Teoria della computazione

1. Problemi di decisione e macchine di Turing

Nella teoria della computazione si è interessati a classificare i problemi sulla base della loro difficoltà di risoluzione mediante strumenti o macchine di calcolo, dove per difficoltà di risoluzione si intende la difficoltà stimata rispetto all'uso di risorse di calcolo quali tempo e spazio.

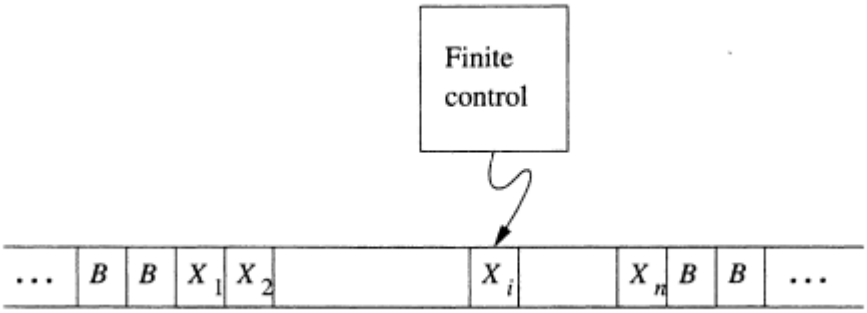
I problemi classificati d'interesse sono quelli cosidetti di **decisione** definiti come:

> Data una funzione booleana $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$, l'insieme dei linguaggi o problemi di decisione associati alla funzione f sono dati dall'insieme $L_f = \{x \in \{0,1\}^* \mid f(x) = 1\}$
> Si identifica inoltre il problema di **calcolare** f, ovvero dato $x \in \{0,1\}^*$ calcolare $f(x)$, con il problema di **decidere** il linguaggio L_f, ovvero dato $x \in \{0,1\}^*$ decidere se $x \in L_f$

Breve recap sulla definizione di difficoltà di risoluzione di un problema da parte di un algoritmo:

> Date $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ allora diciamo che:
>
> 1. $f = O(g)$ se $\exists c, n_0 \in \mathbb{N} : f(n) \leq c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$ ovvero se g limita "da sopra" f ($f(n) \leq c \cdot g(n)$) da un certo punto in avanti ($\forall n \geq n_0$)
> 2. $f = \Omega(g)$ se $g = O(f)$, ovvero se g limita "da sotto" f
> 3. $f = \Theta(g)$ se $f = O(g) \land g = O(f)$, ovvero se f è limitata "da sopra" e "da sotto" da g
> 4. $f = o(g)$ se $\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, f(n) \leq \epsilon \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$
> 5. $f = \omega(g)$ se $g = o(f)$

Come strumento o macchina di calcolo vengono utilizzate le **Macchine di Turing**.
Una macchina di Turing consiste in un *controllo finito*, un *nastro* diviso in *celle* ognuna delle quali può contenere un solo simbolo appartenente all'insieme dei simboli di nastro.
Inizialmente *l'input*, rappresentato da una stringa di lunghezza finita, viene posto sul nastro, un simbolo per cella. Tutte le altre celle contengono un simbolo detto *blank*.
La macchina è dotata di una *testina* che, posizionata su di una cella del nastro, legge o scrive un simbolo e può muoversi di una posizione a destra o a sinistra del simbolo letto/scritto.



Una TM M è definita come:

> $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ dove:
>
> - Q insieme finito degli *stati*
> - Σ insieme finito dei simboli *in input*
> - Γ insieme finito dei simboli di *nastro*
> - $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ funzione di transizione che, presa in input una coppia composta dallo stato attuale e dal simbolo del nastro letto dalla testina, restituisce una tripla composta dallo stato successivo, il simbolo da scrivere sul nastro e il movimento che la testina deve eseguire (Left, Right)
> - $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
> - $B \in \Gamma$ è il simbolo di *Blank*
> - F insieme di stati *finali* o *d'accettazione*

Sopra si è data la definizione di macchina di Turing *deterministica*, esiste anche una definizione di macchina di Turing *non deterministica* in cui la funzione di transizione δ ritorna un'insieme *finito* di triple del tipo $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$

Lo stato complessivo di una TM si può dunque così rappresentare:

$$X_1 X_2 ... X_{i-1} q X_i X_{i+1} ... X_n$$

dove:

- $X = X_1 ... X_n \in \Sigma^*$ è la stringa di input attualmente sul nastro
- $q \in Q$ è lo stato attuale del controllo finito
- X_i è il simbolo dell'input attualmente letto dalla testina da sinistra

Una mossa (descritta dalla funzione di transizione δ) è indicata dal simbolo $\vdash$, ad esempio se $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$ allora si avrà

$$X_1 X_2 ... X_{i-1} q X_i X_{i+1} ... X_n \vdash X_1 X_2 ... X_{i-2} p X_{i-1} Y X_{i+1} ... X_n$$

Una o più mosse di una TM sono indicate con $\vdash^*$

Una TM M va nello stato **halt** se non esistono transizioni da applicare, ovvero se $\delta(q, X_i) = \emptyset$ per un qualche $q \in Q, X_i \in \Sigma$.
Una TM M dunque:

- **Accetta** una stringa $w \in \Sigma^*$ se va in *halt* in uno stato stato finale, ovvero se $\delta(q, X_i) = \emptyset,\ q \in F, X_i \in \Sigma$
- **Rifiuta** una stringa $w \in \Sigma^*$ se va in *halt* in uno stato stato non finale, ovvero se $\delta(q, X_i) = \emptyset$ per un qualche $q \notin F, X_i \in \Sigma$ o se entra in un *loop infinito*

Definiamo dunque il **linguaggio accettato** da una TM M come:

> Data una TM M
> $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid q_0 w \vdash^* \alpha p \beta$, con $p \in F$ e $\alpha, \beta \in \Gamma\}$

Essendo di **decisione** i problemi d'interesse per la teoria della computazione, si può dimostrare che ogni stringa $w \in \Sigma^*$ può essere tradotta in una stringa binaria $x_w \in \{0,1\}^*$ e che per ogni macchina di Turing M che accetta stringhe $w \in \Sigma^*$ ne esiste un'altra M' che accetta le corrispettive traduzioni binarie $x_w \in \{0,1\}^*$.

Avevndo ora definito formalmente lo strumento/macchina di calcolo possiamo dare la definizione di **funzione calcolabile/computabile in tempo $T(n)$**, ovvero:

> Siano $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*,\ T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e sia M una macchina di Turing. Allora diciamo che M **calcola/computa f in tempo $T(n)$** se $\forall x \in \{0,1\}^*,\ q_0 x \vdash^* p f(x)$ con $p \in F$ in un numero di mosse al più pari a $T(|x| = n)$
> Diciamo che M **calcola/computa f** se M calcola f in tempo $T(n)$ per qualche funzione $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Dunque diciamo che

> - un linguaggio L è **deciso (ricorsivo)** se esiste una macchina di Turing M che calcola la funzione $f_L : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ definita come $\forall x \in L,\ x \in L \implies f_L(x) = 1 \land x \notin L \implies f_L(x) = 0$
> - un linguaggio L è **accettato (ricorsivamente enumerabile)** se esiste una macchina di Turing M che calcola la funzione $f_L : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$ definita come $\forall x \in L,\ f_L(x) = 1 \iff x \in L$

Ovviamente se la funzione f_L è una funzione calcolabile in tempo $T(n)$, allora il linguaggio L diventa *deciso/accettato in tempo $T(n)$*

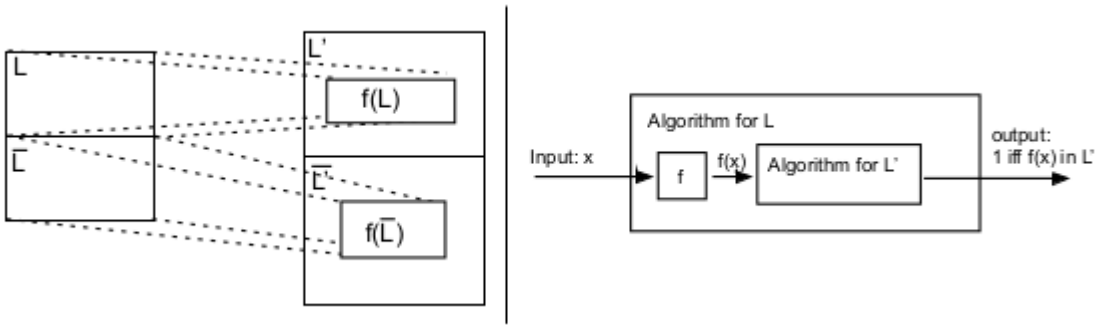
2. Classi di problemi

2.1. Definizioni

> $\mathbf{P} =$ classe di problemi o linguaggi *accettati* in tempo $T(n) = c \cdot n^p$ da una TM M deterministica

> $\mathbf{NP} =$ classe di problemi o linguaggi *accettati* in tempo $T(n) = c \cdot n^p$ da una TM M non deterministica, oppure più formalmente
> $\mathbf{NP} =$ classe di linguaggi o problemi tali per cui esistono un polinomio $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e una TM M deterministica tale che $\forall x \in \{0,1\}^*, x \in L \subseteq \{0,1\}^* \iff \exists u \in \{0,1\}^{p(|x|)} : M(x,u) = 1$, ovvero si riesce a verificare in tempo polinomiale che un input x è *accettato* (o è un'istanza SI del problema) se viene presentata una prova u di questo fatto.

> Un linguaggio $A \in \{0,1\}^*$ si **riduce polinomialmente** ad un linguaggio $B \in \{0,1\}^*$ ($A \leq_p B$) se esiste una *funzione computabile in tempo polinomiale* f tale che $\forall x \in \{0,1\}^*, x \in A \iff f(x) \in B$



> B è $\mathbf{NP}$-hard se $\forall A \in \mathbf{NP},\ A \leq_p B$

> B è $\mathbf{NP}$-completo se B è $\mathbf{NP}$-hard e $B \in \mathbf{NP}$

Vale inoltre il seguente teorema:

1. $A \leq_p B \land B \leq_p C \implies A \leq_p C$
2. $A \in \mathbf{NP}$-hard $\land\ A \in \mathbf{P} \implies \mathbf{P} = \mathbf{NP}$
3. $A \in \mathbf{NP}$-completo $\implies (A \in \mathbf{P} \iff \mathbf{P} = \mathbf{NP})$

2.2. Problemi $\mathbf{NP}$-completi

Alcuni esempi di problemi di decisione da noi trattati sono:

- **3-SAT**: data una formula booleana ϕ in *CNF form* (*Conjunctive Normal Form*), ovvero del tipo $\phi = c_1 \land c_2 \land \ldots \land c_n$ dove ogni clausola c_i è la disgiunzione $\lor$ di al più tre letterali (variabili logiche o

le loro negazioni $\neg$), stabilire se esiste un assegnamento alle varibili z tale che $\phi(z) = 1$, ovvero stabilire se ϕ è soddisfacibile

- **INDipendence-SET**: dato un grafo $G = (V, E)$ e un intero $k \in \mathbb{N}$, stabilire se esiste un sottoinsieme $I \subseteq V$ tale che $|I| \geq k \land \forall u, v \in I$ vale che $u, v \in I \implies (u, v) \notin E$, ovvero ci si chiede se esiste un sottoinsieme di almeno k vertici che presi a due a due non sono collegati da nessun arco in E
- **Vertex-Cover**: dato un grafo $G = (V, E)$ e un intero $k \in \mathbb{N}$, stabilire se esiste un sottoinsieme $V' \subseteq V$ tale che $|V'| \leq k \land \forall (u, v) \in E$ vale che $(u, v) \in E \implies u \in V' \lor v \in V'$, ovvero ci si chiede se esiste un sottoinsieme di al più k vertici che toccano tutti gli archi di G, formando appunto una copertura
- **Set-Cover**: dato un insieme universo U di n elementi, una collezione $S = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ tale che $S_i \subseteq U \land \cup_{i=1}^{m} S_i = U$ e un intero $k \in \mathbb{N}$, stabilire se esiste una collezione $C \subseteq S$ tale che $|C| \leq k \land \cup_{j=1}^{k} C_j = U$
- **HAMILtonian-cycle**: dato un grafo $G = (V, E)$, stabilire se esiste un cammino che visita, partendo da un nodo $v \in V$ e tornando in v, ogni nodo di G esattamente una sola volta
- **TSP (Travelling Salesman Problem)**: dato un grafo $G = (V, E, w)$ completo e pesato, con pesi sugli archi dati da w, tali che $\forall e \in E, w(e) > 0$, e un intero $k \in \mathbb{N}$, stabilire se esiste, preso un vertice $v \in V$, un cammino da v a v che visita ogni nodo di G esattamente una sola volta e di costo $c \leq k$

Andremo ora a dimostrare che:

- 3-SAT $\leq_p$ IND-SET $\leq_p$ VC $\leq_p$ SC (3-SAT è $\mathbf{NP}$-completo per il teorema di Cook-Levin)
- HAMIL $\leq_p$ TSP (non so chi, ma qualcuno ha sicuramente dimostrato che HAMIL è $\mathbf{NP}$-completo)

Per i problemi di cui sopra è stata fornita la variante decisionale, in cui viene posto il problema di "stabilire se esiste...". Per ognuno di essi si può enunciare il problema di ottimo associato, che mira a trovare la soluzione più generale possibile. Ad esempio VC sarà così formulato: "Qual'è *il più piccolo* insieme tale che...", mentre per IND-SET avremo: "Qual'è *il più grande insieme* tale che..."

2.2.1. 3-SAT $\leq_p$ IND-SET

Data un'istanza I di 3-SAT, un grafo $G = (V, E)$ e un intero $k \in \mathbb{N}$, I è soddisfacibile $\iff$ G ha un indipendent set di cardinalità k.

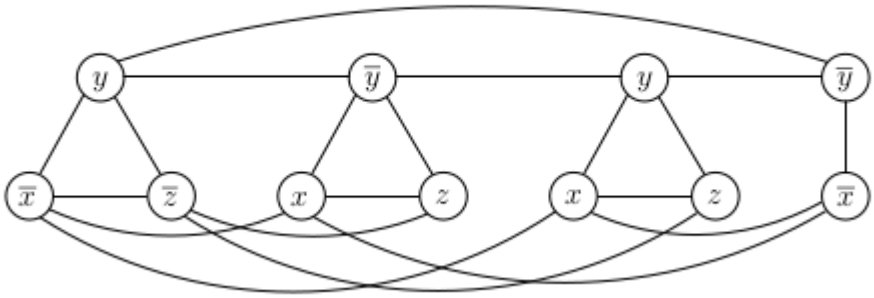
2.2.1.1. Parte 1

Data un'istanza $I \in$ 3-SAT creiamo un'istanza $(G, k) \in$ IND-SET in questo modo:

- il grafo G ha un triangolo per ogni clausola, con i tre vertici etichettati con i letterali di quest'ultima e collegati tra loro da un arco. Si collega inoltre ogni letterale con il suo negato (se esiste)

- Poniamo k uguale al numero di clausole in I

Figure 8.8 The graph corresponding to $(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})\ (x \vee \overline{y} \vee z)\ (x \vee y \vee z)\ (\overline{x} \vee \overline{y})$.



2.2.1.2. Parte 2

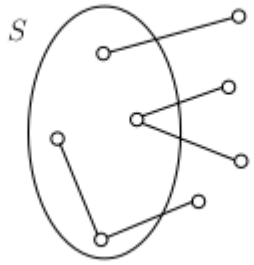
Ora dobbiamo dimostrare che:

1. IND-SET $\in \mathbf{NP}$, ma data una soluzione è facile verificare in tempo polinomiale che questa soddisfa IND-SET
2. Se $S \subseteq V$ è un indipendence set di k vertici allora I è soddisfacibile. Per ogni letterale x, S non può contenere sia x che $\neg x$, poichè tali vertici sono collegati da un arco per costruzione di G, inoltre essendo che S ha cardinalità k, sempre per costruzione di G conterrà un solo letterale per clausola. Dunque ponendo $x = 1$ se S contiene un vertice etichettato con x o $x = 0$ se S contiene un vertice etichettato con $\neg x$, si ottiene un assegnamento che rende veri tutti i letterali contenuti in S, rendendo dunque vera I
3. Se I ha un assegnamento che la rende soddisfacibile allora G ha un indipendence set di cardinalità k. Per ogni clausola prendo un letterale x tale che $x = 1$ (ne esiste almeno uno per clausola) e lo aggiungo a S. Per le stesse considerazioni fatte al punto 1. S è un indipendence set

2.2.2. IND-SET $\leq_p$ VC

Avendo dimostrato che IND-SET è un problema $\mathbf{NP}$-completo e notando che se un insieme $S \subseteq V$ è un insieme indipendente per un qualche grafo $G = (V, E)$, allora l'insieme $V - S$ è una copertura per G, la dimostrazione che IND-SET $\leq_p$ VC risulta triviale (vale anche il viceversa).
Infatti basta dimostare che, dato un grafo $G = (V, E)$, un insieme $S \subseteq V$ è un insieme indipendente di $G \iff V - S$ è una copertura per G.

Figure 8.9 S is a vertex cover if and only if $V - S$ is an independent set.



1. Se un insieme $S \subseteq V$ è un insieme indipendente di G allora $V - S$ è una copertura per G. Per definizione di insieme indipendente vale che non esiste nessun arco $(u, v) \in E$ tale che $u \in S \land v \in S$. Allora deve valere che $u \in V - S \lor v \in V - S$, allora $V - S$ è una copertura.
2. Se $V - S$ è una copertura per G allora S è un insieme indipendente. Per definizione di copertura, $\forall (u, v) \in E,\ u \in V - S \lor v \in V - S$, dunque non può mai succedere che entrambi u e v appartengano a S

2.2.3. VC $\leq_p$ SC

Dobbiamo dimostrare che esiste una funzione f che mappi ogni istanza di VC in un'istanza di SC, ovvero che esiste una funzione $f(G, k) = (U, S, l)$ per cui G ha vertex cover di k elementi $\iff$ U ha un set cover di l elementi.

2.2.3.1. Parte 1

Avendo numerato i vertici di V da 1 a n, costruiamo f in questo modo:

- $U = E$
- $S = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ è tale che $S_i = \{\text{archi incidenti al vertice } i\},\ \forall i = 1, ..., n$
- $k = l$

2.2.3.2. Parte 2

Ora dobbiamo dimostrare che:

1. SC $\in \mathbf{NP}$. Avendo una collezione C' è banale provare in tempo polinomiale che questa sia una soluzione per SC.
2. Se G ha una copertura di k vertici allora U ha una copertura di $l = k$ vertici. Supponiamo C sia una copertura per G di cardinalità k, allora per costruzione, ad essa corrisponde un insieme $C' \subseteq S$ di pari cardinalità. Essendo $U = E$ ed essendo C una copertura per G, $\forall u \in U$ vale che uno dei suoi estremi appartiene a C, dunque C' contiene almeno un insieme associato agli estremi di u, e per definizione, entrambi contengono u. (Oppure, essendo C una copertura di G, per definizione essa forma un insieme i cui elementi toccano tutti gli archi di E. Sia $C' \subseteq U$ l'insieme

formato dalle collezioni associate ai vertici di C ($|C'| = |C| = k$). Ogni $C_j \in C'$ contiene gli archi incidenti al vertice j, la loro unione è dunque U)

3. Dimostriamo ora il viceversa. Sia C' una copertura di U. Allora $\forall u \in U$ sicuramente C' contiene almeno un insieme che include u. Tale insieme corrisponde ad un nodo che è estremo di u (poichè contiene i suoi incidenti), quindi C deve contenere almeno un estremo di u

2.2.4. HAMIL $\leq_p$ TSP

Dati due grafi $G = (V, E)$ e $G' = (V', E', w)$ e due interi $k, c \in \mathbb{N}$ con $c > k$, G ha un ciclo hamiltoniano di lunghezza $k \iff G'$ ha un ciclo che visita tutti i nodi di G' una sola volta e di costo $k|V|$

2.2.4.1. Parte 1

Dobbiamo prima di tutto costruire una funzione che mappi ogni instanza di HAMIL in un'istanza di TSP in modo che HAMIL risponde 1 $\iff$ TSP risponde 1.
Dunque:

- $V' = V$
- $E' = \{(u, v) \mid u, v \in V \land u \neq v\}$
- $w : E' \to \{k, c\}$ è tale che $\forall e \in E'$ vale che $e \in E \implies w(e) = k \land e \notin E \implies w(e) = c$

2.2.4.2. Parte 2

Si dimostra dunque che:

1. TSP $\in \mathbf{NP}$, ma avendo un cammino e un intero $h \in \mathbb{N}$ è facile verificare in tempo polinomiale che questo è soluzione di TSP
2. Se esiste un ciclo che visita tutti i nodi di G' una e una sola volta e di costo $k|V|$ ciò sigifica che deve per forza essere costituito da archi di peso k, infatti se ci fosse anche solo un arco di peso c allora il costo complessivo supererebbe $k|V|$. Tali archi sono anche in G e quindi esiste il ciclo hamiltoniano.
3. Se esiste un ciclo hamiltoniano in G, questo è sicuramente costituito da $|V|$ archi. Percorrendo gli stessi archi in G' otteniamo un cammino lungo $|V|$ archi tutti di peso k, quindi di costo $k|V|$

2.3. Algoritmi ϵ-approssimanti

I problemi $\mathbf{NP}$-hard sono i più difficili problemi di ottimizzazione, dunque, a meno che $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ non esistono algoritmi efficienti che li risolvano.
Entrano dunque in gioco i cosiddetti algoritmi ϵ-approssimanti, che trovano una soluzione ammissibile

del problema in tempo polinomiale che dista dalla soluzione ottima per una fattore ϵ.
Dunque:

> Dato un problema π e un'istanza x, indichiamo con $\mathbf{opt}(x)$ il costo della *soluzione ottima* di π sull'istanza x, mentre con $\mathcal{A}(x)$ il costo della *soluzione ammissibile* su x calcolato da un algoritmo $\mathcal{A}$

> Un **algortimo ϵ-approssimato** per un problema π di ottimizzazione è un algoritmo $\mathcal{A}$ *polinomiale* tale che restituisce una soluzione ammissibile che dista dalla soluzione ottima di un fattore costante ϵ, ovvero:
>
> - $\mathbf{opt}(x) < \mathcal{A}(x) \leq \epsilon \cdot \mathbf{opt}(x)$, per $\epsilon > 1$ se π è un *problema di minimo*
> - $\mathbf{opt}(x) > \mathcal{A}(x) \geq \epsilon \cdot \mathbf{opt}(x)$, per $0 < \epsilon < 1$ se π è un *problema di massimo*

> Un *polynomial-time approximation scheme* (**PTAS**) è una famiglia di algoritmi $\{A_\epsilon\}$ in cui esiste un algortimo $\forall \epsilon > 0$, tale che A_ϵ è un algoritmo $(1+\epsilon)$-approssimato (per un problema di minimo) o un algoritmo $(1-\epsilon)$-approssimato (per un problema di massimo)

> Esistono problemi di ottimizzazione che **non ammettono** un algoritmo ϵ-approssimato

2.3.1. 2-approssimazione per VC

Dato un grafo $G = (V, E)$, definiamo un algoritmo 2-approssimato per VC in questo modo:

1. $C = \emptyset$
2. Scelto un arco $e = (u, v) \in E,\ C = C \cup \{u, v\}$
3. Rimuovi da E gli archi coperti da u e v
4. Torna al punto 2. se $E \neq \emptyset$

Questo algoritmo restituisce una copertura di dimensione $2k$, ovvero $\mathcal{A}(x) = 2k$, dove k è il numero di archi scelti in E.
Sia $M = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ l'insieme degli archi scelti, allora essi non condividono vertici, formano un cosidetto *matching*, ovvero una copertura di archi che non condividono vertici.
Dimostriamo prima di tutto che una minima copertura di vertici $V' \subseteq V$ ha dimensione non inferiore a quella del matching.
Infatti presi due archi e_1 e e_2 che non condividono vertici, allora ci deve essere almeno un vertice in V' per entrambi gli archi, dunque se k è la dimensione del matching si avrà che $|V'| \geq k$.
Dunque si avrà che $\mathbf{opt}(x) \geq k \land \mathcal{A}(x) \leq 2k$ e quindi $\mathcal{A}(x) \leq 2k \leq 2 \cdot \mathbf{opt}(x)$

2.3.2. TSP non ha un'ϵ-approssimazione

Nel problema del TSP, nella sua versione di ottimizzazione, viene fornito un grafo $G = (V, E, w)$, con $w(e) > 0 \; \forall e \in E$, e si chiede di trovare un ciclo hamiltoniano di costo minimo (un ciclo è detto hamiltoniano se visita ogni vertice in V esattamente una sola volta).
TSP è un problema $\mathbf{NP}$-hard, dunque non possiamo trovare un algortimo che approssima TSP in tempo polinomiale a meno che $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, questo perchè se un tale algoritmo esistesse allora potremmo risolvere in tempo polinomiale HAMIL, che è $\mathbf{NP}$-completo, il che non è possibile a meno che $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$.
Vale dunque il seguente teorema:

> TSP non ha un'approssimazione costante a meno che $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$

Sia $G = (V, E)$ un grafo di cui vogliamo determinare se esiste un ciclo hamiltoniano. Costruiamo l'input $G' = (V, E', w)$ per TSP in questo modo:

- $E' = \{(u, v) \mid u, v \in V \land u \neq v\}$
- $\forall e \in E', \; w(e)$ è tale che $e \in E \implies w(e) = 1 \land e \notin E \implies w(e) = |V|/(1 - 1/\epsilon)$

Assumiamo esista un algoritmo $\mathcal{A}$ polinomiale che sia ϵ-approssimante per TSP.
Si avranno allora due casi:

1. $\mathcal{A}$ restituisce cammino di costo pari a $|V|$, ciò significa che sono stati scelti solo archi di peso 1 e quindi il ciclo hamiltoniano esiste
2. $\mathcal{A}$ restituisce un cammino di costo $> V$, ciò significa che il cammino include almeno uno degli archi di peso $|V|/(1 - 1/\epsilon)$, dunque il costo totale sarà almeno $|V| - 1 + |V|/(1 - 1/\epsilon)$. Semplificando si ottiene $\mathcal{A}(x) > \epsilon|V|$, ma per definizione di ϵ-approssimazione si ha che $\epsilon \cdot \mathbf{opt}(x) \geq \mathcal{A}(x) > \epsilon|V|$, ovvero $\mathbf{opt}(x) \geq \mathcal{A}(x)/\epsilon > |V|$, ovvero il cammino ottimo ha costo strettamente maggiore di $|V|$, quindi il ciclo hamiltoniano non esiste poichè non c'è modo di ottenere un cammino di costo $|V|$

Pertanto $\mathcal{A}$ diventa un algoritmo che decide in tempo polinomiale se, dato un grafo $G = (V, E)$, esiste un ciclo hamiltoniano, ed essendo HAMIL un problema $\mathbf{NP}$-completo, allora $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, poichè potrei ridurre ogni problema in $\mathbf{NP}$ ad HAMIL e risolverlo polinomialmente.