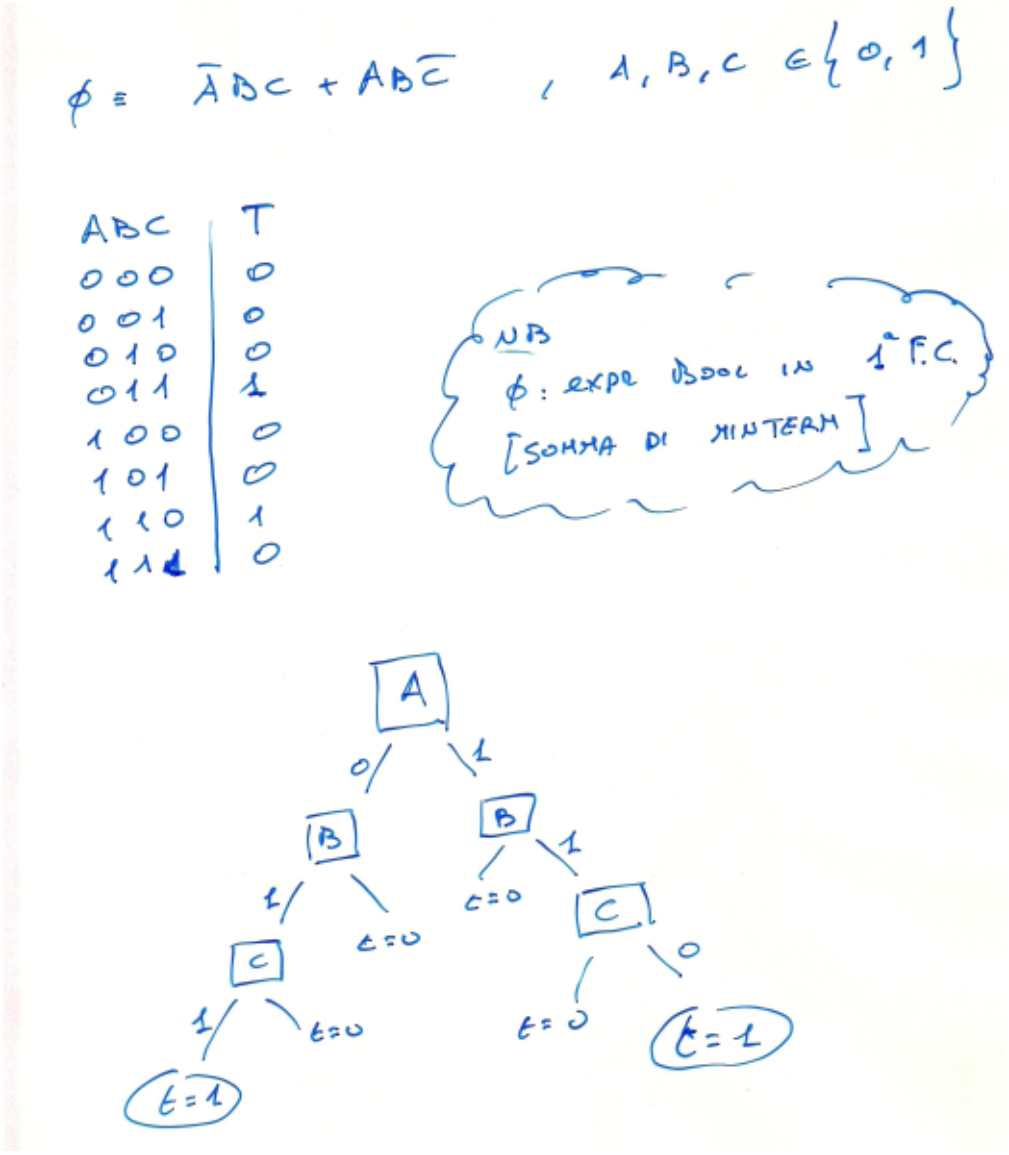
Ad esempio data la segeunte tabella di verità

x	y	z
1	1	0
0	1	1
1	0	0
0	0	1

l'albero decisionale associato ad essa è



> **NOTA BENE**
> Gli alberi decisionali possono esprimere una qualsiasi formula boolena ϕ in prima forma canonica (somma di mintermini)



3. ID3

L'algoritmo di decisione ID3 è un algoritmo **greedy** che costruisce l'albero decisionale in maniera **top-down**, partendo con la seguente domanda: *quale attributo dev'essere testato nella root dell'albero*?
Per rispondere a questa domanda ogni attributo viene valutato mediante un test statistico per determinare quanto bene, da solo, classifica (o partiziona) gli esempi di training, viene selezionato **il migliore attributo** e vengono poi creati tanti discendenti della root quanti sono i valori che tale attributo può assumere. Il processo viene reiterato per ogni discendente della root fino a che l'albero classifica alla perfezione gli esempi di training o non ci sono più attributi da testare.
L'algoritmo è dunque il seguente:

ID3(*Examples*, *Target_attribute*, *Attributes*)

Examples are the training examples. Target_attribute is the attribute whose value is to be predicted by the tree. Attributes is a list of other attributes that may be tested by the learned decision tree. Returns a decision tree that correctly classifies the given Examples.

- Create a *Root* node for the tree
- If all *Examples* are positive, Return the single-node tree *Root*, with label = +
- If all *Examples* are negative, Return the single-node tree *Root*, with label = −
- If *Attributes* is empty, Return the single-node tree *Root*, with label = most common value of *Target_attribute* in *Examples*
- Otherwise Begin
  - $A \leftarrow$ the attribute from *Attributes* that best* classifies *Examples*
  - The decision attribute for *Root* $\leftarrow A$
  - For each possible value, v_i, of A,
    - Add a new tree branch below *Root*, corresponding to the test $A = v_i$
    - Let $Examples_{v_i}$ be the subset of *Examples* that have value v_i for A
    - If $Examples_{v_i}$ is empty
      - Then below this new branch add a leaf node with label = most common value of *Target_attribute* in *Examples*
      - Else below this new branch add the subtree ID3($Examples_{v_i}$, *Target_attribute*, *Attributes* − {A}))
- End
- Return *Root*

* The best attribute is the one with highest *information gain*, as defined in Equation (3.4).

3.1. Entropia

Il test statistico per determinare quale sia il migliore attributo si basa sul concetto di entropia:

> Dato un'insieme S, contenente esempi positivi e negativi di un qualche target concept, l'**entropia** di S è definita come:
>
> $$E(S) = \sum_{i=1}^{c} -p_i log_2(p_i)$$
>
> dove c è il numero totale di classi e p_i è la probabilità che un elemento di S appartenga alla classe i .
> Notare che:
>
> - $E(S) = 0$ se tutti gli elementi di S appartengono ad una stessa classe
> - $E(S) = 1$ se tutte le c classi sono ben bilanciate, ovvero contengono lo stesso numero di esempi

In generale, nell'Information Theory l'entropia rappresenta il **contenuto informativo** associato ad un certo evento: più un evento è raro più informazione otteniamo quando tale evento si verifica.

3.1.1. Esempio

Supponiamo S sia un insieme di 14 esempi di un qualche target concept booleano contenente 9 esempi positivi e 5 esempi negativi ($[9+, 5-]$ per semplicità di notazione), allora l'entropia di S sarà:

$$E(S = [9+, 5-]) = -\frac{9}{14} log_2(\frac{9}{14}) - \frac{5}{14} log_2(\frac{5}{14}) = 0.94$$

3.2. Information gain

Data l'entropia, possiamo ora definire una misura per stabilire quale sia l'attributo che meglio partiziona gli esempi di training:

> L'**information gain** di un attributo A relativo ad un insieme di esempi S è definito come
>
> $$Gain(S, A) \equiv E(S) - \sum_{v \in Values(A)} \frac{|S_v|}{|S|} E(S_v)$$
>
> dove:
>
> - $Values(A)$ è l'insieme dei possibili valori dell'attributo A
> - $S_v = \{s \in S \mid A(s) = v\}$, ovvero è il sottoinsieme di S per cui l'attributo A assume valore v

$Gain(S, A)$ è dunque dato dall'entropia $E(S)$ dell'intero insieme di esempi S meno l'entropia ottenuta partizionando S utilizzando l'attributo A; determina quindi di quanto si riduce l'entropia di S conoscendo il valore assunto dall'attributo A

3.3. Esempio

Supponiamo di avere il seguente training set S:

Day	*Outlook*	*Temperature*	*Humidity*	*Wind*	*PlayTennis*
D1	Sunny	Hot	High	Weak	No
D2	Sunny	Hot	High	Strong	No
D3	Overcast	Hot	High	Weak	Yes
D4	Rain	Mild	High	Weak	Yes
D5	Rain	Cool	Normal	Weak	Yes
D6	Rain	Cool	Normal	Strong	No
D7	Overcast	Cool	Normal	Strong	Yes
D8	Sunny	Mild	High	Weak	No
D9	Sunny	Cool	Normal	Weak	Yes
D10	Rain	Mild	Normal	Weak	Yes
D11	Sunny	Mild	Normal	Strong	Yes
D12	Overcast	Mild	High	Strong	Yes
D13	Overcast	Hot	Normal	Weak	Yes
D14	Rain	Mild	High	Strong	No

e supponiamo che il target concepot da inferire sia PlayTennis.
Come primo passo ID3 determina l'attributo da associare alla root calcolando il $Gain(S, A)$ per ogni attributo A, ovvero:

- $Gain(S, Outlook) = E(S) - \sum_{v \in Values(Outlook)} \frac{|S_v|}{|S|} E(S_v) = E(S) - \frac{5}{14} E(S_{Sunny}) - \frac{4}{14} E(S_{Overcast}) - \frac{5}{14} E(S_{Rain}) = E([9+, 5-]) - \frac{5}{14} E([2+, 3-]) - \frac{4}{14} E([4+, 0-]) - \frac{5}{14} E([3+, 2-]) = 0.94 - 0.35 - 0 - 0.35 = 0.24$
- $Gain(S, Wind) = E(S) - \sum_{v \in Values(Wind)} \frac{|S_v|}{|S|} E(S_v) = E(S) - \frac{6}{14} E(S_{Strong}) - \frac{8}{14} E(S_{Weak}) = 0.94 - 0.43 - 0.46 = 0.05$
- $Gain(S, Temperature) = 0.03$

- $Gain(S, Humidity) = 0.15$

Graficamente la situazione è la seguente: