

Sistemi complessi

Introduzione

Un automa cellulare (AC d'ora in avanti) è un sistema dinamico discreto costituito da una rete regolare di automi a stati finiti (celle), che cambiano i loro stati sulla base dei loro vicini applicando una regola d'aggiornamento locale. Tutte le celle cambiano il loro stato simultaneamente, utilizzando la stessa regola locale; questo processo viene ripetuto iterativamente nel tempo, dove gli istanti di tempo assumono valori discreti. Dunque, gli AC sono:

- **Discreti** nello spazio e nel tempo
- **Omogenei/Uniformi** nello spazio e nel tempo, in quanto gli stati vengono aggiornati, per ogni istante di tempo, applicando la stessa regola locale a tutte le celle
- **Locali** nelle loro interazioni, in quanto l'aggiornamento di una cella dipende solo ed esclusivamente dai suoi vicini

I motivi principali dell'utilizzo di AC derivano principalmente dal fatto che molti processi in natura sono governati da regole locali ed omogenee, come ad esempio la fluidodinamica (interazione tra particelle in un reticolo regolare, dove la regola locale simula la collisione tra di esse), dunque modellabili utilizzando AC; inoltre essi risultano essere modelli matematici di calcolo parallelo: le semplici regole locali d'aggiornamento li rende computazionalmente universali ([Game of Life](#)).

Automi cellulari

Siano A, B due insiemi, indichiamo con B^A l'insieme di tutte le funzioni dall'insieme A nell'insieme B , ovvero $B^A = \{f | f : A \rightarrow B\}$, la cui cardinalità si ricorda essere $|B^A| = |B|^{|A|}$, poiché ogni $a \in A$ posso mapparla in uno dei $|B|$ elementi di B , dunque avrei $|B| \cdot |B| \cdot |B| \dots |B|$, $|A|$ volte. Essendo gli AC discreti nello spazio e nel tempo, le funzioni che andremo a considerare saranno del tipo

$A^{\mathbb{Z}^k} = \{f | f : \mathbb{Z}^k \rightarrow A, k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$, dove A è un insieme finito di simboli, rappresentanti i possibili **stati** dell'AC; dunque un elemento $x \in A^{\mathbb{Z}^k}$, che assegna ad ogni "posizione" di \mathbb{Z}^k uno stato $a \in A$ è detto **configurazione**. Una configurazione può essere vista come uno *snapshot* di tutti gli stati delle celle del sistema ad un certo tempo t . La nostra trattazione verterà principalmente su AC 1- e 2-dimensionali, ovvero tali per cui $1 \leq k \in \mathbb{N} \leq 2$: in questi casi una configurazione può essere vista come una stringa bi-

infinita $(\dots a_{-i} a_{-i+1} a_{-i+2} \dots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots a_{i-2} a_{i-1} a_i \dots)$, dove $a_i \in A$ rappresenta lo stato assunto dalla cella i , $\forall i \in \mathbb{Z}$, nel caso 1-dimensionale, o come una matrice bi-infinita nel caso 2-dimensionale. Definiamo ora il concetto di **distanza** nel caso di AC 1-dimensionali.

Dati $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ si definisce distanza la funzione $d(x, y) : A^{\mathbb{Z}} \times A^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tale che

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ \frac{1}{2^n} & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

dove $n = \min\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq y_i \vee x_{-i} \neq y_{-i}\}$

Si può dimostrare che tale funzione è una **metrica**. Ad esempio, sia $A = \{0, 1\}$. Siano $x, y \in A^{\mathbb{Z}}$ tali che:

- $x = (\dots 1_{-3} 1_{-2} 0_{-1} 1_0 1_1 0_2 1_3 \dots)$
- $y = (\dots 0_{-3} 1_{-2} 0_{-1} 1_0 1_1 0_2 1_3 \dots)$

dove al pedice sono rappresentate le posizioni delle celle, allora in questo caso $n = 3$, poiché $i = -3$ è la prima posizione (quella più piccola) in cui le due stringhe bi-infinite differiscono.

Vale inoltre la seguente proposizione:

$$\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, \forall n \in \mathbb{N}, d(x, y) < \frac{1}{2^n} \iff x_{[-n, n]} = y_{[-n, n]}$$

dove con

$a_{[-n, n]} \subset a \in A^{\mathbb{Z}} = (a_{-n} a_{-n+1} \dots a_{-2} a_{-1} a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n)$ si indica la "finestra" della stringa bi-infinita a , di raggio n e centrata nello 0.

Dimostrazione:

- \implies Infatti se nella finestra di raggio n le stringhe x e y fossero diverse, allora esisterebbe un $m \in \mathbb{N}, m < n : x_{-m} \neq y_{-m} \vee x_m \neq y_m$. Sia \overline{m} il più piccolo tra essi, allora $d(x, y) = \frac{1}{2^{\overline{m}}} > \frac{1}{2^n}$, assurdo.
- \longleftarrow Infatti $x_{[-n, n]} = y_{[-n, n]} \implies \exists m \in \mathbb{N}, m > n : x_{-m} \neq y_{-m} \vee x_m \neq y_m$. Sia \overline{m} il più piccolo tra essi, allora $d(x, y) = \frac{1}{2^{\overline{m}}} < \frac{1}{2^n}$. Se tale m non esiste allora $d(x, y) = 0 < \frac{1}{2^n}$.

Definiamo dunque un **automa cellulare 1-D** come una tripla $\langle A, r, f \rangle$ tale che:

- A è un insieme finito di simboli, rappresentanti i possibili **stati** assumibili dall'AC

- $r \in \mathbb{N}$ è detto **raggio**
- $f : A^{2r+1} \rightarrow A$ è detta **regola locale**, che definisce l'aggiornamento di stato locale di una cella sulla base del suo "vicinato"

Dunque il numero massimo di AC differenti è $|A|^{|A|^{2r+1}}$

Una regola locale può essere fornita in forma tabellare (si pensi ad una funzione di transizione di un automa a stati finiti o di una macchina di Turing), ad esempio:

- $A = \{0, 1\}$
- $r = 1$
- $f : A^3 \rightarrow A$ così definita:

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Se $A = \{0, 1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$ e A è finito, questa stessa regola locale può essere invece fornita come la conversione in base $|A|$ dell'ultima colonna di tale tabella, con la cifra più significativa in ultima posizione, ammesso che le combinazioni di possibili tuple siano fornite, in ordine, dalla più piccola alla più grande. Ovvero, data la funzione

d'aggiornamento locale f , definiamo $n_f = \sum_{i=0}^{|A|^{2r+1}-1} a_i \cdot |A|^i$, con $a_i \in A$ elemento i -esimo della tabella. In questo caso avremo:

$$n_f = \sum_{i=0}^{2^3-1} a_i \cdot 2^i = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7$$

Abbiamo detto che un AC evolve nel tempo in maniera uniforme, ovvero, per ogni istante di tempo, la stessa regola locale viene applicata a tutte le celle dell'automa. Definiamo dunque la **regola globale di un AC 1-D**:

Dato $\langle A, r, f \rangle$ AC, la **regola globale** è la funzione
 $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}, \forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}$

$$F(x)_i = f(x_{i-r}, \dots, x_i, \dots, x_{i+r}) = f(x_{[i-r, i+r]})$$

dove $f(x_{[i-r, i+r]})$ al solito si intende la finestra della stringa x , di ampiezza r e centrata in i

L'applicazione di $F \forall i \in \mathbb{Z}$ è un aggiornamento dello stato di un AC di tipo:

- **Sincrono**
- **Parallelo**, in quanto ottengo il nuovo stato sulla base di quello vecchio, dunque posso applicare la F in parallelo a tutte le celle di una configurazione ad un determinato tempo t
- **Locale**, in quanto l'aggiornamento viene effettuato sulla base di un numero finito e fissato di vicini della cella i -esima, ovvero nel *cono* $[i - r, i + r]$
- **Uniforme** perchè viene applicata sempre la stessa regola locale per aggiornare tutte le $i \in \mathbb{Z}$ celle

Definiamo ora una particolare funzione d'interesse, ovvero la funzione **SHIFT** (a sinistra):

Dato un AC $\langle A, r, f \rangle$, la funzione $\text{SHIFT} : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ è tale che
 $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, \text{SHIFT}(x)_i = x_{i+1}$

Possiamo dunque dare ora una definizione alternativa di AC, ovvero:

Un automa cellulare è una funzione $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tale che F è **continua** e $\text{SHIFT} \circ F = F \circ \text{SHIFT}$, ovvero si dice che **commuta con lo SHIFT**. La funzione SHIFT verrà indicata d'ora in avanti con il simbolo σ

E' naturale chiedersi a questo punto quali condizioni deve soddisfare una funzione $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tale da essere la regola globale di un automa cellulare. Tali condizioni ci vengono fornite dal **teorema di Hedlund**:

Sia $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ una qualsiasi funzione. F è la regola globale di un AC $\iff F$ è continua $\wedge F \circ \sigma = \sigma \circ F$

Dimostrazione:

- \implies
 Suppongo F sia la regola globale di un AC $\langle A, r, f \rangle$.
 Voglio dimostrare che F è continua, ovvero $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, F$ è **continua in x** se
 $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall y \in A^{\mathbb{Z}}, d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon$.
 Scelti arbitrariamente $x \in A^{\mathbb{Z}}, \epsilon > 0$, allora esiste sempre un $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^n} < \epsilon$.
 Voglio dimostrare che $d(F(x), F(y)) < \frac{1}{2^n} < \epsilon$, che è come dimostrare che
 $F(x_{[-n, n]}) = F(y_{[-n, n]})$.

Dalla definizione di regola globale di un AC sappiamo che $F(x_{[-n,n]})$ dipende unicamente da $x_{[-n-r,n+r]}$.

Dunque scegliendo $\delta = \frac{1}{2^{n+r}}$, per il teorema della distanza, si avrà che

$x_{[-n-r,n+r]} = y_{[-n-r,n+r]} \iff d(x, y) < \delta = \frac{1}{2^{n+r}}$, dunque a maggior ragione vale che $x_{[-n,n]} = y_{[-n,n]}$ e quindi $F(x_{[-n,n]}) = F(y_{[-n,n]})$.

F è inoltre **uniformemente continua**, in quanto δ dipende da n e quindi da ϵ , ma non da x .

Dimostriamo ora che F commuta con lo SHIFT, ovvero che $F \circ \sigma = \sigma \circ F$. Infatti, $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}$:

- $(F \circ \sigma)(x)_i = F(\sigma(x))_i = f(\sigma(x)_{[-i-r,i+r]}) = f(x_{[-i-r+1,i+r+1]})$
- $(\sigma \circ F)(x)_i = \sigma(F(x))_i = F(x)_{i+1} = f(x_{[-i-r+1,i+r+1]})$

• \Leftarrow

Sia $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ tale che F è continua e commuta con lo shift. Vogliamo dimostrare che esiste un AC tale che F è la sua regola globale.

Sapendo che $A^{\mathbb{Z}}$ è un insieme **compatto** e sapendo che F è continua per ipotesi, allora per il teorema del regalo (ovvero il **teorema di Heine-Cantor**), F è uniformemente continua, ovvero:

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, d(x, y) < \delta \implies d(F(x), F(y)) < \epsilon$.

Sia dunque $\epsilon = 1$, allora $d(F(x), F(y)) < 1 \iff F(x)_0 = F(y)_0$.

Dunque, scelto un qualsiasi $r \in \mathbb{N} : \frac{1}{2^r} < \delta$ vale che

$x_{[-r,r]} = y_{[-r,r]} \implies F(x)_0 = F(y)_0$.

Definiamo ora $f : A^{2r+1} \rightarrow A \mid \forall u \in A^{2r+1}, f(u) = F(z)_0$ con $z \in A^{\mathbb{Z}}$ una qualunque stringa bi-infinita tale che $z_{[-r,r]} = u$.

Dimostriamo ora che $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, \forall i \in \mathbb{Z}, F(x)_i = f(x_{[-i-r,i+r]})$, ovvero che F è regola globale.

- i. $\forall x \in A^{\mathbb{Z}}, f(x_{[-r,r]}) = F(x)_0$ per definizione di f
- ii. Sia $i \neq 0$, allora $F(x)_i = \sigma^i(F(x)_0) = F(\sigma^i(x))_0$ (avendo a priori dimostrato per induzione che $F \circ \sigma^k = \sigma^k \circ F$). Dunque $F(\sigma^i(x))_0 = f(\sigma^i(x_{[-r,r]})) = f(x_{[i-r,i+r]})$

Dal teorema seguono i seguenti **corollari**:

- Se $F : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$ è la regola globale di un AC, allora F^k è anch'essa la regola globale di un AC. Infatti avremo che $F^k \circ \sigma = F^{k-1} \circ F \circ \sigma = F^{k-1} \circ \sigma \circ F$, e iterando il processo $k-1$ volte si otterrà $\sigma \circ F \circ \dots \circ F = \sigma \circ F^k$, dunque F commuta con lo shift; inoltre la composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua, ergo F è la regola globale di un AC

- Se $F, G : A^{\mathbb{Z}} \rightarrow A^{\mathbb{Z}}$, allora $F \circ G$ è la regola globale di un AC
- Sia F la regola globale di un AC, dunque continua (uniformemente) e che commuta con lo shift, e supponiamo F sia invertibile. Essendo $A^{\mathbb{Z}}$ un insieme compatto, allora anche F^{-1} è continua. Vale inoltre che $F \circ \sigma \circ F^{-1} = \sigma \circ F \circ F^{-1}$, dunque $F^{-1} \circ F \circ \sigma \circ F^{-1} = F^{-1} \circ \sigma \circ F \circ F^{-1} \equiv \text{Id} \circ \sigma \circ F^{-1} = F^{-1} \circ \sigma \circ \text{Id}$

Diamo ora la seguente definizione:

$x \in A^{\mathbb{Z}}$ è **spazialmente periodica**

$\iff \exists u \in A^k, k \in \mathbb{Z} : x = (\dots uuuuu \dots) =^{\infty} u^{\infty}$, o in modo
equivalente $\iff \exists k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 : \sigma^k(x) = x$

Dunque se $x \in A^{\mathbb{Z}}$ è spazialmente periodica, allora anche $F(x)$ è spazialmente periodica. Infatti $F(x) = F(\sigma^k(x)) = \sigma^k(F(x))$, che è proprio la definizione di spazialità periodica.