电磁场 & 电磁波

张长命
13838112348
iecmzhang@zzu.edu.cn
奔跑的野兔

一、矢量分析

①三种坐标系

直角 $\vec{r}=\vec{e}_x x+\vec{e}_y y+\vec{e}_z z$

$$\begin{cases} e_x\cdot e_x=e_y\cdot e_y=e_z\cdot e_z=1 \\ e_x\cdot e_y=e_x\cdot e_z=e_y\cdot e_z=0 \\ e_x\times e_y=e_z,\quad e_y\times e_z=e_x,\quad e_z\times e_x=e_y \end{cases}$$

$dS_x=dy\,dz$

$dS_y=dx\,dz$

$dS_z=dx\,dy$

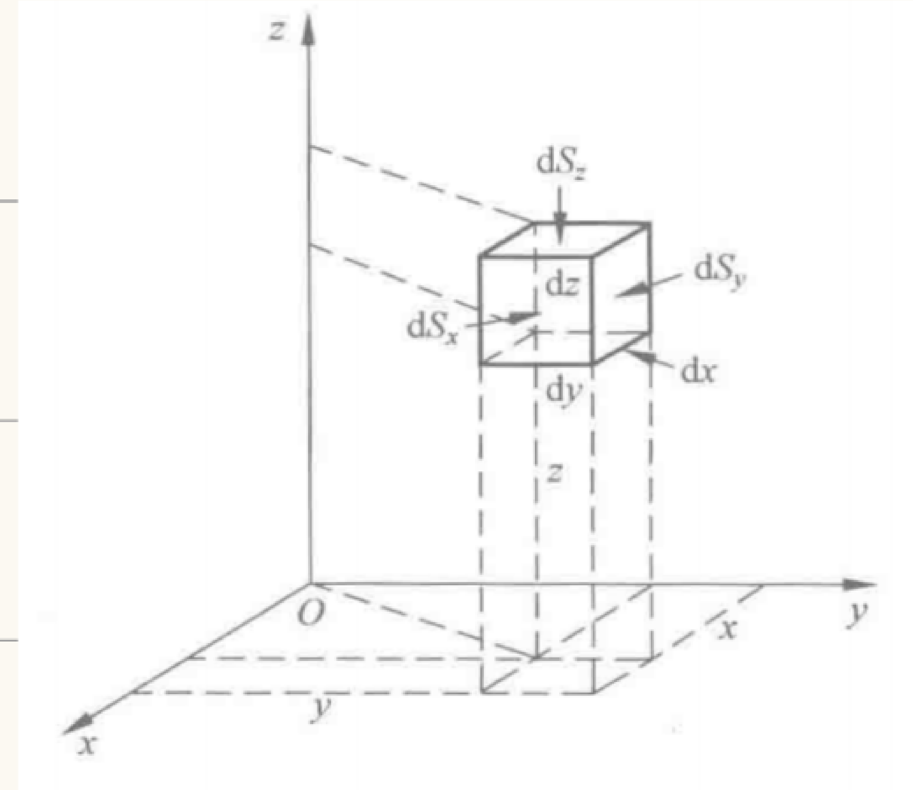


图 1.4 直角坐标系中长度元、面积元和体积元

圆柱 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\tan\varphi=\frac{y}{x}$，$z=z$

$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=z$

$$\begin{cases} e_r\cdot e_r=e_\varphi\cdot e_\varphi=e_z\cdot e_z=1 \\ e_r\cdot e_\varphi=e_\varphi\cdot e_z=e_z\cdot e_r=0 \\ e_r\times e_\varphi=e_z,\quad e_\varphi\times e_z=e_r,\quad e_z\times e_r=e_\varphi \end{cases}$$

$dS_r=r\,d\varphi\,dz$

$dS_\varphi=dr\,dz$

$dS_z=r\,dr\,d\varphi$

$dV=r\,dr\,d\varphi\,dz$

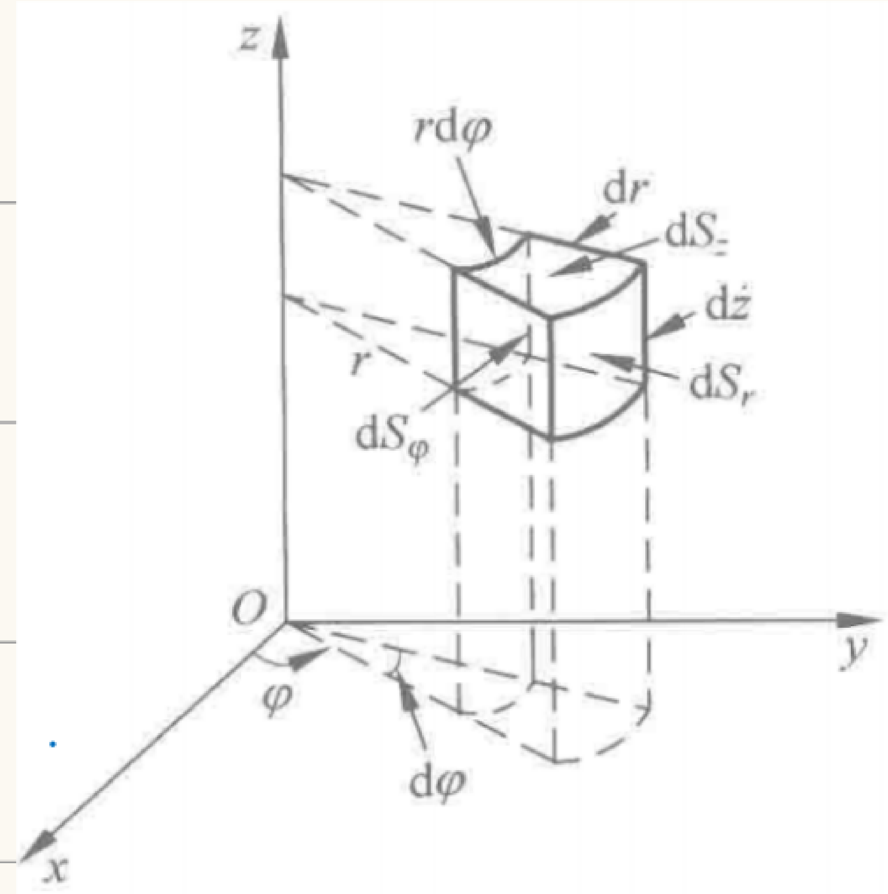


图 1.5 圆柱坐标系中长度元、面积元和体积元

$\frac{de_r}{d\varphi}=e_\varphi$ $\frac{de_\varphi}{d\varphi}=-e_r$

$$\begin{bmatrix} e_r \\ e_\varphi \\ e_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_r \\ e_\varphi \\ e_z \end{bmatrix}$$

球 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\tan\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$，$\tan\varphi=\frac{y}{x}$

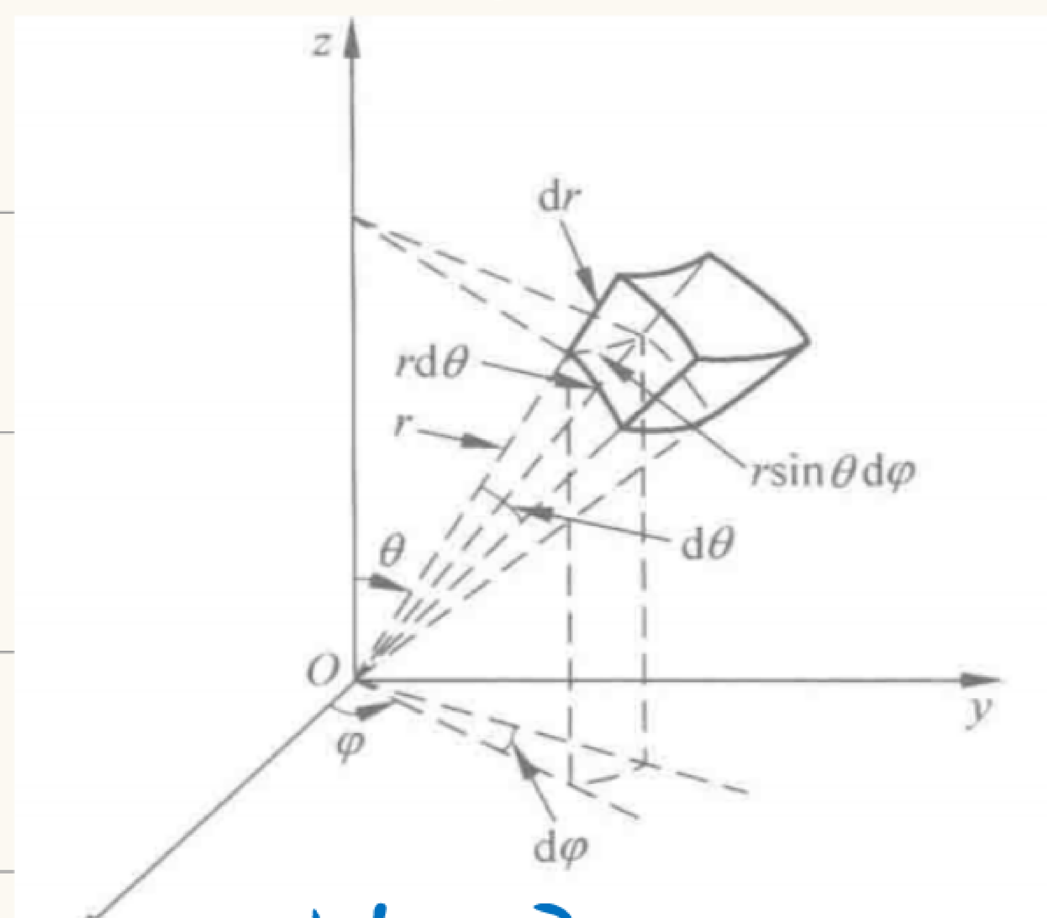
$x=r\sin\theta\cos\varphi$，$y=r\sin\theta\sin\varphi$，$z=r\cos\theta$

$$\begin{cases} e_r\cdot e_r=e_\theta\cdot e_\theta=e_\varphi\cdot e_\varphi=1 \\ e_r\cdot e_\theta=e_\theta\cdot e_\varphi=e_\varphi\cdot e_r=0 \\ e_r\times e_\theta=e_\varphi,\quad e_\theta\cdot e_\varphi=e_r,\quad e_\varphi\cdot e_r=e_\theta \end{cases}$$

$dS_r=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$

$dS_\theta=r\sin\theta\,dr\,d\varphi$

$dS_\varphi=r\,dr\,d\theta$



$dV=r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

图 1.6 球坐标系中长度元、面积元和体积元

$$\begin{bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_\varphi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_r \\ e_\varphi \\ e_\theta \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial e_r}{\partial\theta}=e_\theta$，$\frac{\partial e_r}{\partial\varphi}=e_\varphi\sin\theta$，$\frac{\partial e_\theta}{\partial\theta}=-e_r$，$\frac{\partial e_\theta}{\partial\varphi}=e_\varphi\cos\theta$，$\frac{\partial e_\varphi}{\partial\theta}=0$，$\frac{\partial e_\varphi}{\partial\varphi}=-e_r\sin\theta-e_\theta\cos\theta$

② 矢量微分

0、矢量线方程

$\vec{A}\cdot d\vec{r}=0$

$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}$

1、散度　　矢量 → 标量

$\vec{n}$为面元单位法线矢量

面元矢量 $d\vec{S}=\vec{n}dS$ 或 $dS=\vec{n}\cdot d\vec{S}$

通量 $d\Phi=\vec{A}\cdot d\vec{S}=A\cos\theta dS$

e.g. 电通量 $d\Phi_E=\vec{E}\cdot d\vec{S}$　磁通量 $d\Phi_B=\vec{B}\cdot d\vec{S}$

穿过闭合曲面的通量 $\Phi=\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}$

e.g. 对于静电场 $\Phi_E=\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$，对于磁场 $\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$

散度 $\mathrm{div}\vec{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{A}$

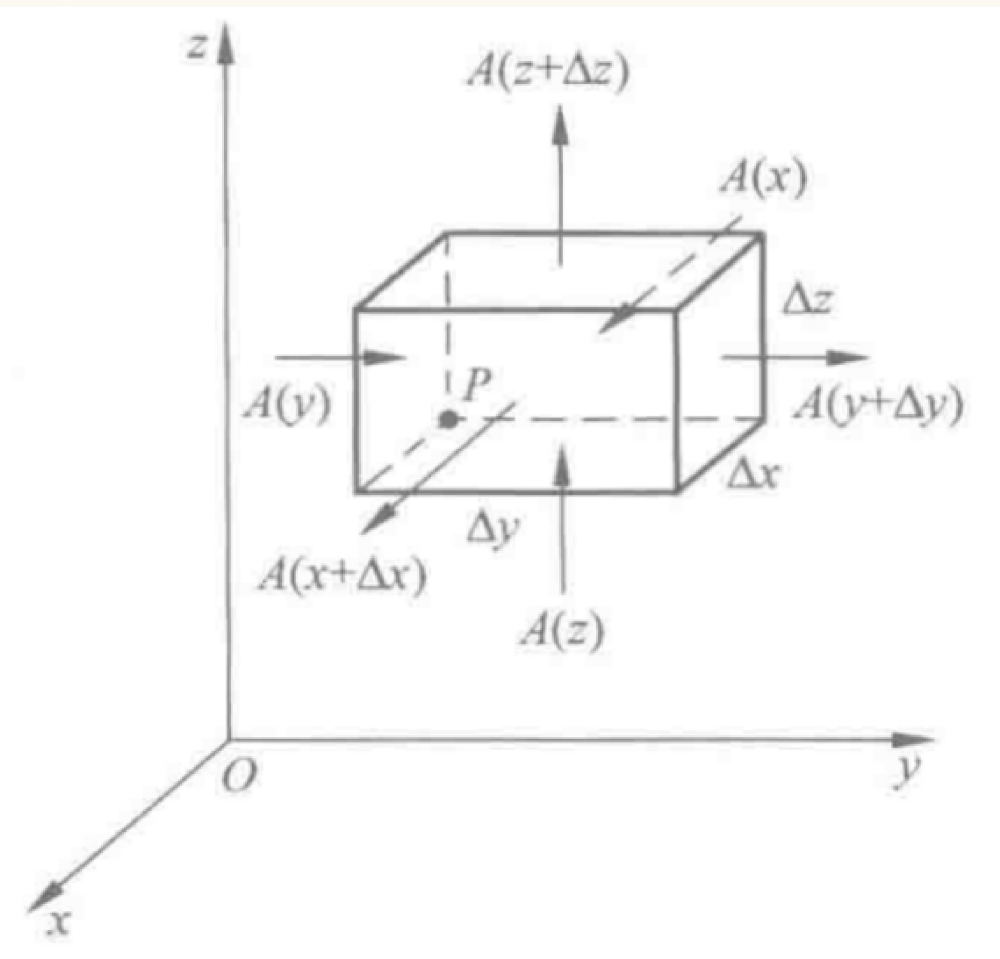


图 1.11　在直角坐标系内计算∇·A

$\iint_{左右}\vec{A}\cdot d\vec{S}=-A_y(y)\Delta z\Delta x+\left[A_y(y)+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta y\right]\Delta z\Delta x=\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$

同理 $\iint_{上下}=\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z$

$\iint_{前后}=\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$

$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

散度定理（高斯定理）$\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=\iiint_V\nabla\cdot\vec{A}dV$　　闭合曲面的通量 = 散度的体积分

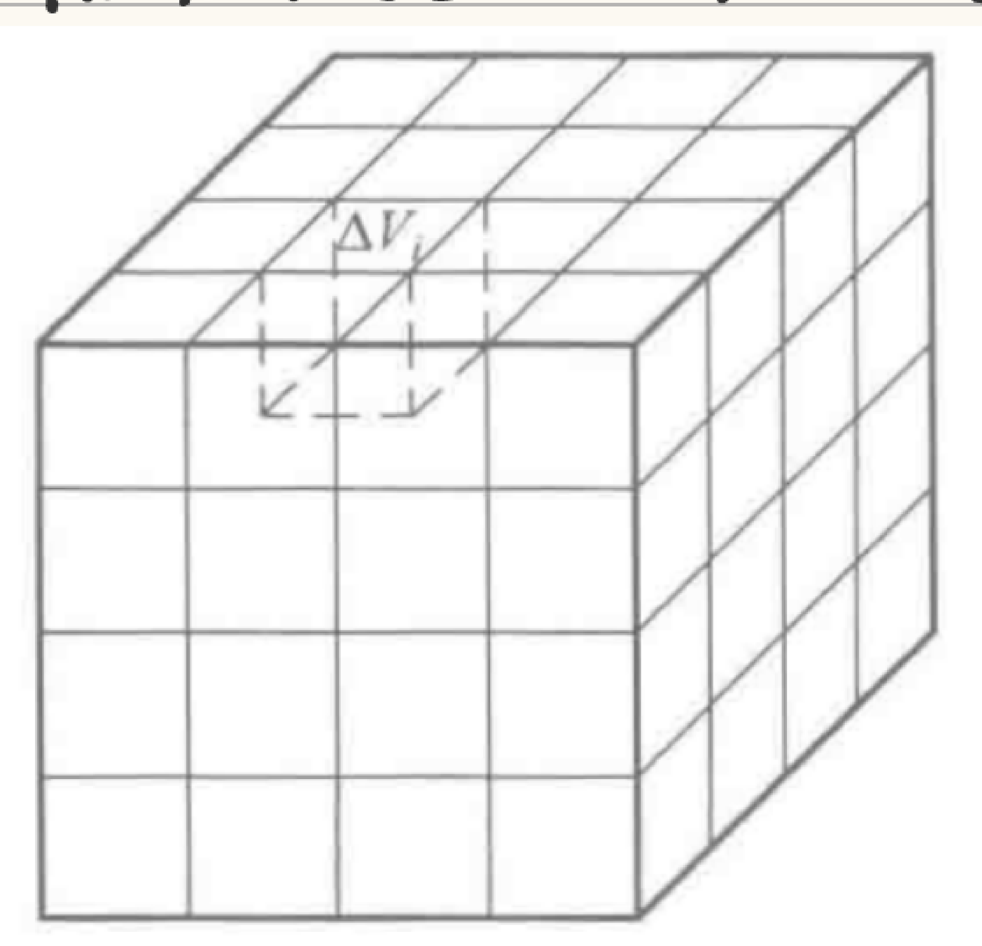


图 1.12　证明散度定理

$\oint_{S_i}\vec{A}\cdot d\vec{S}=(\nabla\cdot\vec{A})\Delta V_i$

$\oint_S\vec{A}\cdot d\vec{S}=\oint_{S_1}\vec{A}\cdot d\vec{S}+\oint_{S_2}\vec{A}\cdot d\vec{S}+\cdots$

$=(\nabla\cdot\vec{A})\Delta V_1+(\nabla\cdot\vec{A})\Delta V_2+\cdots$

$=\iiint_V\nabla\cdot\vec{A}dV$

e.g. 电场高斯定理 $\oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_0 = \iiint \rho_0 \, dV$

$$\parallel$$

$$\oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint \nabla\cdot\vec{D}\, dV$$

2. 旋度　　矢量→矢量

环流 $\Gamma_A = \oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}$

e.g. $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0 + \iint \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \neq 0$　磁场为涡旋场

$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$，电场为无旋场

平均涡旋量 $\dfrac{\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}$，涡旋量 $(\mathrm{rot})_n\vec{A} = \lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}$

旋度 $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ 或 $\nabla\times\vec{A}$ 是矢量场 $\vec{A}$ 在某点的最大涡旋量

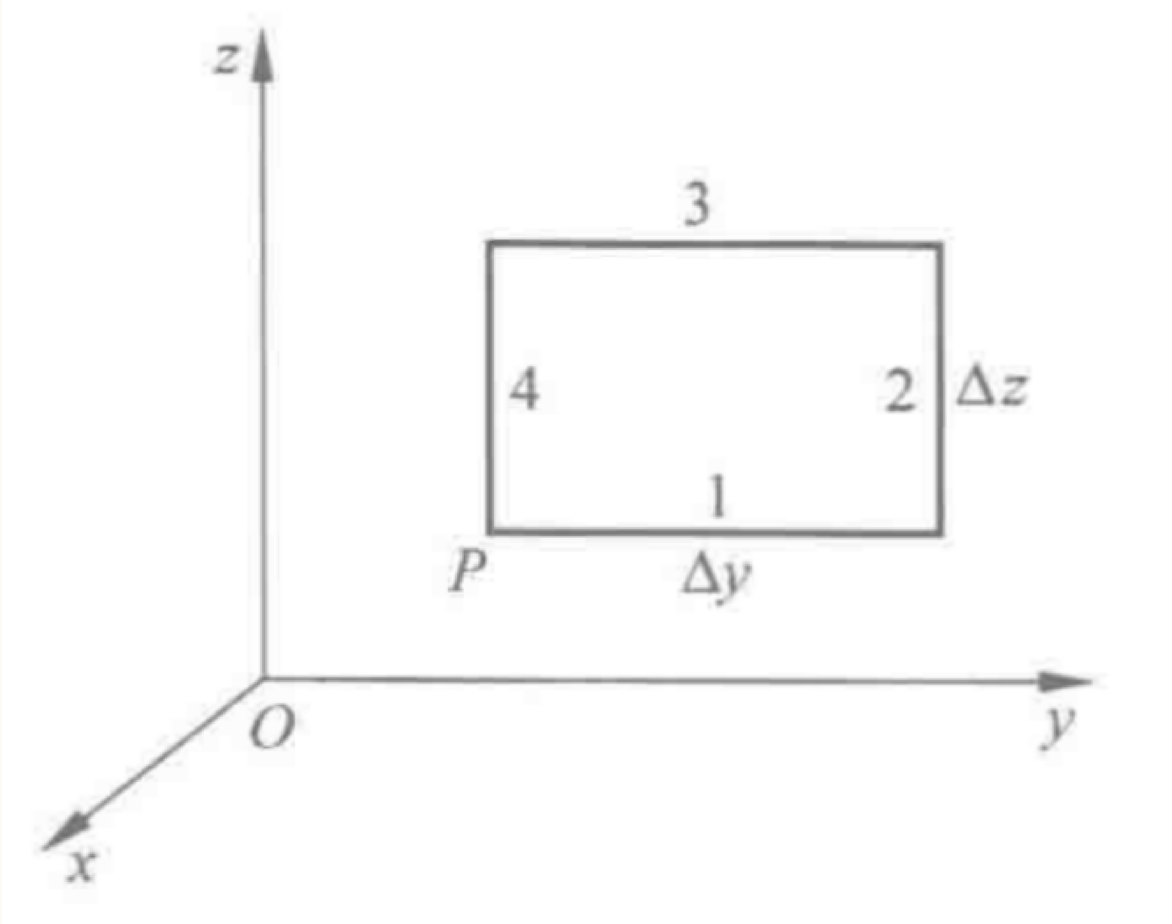


图 1.15　在直角坐标系内计算∇×A

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_1 \vec{A}\cdot d\vec{l} + \int_2 \vec{A}\cdot d\vec{l} + \int_3 \vec{A}\cdot d\vec{l} + \int_4 \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$= A_y\Delta y + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\Delta y\right)\Delta z - \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\Delta z\right)\Delta y - A_z\Delta z$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Delta y\,\Delta z$$

$$(\mathrm{rot})_x\vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$(\mathrm{rot})_y\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$(\mathrm{rot})_z\vec{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{e_x}(\mathrm{rot})_x\vec{A} + \vec{e_y}(\mathrm{rot})_y\vec{A} + \vec{e_z}(\mathrm{rot})_z\vec{A}$$

$$= e_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + e_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + e_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

旋度 $\mathrm{rot}\,\vec{A} = e_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + e_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + e_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

$$\nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

旋度的一个重要性质 $\nabla\cdot\nabla\times\vec{A} = 0$　旋度的散度为0

$$= \left(e_x\frac{\partial}{\partial x} + e_y\frac{\partial}{\partial y} + e_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[e_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + e_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + e_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0$$

斯托克斯定理

$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$ 　环量等于旋度的面积分

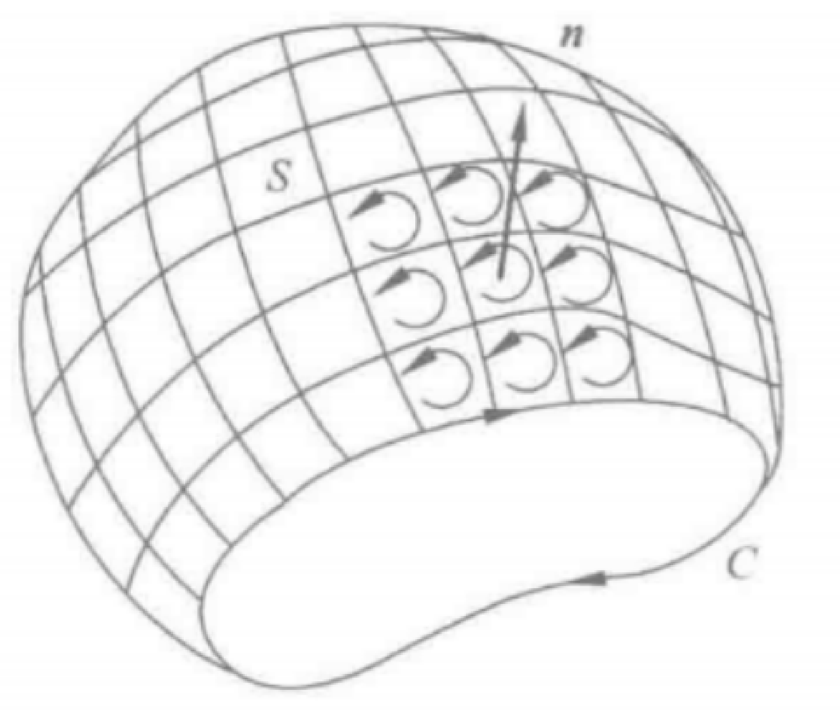


图 1.16　证明斯托克斯定理

$$\oint_{L_i} \vec{A}\cdot d\vec{l} = (\mathrm{rot})_{n_i}\vec{A}\, dS_i = \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S_i}$$

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{l} = \oint_{L_1}\vec{A}\cdot d\vec{l} + \oint_{L_2}\vec{A}\cdot d\vec{l}+\cdots$$

$$= \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S_1} + \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S_2}+\cdots$$

$$= \oiint_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

e.g. 磁场环路定理 $\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_0 + \iint_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \iint_S\left(\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$

$$\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S(\nabla\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$$

所以 $\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

电场环路定理 $\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

3. 梯度 　标量→矢量

$$\nabla u = \left(\vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \vec{e_x}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z}$$

梯度的一个重要性质：$\nabla\times\nabla u = 0$ 　梯度的旋度等于0

$$\nabla\times\nabla u = \left(\vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\vec{e_x}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= \vec{e_x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \vec{e_y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \vec{e_z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

据此，若 $\nabla\times\vec{A} = 0$，则 $\vec{A} = -\nabla u$

e.g. 对于静电场 $\nabla\times\vec{E} = 0$，引入电位 $\vec{E} = -\nabla\Phi$

4、各种坐标系下的梯度、散度、旋度

常用拉梅系数

直角坐标系：$H_x=1$，$H_y=1$，$H_z=1$

柱坐标系：$H_r=1$，$H_\theta=r$，$H_z=1$

球坐标系：$H_r=1$，$H_\theta=r$，$H_\phi=r\sin\theta$

通用公式：

梯度：$\nabla f=\frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\vec{e_1}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\vec{e_2}+\frac{1}{H_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\vec{e_3}$

散度：$\nabla\cdot f=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial(f_1H_2H_3)}{\partial q_1}+\frac{\partial(f_2H_1H_3)}{\partial q}+\frac{\partial(f_3H_1H_2)}{\partial q}\right)$

旋度：$\nabla\times f=\frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\vec{e_1} & H_2\vec{e_2} & H_3\vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1f_1 & H_2f_2 & H_3f_3 \end{vmatrix}$

③ 亥姆霍兹定理

若矢量场 $\vec{F}(\vec{r})$ 在无界空间中处处单值，且其导数连续有界，场源分布在有限区域 V' 中，则该矢量场唯一地由其散度和旋度确定，且可以表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) + \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\nabla'\cdot\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dV'$$

④ 微分算符

1、nabel / Hamilton ∇

$$\nabla = \vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}$$

2、Laplacian $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

⑤ 几个重要公式

矢量三重积，$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$

$$\nabla\times(u\vec{A}) = u\nabla\times\vec{A} + \nabla u\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\nabla u = 0$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\vec{A} = 0$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

对于距离矢量 $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r'}$，有 $\nabla R=-\nabla' R=\frac{\vec{R}}{R}=\vec{e_R}$
（$\vec{r}$ 场点，$\vec{r'}$ 源点）

$$\nabla\frac{1}{R}=-\nabla'\frac{1}{R}=-\frac{\vec{R}}{R^3}=-\frac{\vec{e_R}}{R^2}$$

$$\vec{r}=\vec{e_x}\,x+\vec{e_y}+y+\vec{e_z}\,z$$

$$\vec{r'}=\vec{e_x}\,x'+\vec{e_y}\,y'+\vec{e_z}\,z'$$

$$R=|\vec{r}-\vec{r'}|=\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\nabla=\vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla'=\vec{e_x}\frac{\partial}{\partial x'}+\vec{e_y}\frac{\partial}{\partial y'}+\vec{e_z}\frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\nabla R=\vec{e_x}\frac{\partial R}{\partial x}+\vec{e_y}\frac{\partial R}{\partial y}+\vec{e_z}\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$=\vec{e_x}\frac{x-x'}{R}+\vec{e_y}\frac{y-y'}{R}+\vec{e_z}\frac{z-z'}{R}$$

$$=\frac{1}{R}(\vec{r}-\vec{r'})$$

$$=\frac{\vec{R}}{R}$$

$$=\vec{e_R}$$

同理 $\nabla' R=-\nabla R$

$$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{1}{R^2}\nabla R=-\frac{\vec{R}}{R^3}=-\frac{\vec{e_R}}{R^2}$$

$$\nabla'\frac{1}{R}=-\nabla\frac{1}{R}$$

二、静电场分析

① 电荷与电荷分布

1. 体电荷密度

$$\rho(r) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

$$q = \iiint_V \rho(r)\, dv$$

2. 面电荷密度

$$\rho_s(r) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}$$

$$q = \iint_S \rho(r)\, ds$$

3. 线电荷密度

$$\rho_l(r) = \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

$$q = \int_l \rho(r)\, dl$$

4. 点电荷与δ函数表示法

$$\rho(r) = q\delta(r-r') = \begin{cases} 0, & r \neq r' \\ \infty, & r = r' \end{cases}$$

$$Q = \iiint_V \rho(r)\, dv = q\iiint_V \delta(r-r')\, dv = \begin{cases} 0, & r\text{不在}V\text{内} \\ q, & r\text{在}V\text{内} \end{cases}$$

5. 场强E和电位Φ

电场强度 $\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}(r)}{q_0}$ 电场力

电位 $\Phi(r) = \int_P^Q \vec{E}\cdot d\vec{l}$ ， $\vec{E}(r) = -\nabla\Phi(r)$

电压 $\Phi_{P_1} - \Phi_{P_2} = \int_{P_1}^{Q} \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{P_2}^{Q} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

② 静电场基本方程

$$\begin{cases} \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon}\sum q_i & \text{高斯定理} \\ \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 & \text{环路定理} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_i & \text{有电介质时} \\ \oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \end{cases}$$

电位移通量

高斯定理证明

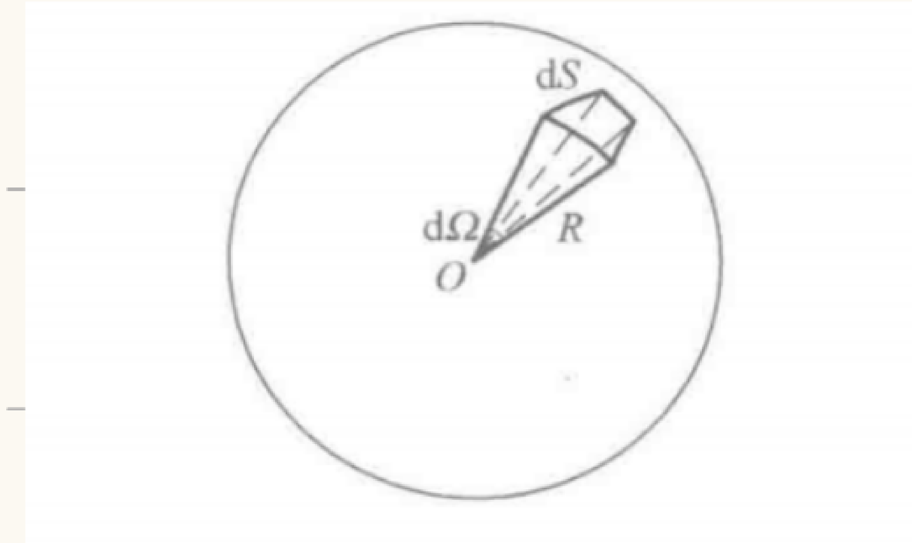


图 2.1　球面上的面元对球心的立体角

立体角 $\Omega = \dfrac{dS}{R^2}$

整个球面的立体角 $\Omega = \dfrac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$

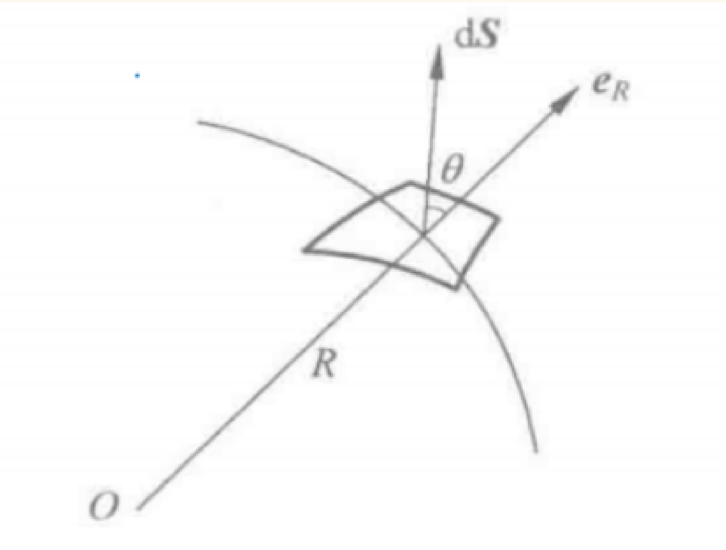
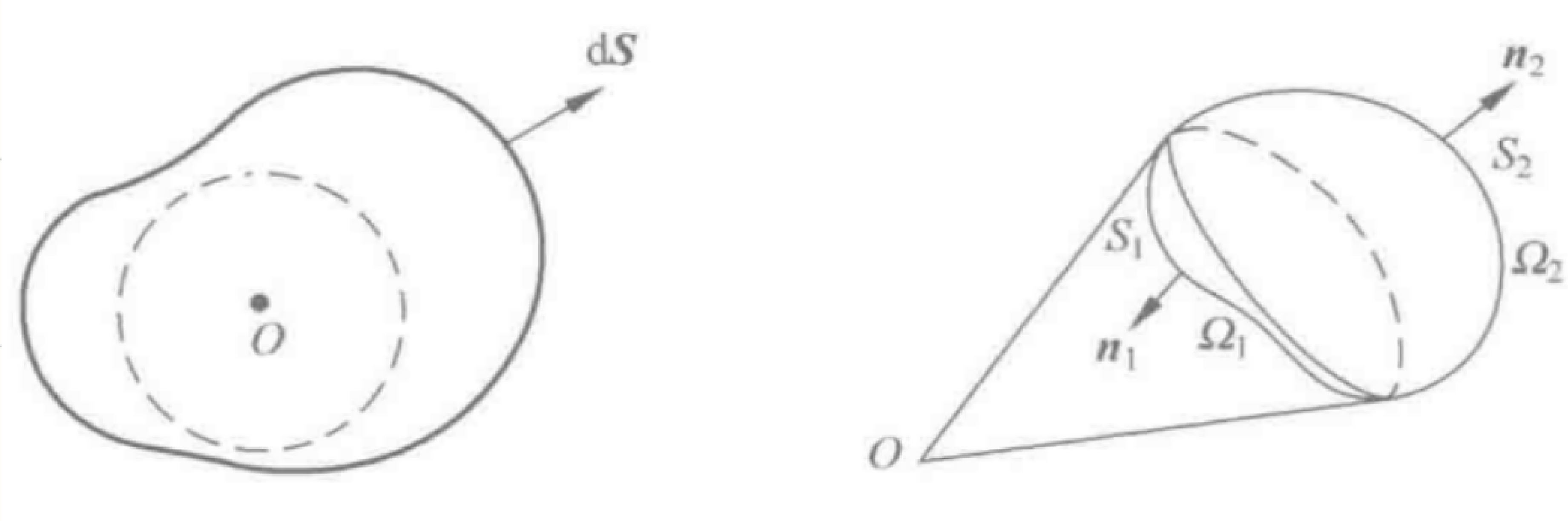


图 2.2　任一面元对一点的立体角

不在球面上的任一面元 $d\vec{S}$ 对一点 O 的立体角

以 O 到 $d\vec{S}$ 的距离 R 为半径做一个球面

$$d\Omega = \frac{d\vec{S}\cdot\vec{e}_R}{R^2} = \frac{dS\cos\theta}{R^2}$$



(a) O点在闭合曲面内　　(b) O点位于闭合曲面外

图 2.3　闭合面的立体角

任意形状的闭合曲面对一点 O 的立体角

O 在曲面内：$\Omega = 4\pi$

O 在曲面外：$\Omega = 0$

所以 $\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \dfrac{q\vec{e}_r}{4\pi R^2}\cdot d\vec{S} = \dfrac{q}{4\pi}\oiint_S \overbrace{\dfrac{\vec{e}_r\cdot d\vec{S}}{R^2}}^{立体角} = \begin{cases} q, & q在曲面内 \\ 0, & q在曲面外 \end{cases}$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oiint_S (\vec{D}_1+\vec{D}_2+\cdots+\vec{D}_k)\cdot d\vec{S} = q_1+q_2+\cdots+q_k = \sum_i^k q_i$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{D}\,dV = \iiint_V \rho\,dV$$ 体密度

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

环路定理证明

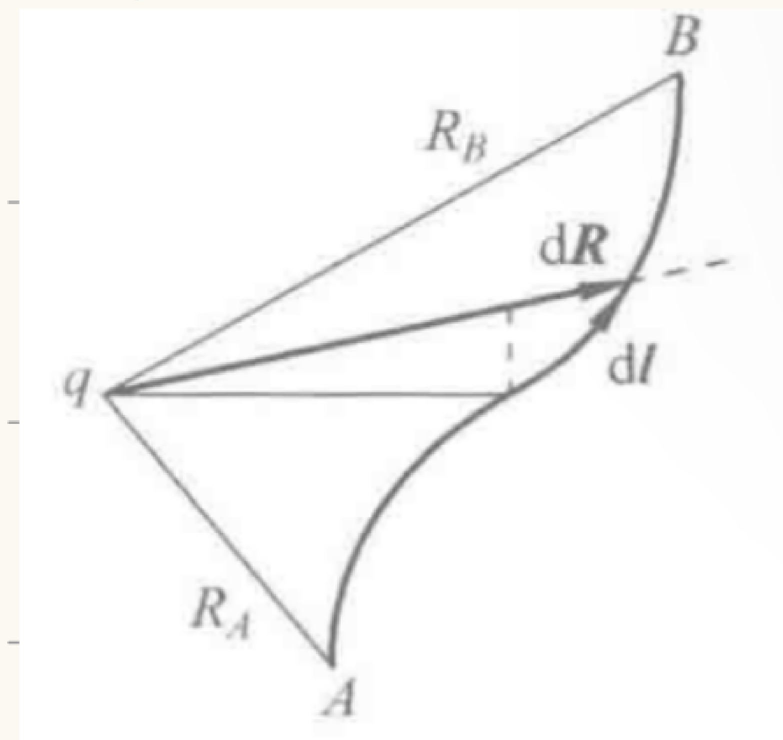


图 2.4　E 沿曲线的积分

$$\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \frac{\vec{e}_R\cdot d\vec{l}}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_A}^{R_B}\frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A}-\frac{1}{R_B}\right)$$

当 l 闭合时，$R_A = R_B$

可得 $\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

$$\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{E})\,d\vec{S} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

③ 场强E和电位Φ的计算

1. 叠加原理

点电荷的场强 $\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\vec{r'})}{R^2}\vec{e_R}$

点电荷组的场强 $\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\vec{r_i'})}{R_i^2}\vec{e_{R_i}}$

电荷连续分布的场强 $\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int\frac{dq(\vec{r'})}{R^2}\vec{e_R}$

电荷的线分布 $dq(\vec{r'})=\rho_l(\vec{r'})dl$

面分布 $dq(\vec{r'})=\rho_S(\vec{r'})dl$

体分布 $dq(\vec{r'})=\rho(\vec{r'})dl$

$\Phi(\vec{r})=\int_P^Q\vec{E}\cdot d\vec{l}$

2、对称性

利用高斯定理求 $\vec{E}$

$\Phi(\vec{r})=\int_P^Q\vec{E}\cdot d\vec{l}$

3、利用点电荷电位的公式和电位的叠加原理求Φ

第一步：利用点电荷电位的公式和电位的叠加原理求 Φ。

点电荷的电位：

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\boldsymbol{r}')}{R} \tag{2.47}$$

点电荷组的电位：

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i(\boldsymbol{r}_i')}{R_i} \tag{2.48}$$

电荷连续分布的电位：

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q(\boldsymbol{r}')}{R} \tag{2.49}$$

线电荷元、面电荷元、体电荷元的表达式仍为式(2.32)～式(2.34)，代入式(2.49)，可以分别求出线电荷、面电荷、体电荷产生的电位的表达式

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l\frac{\rho_l(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}l}{R} \tag{2.50}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S\frac{\rho_S(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}S}{R} \tag{2.51}$$

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V\frac{\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V}{R} \tag{2.52}$$

第二步：利用电位梯度求场强

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi \tag{2.53}$$

④ 静电场中的导体

下面列出静电平衡时导体的电特性，在分析一些问题时非常有用。

（1）导体内电场强度处处为零。

（2）导体是等位体，导体的表面是等位面。

（3）导体内无电荷分布，电荷只分布在导体的表面。孤立导体表面的电荷分布与曲率有关，曲率比较大（凸出而尖锐）的地方，面电荷密度比较大；曲率比较小（比较平坦）的地方，面电荷密度也比较小；曲率为负值（凹进去）的地方，面电荷密度更小。

（4）导体表面附近，电场强度的方向与表面垂直，电场强度的大小等于该点附近导体表面的面电荷密度除以 ε_0，所以导体表面附近的电场强度为

$$\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{n}} \frac{\rho_S}{\varepsilon_0} \tag{2.56}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是导体表面处的单位法线矢量，式(2.56)可以用高斯定理证明。

⑤ 静电场中的电介质

1. 电介质的分类

线性和非线性介质

极化强度 $\vec{P}$ 是电场强度 $\vec{E}$ 的函数，$\vec{P}=\vec{P}(\vec{E})$. $\vec{P}$ 的各分量可由电场强度 $\vec{E}$ 的各分量的幂级数表示.

$$\begin{cases} P_x = \alpha_1 E_x + \alpha_2 E_y + \alpha_3 E_z + \beta_1 E_x^2 + \beta_2 E_x E_y + \cdots \\ P_y = \alpha_1' E_x + \alpha_2' E_y + \alpha_3' E_z + \beta_1' E_x^2 + \beta_2' E_x E_y + \cdots \\ P_z = \alpha_1'' E_x + \alpha_2'' E_y + \alpha_3'' E_z + \beta_1'' E_x^2 + \beta_2'' E_x E_y + \cdots \end{cases}$$

若 $\vec{P}$ 的各分量只与 $\vec{E}$ 的各分量的一次项有关，与高次项无关，且 $\vec{P}$ 的各分量与 $\vec{E}$ 的各分量呈线性关系. 这种介质称为线性介质

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

χ_{ij} 称为电介质的极化率. 与 $\vec{E}$ 无关

各向同性与各向异性介质

电介质内某点的物理特性在所有方向上都相同，与外加电场$\vec{E}$的方向无关，这种介质称为各向同性介质，否则为各向异性介质。

对于各向同性介质，$i \neq j$时 $\chi_{ij}=0$，$\chi_{xx}=\chi_{yy}=\chi_{zz}$，$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}$，$\chi_e$与$\vec{E}$无关

均匀介质和非均匀介质

电介质内的ε处处相同，与空间位置无关，即$\nabla\varepsilon=0$，则称这种介质为均匀介质。

对于线性、各向同性的均匀电介质

$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}$，$\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$，$\varepsilon_r=1+\chi_e$

2、电介质极化的机理和电偶极子模型

无极分子 → 位移极化

有极分子 → 位移极化 + 取向极化

无论是无极分子电介质，还是有极分子电介质，在外电场中，分子中的正、负电荷的中心错开一定的距离，形成了一个电偶极子（分子电矩为 $p=ql$），所以可以用电偶极子模型研究电介质。外电场越强，一定体积中分子电矩的矢量和越大，极化强度矢量就定义为单位体积中分子电矩的矢量和

$$\boldsymbol{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\sum \boldsymbol{p}}{\Delta V} \tag{2.60}$$

3. 计算电介质问题常用的公式

有电介质时静电场的高斯定理为 $\oint \vec{D}\cdot d\vec{s}=\sum q_0$

电位移矢量的定义 $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$

对于线性、各向同性电介质 $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}$

$\rho_{sp}=\vec{P}\cdot\vec{n}$

$\rho_p=-\nabla\cdot\vec{P}$

$\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$

$\varepsilon_r=1+\chi_e$

$\oint_s\vec{E}\cdot d\vec{s}=\frac{q+q_p}{\varepsilon_0}$ (Gauss)

$q_p=\int_v\rho_p\,dv$

$=-\int_v\nabla\cdot\vec{P}\,dv$

$\oint_s\vec{E}\cdot d\vec{s}=-\int_s\vec{P}\cdot d\vec{s}$

$\oint_s(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})d\vec{s}=\int_v\rho\,dv$

$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\Rightarrow\nabla\cdot\vec{D}=\rho$

$\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}$

$\vec{D}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$

$=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$

⑥ 电力线方程和等位面方程

1. 电力线方程

电力线上某一点处的切线方向表示该点电场强度的方向，若 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 表示电力线上某一点处切线方向的线元，在该点处

$$\boldsymbol{E} = k\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.71}$$

把式(2.71)在直角坐标系中展开

$$\boldsymbol{e}_x E_x + \boldsymbol{e}_y E_y + \boldsymbol{e}_z E_z = \boldsymbol{e}_x k\mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_y k\mathrm{d}y + \boldsymbol{e}_z k\mathrm{d}z$$

上式两端各分量分别相等，则

$$E_x = k\mathrm{d}x,\quad E_y = k\mathrm{d}y,\quad E_z = k\mathrm{d}z$$

所以直角坐标系中的电力线方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z} \tag{2.72}$$

用相同的方法可以导出圆柱坐标系中的电力线方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{E_r} = \frac{r\mathrm{d}\varphi}{E_\varphi} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z} \tag{2.73}$$

和球坐标系中的电力线方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{E_r} = \frac{r\mathrm{d}\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\mathrm{d}\varphi}{E_\varphi} \tag{2.74}$$

2. 等位面方程

$$\Phi(x,y,z) = C$$

⑦ 静电场的边界条件

1. E和D的边界条件

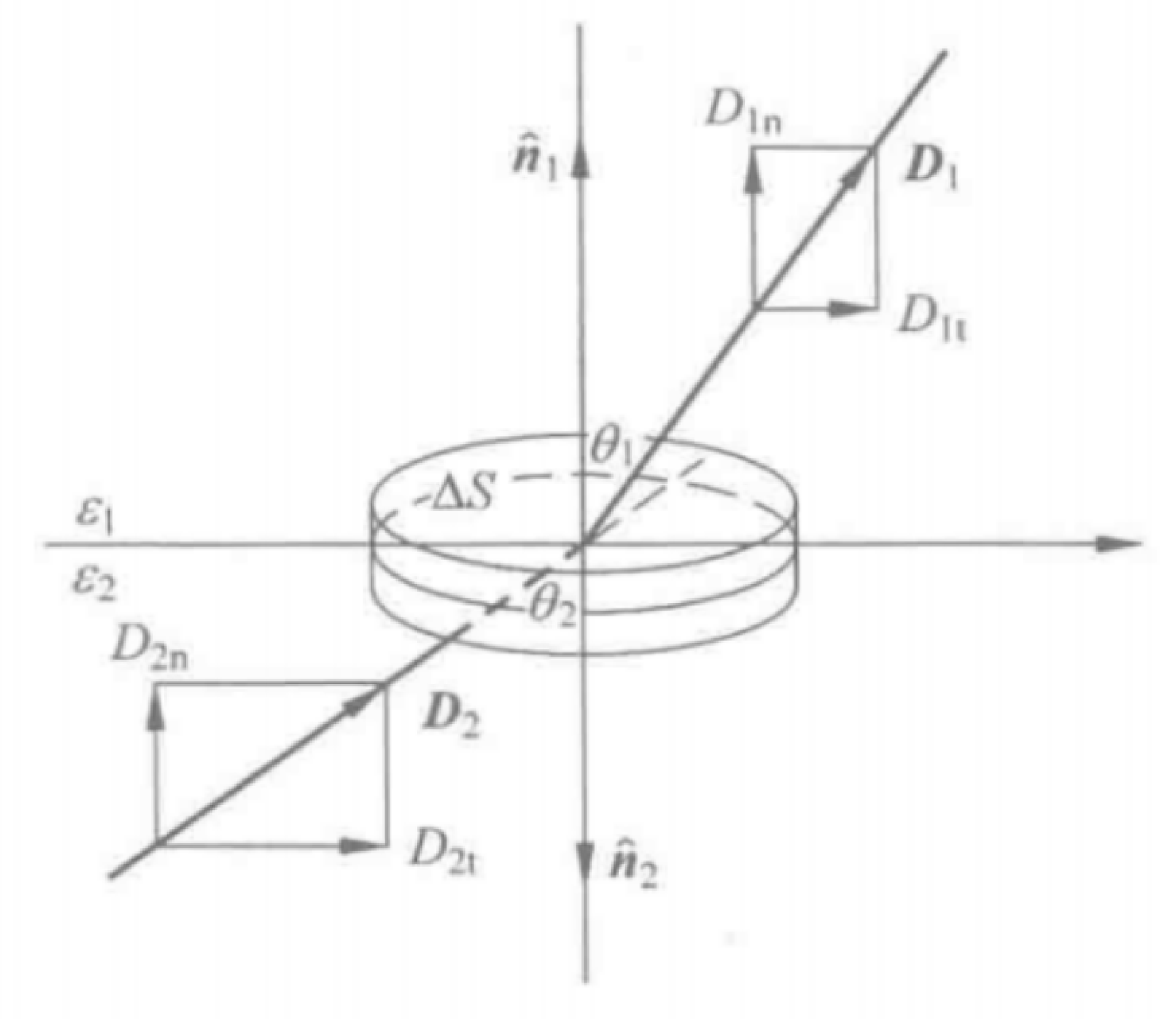


图 2.13 **D** 法向分量的边界条件

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \rho_s \Delta S$$

$$\iint_{上} \vec{D_1}\cdot d\vec{s} + \iint_{下} \vec{D_2}\cdot d\vec{s} + \iint_{侧} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \rho_s \cdot \Delta S$$

$$\iint D_1 ds\cos\theta_1 + \iint D_2 ds\cos(\pi-\theta_2) = \rho_s \Delta S$$

$$D_{1n}\Delta S - D_{2n}\Delta S = \rho_s \Delta S$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s$$

分界面上没有自由电荷时 $D_{1n} = D_{2n}$

$$\vec{n_1}\cdot\vec{D_1} = \vec{n_2}\cdot\vec{D_2}$$

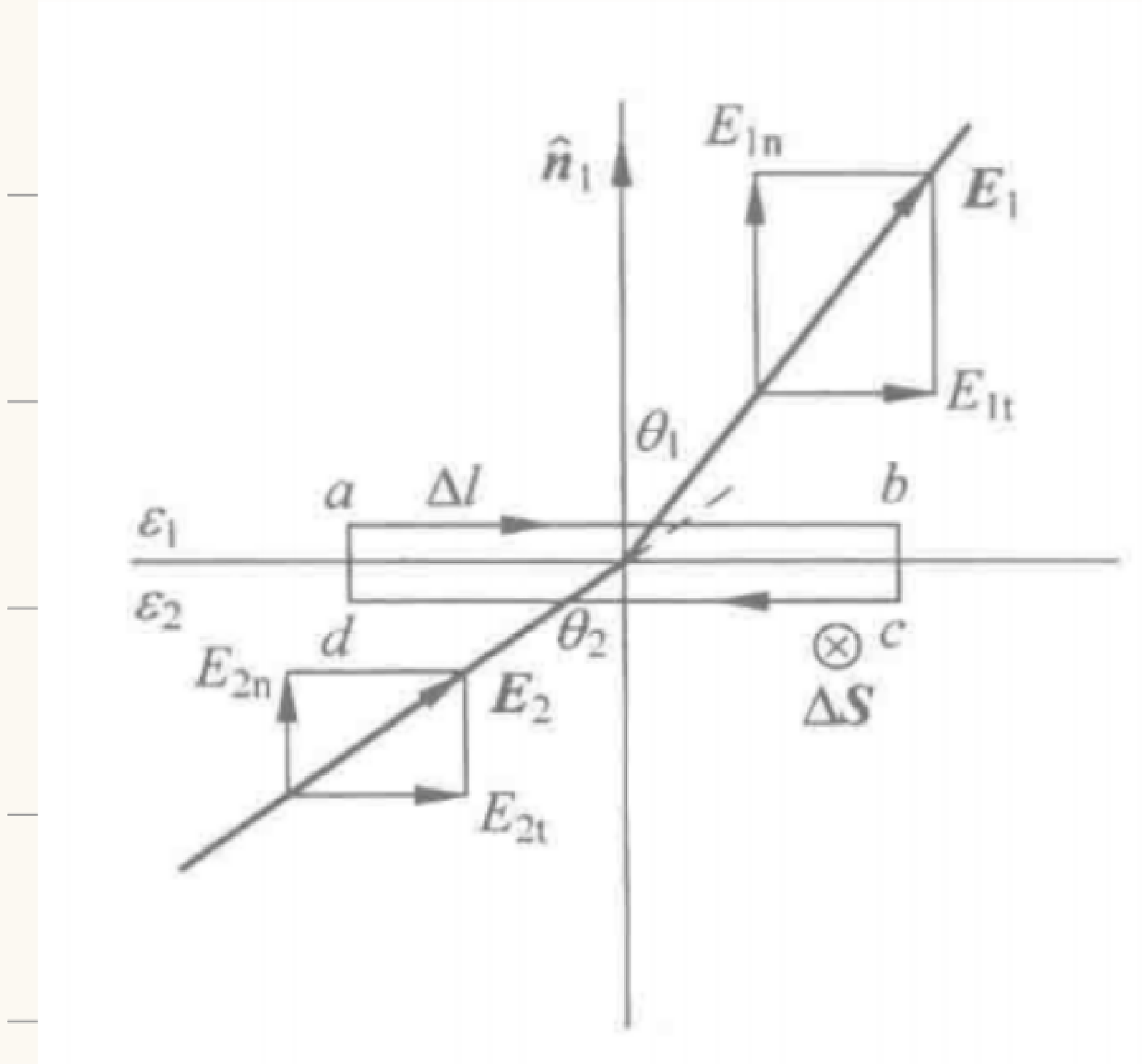


图 2.14 E 切向分量的边界条件

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

$$\int_{ab}\vec{E_1}\cdot d\vec{l}+\int_{bc}\vec{E}\cdot d\vec{l}+\int_{cd}\vec{E_2}\cdot d\vec{l}+\int_{da}\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

$$\vec{E_1}\cdot\Delta\vec{l_1}+\vec{E_2}\cdot\Delta\vec{l_2}=0$$

$$\vec{E_1}\cdot\Delta\vec{l_1}-\vec{E_2}\cdot\Delta\vec{l_1}=0$$

$$\vec{E_1}\cdot(\vec{S}\times\vec{n_1})\Delta l-\vec{E_2}\cdot(\vec{S}\times\vec{n_1})\Delta l=0$$

$$\vec{n_1}\times\vec{E_1}=\vec{n_1}\times\vec{E_2}$$

$$E_1\sin\theta_1=E_2\sin\theta_2$$

$$E_{1t}=E_{2t}$$

$$\tan\theta_1=\frac{E_{1t}}{E_{1n}},\quad \tan\theta_2=\frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\frac{E_{1t}}{E_{1n}}\cdot\frac{E_{2n}}{E_{2t}}=\frac{E_{2n}}{E_{1n}}=\frac{\frac{D_{2n}}{\varepsilon_2}}{\frac{D_{1n}}{\varepsilon_1}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$\dfrac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2}=\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$，在 $\vec{E}$ 线上发生了折射

2. 电位的边界条件

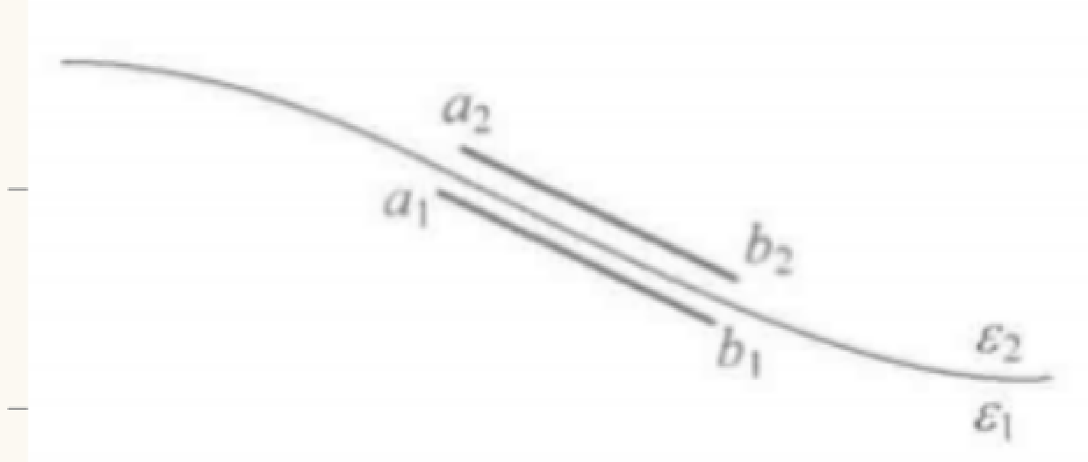


图 2.15 电位的边界条件

$$\Phi_1-\Phi_2=\int_{a_2}^{a_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

$$\Phi_1=\Phi_2$$

$$\Phi_{a1}=\Phi_{a2},\ \Phi_{b1}=\Phi_{b2}$$

3. 导体与电介质分界面上的边界条件

$\vec{E}$ 和 $\vec{D}$

$\vec{E_2}=0$，$\vec{E_{1t}}=\vec{E_{2t}}=0$

$D_{1n}=\rho_s$，$E_{1n}=\dfrac{\rho_s}{\varepsilon}$

Φ

$\Phi_1=\Phi_2$

⑧ 泊松方程和拉普拉斯方程

$$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\varepsilon\vec{E}=\nabla\cdot\varepsilon(-\nabla\Phi)=-\varepsilon\nabla^2\Phi=\rho$$

泊松方程 $\nabla^2\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$

拉普拉斯方程 $\nabla^2\Phi=0$ (没有电荷分布的区域)

⑨ 唯一性定理

1. 格林定理

$$\iiint\nabla\cdot\vec{A}\,dV=\oiint\vec{A}\cdot d\vec{S}$$

令 $\vec{A}=\phi\nabla\psi$

$$\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)=\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi$$

$$\vec{A}\cdot d\vec{S}=\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS=\phi\nabla\psi\cdot\vec{n}=\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}$$

$$\iiint(\phi\nabla^2\psi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi)dV=\oiint\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS$$ (格林第一恒等式)

同理 $$\iiint(\psi\nabla^2\phi+\nabla\psi\cdot\nabla\phi)dV=\oiint\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS$$

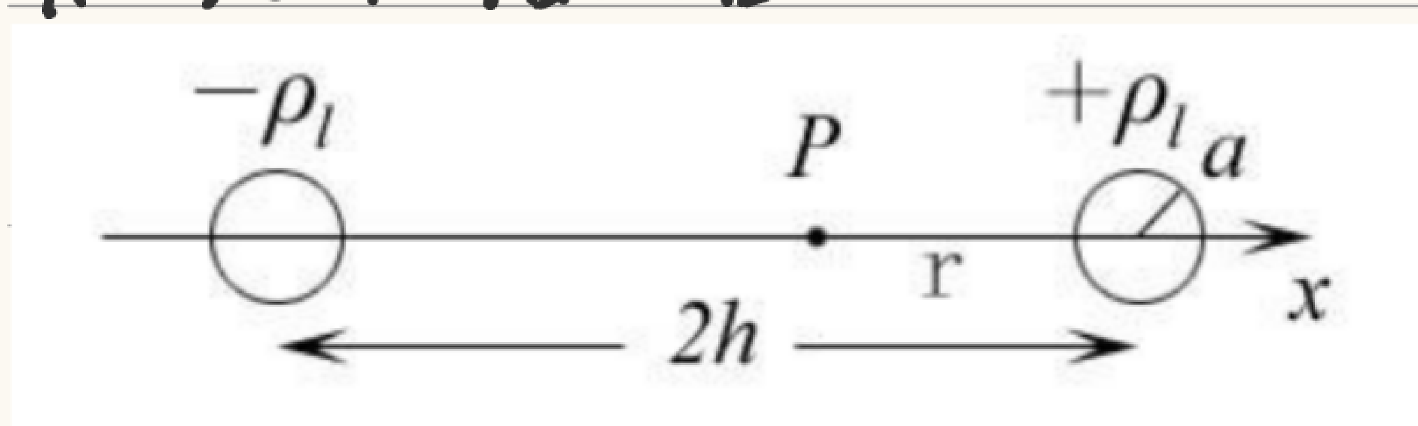
$$\iiint(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)dV=\oiint\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS$$ (格林第二恒等式)

2、唯一性定理

对于同一个边值问题，用不同的方法求得的解都是相同的.

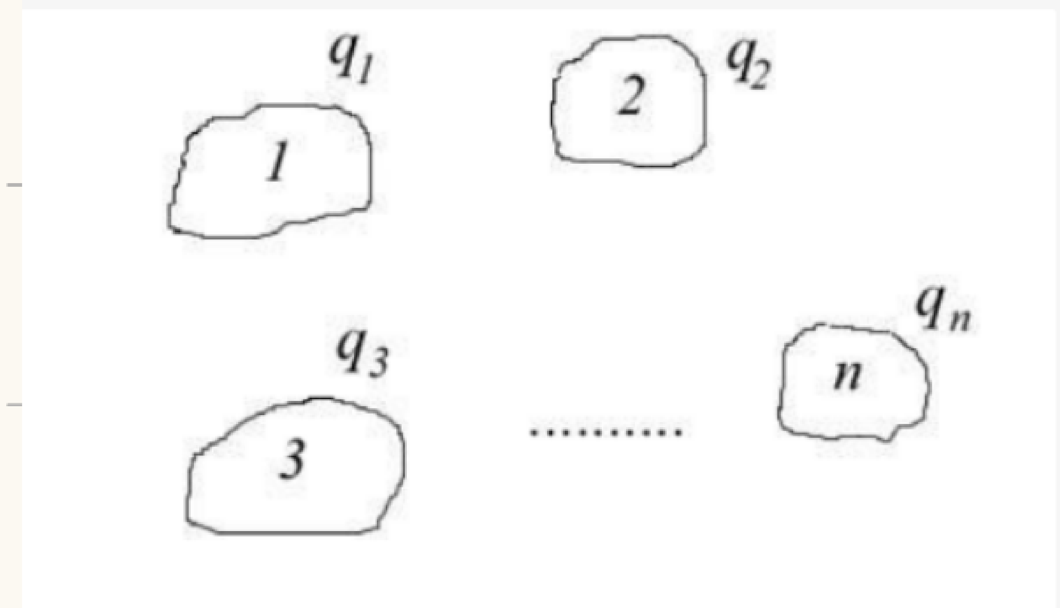
⑩ 导体系统的电容

1、两导体间的电容



$$C=\frac{q_A}{\Phi_A-\Phi_B}$$

2. 系数



对于一个孤立的多导体系统，每个导体的电位不仅与该导体上所带的电量有关，而且受其它导体上所带电量的影响

$$\Phi_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2 + \cdots + p_{1n}q_n$$
$$\vdots$$
$$\Phi_i = p_{i1}q_1 + p_{i2}q_2 + \cdots + p_{in}q_n$$
$$\vdots$$
$$\Phi_n = p_{n1}q_1 + p_{n2}q_2 + \cdots + p_{nn}q_n$$

$\Phi_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}q_j$，$p_{ij}$ 称电位系数，$i=j$ 称为自电位系数，$i\neq j$ 称为互电位系数

$$q_1 = \beta_{11}\Phi_1 + \beta_{12}\Phi_2 + \cdots + \beta_{1n}\Phi_n$$
$$\vdots$$
$$q_i = \beta_{i1}\Phi_1 + \beta_{i2}\Phi_2 + \cdots + \beta_{in}\Phi_n$$
$$\vdots$$
$$q_n = \beta_{n1}\Phi_1 + \beta_{n2}\Phi_2 + \cdots + \beta_{nn}\Phi_n$$

$q_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\Phi_j$　β_{ij}，$i=j$ 称为电容系数，$i\neq j$ 称为感应系数

$\beta_{ij} = \frac{P_{ij}}{\Delta}$，$\Delta$ 为电位系数行列式 p_{ij}，P_{ij} 是 p_{ij} 的代数余子式

3. 部分电容

$$q_i = \beta_{i1}(\Phi_1 - \Phi_i + \Phi_i) + \beta_{i2}(\Phi_2 - \Phi_i + \Phi_i) + \cdots + \beta_{ii}(\Phi_i - \Phi_i + \Phi_i) + \beta_{in}(\Phi_n - \Phi_i + \Phi_i)$$
$$= \beta_{i1}(\Phi_1 - \Phi_i) + \beta_{i2}(\Phi_2 - \Phi_i) + \cdots + (\beta_{i1} + \beta_{i2} + \cdots + \beta_{in})\Phi_i + \cdots + \beta_{in}(\Phi_n - \Phi_i)$$
$$= C_{i1}(\Phi_i - \Phi_1) + C_{i2}(\Phi_i - \Phi_2) + \cdots + C_{ii}\Phi_i + \cdots + C_{in}(\Phi_i - \Phi_n)$$

$$C_{ij} = -\beta_{ij}$$

$$C_{ii} = \beta_{i1} + \beta_{i2} + \cdots + \beta_{in} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}$$

$q_1 = C_{11}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) + \cdots + C_{1n}(\Phi_1 - \Phi_n)$

$q_2 = C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22}\Phi_2 + \cdots + C_{2n}(\Phi_2 - \Phi_n)$

$\vdots$

$q_n = C_{n1}(\Phi_n - \Phi_1) + C_{n2}(\Phi_n - \Phi_2) + \cdots + C_{nn}\Phi_n$

C_{ij}. $i\neq j$ 称互有部分电容，表示第 i 个导体与第 j 个导体间的部分电容

$i=j$ 称自有部分电容，表示第 i 个导体与地间的部分电容

⑪ 静电场的能量与力

1. 静电场的能量

能量密度 $w_e = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

能量 $W_e = \iiint_V \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV$

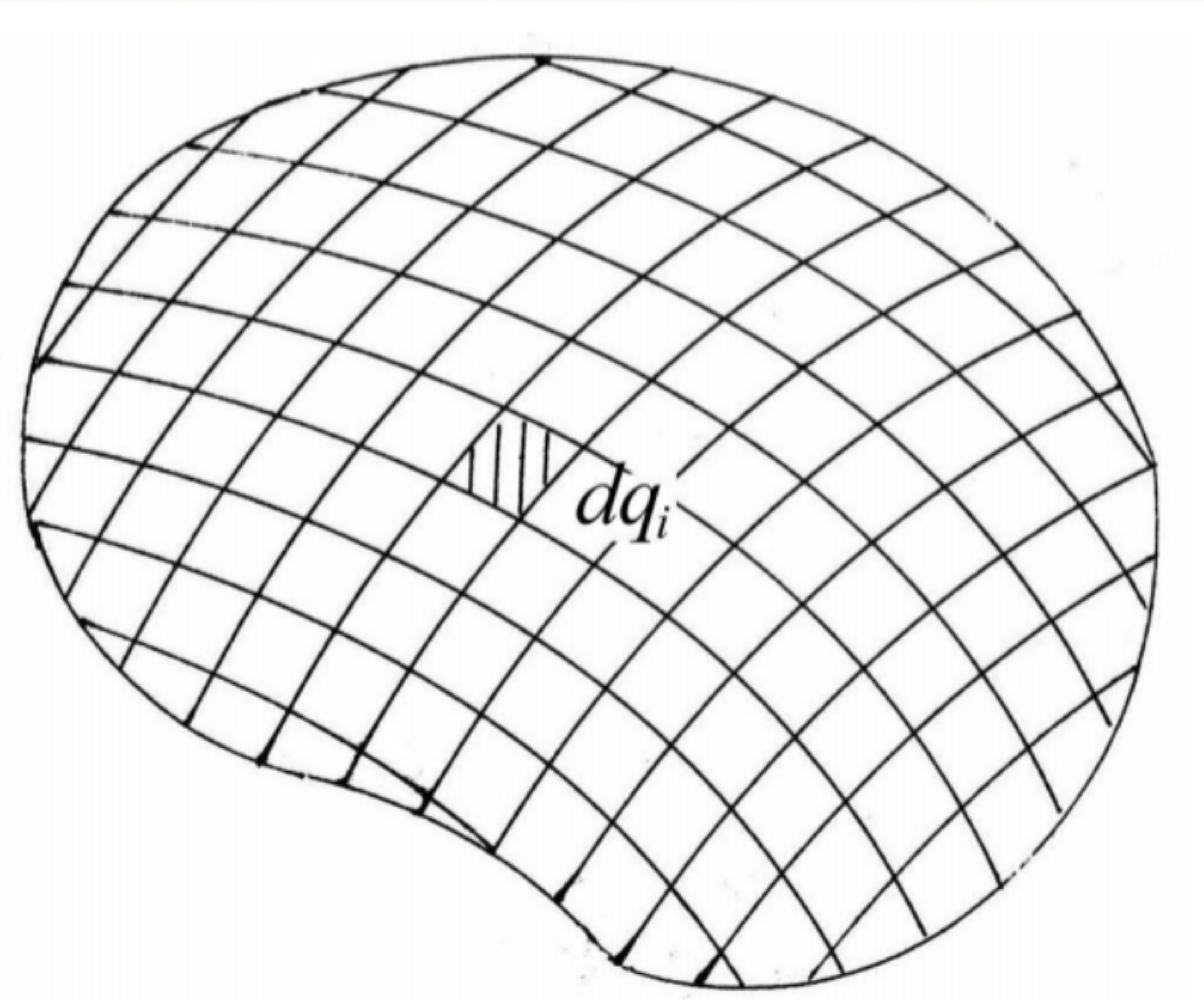


图2.22 建立电荷系统的过程

设在移动电荷过程中的某一时刻，场中某一点电位为 $\Phi_i(x,y,z)$

把电荷元 dq_i 移动到该点需要作的功为 $dA = \Phi_i dq_i$

在建立电荷系统的过程中，$0\to\rho$，$0\to\sigma$ 按比例增大

$\rho' = \alpha\rho$，$\sigma' = \alpha\sigma$，$\alpha: 0\to 1$

$d\rho' = \rho\, d\alpha$，$d\sigma' = \sigma\, d\alpha$

$dq_i = d\rho'\, dV + d\sigma'\, dS$

$\Phi_i = \alpha\Phi$

$dA = \Phi_i dq_i = \Phi_i d\rho' dV + \Phi_i d\sigma' dS$

$W_e = A = \iiint_V \Phi_i d\rho' dV + \iint_S \Phi_i d\sigma' dS$

$W_e = \int_0^1 \alpha\, d\alpha \iiint_V \rho\Phi\, dV + \int_0^1 \alpha\, d\alpha \iint_S \sigma\Phi\, dS$

$= \frac{1}{2}\iiint_V \rho\Phi\, dV + \frac{1}{2}\iint_S \sigma\Phi\, dS$

对于多导体系统，电荷只分布在各导体表面 $W_e = \frac{1}{2}\iint_S \sigma\Phi\, dS = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\iint_{S_i}\sigma\Phi_i\, dS$

$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\Phi_i q_i$

2、静电场的能量分布

$\rho=\nabla\cdot\vec{D}$, $\sigma=D_n=\vec{D}\cdot\vec{n}$

$W_e=\frac{1}{2}\iiint_V\Phi\nabla\cdot\vec{D}\,dV+\frac{1}{2}\iint_{S_1}\vec{D}\cdot\vec{n}\,dS$

由 $\nabla\cdot(\psi\vec{A})=\psi\nabla\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\nabla\psi$

所以 $\Phi\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot(\Phi\vec{D})-\vec{D}\cdot\nabla\Phi$

$W_e=\frac{1}{2}\iiint_V\nabla\cdot(\Phi\vec{D})\,dV+\frac{1}{2}\iiint_V\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV+\frac{1}{2}\iint_{S_1}\Phi\vec{D}\cdot\vec{n}\,dS$

$=\frac{1}{2}\iiint_{S+S_1}\Phi\vec{D}\cdot\vec{n}\,dS+\frac{1}{2}\iiint_V\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV+\frac{1}{2}\iiint_{S_1}\Phi\vec{D}\cdot\vec{n}\,dS$

静电场的能量 $W_e=\iiint_V\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}\,dV$

能量密度 $w_e=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$

对于各向同性介质 $w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$

3、利用虚位移原理计算电场力

$dW=dW_e+\vec{f}\cdot d\vec{g}$

若各导体电荷不变 $dq=0\Rightarrow dW=0$, $\vec{f}\cdot d\vec{g}=-dW_e\big|_{q=C}$, $f=-\frac{dW_e}{dg}\big|_{q=C}$, $\vec{f}=-\nabla W_e$

若各导体电位不变 $dW=\sum_i\Phi_i dq_i$, $dW_e=\frac{1}{2}\sum_i\Phi_i dq_i$, $f\,dg=dW_e$, $f=\frac{dW_e}{dg}\big|_{\Phi=C}$, $\vec{f}=\nabla W_e$

⑫ 恒定电场

1、电流与电流密度

体电流密度 $\vec{J}=\rho\vec{v}$

$I=\iint_S\vec{J}\cdot d\vec{S}$

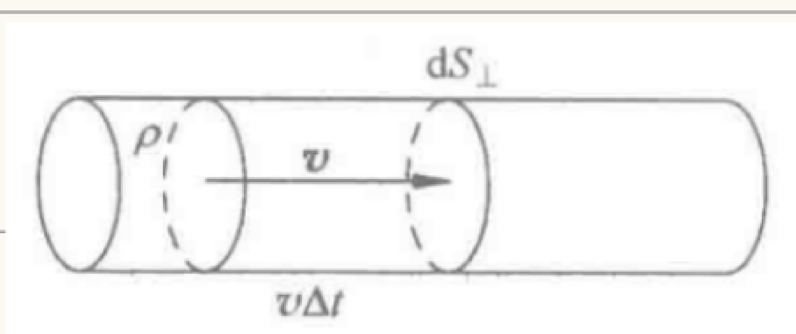


图 2.26 计算体电流密度

$J=\frac{dI}{dS_\perp}$

$\Delta q=\rho\cdot v\Delta t\,dS_\perp$

$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\rho\cdot v\,dS_\perp$

$J=\frac{I}{dS_\perp}=\rho v$

$\vec{J}=\rho\vec{v}$

面电流密度 $\vec{J_s}=\frac{dI}{dl_\perp}$

$I=\int_l \vec{J_s}\cdot(\vec{n}\times d\vec{l})$

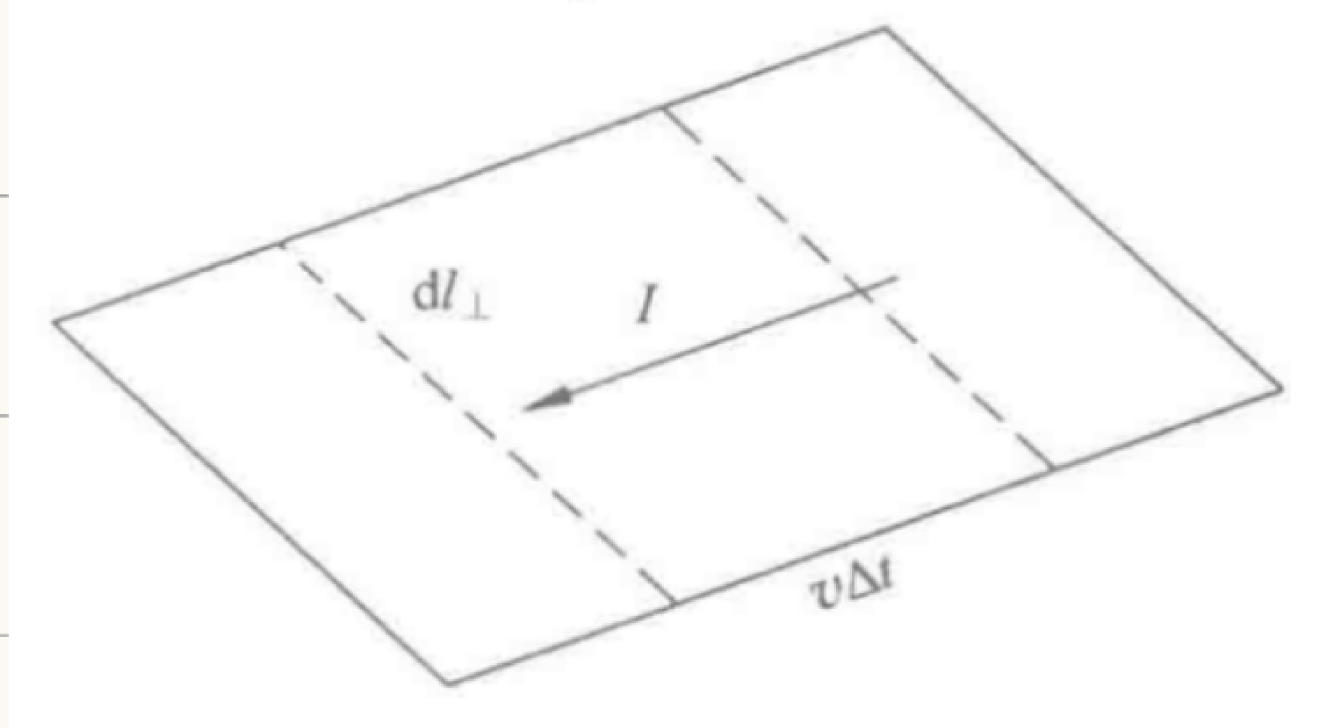


图 2.27 计算面电流密度

$\Delta q=\rho_s\cdot v\Delta t\, dl_\perp$

$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\rho_s\cdot v\, dl_\perp$

$J_s=\frac{I}{dl_\perp}=\rho_s v$

$\vec{J_s}=\rho_s\vec{v}$

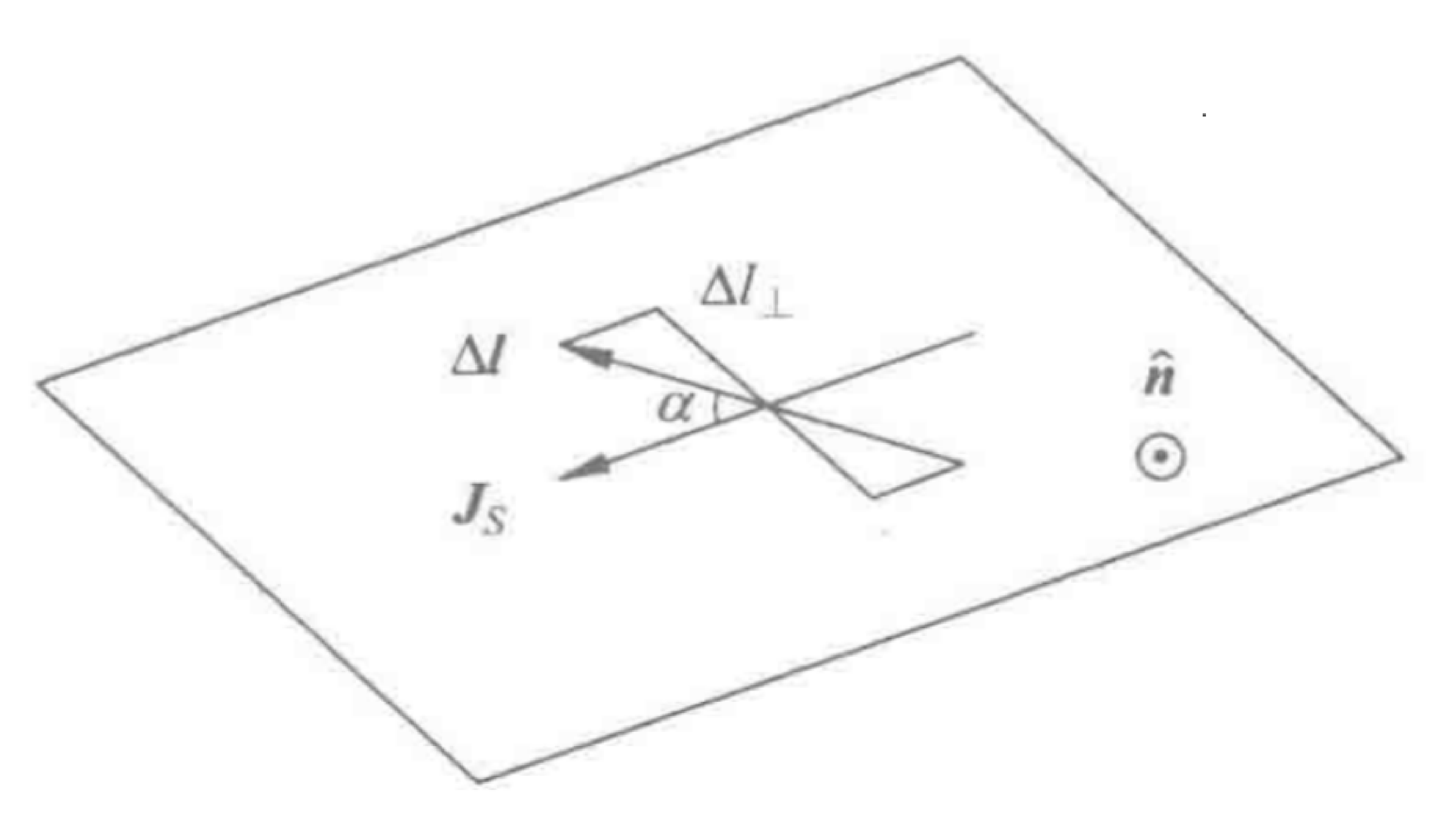


图 2.28 计算面电流

$\Delta I=J_s\Delta l_\perp=J_s\Delta l\sin\alpha$

$\sin\alpha=\vec{n}\cdot\vec{n}\sin\alpha=\vec{n}\cdot(\vec{i}\times\vec{j})$

$\Delta I=\vec{n}\cdot(\vec{i}\Delta l\times\vec{j}J_s)=\vec{n}\cdot(\Delta\vec{l}\times\vec{J_s})$

$I=\int_l\vec{n}\cdot(d\vec{l}\times\vec{J_s})=\int_l\vec{J_s}\cdot(\vec{n}\times d\vec{l})$

线电流 $I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\rho_l v$

电流元

体电流元 $dq\vec{v}=\rho dV\vec{v}=\vec{J}dV$

面电流元 $dq\vec{v}=\rho dS\vec{v}=\vec{J_s}dS$

线电流元 $dq\vec{v}=\rho dl\vec{v}=I\,d\vec{l}$

2、恒定电场的基本方程和边界条件

矢量场方程

$\iint_S\vec{J}\cdot d\vec{S}=-\frac{\partial q}{\partial t}$

$\iiint_V\nabla\cdot\vec{J}dV=-\iiint_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV$

$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

对于恒定电场，电荷的分布不变，$\frac{\partial q}{\partial t}=0$

$\iint_S\vec{J}\cdot d\vec{S}=0$

$\nabla\cdot\vec{J}=0$

$\sum_k I_k=0$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=0$$

$$\nabla\times\nabla\Phi=0$$

$$\vec{E}=-\nabla\Phi$$

位函数方程

$$\nabla\cdot\vec{J}=0,\ \vec{J}=\sigma\vec{E}$$

$$\nabla\cdot\vec{J}=\nabla\cdot(\sigma\vec{E})=\sigma\nabla\cdot(-\nabla\Phi)=-\sigma\nabla^2\Phi=0$$

$$\nabla^2\Phi=0$$

边界条件

$$J_{1n}=J_{2n}$$

$$\hat{n}\cdot(\vec{J}_1-\vec{J}_2)=0$$

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$\Phi_1=\Phi_2$$

$$\sigma_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}$$

3. 导电媒质中的传导电流

电源电动势 $e=\int_l \vec{E}\cdot d\vec{l}$

洛仑兹力 $\vec{f}=q\vec{v}\times\vec{B}$

非静电场强 $\vec{E}=\frac{\vec{f}}{q}=\vec{v}\times\vec{B}$

动生电动势 $e=\int_l(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

均匀导体电阻 $R=\rho\frac{l}{S}=\frac{l}{\sigma S}$

不均匀导体电阻 $dR=\rho\frac{dl}{S}$ $\quad R=\int_l\rho\frac{dl}{S}=\int_l\frac{dl}{\sigma S}$

电导 $G=\frac{1}{R}$

欧姆定律 $I=\frac{V}{R}$

$I=\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{s}$，$U=\int_L \vec{E}\cdot d\vec{l}$，$R=\int_L \rho\frac{dl}{S}$ $\Rightarrow$ $\vec{J}=\sigma\vec{E}$

焦耳定律 $P=I^2R$

$\vec{J}=\rho\vec{v}=Nq\vec{v}$

每个电荷受的力 $\vec{f}=q\vec{E}$

dt内电场力对每个电荷作的功 $dA=\vec{f}\cdot d\vec{l}=q\vec{E}\cdot\vec{v}dt$

dt内电场力对dV内所有电荷作的功 $dA=NdV\cdot q\vec{E}\cdot\vec{v}dt=\vec{J}\cdot\vec{E}dVdt$

dt内电场力对dV内所有电荷作的功率为 $dP=\frac{dA}{dt}=\vec{J}\cdot\vec{E}dV$

dt内电场力对dV内所有电荷作的功率密度为 $p=\frac{dP}{dV}=\vec{J}\cdot\vec{E}$

导体内的净余电荷

$\nabla\cdot\vec{J}=0$，$\vec{J}=\sigma\vec{E}$

$\sigma\nabla\cdot\vec{E}=0$，$\nabla\cdot\vec{E}=0$，$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}$

$\rho=0$，恒定电场中导体内没有净余电荷

给导体充电时 $\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\vec{J}=-\sigma\nabla\cdot\vec{E}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\nabla\cdot\vec{D}=-\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$

$\rho=\rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}=\rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\tau=\frac{\varepsilon}{\sigma}$，弛豫时间

4.

	恒定电场	静电场
基本方程	$\nabla\times E=0$ $(E=-\nabla\Phi)$ $\nabla\cdot J=0$ 导体内没有电荷分布 $\nabla^2\Phi=0$ 导体内没有电荷分布	$\nabla\times E=0$ $(E=-\nabla\Phi)$ $\nabla\cdot D=0$ 没有电荷分布的区域 $\nabla^2\Phi=0$ 没有电荷分布的区域
边界条件	$J_{1n}=J_{2n}$ $E_{1t}=E_{2t}$ $\Phi_1=\Phi_2$ $\sigma_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}$	$D_{1n}=D_{2n}$ $E_{1t}=E_{2t}$ $\Phi_1=\Phi_2$ $\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}$
积分量	$I=\iint_S J\cdot dS$ $U=\int E\cdot dl$ $G=I/U$	$q=\iint_S D\cdot dS$ $U=\int E\cdot dl$ $C=q/U$
本构关系	$J=\sigma E$	$D=\varepsilon E$

5、接地

接地电阻＝接地导线的电阻＋接地体的电阻＋接地体与大地之间的接触电阻＋大地的电阻≈大地的电阻，一般要求接地电阻小于2Ω。

跨步电压

由（2.179）式，接地电极附近地面上任一点的电位可以写为

$$\Phi=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=\int_r^{\infty}\frac{Idr}{2\pi\sigma r^2}=\frac{I}{2\pi\sigma r} \qquad (2.180)$$

由（2.180）式可以绘出沿地面电位Φ随距离r变化的曲线，如图2.38所示。可以看出，如果入地电流比较大（例如电力系统的接地电极和防雷系统的接地电极），在接地电极附近电位梯度很大，相隔一步之间的电位差可能超过人体的安全电压，称为跨步电压。由（2.179）式可以计算图2.38中A、B两点之间的跨步电压

$$U_{AB}=\int_A^B\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}=-\int_A^B Edr=-\int_r^{r+b}\frac{Idr}{2\pi\sigma r^2}=\frac{I}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+b}\right)\approx\frac{Ib}{2\pi\sigma r^2} \quad (2.181)$$

设人体的安全电压为U_0（一般取为交流30V，直流50V），由（2.181式可以求出危险区的半径为

$$r_0=\sqrt{\frac{Ib}{2\pi\sigma U_0}} \qquad (2.182)$$

三、恒定磁场

① 恒定磁场的基本规律

1. 磁感应强度 B

毕奥—萨伐尔定律 $d\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\frac{Id\vec{l'}\times\vec{e_r}}{r^2}$

一个线电流回路产生的磁场 $\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\oint_l\frac{Id\vec{l'}\times\vec{e_r}}{r^2}$

体电流产生的磁场 $\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{Id V'\times\vec{e_r}}{r^2}$

面电流产生的磁场 $\vec{B}=\frac{\mu}{4\pi}\iint_S\frac{Id S'\times\vec{e_r}}{r^2}$

2. 磁感应线方程

直角坐标系中 $\frac{dx}{B_x}=\frac{dy}{B_y}=\frac{dz}{B_z}$

柱坐标系中 $\frac{dr}{B_x}=\frac{rd\varphi}{B_y}=\frac{dz}{B_z}$

球坐标系中 $\frac{dr}{B_x}=\frac{rd\theta}{B_y}=\frac{r\sin\theta d\varphi}{B_z}$

3. 恒定磁场基本方程

$\begin{cases}\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0 & \text{高斯定理}\\ \oint_l\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum_i I_i & \text{环路定理}\end{cases}$ $\begin{cases}\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0\\ \oint_l\vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_i I_0\end{cases}$

后续内容实为复习后补，已无力做到一二章详细程度，下面省略不重要内容

$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}\end{cases}$

4. 磁介质的磁化

磁化强度 $\vec{M}=\lim_{\Delta V\to0}\frac{\sum\vec{m}}{\Delta V}$

$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$

$d\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M}(\vec{r'})dV'\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}$

$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{M}(\vec{r'})\times\frac{\vec{r}-\vec{r'}}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}dV'$

$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\vec{M}(\vec{r'})\times\nabla'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dV'$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \nabla' \times \frac{\vec{M}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \times d\vec{S'}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \vec{M}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{M}(\vec{r'}) \times \vec{n}}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \times dS'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{J(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{J_S(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \times dS'$$

$$\begin{cases} \vec{J_m}(\vec{r'}) = \nabla' \times \vec{M}(\vec{r'}), \quad \vec{J_{ms}}(\vec{r'}) = \vec{M}(\vec{r'}) \times \vec{n} \\ \vec{J_{ms}} = \vec{M} \times \vec{n}, \quad \vec{J_m} = \nabla \times \vec{M} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J_m}) = \mu_0(\vec{J} + \nabla \times \vec{M}) \\ \nabla \times (\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}) = \vec{J} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \\ \vec{M} = \chi_m \vec{H} \\ 1 + \chi_m = \mu_r \\ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \end{cases}$$

5、磁路

$$\Phi = \frac{e_m}{R_m}$$

$e_m = NI$ 称为磁动势，$R_m = \frac{l}{\mu S}$ 为磁阻

② 恒定磁场的边界条件

$$\begin{cases} \vec{n} \times (\vec{H_1} - \vec{H_2}) = \vec{J_S} \\ \vec{n} \cdot (\vec{B_1} - \vec{B_2}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_{1t} - H_{2t} = J_S \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases}$$

③矢量磁位

$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

库仑规范 $\nabla\cdot\vec{A}=0$

$\nabla^2\vec{A}=-\mu\vec{J}$

④标量的磁位

没有电流分布的区域 $\vec{H}=-\nabla\Phi_m$

$\nabla^2\Phi_m=0$

$\Phi_{m1}=\Phi_{m2}$

$\mu_1\frac{\partial\Phi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\Phi_{m2}}{\partial n}$

⑤电感

自感系数 L，$\psi_L=LI=\sum_i\Phi_i$

互感系数 M，$\psi_{12}=M_{12}I_1$，$\psi_{21}=M_{21}I_2$

2. M 和 L 的计算

1）利用定义式计算

计算自感系数

由
$$I\to\psi_L\to L=\frac{\psi_L}{I}$$

计算互感系数

$$I_1\to\psi_{12}\to M=\frac{\psi_{12}}{I_1}\quad 或\quad I_2\to\psi_{21}\to M=\frac{\psi_{21}}{I_2}$$

计算 ψ_{12} 还是计算 ψ_{21}，可以根据问题中的条件选择简便的方法。

2）利用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 计算 L 和 M

（1）利用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 计算磁通量

$$\Phi=\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

（2）利用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 计算 L 和 M

$$M=N_1N_2\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_1}\oint_{l_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r}$$

$$L=N^2\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l_2}\oint_{l_1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2}{r}$$

利用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 计算 L 和 M 的公式形式上相同，L_1、L_2 表示的意义不同。

⑥磁场的能量

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} M_{kj} I_k I_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} I_j \psi_j$$

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\cdot\vec{B}\,dV$$

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2}\mu H^2$$

⑦磁场力

$$\begin{cases} d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \\ \vec{F} = \int_l I d\vec{l} \times \vec{B} \\ \vec{F} = \int_V \vec{J} dV \times \vec{B} \\ \vec{F} = \int_S \vec{J_S}\, dS \times \vec{B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\vec{F_{12}} = I_2 d\vec{l_2} \times \vec{B_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l_2} \times (I_1 d\vec{l_1} \times \vec{e_R})}{R^2} \\ \vec{F_{12}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1}\oint_{l_2} \frac{I_2 d\vec{l_2} \times (I_1 d\vec{l_1} \times \vec{e_R})}{R^2} \end{cases}$$

洛伦兹力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$

$$\begin{cases} f = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial g}\right|_{\psi_j = C} \\ f = \left.\frac{\partial W_m}{\partial g}\right|_{I_j = C} \\ f = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial g} \end{cases}$$

四、静态场边值问题的解法

①电磁场边值问题概述

1. 三类边值问题(以静电场为例)

(1) 第一类边值问题：给定边界面上的电位 $\Phi|_S$。

(2) 第二类边值问题：给定边界面上电位的法线导数 $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S$，对于导体就是给定导体表面电荷的分布。这是因为导体表面的面电荷密度 $\rho_S=\varepsilon E_n=-\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}$。

(3) 第三类边值问题：一部分边界上给定边界面上的电位 $\Phi|_S$，另一部分边界上给定边界面上电位的法线导数 $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S$(对于导体就是给定导体表面电荷的分布)。

表 4.1　静电场、恒定电场、恒定磁场满足的微分方程

	泊 松 方 程	拉普拉斯方程
静电场	$\nabla^2\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$	$\nabla^2\Phi=0$　($\rho=0$ 的区域)
恒定电场		$\nabla^2\Phi=0$
恒定磁场	$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$	$\nabla^2\Phi_m=0$　($\boldsymbol{J}=0$ 的区域)

表 4.2　静电场、恒定电场、恒定磁场边界上的衔接条件

静电场	$\Phi_1=\Phi_2$	$\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}$
恒定电场	$\Phi_1=\Phi_2$	$\sigma_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\sigma_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n}$
恒定磁场	$\Phi_{m1}=\Phi_{m2}$	$\mu_1\frac{\partial\Phi_{m1}}{\partial n}=\mu_2\frac{\partial\Phi_{m2}}{\partial n}$

②直角坐标系中的分离变量法

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

同除 $f(x)g(y)h(z)$ ： $\frac{1}{f(x)}\frac{d^2f(x)}{dx^2}+\frac{1}{g(y)}\frac{d^2g(y)}{dy^2}+\frac{1}{h(z)}\frac{d^2h(z)}{dz^2}=0$

设每项分别为 $-k_x^2$, $-k_y^2$, $-k_z^2$

有 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}+k_x^2f(x)=0$ ， $k_x^2+k_y^2+k_z^2=0$

若 k_x 为实数， $f(x)=A_1\sin k_xx+A_2\cos k_xx$　周期函数

若 k_x 为虚数， $f(x)=B_1\sinh\alpha_xx+B_2\cosh\alpha_xx$ 或 $B_1'e^{\alpha_xx}+B_2'e^{-\alpha_xx}$ 非周期函数

若 $x=0$ 时 $\Phi=0$，为双曲函数，若 $x=\infty$ 时，$\Phi=0$，为指数函数

通解 $\Phi(x)=f(x)g(y)h(z)$

③圆柱坐标系中的分离变量法

二维：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0$$

同乘 $\frac{r^2}{f(r)g(\varphi)}$ ： $\frac{r}{f(r)}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right)+\frac{1}{g(\varphi)}\frac{\partial^2 g(\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$

设分别为 γ^2 和 $-\gamma^2$

$$\frac{d^2 g(\varphi)}{d\varphi^2}+\gamma^2 g(\varphi)=0$$

$$r^2\frac{d^2 f(r)}{dr^2}+r\frac{df(r)}{dr}-\gamma^2 f(r)=0$$

$$g(\varphi)=A_n\sin n\varphi+B_n\cos n\varphi$$

$$f(r)=C_n r^n+\frac{D_n}{r^n}$$

通解 $\Phi(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin n\varphi+B_n\cos n\varphi)(C_n r^n+\frac{D_n}{r^n})$

④球坐标系的分离变量法

轴对称场（与 φ 无关）：

通解 $\Phi(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(A_m r^m+\frac{B_m}{r^{m+1}}\right)P_m(\cos\theta)$

$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\cdot\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^m$ 勒让德多项式

$P_0(x)=1$，$P_1(x)=x$

⑤镜像法

1. 点电荷对无限大导体平面的镜像

$q' = q$

$h' = h$

2. 点电荷对介质平面的镜像

上半空间： $q' = -\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q$ ，$z = -h$

下半空间： $q'' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} q$ ，$z = h$

3. 点电荷对导体球的镜像

$q_2 = -\frac{a}{d_1} q_1$ ，$d_2 = \frac{a^2}{d_1}$

五、时变电磁场

①电磁感应定律

动生电动势：$e_i=\int_l(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$

感生电动势：$e_i=\oint_l \vec{E_i}\cdot d\vec{l}$

法拉第定律：$e_i=-\frac{d\psi}{dt}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

麦克斯韦关于感应电场（涡旋电场）的假说的基本构想：

变化的磁场在其周围空间激发涡旋电场

$$\begin{cases}\oint_l\vec{E}\cdot d\vec{l}=\oint_l(\vec{E_库}+\vec{E_i})\cdot d\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}+\int_l(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\oint_l\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\end{cases}$$

②位移电流

麦克斯韦关于位移电流的假说的基本构想：

变化的电场在其周围空间激发涡旋磁场

$$\begin{cases}\oint_l\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_c+I_d=\iint_S\vec{J}\cdot d\vec{S}+\iint_S\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{cases}$$

③麦克斯韦方程组

$$\begin{cases}\oint_l\vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint_S(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\cdot d\vec{S}\\ \oint_l\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\\ \oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0\\ \oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=q\end{cases}\qquad\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\cdot\vec{B}=0\\ \nabla\cdot\vec{D}=\rho\end{cases}\qquad\begin{cases}\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\\ \vec{B}=\mu_0\mu_r\vec{H}\\ \vec{J}=\sigma\vec{E}\end{cases}$$

④ 时变电磁场的边界条件

$$\begin{cases} \vec{n}\times(\vec{E_1}-\vec{E_2})=0 \\ \vec{n}\times(\vec{H_1}-\vec{H_2})=\vec{J_s} \\ \vec{n}\cdot(\vec{B_1}-\vec{B_2})=0 \\ \vec{n}\cdot(\vec{D_1}-\vec{D_2})=\rho_s \end{cases} \quad \begin{cases} E_{1t}=E_{2t} \\ H_{1t}-H_{2t}=J_s \\ B_{1n}=B_{2n} \\ D_{1n}-D_{2n}=\rho_s \end{cases} \quad \begin{cases} E_{1t}=E_{2t}=0 \\ H_{1t}=J_s \\ B_{1n}=B_{2n}=0 \\ D_{1n}=\rho_s \end{cases}$$

⑤ 坡印廷定理和坡印廷矢量

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})=-\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\vec{E}\cdot\vec{J}-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})=-\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\vec{E}\cdot\vec{J}-\vec{D}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)-\vec{E}\cdot\vec{J}-\frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{D}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)-\vec{E}\cdot\vec{J}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)$$

$$\int_V\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})dV=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,dV-\int_V p\,dV$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}-\int_V\vec{E}\cdot\vec{J}\,dV$$

⑥ 时变电磁场的矢量位和标量位

由 $\nabla\cdot\vec{B}=0$ ， $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$

$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{A})=-\nabla\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ ， $E+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\Phi$ / $\vec{E}=-\nabla\Phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

洛仑兹条件 $\nabla\cdot\vec{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t}$

达朗贝尔方程

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla\times\vec{B} = \mu\nabla\times\vec{H}$$

将 $\nabla\times\vec{H} = \vec{J} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ 和 $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 代入

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \mu\vec{J} - \mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi) - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 A^2 - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \mu\vec{J} + \nabla(\mu\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A} + \mu\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t}) - \mu\vec{J}$$

$$\nabla^2\vec{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = -\nabla\cdot(\nabla\Phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$

$$\varepsilon(\nabla\cdot\vec{E}) = -\varepsilon\nabla\cdot(\nabla\Phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}) = \rho$$

$$\nabla^2\Phi + \nabla\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t}(-\mu\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial t})$$

$$\nabla^2\Phi - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

六、平面电磁波

① 正弦电磁场的复数表示方法

1、电磁场量的复数形式

$$E(x,y,z,t) = E_m(x,y,z)\cos(\omega t+\psi) = Re[E_m(x,y,z)\, e^{j(\omega t+\psi)}]$$

$$E = Re[E_m e^{j(\omega t+\psi)}] = Re[E_m e^{j\psi}\cdot e^{j\omega t}] = Re[\dot{E}_m \cdot e^{j\omega t}]$$

略去Re，$E = \dot{E}_m e^{j\omega t}$

2、麦克斯韦方程组的复数形式

$\nabla\cdot\vec{D} = \dot{\rho}$　　　　$\nabla\cdot\vec{J} + j\omega\dot{\rho} = 0$

$\nabla\times\vec{E} = -j\omega\vec{B}$

$\nabla\cdot\vec{B} = 0$

$\nabla\times\vec{B} = \vec{J} + j\omega\vec{D}$

② 平均坡印廷矢量

$$S_{av} = \frac{1}{2}Re(\vec{\dot{E}}\times\vec{\dot{H}}^*)$$

$$S_{xav} = \frac{1}{T}\int_0^T S_x\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (E_yH_z - E_xH_y)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T [E_{ym}H_{zm}\cos(\omega t+\psi_{yE})\cos(\omega t+\psi_{zH}) - E_{zm}H_{ym}\cos(\omega t+\psi_{zE})\cos(\omega t+\psi_{yH})]\,dt$$

$$S_{xav} = \frac{1}{2}[E_{ym}H_{zm}\cos(\psi_{yE}-\psi_{zH}) - E_{zm}H_{ym}\cos(\psi_{zE}-\psi_{yH})]$$

$$= \frac{1}{2}Re[\dot{E}_y\dot{H}_z^* - \dot{E}_z\dot{H}_y^*]$$

同理，$S_{av} = \frac{1}{2}Re(\dot{E}\times\dot{H}^*)$

③ 理想介质中的均匀平面波

1、电磁波传播的基本方程

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} \\ \nabla\times\vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla\cdot\vec{H} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{E} = 0 \end{cases}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon\vec{E})$$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E} = \mu\varepsilon\omega^2\vec{E}$$

$$\nabla^2\vec{E} + \mu\varepsilon\omega^2\vec{E} = 0$$

$$\mu\varepsilon = \frac{1}{v^2}$$

$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \omega^2\mu\varepsilon$，k称为波数

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E} + k^2\vec{E} = 0 \\ \nabla^2\vec{H} + k^2\vec{H} = 0 \end{cases}$$

2、均匀平面电磁波

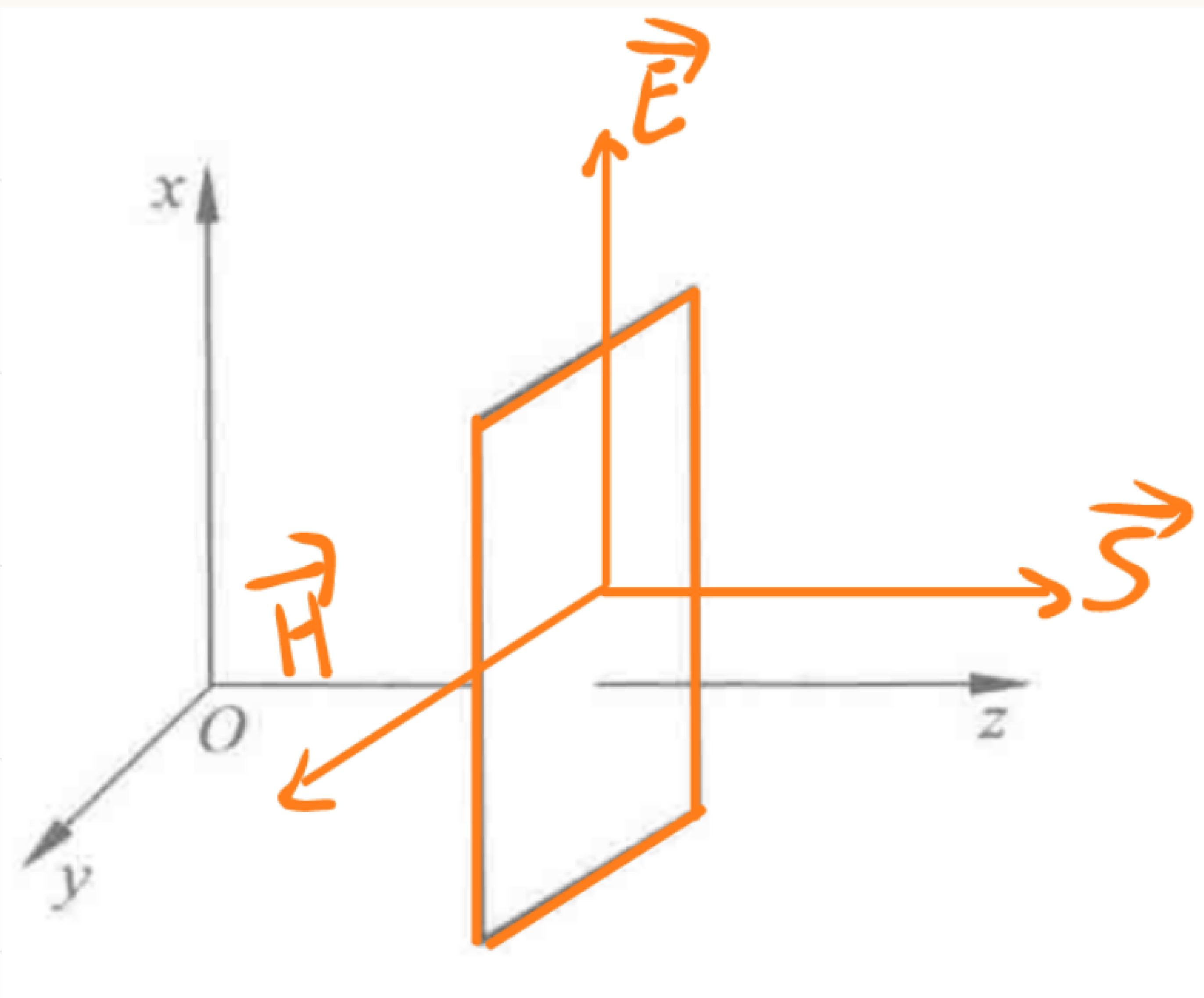


图 6.3 均匀平面电磁波

由波动方程可得

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2\dot{E}_x = 0$$

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} + k^2\dot{E}_y = 0$$

解得 $\dot{E}_x = \underbrace{\dot{E}_m^+ e^{-jkz}}_{\text{入射波}} + \underbrace{\dot{E}_m^- e^{jkz}}_{\text{反射波}}$

$$\dot{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu}(\nabla\times\dot{E}_x) = \frac{k}{\omega\mu}(\dot{E}_m^+ e^{-jkz} - \dot{E}_m^- e^{jkz})$$

取 $\dot{E}_m^+ e^{jkz} e^{j\omega t} = E_m^+ e^{j(\omega t - kz + \psi^+)} \overset{Re}{=} E_m^+ \cos(\omega t - kz + \psi^+) = E_m^+ \cos[\omega(t - \frac{z}{v}) + \psi^+]$

在无限大均匀介质中，均匀平面波

$$\begin{cases} \dot{E}_x = \dot{E}_m e^{-jkz} \\ \dot{H}_y = \frac{k}{\omega\mu} \dot{E}_m e^{-jkz} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_x = E_m \cos(\omega t - kz + \psi^+) \\ H_y = \frac{k}{\omega\mu} \cos(\omega t - kz + \psi^+) \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \\ v = \lambda f = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \\ k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \\ \eta = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \end{cases}$$

沿任意方向 $\vec{e_n}$ 传播的均匀平面波

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m e^{-jkz} \Rightarrow \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m e^{-jk(\vec{e_n}\cdot\vec{r})}$$

④波的极化特性

1. E_x, E_y 相位相同

$$\begin{cases} E_x = E_{xm}\cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_{ym}\cos(\omega t - kz) \end{cases}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_{xm}^2 + E_{ym}^2}\cos(\omega t - kz)$$

$$\alpha = \arctan\frac{E_y}{E_x} = \arctan\frac{E_{ym}}{E_{xm}}$$

线极化波

2. E_x, E_y 相位相差 $\frac{\pi}{2}$ 且 $E_{xm} = E_{ym}$

$$\begin{cases} E_x = E_{xm}\cos(\omega t - kz) \\ E_y = E_{ym}\cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}) = E_{ym}\sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

若 $E_{xm} = E_{ym} = E_m$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_m, \quad \alpha = \arctan\frac{E_y}{E_x} = \omega t - kz$$

圆极化波

3、其它

椭有圆极化波

（3）电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的旋转方向。

圆极化波和椭圆极化波根据电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的旋转方向，又可以分为右旋极化波和左旋极化波。若 $\boldsymbol{E}$ 的旋转方向与传播方向成右手关系，称为右旋极化波；若 $\boldsymbol{E}$ 的旋转方向与传播方向成左手关系，称为左旋极化波，如图 6.11 所示。

⑤ 损耗媒质中的均匀平面波

1、损耗媒质中电磁场的基本方程

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+j\omega\varepsilon\vec{E} \\ \nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla\cdot\vec{H}=0 \\ \nabla\cdot\vec{E}=0 \end{cases}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-j\omega\mu(\sigma+j\omega\varepsilon)\vec{E}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=\omega^2\mu\varepsilon(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})\vec{E}$$

$$\nabla^2\vec{E}+\mu\varepsilon_c\omega^2\vec{E}=0$$

$$\varepsilon_c=\varepsilon(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})$$

$$\gamma^2=-\omega^2\mu\varepsilon_c\quad,\quad\gamma=j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c}=\alpha+j\beta$$

$$\begin{cases} \nabla^2\vec{E}-\gamma^2\vec{E}=0 \\ \nabla^2\vec{H}-\gamma^2\vec{H}=0 \end{cases}$$

2、损耗媒质中 $\vec{E}$、$\vec{H}$ 的表达式

由波动方程可得

$$\frac{d^2E_x}{dz^2}-\gamma^2\dot{E}_x=0$$

$$\frac{d^2H_y}{dz^2}-\gamma^2\dot{E}_y=0$$

$$\dot{E}_x=\dot{E}_x^+e^{-\gamma z}+\dot{E}_x^-e^{\gamma z}$$

不考虑反射波

$$\dot{E}_x = \dot{E}_x^+ e^{-\gamma z} = \dot{E}_x^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$E_x = E_{xm}^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \psi_M)$$

$$\dot{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu}(-\gamma \dot{E}_x) = \frac{\alpha + j\beta}{j\omega\mu} \dot{E}_x^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

令 $\frac{\alpha + j\beta}{j\omega\mu} E_{xm}^+ = H_{ym}^+ e^{j\psi_M}$

$$H_y = H_{ym}^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \psi_M)$$

3、导电媒质中电磁波的传播特性

损耗角 δ_c

$$\tan|\delta_c| = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{\sigma E}{\omega\varepsilon E} = \frac{|J|}{\left|\frac{\partial D}{\partial t}\right|} = \frac{传导电流}{位移电流}$$

传播常数 γ

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = j\omega\sqrt{\mu\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)} = \alpha + j\beta$$

解得 $\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} - 1\right)}$

$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1\right)}$

波阻抗 η_c

$$\eta_c = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \frac{j\omega\mu}{\alpha + j\beta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}}}$$

相速度和波长

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1\right)}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}} + 1\right)}}$$

4、弱导电媒质中的均匀平面波

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)} \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)} \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\eta_c = \frac{\eta}{1+j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v}{f}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

5、强导电媒质中的均匀平面波

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(1-j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon})}} \approx \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\pi f\mu}{\sigma}}(1+j)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\sqrt{\frac{\pi}{f\mu\sigma}}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = 2\sqrt{\frac{\pi f}{\mu\sigma}}$$

⑥平面上的垂直入射

两种媒质分界面上的垂直入射

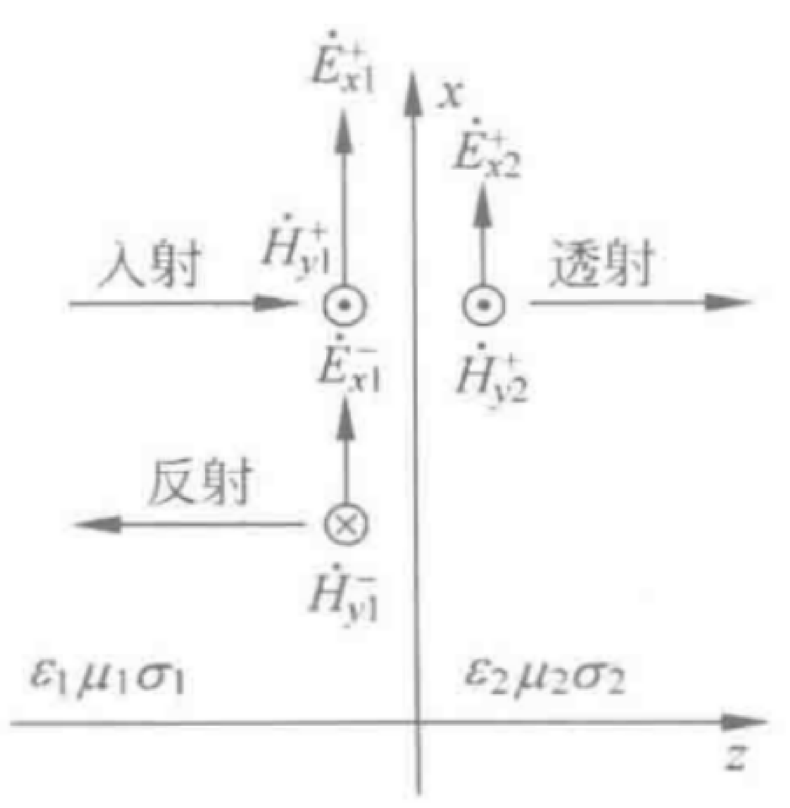


图 6.26 两媒质界面上的垂直入射

入射波：$\dot{E}_{x1}^{+} = \dot{E}_{m1}^{+}e^{-\gamma_1 z}$

$\dot{H}_{y1}^{+} = \frac{\dot{E}_{m1}^{+}}{\eta_1}e^{-\gamma_1 z}$

反射波：$\dot{E}_{x1}^{-} = \dot{E}_{m1}^{-}e^{\gamma_1 z}$

$\dot{H}_{y1}^{-} = \frac{\dot{E}_{m1}^{-}}{\eta_1}e^{\gamma_1 z}$

透射波：$\dot{E}_{x2}^{+} = \dot{E}_{m2}^{+}e^{-\gamma_2 z}$

$\dot{H}_{y2}^{+} = \frac{\dot{E}_{m2}^{+}}{\eta_2}e^{-\gamma_2 z}$

$$\begin{cases} \dot{E}_{x1} = \dot{E}_{x1}^{+} + \dot{E}_{x1}^{-} = \dot{E}_{m1}^{+} e^{-\gamma_1 z} + \dot{E}_{m1}^{-} e^{\gamma_1 z} \\ \text{同理 } \dot{H}_{y1} = \dfrac{\dot{E}_{m1}^{+}}{\eta_1} e^{-\gamma_1 z} - \dfrac{\dot{E}_{m1}^{-}}{\eta_1} e^{\gamma_1 z} \end{cases}$$

由边界条件

$$\begin{cases} \dot{E}_{m1}^{+} + \dot{E}_{m1}^{-} = \dot{E}_{m2}^{+} \\ \dfrac{\dot{E}_{m1}^{+}}{\eta_1} - \dfrac{\dot{E}_{m1}^{-}}{\eta_1} = \dfrac{\dot{E}_{m1}^{+}}{\eta_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{E}_{m1}^{-} = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \dot{E}_{m1}^{+} \\ \dot{E}_{m2}^{+} = \dfrac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \dot{E}_{m1}^{+} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{反射系数 } \Gamma = \dfrac{\dot{E}_{m1}^{-}}{\dot{E}_{m1}^{+}} = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \\ \text{透射系数 } \tau = \dfrac{\dot{E}_{m2}^{+}}{\dot{E}_{m1}^{+}} = \dfrac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \end{cases} \Rightarrow \quad \tau = \Gamma + 1$$

$$S_{av} = Re\left(\frac{1}{2}\dot{E}_{m2}^{+} \cdot \frac{\dot{E}_{m2}^{+*}}{\eta_2}\right) = Re\left[\frac{1}{2}(\dot{E}_{m1}^{+} + \dot{E}_{m1}^{-})\left(\frac{\dot{E}_{m1}^{+*}}{\eta_1} - \frac{\dot{E}_{m1}^{-*}}{\eta_1}\right)\right]$$

$$= Re\left[\frac{1}{2}\frac{\dot{E}_{m1}^{+2}}{\eta_1} - \frac{1}{2}\frac{\dot{E}_{m1}^{-2}}{\eta_1}\right]$$

2. 理想导体表面的反射．驻波

设均匀平面波由理想介质垂直入射到理想导体表面

$\gamma_1 = j\beta_1$ ， $\dot{E}_2 = 0$

所以 $\dot{E}_{m}^{+} = -\dot{E}_{m1}^{-}$ $\Gamma = -1$

$\dot{E}_{x1}^{+} = \dot{E}_{m1}^{+} e^{-j\beta_1 z}$ ， $\dot{E}_{x1}^{-} = -\dot{E}_{m1}^{+} e^{j\beta_1 z}$

有 $\dot{E}_{x1} = \dot{E}_{x1}^{+} + \dot{E}_{x1}^{-} = \dot{E}_{m1}^{+}(e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) = -2j\dot{E}_{m1}^{+} \sin\beta_1 z$

所以 $E_{x1} = 2E_{m1}^{+} \sin\beta_1 z \sin\omega t$

同理 $H_{y1} = 2\dfrac{E_{m1}^{+}}{\eta_1} \cos\beta_1 z \cos\omega t$

相对于驻波，理想介质中的均匀平面波 $\dot{E}_x = \dot{E}_{xm} e^{-j\beta z}$ 称为等幅行波

导电媒质中的均匀平面波 $\dot{E}_x = \dot{E}_{xm} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$ 称为衰减行波

导体表面的面电流密度 $\vec{J}_S = \vec{n} \times \vec{H}_1 = -\vec{e}_z \times \vec{e}_y \vec{H}_{y1}$

$$= \vec{e}_x \vec{H}_{y1}|_{z=0} = \vec{e}_x \frac{2\dot{E}_{m1}^{+}}{\eta_1}$$

驻波的能量和能流

$$W_e=\frac{1}{2}\varepsilon_1 E_{x1}^2=2\varepsilon_1 E_{m1}^{+2}\sin^2\beta_1 z\sin^2\omega t$$

$$W_m=\frac{1}{2}\mu H_{y1}^2=2\mu_1\frac{E_{m1}^{+2}}{\eta_1^2}\cos^2\beta_1 z\cos^2\omega t=2\varepsilon_1 E_{m1}^{+2}\cos^2\beta_1 z\cos^2\omega t$$

$$S_{av}=Re[\frac{1}{2}\vec{E_1}\times\vec{H_1^*}]=0$$

趋肤深度 δ（透入深度）

$$e^{-\alpha\delta}=e^{-1} \quad 则\ \delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

3、两种理想介质界面的反射、驻波比

$$\gamma_1=j\beta_1,\quad \gamma_2=j\beta_2$$

$$\dot{E}_{x1}=\dot{E}_{x1}^{+}+\dot{E}_{x1}^{-}=\dot{E}_{m1}^{+}e^{-j\beta_1 z}+\dot{E}_{m1}^{-}e^{j\beta_1 z}$$

$$=\dot{E}_{m1}^{+}e^{-j\beta_1 z}+\Gamma\dot{E}_{m1}^{+}e^{j\beta_1 z}-\Gamma\dot{E}_{m1}^{+}e^{-j\beta_1 z}+\Gamma\dot{E}_{m1}^{+}e^{-j\beta_1 z}$$

$$=\underbrace{(1+\Gamma)\dot{E}_{m1}^{+}e^{-j\beta_1 z}}_{行波}+\underbrace{2\Gamma\dot{E}_{m1}^{+}\cos\beta_1 z}_{驻波}$$

同理 $\dot{H}_{y1}=\frac{1-\Gamma}{\eta_1}\dot{E}_{m1}^{+}e^{-j\beta_1 z}-j\frac{2\Gamma}{\eta_1}\dot{E}_{m1}^{+}\sin\beta_1 z$

入端阻抗

$$\dot{E}_{x1}=\dot{E}_{m1}^{+}e^{-j\beta_1 z}+\Gamma\dot{E}_{m1}^{+}e^{j\beta_1 z}=\dot{E}_{m1}^{+}e^{-j\beta_1 z}(1+\Gamma e^{j2\beta_1 z})$$

$$\Gamma(z)=\Gamma e^{j2\beta_1 z}$$

$$\dot{E}_{x1}=\dot{E}_{m1}^{+}e^{-j\beta_1 z}[1+\Gamma(z)]$$

同理 $\dot{H}_{y1}=\frac{\dot{E}_{m1}^{+}}{\eta_1}e^{-j\beta_1 z}[1-\Gamma(z)]$

$$\eta(z)=\eta_1\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}$$

驻波比

$$E_{x1,max}=E_{m1}^{+}+E_{m1}^{-}$$

$$E_{x1,min}=E_{m1}^{+}-E_{m1}^{-}$$

$$S=\frac{E_{x1,max}}{E_{x1,min}}=\frac{1+\frac{E_{m1}^{-}}{E_{m1}^{+}}}{1-\frac{E_{m1}^{-}}{E_{m1}^{+}}}=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$$

⑦平面上的斜入射

折射定律

$$\frac{\sin\theta''}{\sin\theta} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}}$$

全反射

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$

$\sin\theta_c = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

$\theta \geqslant \theta_c$

全透射

平行极化波 $\theta = \theta_B = \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$

垂直极化波不可能发生全透射.

八、

第八章太混乱了，所以不写了