Национальный исследовательский Университет ИТМО
Мегафакультет информационных и трансляционных технологий
Факультет инфокоммуникационных технологий

Математический анализ

Лабораторная работа"Пределы"

Работу выполнил:
Г.А. Белисов
Группа: К3121
Преподаватель:
В.А. Кочевадов

Санкт-Петербург
2022

Содержание

Введение

Данная работа содержит математический текст[1] с формулами. Моя цель, заключается в том, чтобы в ходе работы понять тему пределов.

1. Функции, непрерывные в области. Теоремы Больцано-Коши.Теоремы вейерштрасса

1.1. Функции, непрерывные в области

Мы будем говорить, что функция $f(x_1, ..., x_n)$ непрерывная в некотором множестве M представляет собой открытую или замкнутую область, наподобие того, как непрерывные функции одной переменной рассматривали в промежутке.

Обращаемся теперь к изучению свойств функции нескольких переменных, непрерывной в некоторой области n-мерного пространства. Они вполне аналогичны свойствам функции одной переменной, непрерывной в промежутке.

При изложении мы лишь для краткости ограничимся случаем двух независимых переменных. Перенесение на общий случай производится непосредственно и не представляет труда. Впрочем, некоторые замечания по этому поводу будут сделаны попутно.

1.2. Теоремы Больцано-Коши

Сформулируем теперь теорему, аналогичную первой теореме Больцано-Коши для функции одной переменной.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой связной области D. Если в двух точках $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ этой области функция принимает значения разных знаков:

$$f(x_0, y_0) < 0, f(x_1, y_1) > 0,$$

то в этой области найдется и точка $M'(x', y')$, в которой функция обращается в нуль: $f(x', y') = 0$.

Доказательство мы построим на сведении к случаю функции одной независимой переменной.

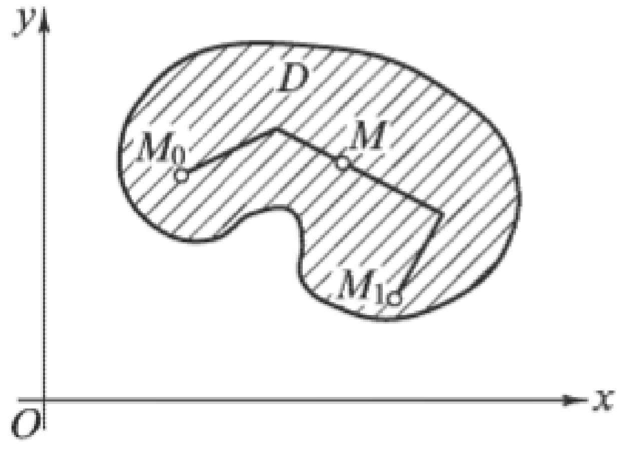

Рисунок 1.1. Область D

Ввиду связности области D, точки M_0 и M_1 можно соединить ломаной, всеми точками лежащей в D (рисунок 1). Если последовательно перебирать вершины ломаной, то либо окажется, что в какой-либо из них функция обращается в 0 - и тогда теорема доказана, либо этого не будет. В последнем случае найдется такая сторона ломаной, на концах которой функция принимает значения разных знаков. Изменив обозначения точек, будем считать, что M_0 и M_1 как раз и являются концами этой стороны. Её уравнения имеют вид:

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + t(y_1 - y_0) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Если точка $M(x, y)$ передвигается именно вдоль этой стороны, то наша первоначальная функция $f(x, y)$ превращается в сложную функцию одной переменной t:

$$F(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0), \;\; y_0 + t(y_1 - y_0)) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

очевидно, непрерывную (по теореме предшествующего n°), ввиду непрерывности как функции $f(x, y)$, так и линейных функций от t, подставленных вместо ее аргументов. Но для $F(t)$ имеем:

$$F(0) = f(x_0, y_0) < 0, \;\; F(1) = f(x_1, y_1) > 0$$

Применяя к функции $F(t)$ одной переменной уже доказанную в n°80 теорему, заключаем, что $F(t') = 0$ при некотором значении t' между 0 и 1. Вспоминая определение функции $F(t)$, имеем таким образом

$$f(x_0 + t'(x_1 - x_0), \quad y_0 + t'(y_1 - y_0)) = 0.$$

Точка $M'(x', y')$, где $x' = x_0 + t'(x_1 - x_0)$, $y' = y_0 + t'(y_1 - y_0)$ и является искомой. Отсюда вытекает, 2-я теорема Больцано-Коши, которая, впрочем, могла бы быть получена и сразу.

Читатель видит, что переход к пространству n измерений (при $n > 2$) не создает никаких затруднений, ибо в n-мерной связной области точки также могут быть соединены "ломаной" и вопрос сведется к рассмотрению ее стороны, вдоль которой функция будет зависеть от одного параметра, и т.д.

1.3. Теоремы вейерштрасса

1-я теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D, то функция ограничена, т.е. все ее значения содержатся между двумя конечными границами:

$$m \leq f(x, y) \leq M.$$

Доказательство. Пусть функция $f(x, y)$ при изменении (x, y) в D оказывается неограниченной. Тогда для любого n найдется в D такая точка $M_n(x_n, y_n)$, что

$$|f(x_n, y_n| > n. \qquad (7)$$

Из ограниченной последовательности $\{M_n\}$ можно извлечь частичную последовательность $\{M_{n_k}\}$, сходящуюся к предельной точке $\overline{M}(\overline{x}, \overline{y})$.

Отметим, что эта точка $\overline{M}$ необходимо принадлежит области D. Действительно, в противном случае точки M_{n_k} все были бы от нее отличны, и точка $\overline{M}$ была бы точкой сгущения области D, ей не принадлежащей, что невозможно ввиду замкнутости области D.

Вследствие непрерывности функции в точке $\overline{M}$ должно быть

$$f(M_{n_k}) = f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\overline{M}) = f(\overline{x}, \overline{y})$$

а это находится в противоречии с (7).

2-я теорема Вейерштрасса. Обе теоремы Вейерштрасса переносятся и на случай, когда функция непрерывна в любом ограниченном замкнутом мжножестве M (хотя бы и не представляющем собой области).

Как и в случае функции одной переменной, для функции $f(x, y)$, определенной и ограниченной в множестве M, разность между точными верхней и нижней границами значений функции в M называется ее колебанием в этом множестве. Если M ограничено и замкнуто (в частности, если M есть ограниченная замкнутая область), и функция f в нем непрерывна, то колебание есть попросту разность между наибольшим и наименьшим ее значениями.[1]

2. Таблица первообразных

Таблица 2.1

Функция{f(x)}	Первообразная {F(x)}
k	$kx + C$
x^n,$(n \in Z, n \neq -1)$	$\frac{x^(n+1)}{n+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$sinx$	$-cosx + C$
$cosx$	$sinx + C$
$\frac{1}{cos^2x}$	$tgx + C$
$\frac{1}{sin^2x}$	$-ctgx + C$
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\| + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{lna} + C$

Заключение

В данной лабороторной работе была разобрана тема пределов, а также построена таблица первообразных.

Список использованных источников

1. Курс дифференциального и интегрального исчисле- ния. В 3 томах. Том 1./ Пред. и прим. А.А. Флоринского. 8-е изд.-М. ФИЗМАТЛИТ, 2003.-680с. — URL: https://is.gd/ifeFIb.