Основные уравнения макроскопической электродинамики и общие свойства ЭМП.

1. Ур-я Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Постулаты, связывающие ЭМ явления с механическими (выраж. для плотности энергии поля и силы Лоренца). Пределы применимости ур-ий классической электродинамики.

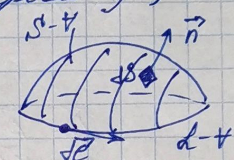
Введём следующие постулаты, чтобы построить классическую электродинамику.

1) Постулируем существование ЭМП, которое в среде описывается следующими векторами:

$\vec{E}$ ~ напряжённость электрического поля;
$\vec{D}$ ~ индукция электрического поля (эл-ая индукция);
$\vec{B}$ ~ магнитная индукция;
$\vec{H}$ ~ напряжённость магнитного поля.

Причём вектора $\vec{E}, \vec{B}$ ~ являются первичными.

2) Постулируем уравнения Максвелла в среде (здесь объёмные и поверхностные интегралы обозн одной чертой $\int$)

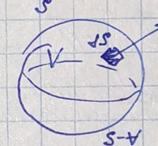


1. $$\oint_L \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\, d\vec{S}$$

~ по сути обобщение электромагнитной индукции Фарадея.

S-ч обозн. - любая пов-ть.

2. $$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I + \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}\, d\vec{S}}_{\frac{4\pi}{c} I_{см}}$$, где $I = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}$, где $\vec{j}$ - плотность эл-ого тока



3. $$\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = 4\pi Q$$, где $Q = \int_V \rho\, dV$; $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$

4. $$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0$$ ~ следствие отсутствия магнитных зарядов

Опр. Свободными называются такие заряды, которые могут перемещаться в веществе на макроскопические расстояния.

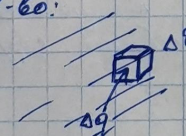
Опр. Связанные заряды локализованы относительно некоторых центров и способны перемещаться на микроскопические расстояния.

$\rho, \vec{j}$ ~ обусловлены свободными зарядами

ρ — объёмная плотность свободных зарядов.

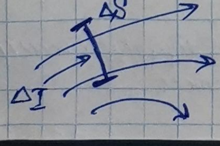
Как эти величины следует понимать?

в-во:



Берём малый физический объём в в-ве $\Delta V \to 0$ тогда заряд, заключённый в $\Delta V \to \Delta q$ как бы перейдёт в заряд в точке.

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$ ~ значение заряда в точке.



Аналогично берём маленькую площадку и смотрим на величину тока, проходящего через неё $j = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}$

Введём такое понятие как свободное пространство = вакуум (в электродинамике)

Токи в свободном пр-ве $\vec{j} = \vec{j}_{конв}$ (конвективные токи, они тоже учитываются.)

$$I_{см} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}\, d\vec{S}$$ ~ ток связанных зарядов, это перемещение средних положений связанных электронов и ядер отн. центра молекулы.

Ток конвекции обусловлен переносом электрических зарядов в свободном пространстве заряженными частицами или телами под действием электрического поля.

Первая пара 2) и 3) сист. ур-ий Максвелла содержат токи и заряды ⇒ выражают поля через токи и заряды.

пара 1) и 4) определяет связь между $\vec{E}$ и $\vec{B}$ универсально (т.е. вид связи не зависит от среды и тела источника).

Эти уравнения не образуют замкнутой системы, поэтому для решения их необходимо дополнить материальными уравнениями

зависят от свойств среды

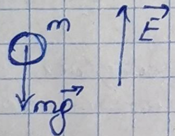
$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$$
$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$$
$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{B})$$

В простейшем случае изотропной среды:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, проводимость

Для того чтобы производить вычисления ЭМ величин необходимо сформулировать дополнительные соотношения → метрологическая связь с полями другой природы (например с гравитационным полем)



Есть несколько способов это сделать.

1 способ) Постулировать силу Лоренца в вакууме:

$$\vec{F}_л = \int_V \left\{\rho \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}]\right\} dV$$

где $\vec{f}_л = \rho\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{j}, \vec{B}]$ ~ объёмная плотность силы Лоренца, прилож. к ед. объёма

=> но это сложный способ.

2 способ) Сказать, что всюду измерение полей сводится к измерению энергии. Постулируем выражение для энергии (в линейной среде без дисперсии).

Линейная среда – среда, в которой выполняется принцип суперпозиции.

Недиспергирующая среда – среда, в которой связь между индукциями и напряжённостями является локальной во времени и пространстве.

$$W = \int_V \underbrace{\frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}}{8\pi}}_{w} dV$$

w – объёмная плотность энергии.

Пределы применимости ур-ий Максвелла.

1. Теория Максвелла является феноменологической – такая теория описывает макроскопические процессы, отвлекаясь от микроскопической структуры сред. (работаем с усреднёнными величинами)

Хар-ие размеры кристал. решётки (пространственный масштаб)

$$\sim 10^{-8} \div 10^{-7} \text{ см}$$

$\Rightarrow$ $l \gg 10^{-8} \div 10^{-7}$ см $\|$ → иначе среду нельзя считать

$\lambda \gg 10^{-8} \div 10^{-7}$ см $\|$ сплошной.

$$\Delta t \gg \frac{10^{-8} \div 10^{-7} \text{ см}}{c = 3\cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}} \simeq 10^{-18} \text{ с.}$$

$\Rightarrow$ необходимое, но недостаточн. условие

Можно было бы ввести $\vec{e}$ и $\vec{h}$ – малые флуктуации полей – микроскопические направления эл-ого и магнитного поля, так что

$$\overline{\vec{e}} = \vec{E} \qquad \overline{\vec{h}} = \vec{H}$$

2. Максвелловская теория считается классической (неквантовой), т.е. не учитывает квантовых эффектов.

$E = h\nu = \hbar\omega$, где $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}05 \cdot 10^{-17}$ эрг·с. – пост. Планка

– т.е. энергия изменяется дискретно, а не гладко.

Необходимо, чтобы $W \gg \hbar\omega$ → чтобы энергия изм. гладко.

3. Уравнения Максвелла справедливы для движущихся сред, но с некоторыми модификациями.

4. Уравнения Максвелла в интегральной форме требуют интегрируемости входящих в них величин. (допускаются скачки, разрывы в полях и характеристиках сред, но если они не приводят к расходимости интегралов.

Уравнения Максвелла в дифф-ой форме.

1) $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}d\vec{S}$

$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$, и исп-м ф-лу Стокса: $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{E}\, d\vec{S}$

$$\Rightarrow \int_S \left(\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) d\vec{S} = 0$$

Т.к. интегрирование ведётся по любой пов-ти S, то мы можем выбрать такую, где $\int \ldots d\vec{S} \neq 0$ $\Rightarrow$ тождественное равенство нулю подинт. выражения. (аналогично проговаривается для следующих выражений)

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2) $\oint\limits_L \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S \vec{j}\, d\vec{S} + \frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, d\vec{S}$

Рассуждая аналогично с пунктом 1.

$$\int\limits_S \left(\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{4\pi}{c}\vec{j} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

3) $\oint\limits_S \vec{D}\, d\vec{S} = 4\pi \int\limits_V \rho\, dV$

По теореме Остроградского-Гаусса: $\oint\limits_S \vec{D}\, d\vec{S} = \iiint\limits_V \mathrm{div}\,\vec{D}\, dV$

$$\Rightarrow \int\limits_V (\mathrm{div}\,\vec{D} - 4\pi\rho)\, dV = 0$$

т.к. интегр. по произвольному объёму

$$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho$$

4) $\oint\limits_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

Все уравнения Максвелла ещё раз:

1) $\oint\limits_L \vec{E}\, d\vec{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \vec{B}\, d\vec{S}$

2) $\oint\limits_L \vec{H}\, d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int\limits_S \vec{j}\, d\vec{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \vec{D}\, d\vec{S}$

3) $\oint\limits_S \vec{D}\, d\vec{S} = 4\pi Q = 4\pi\int\limits_V \rho\, dV$

4) $\oint\limits_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0$

1) $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

2) $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

3) $\mathrm{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho$

4) $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

2. Важнейшие общие св-ва ур-ий Максвелла и их решений. Скаляры, вектора и псевдовектора в уравнениях Максвелла. Линейность уравнений и принцип суперпозиции решений. Обратимость уравнений во времени. Принцип перестановочной двойственности и магнитные источники.

Математическое отступление для определений:

1) Скаляром (инвариантом) в 3х мерном пр-ве назыв. величина, которая не изменяет своё значение при повороте координатных осей.

2) Вектором в 3х мерном пр-ве назыв. совокупность 3х величин A_i, $i = \overline{1,3}$, которые при повороте коорд. осей преобразуются по следующей ф-ле:

$$A_i' = \alpha_{ij} A_j$$

По отношению к инверсии → скаляры → истинные (не изм. знак при инверсии коорд. осей)

↓

псевдоскаляры (меняют знак при инверсии коорд. осей)

Аналогично: векторы → истинные (при преобр. инверсии $\vec{e}_i' = -\vec{e}_i$ меняется $A_i' = -A_i$)

↓

псевдовекторы (при инверсии $A_i' = A_i$)

Замечания и свойства уравнений Максвелла.

1. Истинные и псевдовекторы в ур-ях Максвелла:

① $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = [\nabla, \vec{E}]$; ∇ ~ истинный вектор

Причем $\vec{E}, \vec{D}$ ~ истинные векторы;
ρ – истинный скаляр => $\vec{j}$ – истинный вектор.

=> как раз из $[\nabla \vec{E}]$ => получим, что $\vec{B}$ – псевдовектор;

чтобы во ② $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ~ был слева истинный вектор.

=> $\vec{H}$ – псевдовектор.

=> $\vec{H}, \vec{B}$ – псевдовекторы.

Проверим: $\vec{F}_\Lambda = \frac{1}{c}[\vec{j}, \underbrace{\vec{B}}_{\text{псевд.}}]$ ~ истинный вектор.

2. Все ли уравнения Максвелла независимы?

Рассмотрим ① ур-е и применим операцию div

$\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}}_{=0} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{B}$ => $\mathrm{div}\,\vec{B} = \mathrm{const}$ (не зависит от времени)

понятно, что при $t \to -\infty$: $\vec{B} = 0$ => $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ $\forall t$

Но могут быть задачи, где $\vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})\, e^{i\omega t}$

$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$ => $i\omega\,\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

т.к. $\omega \neq 0$ => $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$

=> в любом случае из ① получим ④

Аналогично применим div к ур-ю ②

$\underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}}_{=0} = \frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{D}$ ~ используем ур-е ③ $\mathrm{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho$

$\frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}4\pi\rho = 0$ => $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$ ~ ур-е непрерывности (ЗСЗ)

В интегральной форме:

$\int\limits_V \mathrm{div}\,\vec{j}\, dV + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho\, dV = 0$

=> $\underbrace{\oint\limits_S \vec{j}\, dS}_{=I} + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int\limits_V \rho\, dV}_{Q} = 0$ => $I + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$ => $\boxed{\dot{Q} = -I}$

~т.е. заряд утекает

Т.е. получили, что ② + ③ → ур. непр. => ② + ур. непр. → ③

из $\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ => $\boxed{\rho = -\int \mathrm{div}\,\vec{j}\, dt}$

=> Независимы только ① и ②, но ③ и ④ нужны в статике.

Пусть мы даже имеем 6 скалярных уравнений, связ. величины $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{j}$ ~ 15 неизвестных $\Rightarrow 15 - 6 = 9 \Rightarrow$ нужно 9 материальных уравнений.

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$$
$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B})$$
$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{B})$$

3. О временной обратимости уравнений Максвелла.

Опр. Процесс является обратимым во времени, если при замене $t \to -t$ вид ур-ий, опис. процесс, не изменяется.

Например: $\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$ ~ процесс диффузии необр. процесс

$\Delta \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ ~ ур-е Даламбера опис. обратимый процесс.

Есть нюанс., если $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $t \to -t$, то и $\vec{v} \to -\vec{v}$, но это не нарушение обратимости (если „пустим" фильм в обр. сторону → машина поедет обратно).

$\vec{H}, \vec{B} \to -\vec{H}, -\vec{B}$
$\vec{E}, \vec{D} \to \vec{E}, \vec{D}$

$\vec{j} \to -\vec{j}$ ~ про конвективные токи.

Если среда не проводящая $\sigma = 0$, $\vec{j}_{пр} = \sigma \vec{E} = 0$, то такие процессы в ур-ях Максвелла явл. обратимыми во времени (иначе, если $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ~ необр. процесс.)

$-\vec{j}$ $\vec{E}$

4. Принцип перестановочной двойственности (дуальности)

1) Рассмотрим однородные ур-я Максвелла $\vec{j} = 0, \rho = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad \xRightarrow{\text{замена}} \quad (*)\left(\begin{aligned} \vec{E} &\to \vec{H} \\ \vec{H} &\to -\vec{E} \\ \vec{D} &\to \vec{B} \\ \vec{B} &\to -\vec{D} \\ \varepsilon &\to \mu \\ \mu &\to \varepsilon \end{aligned}\right) \quad \xRightarrow{\text{с заменой получим}} \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ -\operatorname{rot} \vec{E} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ -\operatorname{div} \vec{D} &= 0 \end{aligned}$$

→ Принцип перестановочной двойственности ур-ий Максвелла заключается в их инвариантности к заменам (*). Или указ. нелее. Отсюда следует, что ЭМП, созданные некоторым распределением сторонних электрических токов $I_{ст}$ и таким же пространственным распределением сторонних магнитных токов $j^m_{ст}$, аналогичны.

2) $\vec{j} = \vec{j}^e$, $\rho = \rho^e$ ~ электрические токи / заряды

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^e \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (*) + \left(\begin{aligned} \vec{j}^e &\to \vec{j}^m \\ \rho^e &\to \rho^m \end{aligned}\right) (**) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}^m \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 4\pi\rho^m \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0 \end{aligned}$$

фиктивные заряды и токи.

Если мы знаем решение ур-ий Максвелла с эл-ными токами и зарядами, то мы автом. знаем решение с фиктивными магнитными токами и зарядами. (вводим как бы псевдовекторы и псевдоскаляры).

3) Пусть есть и электр-ие и фикт. магнитные токи

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,m}$$
$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,e}$$
$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho^e$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 4\pi\rho^m$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (**) \\ + \ \vec{j}^{\,m} \to -\vec{j}^{\,e} \\ \rho^m \to -\rho^e \end{array} \right\} (**) \Rightarrow$$

2) $\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,e}$

1) $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,m}$

4) $\operatorname{div}\vec{B} = 4\pi\rho^m$

3) $\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho^e$

~ в этом и закл. принцип перестановочной двойственности → при замене есть ещё 1но решение.

5. Ковариантность ур-ий электродинамики (неизменность ур-я отн. преобразований).

$$\Delta E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$ ~ одно из ур-ий, получ. из ур-ий Максвелла; (волновое ур-е.)

6. Запись ур-ий Максвелла в SI:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho$$
$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

Но в CGS все векторные поля имеют одинак. размерность, а в SI их нужно поправлять коэффициентами (нефизично)

$$\vec{D} = \underbrace{\varepsilon_0\varepsilon}_{\varepsilon_{SI}}\vec{E}, \quad \vec{B} = \underbrace{\mu_0\mu}_{\mu_{SI}}\vec{H}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{\Phi}{м}; \quad \mu_0 = 1{,}26\cdot10^{-6}\ \frac{Гн}{м}$$

причём $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 2{,}99\cdot10^8\ \frac{м}{с}$

7. Уравнения Максвелла линейны. Они содержат только первые производные полей $\vec{E}, \vec{B}$ по времени и координатам, а также первые степени плотности токов $\vec{j}$ и эл. зарядов ρ.

Как важное следствие такого факта → явл. принцип суперпозиции. (но ур-я Максвелла линейны только в линейных средах, т.е. мат. ур-я должны быть линейными)

=> Принцип суперпозиции

Пусть имеются источники, которые создают поля:

$$\vec{j}_I, \rho_I \to \vec{E}_I, \vec{H}_I$$
$$\vec{j}_{II}, \rho_{II} \to \vec{E}_{II}, \vec{H}_{II}$$, тогда справедливо, если

$$\underline{\vec{j}_{III} = \vec{j}_I + \vec{j}_{II}}, \ \underline{\rho_{III} = \rho_I + \rho_{II}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{III} = \vec{E}_I + \vec{E}_{II} \\ \vec{H}_{III} = \vec{H}_I + \vec{H}_{II} \end{array} \right\}$$

3. Материальные уравнения для различных сред. Диэлектрическая и магнитная проницаемость, проводимость. Понятие временной и пространственной дисперсии.

Материальные уравнения (соотношения)

1. Вакуум (свободное пр-во)

$\vec{D} = \vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}$, $\vec{j}_{ст} = 0$.

2. Линейные среды

Опр. Линейные среды - среды, в которых зависимости между индукциями и напряжённостями полей описываются линейными функциями.

например: $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B})$ ~ никакими сообр. симметрии нельзя исключить одну переменную.

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ => $\vec{B} = -\int c \cdot \mathrm{rot}\,\vec{E}\, dt$ => связь между полями $\vec{D}$ и $\vec{E}$ не лок-но во времени

Наличие в среде связи $\vec{D}$ и $\vec{E}$ нелокальной во времени говорит о временной дисперсии. Если $\vec{D}$ зав. от $\vec{B}$, то связь нелокальна и в пр-ве (между $\vec{D}$ и $\vec{E}$).

Диспергирующая среда - среда, в которой набл. пространственная или временная дисперсия.

Общий вид линейной связи: $D_i(t, \vec{r}) = \int^{t} dt' \int d\vec{r}'\, \tilde{\varepsilon}_{ij}(t, t', \vec{r}, \vec{r}')\, E_j(t', \vec{r}')$

~ собл. принцип причинности (будущ. не может оказ. влияние на наст.)

зависит от предыстории в пр-ве. функция влияния (оператор посредства)

По сути, если диэл. проницаемость зависит от частоты $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, то говорят о временной дисперсии, если $\varepsilon = \varepsilon(k)$ ~ от волнового числа - о пространственной.

Физ-ий смысл временной дисперсии заключается в следующем. Предположим, что элементы среды под воздействием эл-ого поля совершают колебания, фаза которых отстаёт от фазы колебаний внешней волны. Тогда волны, излуч. этими частицами, будут испытывать доп. задержку и приходить в точку набл. позднее, чем исходная ЭМВ.

Пространственная дисперсия обычно возникает, если длина ЭМВ становится сравнимой с хар-ыми внутр. масштабами среды, хар-щими степень воздействия ЭМВ на её элементы.

Для присут. причинно-следственной связи должно выполняться:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| - c^2(t - t')^2 \le 0$$

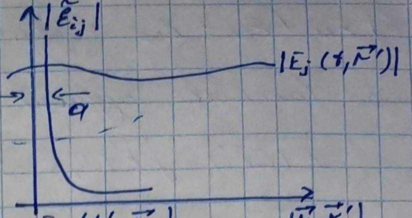
Случай стационарной однородной среды.

Стационарная (однородная во времени) - среда, св-ва которой не изменяются во времени под действием внешних причин, не связ. с параметрами поля.

Однородная - св-ва которой не изменяются в пр-ве.

Из стационарности и однородности: => $\tilde{\varepsilon}_{ij}(t, t', \vec{r}, \vec{r}') = \tilde{\varepsilon}_{ij}(t - t', \vec{r} - \vec{r}')$

Когда можно не учитывать пространственную дисперсию? → Если поле в пр-ве изменяется достаточно медленно.



$$\int\limits_V d\vec{r}'\,\hat{\varepsilon}_{ij}(t-t',\vec{r}-\vec{r}')\,E_j(t',\vec{r}')$$

При достаточно плавном изменении ф-ии на фоне резкой кривой:

$$\int\limits_V d\vec{r}'\,\hat{\varepsilon}_{ij}(t-t',\vec{r}-\vec{r}')\,E_j(t',\vec{r}') \approx \int\limits_V d\vec{r}'\,\underbrace{\hat{\varepsilon}_{ij}(t-t',\vec{r}-\vec{r}')}_{\hat{\varepsilon}_{ij}(t-t')}\cdot E_j(t',\vec{r})$$

$\Rightarrow \vec{r}$ не будет среда однор.

$\Rightarrow$ Связь между $\vec{D}$ и $\vec{E}$ стала локальной в пр-ве (опр-ся знач. $\vec{E}$ в той же самой точке, чем близкой окрестности).

Формально, если бы заменили простр. пер. на δ-функцию получили тот же бы результат

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(t-t',\vec{r}-\vec{r}') = \hat{\varepsilon}_{ij}(t-t')\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

Временной дисперсией можно пренебречь, если поле медленно изменяется во времени:

$$\hat{\varepsilon}_{ij}(t-t') = \varepsilon_{ij}\,\delta(t-t')$$

$\Rightarrow$ В среде без дисперсии:

$$D_i(t,\vec{r}) = \varepsilon_{ij}\cdot E_j(t,\vec{r})$$

тензор диэл. прониц. среды

Аналогично можно получить зависимости для других величин

Частные случаи сред без дисперсии

1. Изотропная среда без дисперсии

Опр. Среда называв. изотропной, если её локальные макроскоп. свойства не зависят от направления (инвариантна отн. группы вращения.)

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon\cdot\delta_{ij} \Rightarrow D_i = \varepsilon E_i$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon\vec{E}\ ;\ \vec{B} = \mu\vec{H}\ ;\ \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

2. Анизотропная среда без дисперсии

Опр. Среда называв. анизотропной, если её локальные макроскоп. свойства различны в различных направлениях.
Не могут быть описаны скалярами, опис. тензорами

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j\ ;\ B_i = \mu_{ij}H_j\ ;\ j_i = \sigma_{ij}E_j$$

Замечание: если у среды есть центр симметрии, и на неё не наложено внешнее магн. поле, то справедливо свойство:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}\ ;\ \mu_{ij} = \mu_{ji}\ ;\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$\Rightarrow$ тензор можно записать в диагональном виде.

Пример: $\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}$, где $\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$

Кристаллические среды делятся:

а) $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon$ ~ кубические

б) $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{\perp}$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{\parallel} \neq \varepsilon_{\perp}$ ~ одноосные кристаллы б) $\varepsilon_{11} \neq \varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}$ ~ двуосные кристаллы.

3. Частные случаи сред с дисперсией

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \int \vec{E}(\omega,\vec{k})\, e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}}\, d\omega\, d\vec{k} \quad \text{~ интеграл Фурье.}$$

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

Если все поля расписать через интеграл Фурье, можно ввести тензоры, но на опр. частоте:

$$D_i(\omega,\vec{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})\, E_j(\omega,\vec{k})$$

Среди сред с дисперсией выделяют гиротропные.

Опр. Среда назыв. гиротропной, локальные макроскопические св-ва которой неинвар. отн. зеркальных отражений. (гиротропная — естественно-оптическая среда.)

Среды, которые сост. из зеркально несимметричных частиц. (водные растворы сахаров и т.д.)

Магнитоактивные среды – становятся гиротропными при наложении внешнего магн-ого поля $\vec{B_0} = B_0 \vec{z_0}$ (плазма, ферриты)

Плазма:
$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \quad \text{~ похоже на одноосный кристалл}$$

Ферриты:
$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel} \end{pmatrix}$$

Если появл. в среде мнимость i ~ связано с омическими потерями

ε, g, η – Re

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^{*}$ ~ если это опр-во → тензор эрмитовый

или у ферритов: $\mu, \mu_a, \mu_{\parallel}$ – Re.

$\mu_{ij} = \mu_{ji}^{*}$

Замечание: в любой среде появл. нелин. св-ва при каком-то опр-ом значении полей (но мы не будем рассм-ть нелин. поля).

Векторы поляризации.

1. $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, $\vec{P}$ – вектор эл-ой поляризации

2. $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$

$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}$, $\vec{M}$ – вектор намагниченности (вектор магнитной поляризации)

Пусть среда линейная и изотропная, т.е.:

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{B} = \mu\vec{H}$

$$\Rightarrow \vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{E},$$

дипольный момент в ед. объёма.

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} \Rightarrow \vec{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\vec{H}$$ ~ магн. момент в ед. объёма

$$\vec{p}^{\,e} = \int_V \vec{P}\, dV \quad ; \quad \vec{p}^{\,m} = \int_V \vec{M}\, dV$$

Из принципа перестановочной двойственности: $\vec{P} \to \vec{M}$, $\vec{M} \to -\vec{P}$

Ур-я Максвелла в лин. изотр. средах

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho \quad \longrightarrow \text{используем} \quad \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_P + \vec{j}_M) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \text{ где } \vec{j}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t};\ \vec{j}_M = c\cdot \mathrm{rot}\,\vec{M}$$

$\mathrm{div}\,\vec{E} = 4\pi(\rho + \rho_P)$, где $\rho_P = -\mathrm{div}\,\vec{P}$ — опис. те токи, которые связаны с микроскоп. перемещ. связ. зарядов.

Замечания о процедуре усреднения микроскоп. ур-ий ЭМП. (для сред без простр-ой дисперсии)

$\vec{e}, \vec{h}$ — микроскоп. напр-ти эл-ого / магн-ого поля.

Тогда постулируются уравнения:
$$\mathrm{rot}\,\vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{h} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,микро} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{e}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\,\vec{e} = 4\pi\rho^{микро}$$
$$\mathrm{div}\,\vec{h} = 0$$

Тогда при усреднении: $\overline{\vec{e}} = \vec{E}$, $\overline{\vec{h}} = \vec{B}$

$$\overline{\vec{j}^{\,микро}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\,\vec{M}$$

$$\overline{\rho^{микро}} = \rho + \underbrace{(-\mathrm{div}\,\vec{P})}_{\rho\ связ.}$$

Но может возникнуть вопрос: $\mathrm{rot}\,\nabla = 0$; $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0$ → как однозначно ввести $\vec{M}$ и $\vec{P}$.

Требования:
1) $\vec{P}$ — должен быть эл. дип. моментом ед. объёма. $\vec{M}$ — магн. дип. моментом ед. объёма.
2) Обр. в 0 вне среды.
3) Локально связаны в пр-ве с полями.

$\Rightarrow$ тогда вводятся однозначно.

Сторонние источники

Сущ-т задачи, в которых есть опр. зад. токи.

Опр. Сторонними называются источники, которые не зависят от создаваемых ими полей:

обозн. $\vec{j}_{ст}$, $\rho_{ст}$

должно вып-ся: $\mathrm{div}\,\vec{j}_{ст} + \frac{\partial \rho_{ст}}{\partial t} = 0$ ← иначе не вып. ЗСЗ и решения нет

Ур-я Максвелла в таком случае:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{ст}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$\operatorname{div}\vec D = 4\pi(\rho+\rho_{ст})$

$\vec j = \underbrace{\sigma\vec E}_{\vec j_т} + \vec j_{ст}$; или $\vec j_{ст} = \sigma\vec E_{ст} \Rightarrow \vec j = \sigma(\vec E+\vec E_{ст})$

Или более изощрённо через дип. моменты, т.е. ввести:

$\vec P_{ст}, \vec M_{ст}$ – будут явл. источниками стороннего тока.

$$\Rightarrow \vec j_{ст} = \frac{\partial \vec P_{ст}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\,\vec M_{ст}$$

$$\rho_{ст} = -\operatorname{div}\vec P_{ст}.$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\underset{\frac{\vec B}{\mu}}{\vec H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \overset{=\varepsilon\vec E}{\vec D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec j + \frac{4\pi}{c}\underset{}{\vec j_{ст}}, \quad \vec j_{ст} = \frac{\partial \vec P_{ст}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\,\vec M_{ст}$$ → и подставим.

$$\operatorname{div}\underset{\varepsilon\vec E}{\vec D} = 4\pi\rho + 4\pi\underset{-\operatorname{div}\vec P_{ст}}{\rho_{ст}}$$

⇒ получим: $$\mathrm{rot}\left(\frac{\vec B}{\mu} - 4\pi\vec M_{ст}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\vec E + 4\pi\vec P_{ст}\right) + \frac{4\pi}{c}\vec j$$

$$\operatorname{div}\left(\varepsilon\vec E + 4\pi\vec P_{ст}\right) = 4\pi\rho.$$

Введём новые обозначения: $\vec{\mathcal D}_м = \varepsilon\vec E + 4\pi\vec P_{ст}$

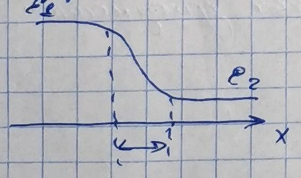
$$\vec{\mathcal H}_м = \frac{\vec B}{\mu} - 4\pi\vec M_{ст}$$

тогда получим: $$\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal H}_м = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal D}_м}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec j$$

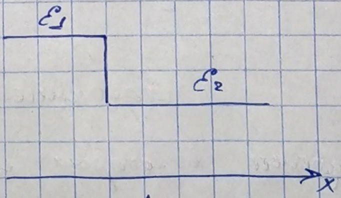
$$\operatorname{div}\vec{\mathcal D}_м = 4\pi\rho.$$ → можно изм-ть $\vec E, \vec B, \vec{\mathcal D}_м$ и $\vec{\mathcal H}_м$.

4. Граничные условия для тангенциальных и нормальных компонент векторов поля на произвольной поверхности. Понятие поверхностных зарядов и токов.

Переходим к ГУ: нам нужны универсальные ГУ – не завис. от конкретных свойств среды и не завис. от законов изменения параметров сред на границе раздела.

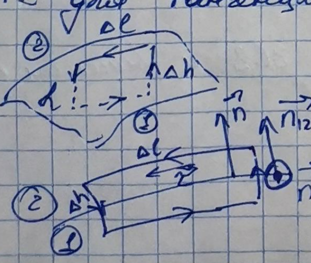


← если переход резкий удобно заменить скачком



Получение ГУ из ур-ий Максвелла в интегральной форме:

① ГУ для тангенциальных компонент электрического поля.



$$\oint_l \vec E\, d\vec l = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec B\, d\vec S$$

$\vec n_{12}$ – договариваемся из 1 среды во 2ую (вверх)

Используя теорему о среднем на участках

$$\oint_l \vec E\, d\vec l = (\vec E_2, \vec\tau)\Delta l + (\vec E_1, -\vec\tau)\Delta l + o(|\vec E|\cdot\Delta h)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}\,d\vec{s} = \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \vec{n}\right)\Delta l\,\Delta h$$

Всё подставляем, переносим влево и делим на Δl. Потом $\frac{\Delta h}{\Delta l}\to 0$ и $\Delta l \to 0$ ~ предельные переходы.

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\frac{\Delta h}{\Delta l}\to 0\\ \Delta l\to 0}} \left\{(\vec{E}_2-\vec{E}_1, \vec{\tau}) + \underbrace{O\left(|\vec{E}|\frac{\Delta h}{\Delta l}\right)}_{0} + \underbrace{\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \vec{n}\right)\Delta h}_{0}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec{E}_2-\vec{E}_1, \vec{\tau}) = 0}$$ ~ непрерывность тангенц. сост. поля

$$\Rightarrow \boxed{E_{2\tau} = E_{1\tau}}$$

Геометрически: $\vec{\tau} = [\vec{n}, \vec{n}_{12}]$, перепишем ГУ:

$$(\vec{E}_2-\vec{E}_1, [\vec{n}, \vec{n}_{12}]) = (\vec{n}, [\vec{n}_{12}, \vec{E}_2-\vec{E}_1]) = 0$$

Но $\vec{n}$ может быть произвольным (зависит от выбора обхода), но результат не изменится, тогда следует:

$$\boxed{[\vec{n}_{12}, \vec{E}_2-\vec{E}_1] = 0}$$ ~ вторая запись ГУ.

② ГУ для тангенц. составл. поля $\vec{H}$ (та же картинка.)

$$\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}\,d\vec{s} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}\,d\vec{s}$$

перепишем, учит. теорему о среднем:

$$\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = (\vec{H}_2, \vec{\tau})\Delta l + (\vec{H}_1, -\vec{\tau})\Delta l + O(|\vec{H}|\Delta h)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}\,d\vec{s} = \left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \vec{n}\right)\Delta l\,\Delta h$$

нельзя выносить из-под интеграла, исп. δ-ф-ю

$$\int_S \vec{j}\,d\vec{s} = \int_S (\vec{j}, \vec{n})\,ds = \int_S (\vec{j}, \vec{n})\,dl\,dh = \left\{\text{вспомним } \int \delta(h)\,dh = 1\right\} =$$

$$= \int_S (\vec{i}\,\delta(h), \vec{n})\,dl\,dh = \int_S (\vec{i}, \vec{n})\,dl \approx (\vec{i}, \vec{n})\Delta l$$

Делаем тот же предельный переход: $\frac{\Delta h}{\Delta l}\to 0$, $\Delta l\to 0$

$$\lim_{\substack{\frac{\Delta h}{\Delta l}\to 0\\ \Delta l\to 0}} \left\{(\vec{H}_2-\vec{H}_1, \vec{\tau}) + \underbrace{O\left(|\vec{H}|\frac{\Delta h}{\Delta l}\right)}_{0} - \frac{4\pi}{c}(\vec{n}, \vec{i}) - \underbrace{\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \vec{n}\right)\Delta h}_{0}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow (\vec{H}_2-\vec{H}_1, \vec{\tau}) - \left(\vec{n}, \frac{4\pi}{c}\vec{i}\right) = 0$$

Используя: $\vec{\tau} = [\vec{n}, \vec{n}_{12}]$ и пользуемся циклической перестановкой

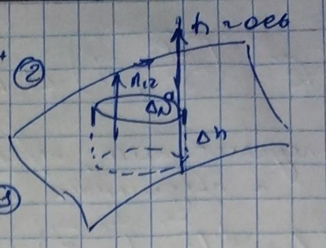
$$\left(\vec{n}, [\vec{n}_{12}, \vec{H}_2-\vec{H}_1]\right) - \left(\vec{n}, \frac{4\pi}{c}\vec{i}\right) = 0$$

$$\left(\vec{n}, [\vec{n}_{12}, \vec{H}_2-\vec{H}_1] - \frac{4\pi}{c}\vec{i}\right) = 0$$ учитывая снова, что $\vec{n}$ ~ произвольный

$$\Rightarrow \boxed{[\vec{n}_{12}, \vec{H}_2-\vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}}$$ — поверхностная пл-ть тока

③ ГУ для нормальных компонент поля $\vec{D}$

$$\oint_S \vec{D}\,d\vec{s} = 4\pi\int_V \rho\,dV$$



$$\oint_S \vec D\, d\vec S = \oint_S (\vec D, \vec n)\, dS = (\vec D_2, \vec n_{12})\Delta S + (\vec D_1, -\vec n_{12})\Delta S + o(|\vec D|\cdot S_{бок}) \quad ②$$

$$\int_V \rho\, dV = \int_V \rho\, dS\, dh = \int_V \sigma\delta(h)\, dS\, dh = \int_S \sigma\, dS \approx \sigma\Delta S \quad ③$$

Всё подставляем, переносим в одну сторону и делим на ΔS

$$\lim_{\substack{\frac{\Delta h}{\sqrt{\Delta S}}\to 0\\ \Delta S\to 0}} \left\{(\vec n_{12}, \vec D_2 - \vec D_1) + \underbrace{o\left(|\vec D|\cdot\frac{S_{бок}}{\Delta S}\right)}_{0} - 4\pi\sigma\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec n_{12}, \vec D_2 - \vec D_1) = 4\pi\sigma}$$ — разность нормальных компонент

④ ГУ для нормальных компонент поля $\vec B$

$\oint_S \vec B\, d\vec S = 0$ — выкладки можно проделать все аналогично

$$\oint_S \vec B \vec n\, dS = (\vec B_2, \vec n_{12})\Delta S + (\vec B_1, -\vec n_{12})\Delta S + o(|\vec B|\cdot S_{бок.}) = 0 \quad /:\Delta S$$

$$\lim_{\substack{\frac{\Delta h}{\sqrt{\Delta S}}\to 0\\ \Delta S\to 0}} (\vec B_2, \vec n_{12}) + (\vec B_1, -\vec n_{12}) + \underbrace{o\left(|\vec B|\cdot\frac{S_{бок}}{\Delta S}\right)}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\vec n_{12}, \vec B_2 - \vec B_1) = 0}$$

Все ГУ в одном месте:

1) $[\vec n_{12}, \vec E_2 - \vec E_1] = 0$
2) $[\vec n_{12}, \vec H_2 - \vec H_1] = \frac{4\pi}{c}\vec i$
3) $(\vec n_{12}, \vec D_2 - \vec D_1) = 4\pi\sigma$
4) $(\vec n_{12}, \vec B_2 - \vec B_1) = 0$

а) Ища аналогии в ур-ях Максвелла можно написать ГУ и для других величин

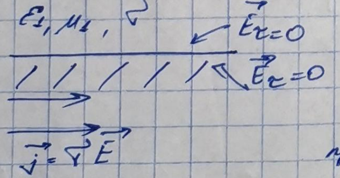
$\mathrm{div}\,\vec P = -\rho^{связ}$ (аналогия с $\mathrm{div}\,\vec D = 4\pi\rho$)

$$\boxed{(\vec n_{12}, \vec P_2 - \vec P_1) = -\sigma^{связ}}$$

б) $\mathrm{div}\,\vec j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

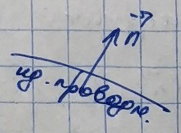
$\mathrm{div}\,\vec j = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \Rightarrow \boxed{(\vec n_{12}, \vec j_2 - \vec j_1) + \mathrm{div}\,\vec j = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}}$

появляется доп. слагаемое, т.к. ток в некотор. случаях если есть σ может перейти в ∞ → это и учитываем.



В идеальном проводнике $\sigma\to\infty$, $\vec E \to 0$, т.к. $\vec j = \sigma\vec E$, чтобы $\vec j$ было конечным числом. $\Rightarrow \vec E_\tau = 0$.
Т.е. если на границе прибл. к идеальному проводнику → $E_\tau = 0$ у внешней границы.

$$D_n = 4\pi\sigma$$



Рассмотрим случай переменных полей $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$
Ур-я Максвелла для идеального проводника:

$\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec E}_{0\ (ид.\ проводн.)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec B}{\partial t} \Rightarrow \vec B = const(t)$ в идеальном проводнике.

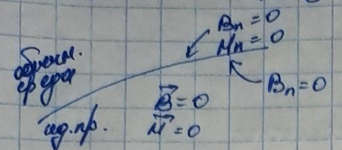
пусть в $t = -\infty$ $\vec B = 0$

$\Rightarrow \forall t: \vec B = 0, \ \vec H = 0$

Символически обозначается: $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\vec B}{\partial t} = 0\\ \frac{\partial}{\partial t}\neq 0\end{array}\right| \Rightarrow \vec B = 0$

Это справедливо и для гармонических процессов:

$\frac{\partial \vec B}{\partial t} = 0 \to i\omega \vec B = 0 \to \vec B = 0$ ⇒ магнитное поле отсутствует



Только для переменных полей! при подходе к границе идеального проводника B_n и $H_n = 0$
В статических полях – несправедливо

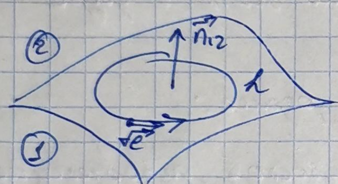
Замечание: не путать сверхпроводники и идеальные проводники.

Свойства:
1) Полученные ГУ являются верными для любых сред.
2) ГУ не зависят от переходного слоя между средами.

Все ли ГУ независимы? Т.к. уравнения Максвелла зависимы, то и ГУ м.б. зависимы, покажем на примере, когда

$\vec j = 0,\ \rho = 0$ $\quad rot\,\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec B}{\partial t} \xrightarrow{\partial/\partial t \neq 0} div\,\vec B = 0$

$(i = 0,\ \nu = 0)$ $\quad rot\,\vec H = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t} \to div\,\vec D = 0$



L – контур, лежащий на границе раздела двух сред.

Возьмём значения поля со стороны среды 2, а потом со среды 1.

$$-\begin{cases} \oint_L \vec E_2\, d\vec l = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec B_2}{\partial t}\, d\vec S \\ \oint_L \vec E_1\, d\vec l = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec B_1}{\partial t}\, d\vec S \end{cases}$$

$d\vec l$ – чисто тангенциальный вектор.

из ГУ для тангенц. компл. $\vec E$ $\longrightarrow 0 = -\frac{1}{c}\int_{S-\forall} \frac{\partial}{\partial t}(\vec B_2 - \vec B_1, \vec n_{12})\, dS$

Т.к. S – любая пов-ть ⇒ подынтегр. выражение $= 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\vec n_{12}, \vec B_2 - \vec B_1) = 0$, т.к. $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ в смысле выше.

$\Rightarrow (\vec n_{12}, \vec B_2 - \vec B_1) = 0$ – получили.

Аналогично можно получить и для $\vec D$. Попробуем теперь получить из „правого“ → „левое“, но докажем наоборот.

Пусть $B_{2n} = B_{1n}$, т.е. $(\vec n_{12}, \vec B_2 - \vec B_1) = 0$

$$-\begin{cases} \oint_L \vec E_2\, d\vec l = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec B_2}{\partial t}\, d\vec S \\ \oint_L \vec E_1\, d\vec l = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec B_1}{\partial t}\, d\vec S \end{cases}$$

⇒ закрутится нормаль теперь справа.

$\Rightarrow \oint_L (\vec E_2 - \vec E_1)\, d\vec l = 0 \Rightarrow \vec E_2 - \vec E_1 = \nabla\psi$

Если заранее не знаем, что $\vec E$ вихревое, то получить в общем случае не сможем.

ГУ и принцип перестановочной двойственности.

$$[\vec{n}_{12}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}^e \qquad \vec{i}^e \equiv \vec{i}$$

$$(\vec{n}_{12}, \vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi\nu^e \qquad \nu^e \equiv \nu$$

применим к ним принцип ПД, т.е заменим

$$\vec{H} \to -\vec{E}, \quad \vec{i}^e \to \vec{i}^m \quad \Rightarrow \quad [\vec{n}_{12}, \vec{E}_2 - \vec{E}_1] = -\frac{4\pi}{c}\vec{i}^m$$

$$\vec{D} \to \vec{B}, \quad \nu^e \to \nu^m \qquad (\vec{n}_{12}, \vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 4\pi\nu^m$$

~ Иногда удобно. Из них видно, что если бы существовали магнитные токи или заряды, то E_τ и B_n претерпевали скачки на границе раздела сред.

5. Законы сохранения, следующие из уравнений Максвелла. Закон сохранения заряда (уравнение непрерывности). Закон сохранения энергии (теорема Пойтинга). Вектор Пойтинга и понятие потока электромагнитной энергии. Плотность энергии ЭМП в среде без дисперсии. Джоулевы потери.

Рассмотрим 2е ур-е Максвелла в диф-ой форме.

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ применим к нему оператор дивергенции

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{D}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = (\nabla, [\nabla\vec{H}]) = (\vec{H}, [\nabla, \nabla]) = 0$$

И используем ур-е $\mathrm{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho$

$$\frac{4\pi}{c}\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \Big/ : \frac{4\pi}{c} \quad \Rightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0} \quad (ЗСЭЗ)$$

~ур-е непрерывности

В интегральной форме

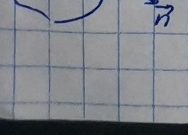
$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{j}\,dV + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,dV = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{j}\,d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\,dV = 0 \to I + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{Q} = -I}$$ ~ т.е. заряд утекает

$$\rho = -\int \mathrm{div}\,\vec{j}\,dt$$

Энергетические соотношения ЭМП.
Теорема Пойтинга

Теорема гласит о том, что имеет место следующее соотношение:



$$\boxed{-\frac{\partial W}{\partial t} = Q + \Pi - A^{ст}}$$ ~ теорема Пойтинга в интегральной форме.

где $W = \int_V w\,dV$, w - объёмная пл-ть энергии ЭМП
W - полная энергия в объёме V.

Q - мощность джоулевых потерь в объёме V (т.е. энергия в ед. времени)

$\boxed{Q = \int\limits_V q\, dV}$, q - объёмная плотность мощности джоулевых потерь

$\boxed{\Pi = \oint\limits_S \vec{S}\, d\vec{s} = \oint\limits_S \vec{S}\vec{n}\, ds}$; Π - поток энергии из V через замкнутую пов-ть S

$\vec{S}$ - вектор плотности потока энергии

$\boxed{A^{ст} = \int\limits_V a^{ст}\, dV}$; $A^{ст}$ - мощность сторонних источников (не работа!)
$a^{ст}$ - объёмная плотность мощности сторонних источников.

Чтобы привести к дифф-ому виду учтём $\Pi = \int\limits_V \operatorname{div}\vec{S}\, dV$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = q + \operatorname{div}\vec{S} - a^{ст}}$$

Если $q = 0$, $a^{ст} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$ ~ совпадает с ур-ем непрерывности (это ЗСЭ)

Докажем теорему Пойтинга: в виде

$$\operatorname{div}\vec{S} = -q + a^{ст} - \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} && \Big|\cdot\vec{H} \\ \operatorname{rot}\vec{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{ст} && \Big|\cdot\vec{E} \end{aligned}\right\} (1)-(2)$$

"$\nabla\vec{E}$" сторонние источники тоже учитывать

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\operatorname{rot}\vec{H}}_{= \operatorname{div}[\vec{E},\vec{H}]} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\vec{E} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{ст}\vec{E} - \frac{1}{c}\left(\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) \quad \times\frac{c}{4\pi}$$

вспоминаем векторные тождества

$$\operatorname{div}\left\{\frac{c}{4\pi}[\vec{E},\vec{H}]\right\} = -\vec{j}\vec{E} + (-1)\cdot\vec{j}^{ст}\vec{E} - \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

Сравниваем: $\boxed{\vec{S} = \frac{c}{4\pi}[\vec{E},\vec{H}]}$ ~ без док-ва.

$\boxed{q = \frac{\vec{j}^2}{\sigma} = \sigma\vec{E}^2}$ ~ справедливо если мы докажем

$\boxed{a^{ст} = -\vec{j}^{ст}\vec{E}}$ $\qquad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$

Докажем для среды: стационарной, линейной, недиспергирующей и изотропной:

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ~ линейная и изотропная

$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial\mu}{\partial t} = 0$ ~ стационарная.

$$\frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right) = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t} + \mu\frac{\partial\vec{H}^2}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{\vec{E}\vec{D} + \vec{H}\vec{B}}{8\pi}\right)}_{} = \frac{\partial w}{\partial t}$$

это выражение мы постулировали

Вообще говоря $\text{div}\left\{\frac{c}{4\pi}[\vec E, \vec H]\right\} = \text{div}\,\vec S$ — немного, однако, следует ли из равенства div → равенство векторов?
Строго математически это не совсем корректно.

Нужно добавить $\text{div}\,\text{rot}\,\vec a = 0$ — другого поля $\vec a$. Но док-ся это из СТО через ЗСИ.

импульс: $\vec G = \int_V \vec g\, dV$ $\quad \vec g = \frac{\vec S}{c^2}$, если $\vec P_{мех} + \vec G = const$

=> откуда следует, что никакой добавки $\text{rot}\,\vec a$ не нужно.

Пусть среда останется стационарной, недиспергирующей, линейной, но анизотропной. Теперь описываем тензорами

$$\varepsilon_{ik}, \mu_{ik}$$

Если тензоры обладают св-вом симметрии: $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$, $\mu_{ik} = \mu_{ki}$

$$\frac{1}{4\pi}\vec E\frac{\partial \vec D}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}E_i\frac{\partial D_i}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{ik}E_i\frac{\partial E_k}{\partial t} = \frac{1}{8\pi}\Big(\varepsilon_{ik}E_i\frac{\partial E_k}{\partial t} + \underbrace{\varepsilon_{ik}E_i\frac{\partial E_k}{\partial t}}_{\equiv \varepsilon_{ki}E_k\frac{\partial E_i}{\partial t}}\Big) =$$

($D_i = \varepsilon_{ik}E_k$)

$= \{\varepsilon_{ik}$ — не зав. от времени$\} =$

$= \{$т.к. суммирование идёт по i, k, можем в одной из сумм их переменить$\} =$

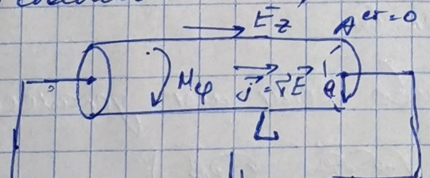
$$= \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}\left(E_i\frac{\partial E_k}{\partial t} + E_k\frac{\partial E_i}{\partial t}\right) = \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}\frac{\partial}{\partial t}(E_i, E_k) = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}(E_i, \varepsilon_{ik}E_k) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec E\vec D}{8\pi}\right)$$

Если проделать с магнитными составляющие:

$$\frac{1}{4\pi}\vec H\frac{\partial \vec B}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec H\vec B}{8\pi}$$

=> при тензорном хар-ре можно док-ть справедливость теоремы Пойнтинга.

В статике $\frac{\partial}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ $\qquad$ Теорема Пойнтинга: $Q + \Pi = 0$;



$$Q = \frac{j^2}{\sigma}\pi a^2 L$$

$\rho = a$: $E_z = \frac{j}{\sigma}$; $I = j\pi a^2$

$H_\varphi = \frac{2I}{ca} = \frac{j2\pi a}{c}$; $\vec S = \frac{c}{4\pi}[E_z\cdot\vec z_0, H_\varphi\cdot\vec\varphi_0]$

$[\vec z_0, \vec\varphi_0] = -\vec\rho_0$

(ρ_0, φ_0, z_0) — прав. тройка

$$\Rightarrow \vec S = -\vec\rho_0\frac{j^2 a}{2\sigma}$$

$$\Pi = \oint \vec S\, d\vec s = -\frac{j^2 a}{2\sigma}\cdot 2\pi a L = -\frac{j^2}{\sigma}\pi a^2 L$$

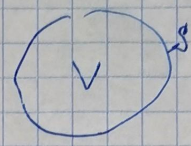
=> $Q + \Pi = 0$, ч.т.д.

6. Теорема единственности решения ур-ий Максвелла при заданных начальных и граничных условиях.

Среда стационарная, линейная, недиспергирующая, изотропная:

$\vec D = \varepsilon \vec E$, $\vec B = \mu \vec H$; $\vec j = \sigma \vec E$, где $\varepsilon, \mu, \sigma > 0$

Электромагнитное поле $\vec E(t,\vec r)$, $\vec H(t,\vec r)$ в $\forall t>0$ и в $\forall$ точке объёма V, огранич. замкнутой поверхностью S однозначно определяется уравнениями Максвелла совместно с материальными соотношениями, если:



1) При $t=0$ в V: $\vec E(0,\vec r)=\vec E_0(\vec r)$
$\vec H(0,\vec r)=\vec H_0(\vec r)$

2) $\forall t>0$ в V заданы сторонние источники: $\vec j^{ст}(t,\vec r)$

3) $\forall t>0$ на S задана либо $\vec E_\tau(t,\vec r)$, либо $\vec H_\tau(t,\vec r)$ ~ одновременно нельзя!

Док-во:

Пусть $\exists\ \vec E_1, \vec H_1$ и $\vec E_2, \vec H_2$

$\vec E_3 = \vec E_2 - \vec E_1$, $\vec H_3 = \vec H_2 - \vec H_1$ ~ разностное поле.

Должно выполняться:

1) $t=0$: $E_{30}=0$, $H_{30}=0$
2) $\vec j_3^{\,ст}=0$
3) S: либо $\vec E_{3\tau}=0$, либо $\vec H_{3\tau}=0$

Запишем теорему Пойтинга для разностного поля: ($\vec j_3^{\,ст}=0$)

$$-\frac{\partial W_3}{\partial t} = \oint_S \frac{c}{4\pi}[\vec E_3,\vec H_3]\,d\vec S - \overset{=0}{A_3^{ст}} + \int_V \underbrace{\frac{\vec j_3^{\,2}}{\sigma}}_{\ge 0}dV$$

$$S:\ [\vec E_3,\vec H_3]\cdot\vec n = [\vec E_{3\tau},\vec H_{3\tau}]\cdot \vec n \overset{3)}{=} 0$$

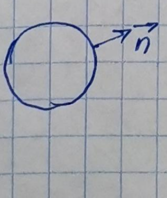
$$\Rightarrow -\frac{\partial W_3}{\partial t}\ge 0 \Rightarrow \frac{\partial W_3}{\partial t}\le 0$$ ~ энергия во времени не может нарастать.

$$W_3(t=0)\overset{1)}{=}0 \Rightarrow \forall t>0\quad W_3=0 \qquad \int_V \underbrace{\frac{\varepsilon \vec E_3^{\,2}+\mu\vec H_3^{\,2}}{8\pi}}_{\ge 0}dV=0$$

$\Rightarrow \vec E_3=0$, $\vec H_3=0 \Rightarrow \vec E_1, \vec H_1$ и $\vec E_2, \vec H_2$ совпадают, ч.т.д.

1) Поля не было $\vec E_3=0$.
2) Источников разностного поля нет
3) Поток энергии разностного поля отсутствует

Можно задать импедансное граничное условие.



3) $\vec E_\tau = \eta_s[\vec H,\vec n]\big|_S = \eta_s[\vec H_\tau,\vec n]\big|_S$

характеристический импеданс поверхности
(поверхностный импеданс $\eta_s>0$)

$$\underbrace{[\vec E_3,\vec H_3]\cdot\vec n}_{[\vec E_{3\tau},\vec H_{3\tau}]\cdot\vec n} = \eta_s \underbrace{[[\vec H_{3\tau},\vec n],\vec H_{3\tau}]}_{\vec n(\vec H_{3\tau},\vec H_{3\tau}) - \vec H_{3\tau}\underbrace{(\vec n,\vec H_{3\tau})}_{=0}}\cdot\vec n = \eta_3 \vec H_{3\tau}^{\,2} \Rightarrow -\frac{\partial W_3}{\partial t}\ge 0$$

Если $R \to \infty$; $E, H \sim \frac{e^{-ikR}}{R}$ - расходящаяся сферическая волна

Для статики (нет н.у. и г.у.) док-во теоремы единственности не работает. То же самое для сред с дисперсией и гармонических полей

Электростатика.

1. Уравнения электростатического поля. Скалярный потенциал. Общее уравнение для потенциала в неоднородном диэлектрике. Ур-я Пуассона и Лапласа. Граничные условия для потенциала на поверхностях диэлектриков и проводников.

В статике $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ => ур-я Максвелла: $\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{D} = 4\pi\rho \\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \end{cases}$ ~ ур-я электростатики $\quad \begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \vec{B} = \mu\vec{H} \end{cases}$ ~ ур-я магнитостатики

Электростатика.

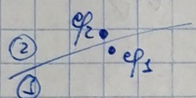
Из (1): $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$

=> $\vec{E} = -\nabla\varphi$, где φ - скалярный потенциал электромагнитного поля.

$\underbrace{\varphi(\vec{r}) - \varphi(\infty)}_{\varphi(\infty)=0} = \int\limits_{(r)}^{(\infty)} \vec{E}\,d\vec{l}$ или $\boxed{\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) - \int\limits_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\,d\vec{l}}$ ~ по сути опр-е для потенциала эл-ого поля.

Используем ГУ: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$; $E_\tau = (\vec{\tau}, \vec{E})$

$\vec{E} = -\nabla\varphi$ => $(\vec{\tau}, -\nabla\varphi_1) = (\vec{\tau}, -\nabla\varphi_2)$ ~ как производная по напр-ю



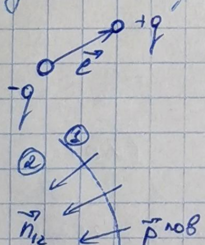
=> $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}$ => $\frac{\partial}{\partial\tau}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$

=> $\boxed{\varphi_1 - \varphi_2 = \mathrm{const}(\tau)}$

$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{(1)}^{(2)} \vec{E}\,d\vec{l}$ ~ Если поле $\vec{E}$ на границе раздела сред не бесконечно, а в пределе точки (1) и (2) совпадают, то

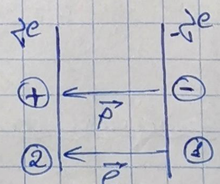
$\varphi_1 = \varphi_2$ ~ т.е. потенциал непрерывен на границе раздела сред.

Пусть на границе раздела сред задан двойной электрический слой



$\vec{p} = q\vec{l}$, где $|\vec{l}| \to 0$, $q \to \infty$, так что $q|\vec{l}| = \mathrm{const}$

мощность двойного электрического слоя – дипольный момент, приходящийся на единицу площади поверхностного слоя.



Можно рассм-ть как плоский конденсатор:

$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\vec{n}_{12}, \vec{p}^{\,пов})$

$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon}\underbrace{(\nu^e l)}_{p^{пов}}$, $\nu^e \to \infty$, $l \to 0$

Поля удалённых участков вклада не дают.

$(\vec{n}_{12}, \vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi\nu$

$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = -\varepsilon\nabla\varphi$ $\qquad (\vec{n}_{12}, \nabla) = \frac{\partial}{\partial n_{12}}$ ~ производная по напр-ю

$\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n_{12}} - \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n_{12}} = -4\pi\nu$

Ур-я для потенциала φ:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \ ; \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E} = -\varepsilon\nabla\varphi$$

$$\operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho \Rightarrow \operatorname{div}(-\varepsilon\nabla\varphi) = 4\pi\rho$$

$$\Rightarrow \varepsilon\underbrace{\operatorname{div}\nabla\varphi}_{\Delta\varphi} + (\nabla\varepsilon, \nabla\varphi) = -4\pi\rho$$

$$\Rightarrow \varepsilon\Delta\varphi + (\nabla\varepsilon, \nabla\varphi) = -4\pi\rho$$ ~ если среда неоднородная и $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$

Для однородной среды $\nabla\varepsilon = 0$: $\boxed{\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}}$ ~ур-е Пуассона

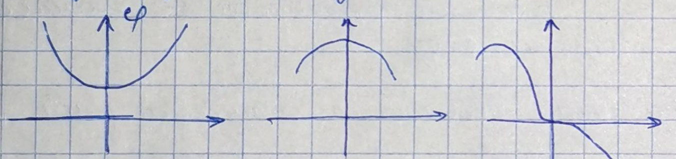
Если $\rho = 0$, получим ур-е Лапласа: $\boxed{\Delta\varphi = 0}$

2. Некоторые общие теоремы электростатики. Теорема о минимуме и максимуме потенциала. Теорема о неустойчивости системы зарядов (теорема Ирншоу). Теорема взаимности. Теорема единственности решения (без док-ва). Классификация задач электростатики, прямые и обратные задачи.

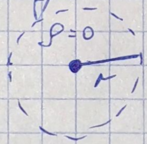
Некоторые общие теоремы в электростатике.

1) Теорема о минимуме или максимуме („минимаксе") потенциала.

~ Потенциал φ не может достигать ни абсолютно минимального, ни абсолютно максимального значения в области пр-ва, где отсутствуют заряды.



Док-во: Пусть φ - макс/мин, тогда в окрестности $\frac{\partial\varphi}{\partial r} \gtrless 0$



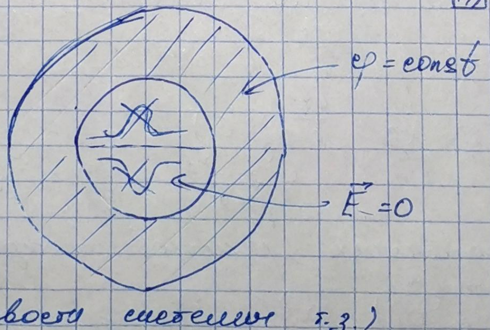
Из ур-ий Максвелла:

$$\oint_S \varepsilon\vec{E}\,d\vec{S} = \oint \varepsilon\underbrace{(-\nabla\varphi)\cdot\vec{r}_0}\,dS = -\oint_S \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dS \gtrless 0 \quad (\neq 0)$$

Но $\rho = 0 \Rightarrow \oint_S \varepsilon\vec{E}\,d\vec{S} = 0 \Rightarrow$ пришли к противоречию, тогда заряды должны быть.

1.1) Электростатическая защита

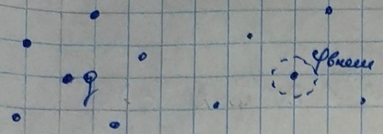
Т.к. $\varphi = const$ внутри проводника (эквипотенциальный объём) $\rightarrow$ внутри $\vec{E} = 0$



2) Теорема Ирншоу (о неустойчивости системы т.з.)

~ Всякая равновесная конфигурация покоящихся точечных электрических зарядов является неустойчивой, если на них не действуют никакие другие силы, кроме кулоновских.

Энергия взаимодействия $W_{вз} = q\varphi_{внеш}$.



Равновесие $\Rightarrow W_{вз} = \min \Rightarrow \varphi_{внеш} = \min$, но внешних источников внутри объёма нет $\Rightarrow \varphi_{внеш} \neq \min$ по 1й теореме $\Rightarrow W_{вз} \neq 0 \Rightarrow$ нет равновесия.

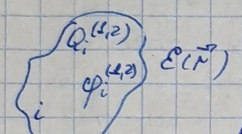
3) **Теорема взаимности.**

~ Пусть задано ограниченное в пр-ве распр-е зарядов $\rho^{(1)}$, создающее распределение потенциала $\varphi^{(1)}$ и известны $Q_i^{(1)}$, $\varphi_i^{(1)}$ — полные заряды, потенц., созд. этими зарядами.

Пусть при сохранении той же конфигурации проводников и диэлектриков задано другое огранич-ое в пр-ве $\rho^{(2)} \ldots \varphi^{(2)}$ и известны $Q_i^{(2)}$, $\varphi_i^{(2)}$, тогда справедливо:

$$\left\{ \int_V \left(\rho^{(1)}\varphi^{(2)} - \rho^{(2)}\varphi^{(1)}\right) dV + \sum_i \left(Q_i^{(1)}\varphi_i^{(2)} - Q_i^{(2)}\varphi_i^{(1)}\right) = 0 \right\}$$

Док-во: обозначения (1) ~ относится к 1й задаче;
(2) ~ относится ко 2й задаче;

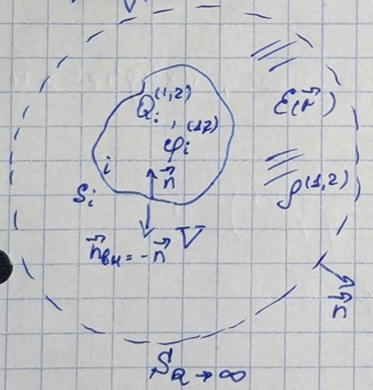


т.е. мы не можем просто изменять параметры проводников

iый проводник

Будет ли считаться изменением конфигурации проводников, если его заземлить? $\varphi = 0$

Если соединить бесконечно тонким проводом, то это не нарушает конфигурации системы (провод не накапливает заряда). $\Rightarrow$ Заземление не явл. нарушением конфигурации.



Запишем ур-я Максвелла:

$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(1)}) = -4\pi\rho^{(1)} \quad \Big| \cdot \varphi^{(2)}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}) = -4\pi\rho^{(2)} \quad \Big| \cdot \varphi^{(1)}$$

и вычитаем

$$\Rightarrow \varphi^{(2)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(1)}) - \varphi^{(1)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}) = -4\pi\left(\rho^{(1)}\varphi^{(2)} - \rho^{(2)}\varphi^{(1)}\right)$$

Слева: $\varphi^{(2)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(1)}) - \varphi^{(1)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}) = \operatorname{div}(\varphi^{(2)}\varepsilon\nabla\varphi^{(1)} - \varphi^{(1)}\cdot\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}) \overset{проверка}{=}$

$$= \varphi^{(2)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(1)}) + \cancel{(\nabla\varphi^{(2)}, \varepsilon\nabla\varphi^{(1)})} - \varphi^{(1)}\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}) - \cancel{(\nabla\varphi^{(1)}, \varepsilon\nabla\varphi^{(2)})}$$

Переносим всё в левую часть, делим на 4π и интегрируем по объёму:

$\int_V \operatorname{div}\{\ldots\}\, dV = \oint_S \{\ldots\}\, d\vec S$ ~ пользуемся теоремой О.-Г. сразу.

$$\Rightarrow \int_V \left(\rho^{(1)}\varphi^{(2)} - \rho^{(2)}\varphi^{(1)}\right) dV + \frac{1}{4\pi}\oint_{S_{R\to\infty} + \sum_i S_i} \left(\varphi^{(2)}\varepsilon\nabla\varphi^{(1)} - \varphi^{(1)}\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}\right) d\vec S = 0$$

Если берём интеграл на беск. удалённой сфере $S_{R\to\infty}$:

$$0 = \oint_{S_{R\to\infty}} \Big(\underbrace{\varphi^{(2)}}_{\sim\frac{1}{R}}\, \varepsilon\, \underbrace{\nabla\varphi^{(1)}}_{\sim\frac{1}{R^2}} - \underbrace{\varphi^{(1)}}_{\sim\frac{1}{R}}\, \varepsilon\, \underbrace{\nabla\varphi^{(2)}}_{\sim\frac{1}{R^2}}\Big) d\vec S =$$

{чем дальше мы уходим, всё кажется точечными зарядами, у которых $\varphi \sim \frac{1}{R}$, $E \sim \frac{1}{R^2}$ }

$S_{R\to\infty} \sim R^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\pi}\oint_{S_{R\to\infty}+\sum_i S_i} \left(\varphi^{(2)}\varepsilon\nabla\varphi^{(1)} - \varphi^{(1)}\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}\right) d\vec{S} = \frac{1}{4\pi}\sum_i \oint_{S_i} \left[\varphi^{(2)}\varepsilon\nabla\varphi^{(1)} - \varphi^{(1)}\varepsilon\nabla\varphi^{(2)}\right] \underbrace{\vec{n}}_{-\vec{n}_{вн}}\, dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_i \Big[\varphi_i^{(2)} \oint_{S_i}\Big(-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n_{вн}}\Big) dS - \varphi_i^{(1)} \oint_{S_i} \underbrace{\Big(-\varepsilon\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial n_{вн}}\Big)}_{D^{(2)}_{n\,вн} = 4\pi\sigma_i^{(2)}} dS\Big] \ominus$$

потенциал на пов-ти проводника = const → выносится

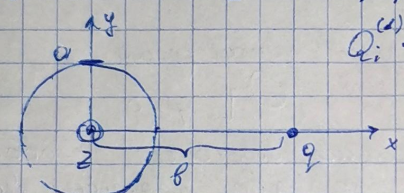
$$\ominus \sum_i \Big(\varphi_i^{(2)}\oint_{S_i}\sigma_i^{(1)} dS - \varphi_i^{(1)}\oint_{S_i}\sigma_i^{(2)} dS\Big) = \sum_i \left(Q_i^{(1)}\varphi_i^{(2)} - Q_i^{(2)}\varphi_i^{(1)}\right)$$

Всё объединяем:

$$\int_V \left(\rho^{(1)}\varphi^{(2)} - \rho^{(2)}\varphi^{(1)}\right) dV + \sum_i \left(Q_i^{(1)}\varphi_i^{(2)} - Q_i^{(2)}\varphi_i^{(1)}\right) = 0 \quad \blacksquare$$

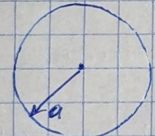
Пример использования: имеется идеальный проводник → изолир. сфера радиуса a (не заряж.) на расст. b есть заряд q, найти $\varphi_i^{(1)}$ - ? (потенциал сферы)

(1) $Q_i^{(1)} = 0$; $\rho^{(1)} = q\,\delta(x-b)\,\delta(y)\,\delta(z)$; $\varphi^{(1)}$ - ?



(2) Составл. доп. задачу.

$Q_i^{(2)} = q$; $\varphi_i^{(2)} = \frac{q}{a}$; $\rho^{(2)} = 0$; $\varphi^{(2)} = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2} > a$

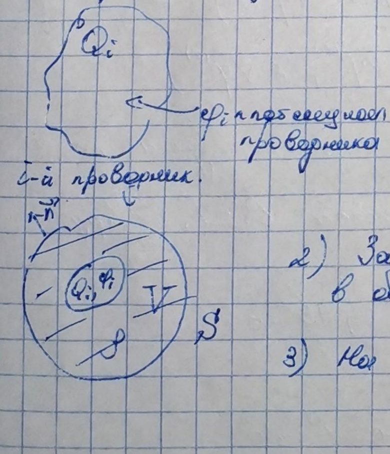


Применяем теорему:

$$\int_V \underbrace{\Big(q\,\delta(x-b)\,\delta(y)\,\delta(z)\cdot\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\,dy\,dz}_{=\frac{q^2}{b}} + \left(0 - q\,\varphi_i^{(1)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_i^{(1)} = \frac{q}{b}$$

4) Теорема единственности.



~ Решение ур-я электростатического поля в объёме V, ограниченной замкнутой пов-но S единственно, если:

1) В V задано распределение зарядов ρ;

2) Заданы либо Q_i, либо φ_i проводников, находящихся в объёме V;

3) На поверхности S заданы либо $\varphi|_S$, либо $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S$

краевая задача Дирихле; задача Фон-Неймана.

~ без док-ва.

Классификация задач электростатики:

1. Прямая задача электростатики (нахождение полей по распр. источников).

Необходимо задать: 1) $\varepsilon(\vec{r})$, проводники; 2) $\rho(\vec{r})$; 3) либо Q_i, либо φ_i; 4) граничные условия $\Rightarrow \varphi = ?$, $\vec{E} = -\nabla\varphi$

2. Обратная задача (по полю найти источники)

Дано: φ (или $\vec{E}$) $\Rightarrow$ найти $\rho = ?$

3. Прямая задача электростатики для безграничной однородной среды. Функция Грина. Общее решение ур-я Пуассона. Потенциалы простого и двойного слоя. Поле произвольной системы зарядов на большом расстоянии от неё (разложение по мультиполям). Дипольный момент. Тензор квадрупольного момента.

$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$ ~ ур-е Пуассона

Функцией Грина называется решение ур-я: $\Delta G = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}_1)$

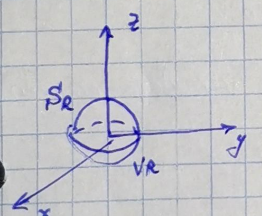
где $G = G(\vec{r}, \vec{r}_1)$ ~ ф-я Грина для прямой задачи электростатики.

Нам нужно получить, что $G = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$

для этого рассмотрим более простую задачу: $\Delta G = -4\pi\delta(\vec{r})$, $G = G(r) = \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{r}$

Рассмотрим $r \neq 0$, $\Delta G(r) = 0$

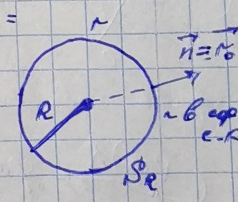
В сферической с.к.: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 \underbrace{\frac{\partial G}{\partial r}}_{-\frac{1}{r^2}}\Big) \overset{?}{=} 0 \Rightarrow$ подходит $G(r) = \frac{1}{r}$



$\int\limits_{V_R} \Delta G\, dV = -4\pi \int\limits_{V_R} \delta(\vec{r})\, dV$ ← интегрируем в окрестности точки.

причём $R \to 0$ ~ в таком смысле надо понимать значение обобщённой ф-ии в физике. (как слабый предел Коши.)

$\lim\limits_{R\to 0} \int\limits_{V_R} \underbrace{\Delta G}\, dV = \lim\limits_{R\to 0} \int\limits_{V_R} \operatorname{div}\nabla G\, dV = \lim\limits_{R\to 0} \oint\limits_{S_R} \nabla G\, \underbrace{d\vec{S}}_{\vec{r}_0 dS} = \lim\limits_{R\to 0} \int\limits_{S_R} \underbrace{\frac{\partial G}{\partial r}}_{-\frac{1}{r^2}} dS =$



~ в сферич. с.к.

$= \lim\limits_{R\to 0} (-1)\cdot\frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = -4\pi$

$\Rightarrow -4\pi = -4\pi$ ~ равенство выполн.-ся

Решение уравнения Пуассона:

обозначим перем. интегрир.

Теорема Грина: $\int[\varphi\Delta G - G\Delta\varphi]\,dV = \oint[\varphi\frac{\partial G}{\partial n} - G\frac{\partial\varphi}{\partial n}]\,dS$

$\int\limits_V [\varphi(\vec{r}')\underbrace{\Delta_{\vec{r}'} G(\vec{r}', \vec{r}_1)}_{-4\pi\delta(\vec{r}'-\vec{r}_1)} - \overbrace{G(\vec{r}', \vec{r}_1)}^{1/|\vec{r}'-\vec{r}_1|}\overbrace{\Delta_{\vec{r}'}\varphi(\vec{r}')}^{-\frac{4\pi\rho(\vec{r}')}{\varepsilon}}]\,dV' =$

вычисл. по $\vec{r}'$

$= \oint\limits_S [\varphi(\vec{r}')\underbrace{\frac{\partial G(\vec{r}', \vec{r}_1)}{\partial n}}_{\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\vec{r}'-\vec{r}_1|}} - \underbrace{G(\vec{r}', \vec{r}_1)}_{\frac{1}{|\vec{r}'-\vec{r}_1|}}\frac{\partial\varphi(\vec{r}')}{\partial n}]\,dS'$

перепишем:

$$\int_V \varphi(\vec r\,')\,\delta(\vec r\,'-\vec r_1)\,dV' = \varphi(\vec r_1)$$

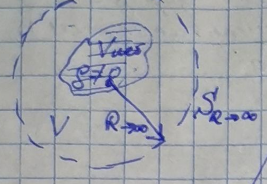
$$\Rightarrow \varphi(\vec r_1) = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r_1-\vec r\,'|}\,dV' + \frac{1}{4\pi}\oint_S\left[\frac{1}{|\vec r_1-\vec r\,'|}\frac{\partial\varphi(\vec r\,')}{\partial n} - \varphi(\vec r\,')\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\vec r\,'-\vec r_1|}\right]dS'$$

Введём переобозначение: $\vec r_1 = \vec r$, $\vec R = \vec r - \vec r\,'$, $R = |\vec R| = |\vec r - \vec r\,'|$

$$\Rightarrow \varphi(\vec r) = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec r\,')}{R}\,dV' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left\{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}\right\}dS'$$

— интегральное ур-е для φ.

Считаем, что источники находятся в ограниченной области пр-ва:

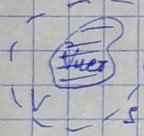


$$\oint_{S_{R\to\infty}} \left\{\underbrace{\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\sim\frac{1}{R^2}} - \underbrace{\varphi}_{\sim\frac{1}{R}}\underbrace{\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R}}_{\sim\frac{1}{R^2}}\right\}dS' = 0, \quad \text{т.к. } S_R' \sim R^2$$

/ Опять в $R\to\infty$ источники кажутся точечными зарядами

$$\Rightarrow \varphi(\vec r) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_{ист}} \frac{\rho(\vec r\,')}{R}\,dV' + 0 \qquad (1)$$

Пусть теперь поверхность S не в бесконечности, но целиком охватывает область источников.

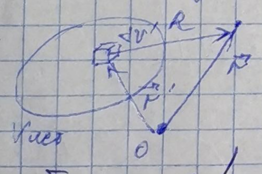


$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_{ист}} \frac{\rho(\vec r\,')}{R}\,dV' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \{\ldots\}\,dS' \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ Сравнивая (2) с (1) получим, что

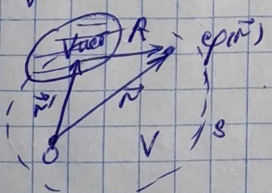
$\oint_S \{\ldots\}\,dS' = 0$ всё равно $= 0$, даже не на бесконечности.

Поясняющий рисунок:



$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{V_{ист}} \frac{\rho(\vec r\,')}{R}\,dV'$$

Пусть поверхность S захватывает источники не полностью:



В таком случае $\oint_S \{\ldots\}\,dS' \neq 0$ даёт вклад, который раньше не учитывали.

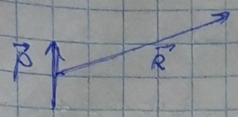
$$\frac{1}{4\pi}\oint\{\ldots\}\,dS = \underset{\text{простой слой}}{\varphi_{пр.сл.}} + \underset{\text{двойной слой}}{\varphi_{дв.сл.}}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{R} = \vec n\cdot\nabla_{\vec r\,'}\frac{1}{R} = \{\text{прямой проверкой получается}\} = \frac{(\vec n, \vec R)}{R^3}, \quad \vec R = \vec r - \vec r\,'$$

$$\varphi_{пр.сл.} = \frac{1}{\varepsilon}\oint_S \frac{\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}}{R}\,dS' = \frac{1}{\varepsilon}\oint_S \frac{\sigma_{эфф.}}{R}\,dS'$$

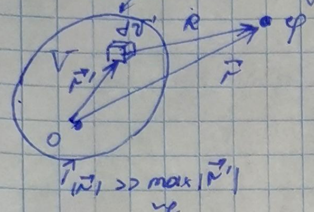
$$\varphi_{дв.сл.} = \frac{1}{\varepsilon}\oint_S \frac{\left(-\frac{\varepsilon\varphi}{4\pi}\vec n, \vec R\right)}{R^3}\,dS' = \frac{1}{\varepsilon}\oint_S \frac{(\vec P^{пов}_{эфф}, \vec R)}{R^3}\,dS', \quad \text{где}$$

$\sigma_{эфф.} = \dfrac{\varepsilon}{4\pi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$; $\vec P^{пов}_{эфф} = -\dfrac{\varepsilon\varphi}{4\pi}\vec n$ — мощность пов. слоя.



$\varphi = \frac{(\vec p, \vec R)}{\varepsilon R^3}$ ~ для диполя, похоже с потенц. двойного слоя, как увидим дальше произв. сист. можно представить через мультиполи.

Поле произвольной системы зарядов на большом расстоянии от нее (разложение по мультиполям.)



$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \frac{\rho(\vec r')}{R}\, dV' \quad - ?$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\vec r - \vec r'|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

Если $x', y', z' = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{R}\Big|_{r'=0}$

Разложим $\frac{1}{R}$ в ряд в окр-ти точки $r'=0$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R}\Big|_{\vec r'=0} + x'_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec r'=0} + \frac{1}{2!}\underbrace{x'_\alpha x'_\beta}_{\text{индексы суммирования}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}\cdot\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec r'=0} + \ldots$$

индексы суммирования, $\alpha, \beta = \overline{1,3}$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\cdot\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec r'=0} = \frac{x_\alpha}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{1}{r} \quad (1)$$

при $\alpha \neq \beta$: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta}\cdot\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec r'=0} = \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\cdot\frac{1}{r} \quad (2а)$

при $\alpha = \beta$: $\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2_{1,2,3}}\cdot\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec r'=0} = \frac{3x^2_{1,2,3}}{r^5} - \frac{1}{r^3} = \frac{\partial^2}{\partial x^2_{1,2,3}}\cdot\frac{1}{r} \quad (2б)$

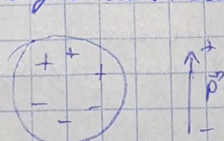
Подставляем в самое первое ур-е и оставляем в интеграле 1-ые элементы.

$$\Rightarrow \varphi(\vec r) = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}\int_V \rho(\vec r')\, dV' + (-1)\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{1}{r}\right)\int_V \rho(\vec r')\, x'_\alpha\, dV' + \frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\cdot\frac{1}{r}\right)\int_V \rho(\vec r')\, x'_\alpha x'_\beta\, dV' +$$

$+ \ldots$

Говорим, что $\varphi(\vec r)$ явл. суммой φ мультиполей

$$\varphi_{\text{монополя}} = \frac{1}{\varepsilon r}\underbrace{\int_V \rho(\vec r')\, dV'}_{Q} = \frac{Q}{\varepsilon r}$$



~ для набл. в беск. будет казаться диполем.

$$\varphi_{\text{диполя}} = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{r}\right)\int_V \rho(\vec r')\, x'_\alpha\, dV', \quad \alpha = \overline{1,3}$$

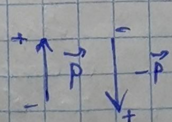
Если учесть $\int_V \rho(\vec r')\, x'_\alpha\, dV' = p_\alpha$, p_α ~ три числа: $p_1 = p_x$ и т.д.

$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{r}\right) = -\frac{x_\alpha}{r^3}$

$\Rightarrow \vec p = \int_V \rho(\vec r')\, \vec r'\, dV'$ ~ дип. момент системы.

$\Rightarrow \varphi_{\text{дип.}} = \frac{p_\alpha x_\alpha}{\varepsilon r^3} = \frac{(\vec p, \vec r)}{\varepsilon r^3}$ ~ потенциал созд. диполем.

Рассмотрим 3е слагаемое



~ квадруполь

$$\varphi_{\text{квадр.}} = \frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{1}{r}\right)\int \rho(\vec r')\, x'_\alpha x'_\beta\, dV'$$

$Q_{\alpha\beta} = \int \rho(\vec r\,')\, x'_\alpha x'_\beta \, dV'$ ~ тензор электрического квадрупольного момента.

Можно выбрать оси так, что $Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha}$ ~ т.е. примет диагональный вид.

Вводим величину:

$$D_{\alpha\beta} = 3Q_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\int_V \rho(\vec r\,')\, \overbrace{(x'^2+y'^2+z'^2)}^{r'^2}\, dV$$

$$\Rightarrow Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{3}\left(D_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\int_V \rho(\vec r\,')\, r'^2\, dV'\right)$$

т.к. $\delta_{\alpha\beta}$ ~ симметричный тензор отн. главной диагонали, то видно, что $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$.

$$Sp\,\hat D = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = 0$$

Вместо Q-представления, запишем через D:

$$\varphi_{квадр} = \frac{1}{6\varepsilon} D_{\alpha\beta} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\cdot\frac{1}{r}}_{(2а)\ и\ (2б)} + \frac{1}{6\varepsilon}\int_V \rho(\vec r\,')\, r'^2\, dV' \cdot \underbrace{\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\frac{1}{r}}_{\Delta\frac{1}{r} = 0}$$

по повторным индексам идёт суммирование, останутся суммы вторых производных → получим оператор Лапласа. (находимся далеко от н.к.)

Учитывая (2а), (2б) и $Sp\,\hat D = 0$

$$\Rightarrow \varphi_{квадр} = \frac{1}{6\varepsilon} D_{\alpha\beta}\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} = \frac{1}{2\varepsilon} D_{\alpha\beta}\frac{x_\alpha x_\beta}{r^5}$$ ~ потенциал квадруполя

В итоге: поле монополя $\varphi_{мон} \sim \frac{1}{r}$

$$\varphi_{дип} = \frac{(\vec p, \vec r)}{\varepsilon r^3} \sim \frac{1}{r^2}$$

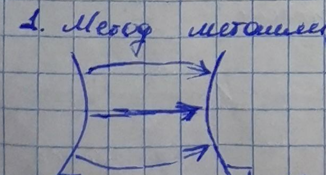
$$\varphi_{квадр} \sim \frac{1}{r^3}$$

Поле каждого следующего мультиполя спадает на r^{-1} быстрее. Если какой-то член пропадает нужно учитывать другие поля → быстрее спад.

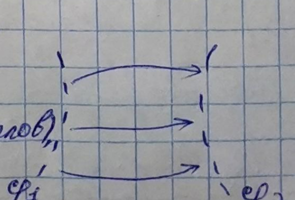
Значение дип. моментов может зависеть от выбора нач. координат, если полный заряд системы не равен 0.

4. Методы решения прямой задачи при наличии проводников и неоднородных диэлектриков.
   а) Конструктивные методы: металлизация эквип-х пов-ей; метод изображений; метод заполнения диэлектриком.
   б) Метод разделения переменных. Разделение переменных в ур-ии Лапласа в декартовой с.к. Задача о диэл-ом шаре в однородном внешнем поле.
   в) Понятие о методе возмущений.

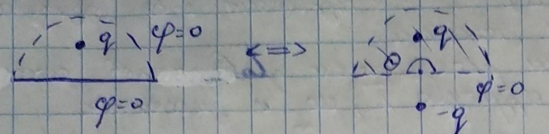
1. Метод металлизации эквипотенциальных поверхностей.



Если известно решение просто для эквипотенциальных пов-ей (без металлов), то в силу теоремы единственности решения совпадают



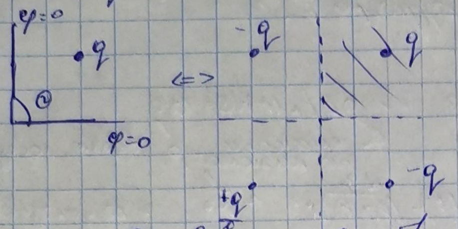
2. Метод изображений: рассматриваем другую задачу, где проводника нет, но выполняются такие же граничные условия.



1) Основано на теореме единств-ти, подбираем заряды изображения, чтобы были те же самые ГУ.

2) Помещаем изобр. вне той области, где ищем решение.

Пример 1:



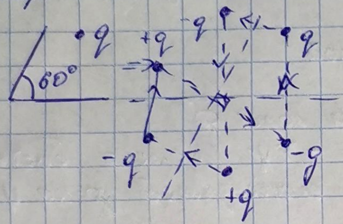
— парно обеспечивает такое же решение и ГУ.

Причем это справедливо для других θ:

$\theta = \frac{2\pi}{n}$, $n = 2, 4, 6, 8 \ldots$ — θ-дискретно.

будет $n-1$ изображение.

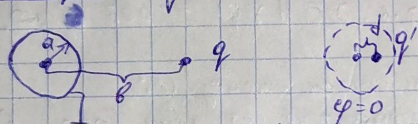
Например $n = 6 \to \theta = 60° = \frac{\pi}{3}$ => 5 изображений.



— тогда отображение всей постепенно замыкается.

Если θ не дискретно, получим беск. ряд изобр, в принципе можно получить решение в виде ряда.

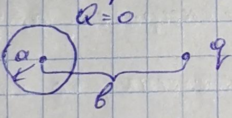
Пример 2: пусть есть заземленная сфера.



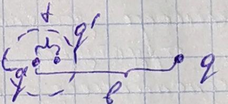
=> Из выполнения ГУ получим:

$r = \frac{a^2}{b}$; $q' = -\frac{a}{b} q$

Если сфера незаряжена

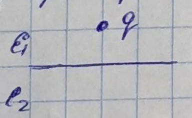


то нужно компенсир. доп-но зарядом в центре.

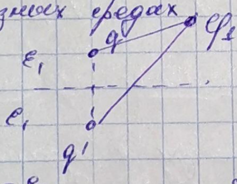


(Более экзотические примеры в лекции отсылают в задачнике.)

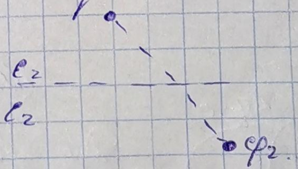
Пример 3. например в разных средах.



Сначала все заполняем ε1



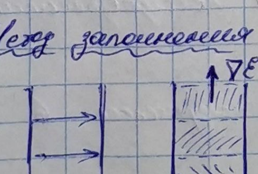
потом ε2



$$\Rightarrow q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q \; ; \; q'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q$$

Для проверки надо точку φ_1 и φ_2 перенести на границу раздела сред и убедиться в выполнении ГУ: $\varphi_1 = \varphi_2$ и $D_{1n} = D_{2n}$. (решение есть в Сивухине.)

3. Метод заполнения диэлектриком: на простом примере — плоский конденсатор



заполнение вдоль силовых линий (трубок) $\nabla\varepsilon \perp \vec{E}, \vec{D}$

— но $\vec{E}$ такое же однородное (должно остаться), при таком заполнении сохраняется структура поля $\vec{E}$, такое же как в отсутствии заполнения.

Проверим:

$$\operatorname{div}(\varepsilon \nabla\varphi) = -4\pi\rho$$

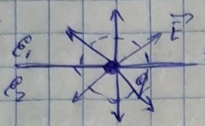
$$\varepsilon \underbrace{\operatorname{div}\nabla\varphi}_{\Delta\varphi} + \underbrace{(\nabla\varepsilon, \nabla\varphi)}_{=0,\ \text{т.к. } \nabla\varepsilon \perp \nabla\varphi} = -4\pi\rho \Rightarrow \Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$$

Если обозначить $\rho_{нов} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ $\to \Delta\varphi = -4\pi\rho_{нов}$.

Если внутри конденсатора: $\rho = 0 \to \Delta\varphi = 0$ $\Rightarrow$ с введением в-ва структура поля не изменяется, но изменится значение.
$\Rightarrow$ Если при данном заполнении потенциалы проводников останутся неизменными, то сохр. не только структура $\vec{E}$, но и значения.

Если при данном заполнении фиксирована $\varphi = \int\limits_{\vec{r}(r)}^{\infty} \vec{E}\, d\vec{l}$ заряды, в частн. заряды проводников, то сохр. лишь структура $\vec{E}$.

Пример:

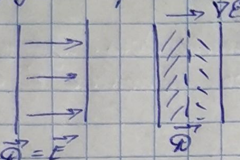


$\nabla\varepsilon \perp \vec{E}$ $\Rightarrow \oint\limits_S \vec{D}\, d\vec{s} = 4\pi q \Rightarrow \oint \varepsilon E_r(r)\, ds = 4\pi q$

S_r сначала по верхн. полусфере, затем по нижней.

$\varepsilon_1 E_r(r) \cdot 2\pi r^2 + \varepsilon_2 E_r(r) \cdot 2\pi r^2 = 4\pi q \Rightarrow E_r(r) = \frac{2q}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^2} \sim \frac{1}{r^2}$ → структура не изм, а значение —да

Другой пример заполнения: вдоль эквипотенциалей



$\Rightarrow$ Здесь сохраняется структура поля $\vec{D}$.
Докажем, что $\vec{D} = -\varepsilon\nabla\varphi = -\nabla\psi$ может быть представлена в виде новой скалярной ф-ии ψ

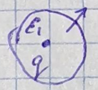
$\mathrm{rot}\,\vec{D} = 0$? $\to \mathrm{rot}(\varepsilon\nabla\varphi) = 0$?

$\underbrace{\varepsilon\,\mathrm{rot}\,\nabla\varphi}_{=0} + [\nabla\varepsilon, \nabla\varphi] = 0 \Rightarrow$ т.к. $\nabla\varepsilon \parallel \nabla\varphi \Rightarrow$ всё верно.

Тогда по теореме из ВТА $\vec{D}$ может быть выражен через ψ:
$\mathrm{div}\,\underset{-\nabla\psi}{\vec{D}} = 4\pi\rho \to \Delta\psi = -4\pi\rho$ → ничем не отличается от прошлого, всё опр-ся зарядами.

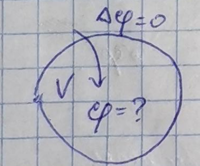
Если при данном заполнении сохр. заряды (вып. при неизмен. зарядах), то сохр. не только структура $\vec{D}$, но и значение.
Если вып. заполнение при фиксированных потенциалах, то сохр. лишь структура поля $\vec{D}$.

Пример: • $q \Rightarrow D = \frac{q}{r^2}$

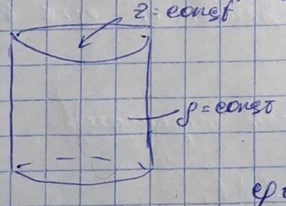


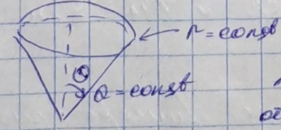
$\nabla\varepsilon \parallel \vec{E}, \vec{D}$ — вдоль эквипотенц., зар. не изменился.
$\Rightarrow D_{1,2} = \frac{q}{r^2}$; $E_{1,2} = \frac{q}{\varepsilon_{1,2} r^2}$

Метод разделения переменных



Для применения метода с заданными граничными условиями на S необходимо, чтобы пов-ть S сост. из участков поверхности отн. сист. координат, в которых переменные разделяются (известно таких 11 с.к.)





В двумерном случае разделение в любой с.к. получается конформным отображением x, y.

$\left.\begin{array}{l}\varphi \in C^2 \text{ в } V \\ \varphi \in C \text{ на } S\end{array}\right\}$ необходимо, чтобы решение представилось в виде сходящегося ряда.

Пример: $\Delta\varphi = 0$ — ур-е Лапласа
$\varphi = \varphi(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z)$

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} = -h^2 \Rightarrow Z'' - h^2 Z = 0 \Rightarrow Z = C_1 e^{-hz} + C_2 e^{hz}$$

$$\frac{X''}{X} + h^2 = -\frac{Y''}{Y} = \varkappa_y^2 \Rightarrow Y'' + \varkappa_y^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = B_1 \cos\varkappa_y y + B_2 \sin\varkappa_y y$$

$\Downarrow$

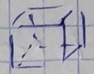
$$\frac{X''}{X} = \underbrace{-h^2 + \varkappa_y^2}_{-\varkappa_x^2} \Rightarrow -h^2 + \varkappa_y^2 = -\varkappa_x^2 \Rightarrow h^2 = \varkappa_x^2 + \varkappa_y^2$$

$$X'' + \varkappa_x^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A_1 \cos\varkappa_x x + A_2 \sin\varkappa_x x$$

знаки собств. констант объясняются в ММФ.

$$\Rightarrow \varphi = (A_1 \cos\varkappa_x x + A_2 \sin\varkappa_x x)(B_1 \cos\varkappa_y y + B_2 \sin\varkappa_y y)\left(C_1 e^{-\sqrt{\varkappa_x^2+\varkappa_y^2}\, z} + C_2 e^{\sqrt{\varkappa_x^2+\varkappa_y^2}\, z}\right)$$

константы опр-ся из ГУ (например в коробке в гранях



получим дискр. набор $\varkappa_{xn}, \varkappa_{ym}$ → в ГУ → получим решение в виде ряда.)

Задача о диэлектрическом шаре в однородном электрическом поле.

$\Delta\varphi = 0$; ищем в сферических коорд-х $\varphi(r, \theta, \psi)$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} = 0$$

Рас-м случай, когда $\partial\varphi/\partial\psi = 0$ (область с симметрией отн. оси z.)

$\Rightarrow$ ищем решение в виде $\varphi = \varphi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$
— выражается см. ММФ.

$$\Rightarrow \varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right] P_n(\cos\theta),$$ где P_n - полином Лежандра

$P_n(x)$ | $\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)P_n = 0$ — приводится к такому виду исходное уравнение

Из справочника формула Родрига:

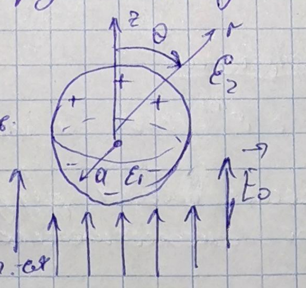
$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ — обр. полную ортог. систему ф-ий на отр. $x \in [-1; 1]$

$P_0 = 1$; $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x-1)$, ...

Соотношение ортогональностей: $\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$, в нашем случае $x = \cos\theta$.

пересчёт: $\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}$

Теперь перейдём к задаче: т.к. зарядов нет, то для областей 1 и 2 должно выполняться:



$\Delta\varphi_{1,2} = 0$; $|\varphi_1| < \infty$

По направлению $\vec{E_0}$ наложено сообразно:

$$\varphi_0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta$$

$\lim_{r\to\infty} \varphi_2 = -E_0 r\cos\theta$ — должно также вып-ся

Требуем выполнения ГУ: $\varphi_1 = \varphi_2 \big|_{r=a}$ (1)

$$\varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} \quad (2)$$ (т.к. $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r}$ в сферич. с.к.)

Запишем вид решения в области 1: во внутр. области шара не может быть беск. слагаемого $\Rightarrow B_n = 0$

$$\varphi_1 = A_0 \underbrace{P_0(\cos\theta)}_{1} + A_1 r \underbrace{P_1(\cos\theta)}_{\cos\theta} + \dots$$

Для 2 области:

$$\varphi_2 = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 r\cos\theta + \ldots + \frac{B_0}{r} + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta + \ldots$$

просто коэф. в обл. 2

В качестве естественного физ-ого предположения, т.к. $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi_2 = -E_0 r\cos\theta$ останутся только следующие слагаемые:

$$\varphi_1 = A_1 r\cos\theta$$
$$\varphi_2 = \bar{A}_1 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta$$

— если довл. всем условиям, то по т. единственности наше решение.

φ_2 при $r\to\infty$: $\bar{A}_1 = -E_0$

$$\varphi_2 = -E_0 r\cos\theta + \frac{B_1}{r^2}\cos\theta$$

Остальные коэф-ты ищем через ГУ (выпишем сразу решение системы):

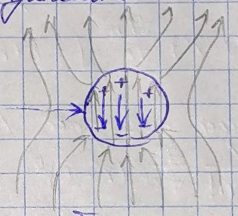
$$A_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0\ ;\quad B_1 = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}a^3E_0$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}E_0\underbrace{r\cos\theta}_{z} \rightarrow \vec{E}_1 = -\nabla\varphi_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\vec{E}_0$$ отлич. только множителем.

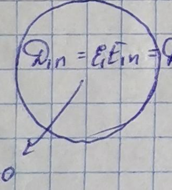
$$\varphi_2 = \underbrace{-E_0 r\cos\theta}_{\varphi_0} + \underbrace{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}a^3E_0\frac{\cos\theta}{r^2}}_{=\frac{(\vec{p},\vec{r})}{\varepsilon_2 r^3}}$$ похоже на потенц. диполя, если $\vec{p} = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\varepsilon_2 a^3\vec{E}_0$

Т.е. шар приобретает некоторый эффективный дипольный момент.

Пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \Rightarrow \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2} < 1$ → поле внутри меньше: внутри поле $\parallel E_0$ => поэтому ослабло



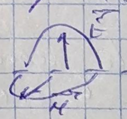
Случай идеально провод. шара: (т.е. поле внутри = 0)



Если хотим $E_{1n}\to 0$, то $\varepsilon_1\to\infty$. Т.е. дост. совершить предельный переход $\varepsilon_1\to\infty$ в старом решении

$$\Rightarrow \vec{p} = \lim_{\varepsilon_1\to\infty}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+2\varepsilon_2}\varepsilon_2 a^3\vec{E}_0 = \varepsilon_2 a^3\vec{E}_0$$

Масштаб шара $\lambda_{1,2} >> a$ → задача имеет прим. и для перем. полей.



Метод возмущений

Пусть есть среда с $\varepsilon^{(0)} = const$ и мы знаем решение $\Delta\varphi^{(0)} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon^{(0)}}$

Пусть теперь рассматриваем другую среду $\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}(\vec{r})$, можем найти приближённое аналитическое решение при условии $|\varepsilon^{(1)}| << \varepsilon^{(0)}$

$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)}$ — предполагаем, что должно быть так

$|\varphi^{(1)}| << |\varphi^{(0)}|$

$$\mathrm{div}(\underbrace{\varepsilon}_{\varepsilon^{(0)}+\varepsilon^{(1)}}\nabla\varphi) = -4\pi\rho \Rightarrow \varepsilon^{(0)}\mathrm{div}\underbrace{\nabla\varphi}_{\nabla\varphi^{(0)}+\nabla\varphi^{(1)}} + \mathrm{div}(\varepsilon^{(1)}\underbrace{\nabla\varphi}_{\nabla\varphi^{(0)}+\nabla\varphi^{(1)}}) = -4\pi\rho$$

$$\Rightarrow \varepsilon^{(0)}\Delta\varphi^{(0)} + \varepsilon^{(0)}\Delta\varphi^{(1)} + \varepsilon^{(1)}\Delta\varphi^{(0)} + \cancel{\varepsilon^{(1)}\Delta\varphi^{(1)}} + (\nabla\varepsilon^{(1)},\nabla\varphi^{(0)}) + \cancel{(\nabla\varepsilon^{(1)},\nabla\varphi^{(1)})} = -4\pi\rho$$

малые величины 2го порядка.

Из исходной задачи $\varepsilon^{(0)}\Delta\varphi^{(0)} = -4\pi\rho$

$\varepsilon^{(0)} \Delta\varphi^{(2)} + \mathrm{div}(\varepsilon^{(2)} \nabla\varphi^{(0)}) = 0$

перенесем div влево и делим на $\varepsilon^{(0)}$

$$\Rightarrow \quad \Delta\varphi^{(2)} = -\frac{\mathrm{div}(\varepsilon^{(2)}\nabla\varphi)}{\varepsilon^{(0)}}$$

Формально заменим $\mathrm{div}(\varepsilon^{(2)}\nabla\varphi) = 4\pi\rho^{(2)}$

$$\Delta\varphi^{(2)} = -\frac{4\pi\rho^{(2)}}{\varepsilon^{(0)}}$$

~ ур-е Пуассона, все величины известны, т.е. можно получить решение.

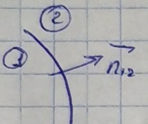
5. Обратная задача электростатики.

~ состоит в отыскании распределения зарядов по заданному полю.

Алгоритм действий:

1. Проверить есть ли объемные заряды

$$\left\{\rho = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\vec{D} = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}(\varepsilon\nabla\varphi)\right\}$$

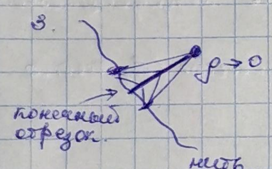
2. 

Если имеется скачок потенциала лол-м:

а) $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\vec{n}_{12}, \vec{P}^{\text{пов}})$, где $\vec{P}^{\text{пов}}$ ~ мощность поверхностного слоя.

б) $(\vec{n}_{12}, \vec{D}_2 - \vec{D}_1) = 4\pi\sigma$

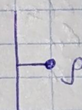
Дифференцирование скачка → δ-функция → получим поверхностный заряд.

3. 

$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} \sim \frac{1}{\rho}$ → нить заряжена линейным зарядом.

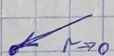
$$\left\{ q_{\text{лин}} = -\lim_{\rho\to 0}\left(\frac{\varepsilon}{2}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)\right\}$$

вблизи конечного участка $E_\rho = -\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = \frac{2q_{\text{лин}}}{\varepsilon\rho}$ ~ для беск. нити



нить кажется бесконечной → справедливо всё также

4. В точке $\varphi \sim \frac{1}{r}$ $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} \sim \frac{1}{r^2}\right)$

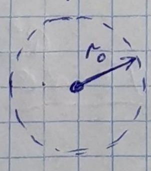


$$\Rightarrow \left\{ q = \lim_{r\to 0}(\varepsilon r\varphi) = -\lim_{r\to 0}\left(\varepsilon r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right\}$$

т.к. $\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}$; $E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{q}{\varepsilon r^2}$

5. Если потенциал имеет ещё большую особенность $\frac{\partial\varphi}{\partial r} \sim \frac{1}{r^3}$ → тогда в точке находится мультиполь.

Пример: $r > r_0$, $\varphi = \frac{C}{r}$, чем создаётся поле?

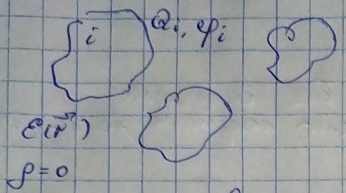


Здесь много вариантов — заряженный шар, заряженный поверхностный слой.

Решение неоднозначно, т.к. φ задано в конкретной области.

6. Линейные соотношения между зарядами и потенциалами проводников. Свойства потенциальных и емкостных коэффициентов. Понятие емкости.

Рассмотрим систему из n проводников, находящихся в огр-ой области пр-ва. (т.е. $\varphi(\infty)=0$)



Оказывается, что связь между $\varphi_i \longleftrightarrow Q_i$ простая → линейная.

т.к. $\operatorname{div}\vec D=0$ => потенциал опр-ся только зарядами проводников.

$$W_e=\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV+\frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$$

Ищем решение: $\varphi_i=\sum_k b_{ik}Q_k+\overline{\varphi_i}$

при $Q_k=0$ → $\vec E=0$ => $\varphi_i=\overline{\varphi_i}=\varphi(\infty)=0$ (т.к. если поля нет, то эквипотенциали совпадают).

=> $\overline{\varphi_i}=0$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_i=\sum_k b_{ik}Q_k}$$

где b_{ik} – потенциальные коэффициенты, перепишем в матричном виде: $\vec\varphi=\hat b\vec Q$ => $\vec Q=\hat b^{-1}\vec\varphi$, пусть $\hat b^{-1}=\hat C$

=> $Q_i=\sum_k C_{ik}\varphi_k$, где C_{ik} – емкостные коэффициенты.

b_{ik}, C_{ik} определяются исключительно конфигурацией системы (ε, число проводников, их формы и т.д.)

Свойства:

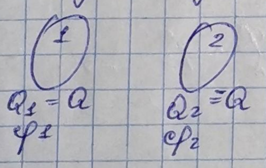
1) $b_{ik}=b_{ki}$, $C_{ik}=C_{ki}$ – следствие теоремы взаимности.

2) $b_{ii}>0$, $C_{ii}>0$ – диагональные элементы положительны.

3) $i\neq k$: $b_{ik}\geq 0$, $C_{ik}\leq 0$; $\sum_k C_{ik}\geq 0$ док-во Савухин т.3 §27

Понятие емкости.

Вводится для системы из двух проводников по определению: $\boxed{C=\frac{Q}{\varphi_1-\varphi_2}}$ – зависит от конфиг-ии системы



Если объемных зарядов нет ($\rho=0$):

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i=\frac{1}{2}\sum_i\sum_k C_{ik}\varphi_i\varphi_k=\frac{1}{2}\sum_i\sum_k b_{ik}Q_iQ_k.$$

Пусть есть уединённый проводник:

$$C=\frac{Q}{\varphi-\underbrace{\varphi(\infty)}_{=0}}=\frac{Q}{\varphi} \Rightarrow Q=C\varphi \Rightarrow W_e=\frac{1}{2}Q\varphi=\frac{1}{2}C\varphi^2=\frac{Q^2}{2C}$$

Энергия, запасённая в конденсаторе:

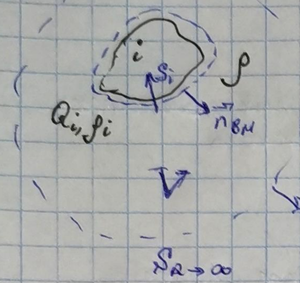
$$W_e=\frac{1}{2}(\underbrace{Q_1}_{Q}\varphi_1+\underbrace{Q_2}_{-Q}\varphi_2)=\frac{1}{2}Q(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{1}{2}C(\varphi_1-\varphi_2)^2=\frac{Q^2}{2C}$$

7. Энергия электростатического поля. Представление в виде интеграла по области источников. Собственная энергия и энергия взаимодействия различных подсистем. Энергия взаимодействия внешнего поля с точечным зарядом и с точечным диполем. Энергия системы проводников. Теорема Томсона о минимуме электростатической энергии.

$W_e = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V \vec E\vec D\, dv$ — попробуем переписать через другие величины.

$$W_e = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V \vec E\vec D\, dv = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_V \underbrace{(\nabla\varphi, \vec D)}_{div(\varphi\vec D) - \varphi\, div\vec D} dv = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_V div(\varphi\vec D)\, dv + \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\varphi\, dv \ominus$$

представим объемный интеграл через поверхностный



$$\ominus \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\varphi\, dv - \frac{1}{8\pi}\oint\limits_{S_{R\to\infty}+\sum_i S_i} \varphi\vec D\, d\vec S$$

Отдельно: $\oint\limits_{S_{R\to\infty}} \underbrace{\varphi}_{\sim\frac{1}{R}}\underbrace{\vec D}_{\sim\frac{1}{R^2}}\, d\vec S = 0 \qquad S_R \sim R^2$

$$\Rightarrow W_e = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\varphi\, dv + (-1)\frac{1}{8\pi}\sum_i \varphi_i \oint\limits_{S_i} \vec D\, \underbrace{d\vec S}_{\vec n\, dS,\ \vec n = -\vec n_{вн}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\varphi\, dv + \frac{1}{8\pi}\sum_i \varphi_i \oint\limits_{S_i} \underbrace{D_{n_{вн}}}_{4\pi\sigma \text{ из Г.У.}} dS =$$

$$= \left\{\oint\limits_{S_i} \sigma\, dS = Q_i\right\} = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\varphi\, dv + \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i$$

$$\Rightarrow \boxed{W_e = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho\varphi\, dv + \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i}$$ — но где сосредоточена энергия? Где поле или где источники?

На самом деле в рамках статики поля неотделимы от источников → однозначно ответить на вопрос невозможно. Но в рамках перемен. полей → энергия там, где поле.

— энергия системы проводников

* $\rho = 0$: $W_e = \frac{1}{2}\sum Q_i\varphi_i$ и попросят найти $\sum_i Q_i\varphi_i < 0$, если домножаем на $1/2$ — получим энергию, которая не м.б < 0 без объёмных энергий. (такого не могут дать задачу)

Энергия взаимодействия:

Опр. Энергией взаимодействия нескольких подсистем обр. систему, назыв. разность полной энергии системы и суммарной энергии невзаимодействующей подсистемы.

Пример: $\vec E_1$ и $\vec E_2$ приведем во взаимодействие, но так, что поля остаются прежними.

$$W_e = \frac{1}{8\pi}\int\limits_V \varepsilon\vec E^2 dv = \underbrace{\frac{1}{8\pi}\int\limits_V \varepsilon\vec E_1^2\, dv}_{W_1 \text{ — собств. эн.}} + \underbrace{\frac{1}{8\pi}\int\limits_V \varepsilon\vec E_2^2}_{W_2} + \underbrace{\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \varepsilon\vec E_1\vec E_2\, dv}_{W_{вз} \gtrless 0}$$ — зависит от типа взаимодействия.

$\vec E = \vec E_1 + \vec E_2$

$\Rightarrow$ Для энергии не выполняется принцип суперпозиции. ($W_e \ne W_1 + W_2$)

Пусть $\underset{(\varphi_1)}{\vec E_1} \leftarrow \rho_1$ — созд. поле E_1 и $\underset{(\varphi_2)}{\vec E_2} \leftarrow \rho_2$

Если при взаимод. так же ρ_1 и ρ_2 не изменяются

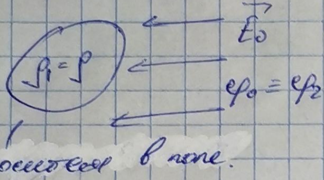
$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV$ = { по принципу суперпозиции $\rho = \rho_1+\rho_2$, $\varphi = \varphi_1+\varphi_2$ } =

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \rho_1\varphi_1\, dV}_{W_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \rho_2\varphi_2\, dV}_{W_2} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_V (\rho_1\varphi_2 + \rho_2\varphi_1)\, dV}_{W_{вз}}.$$

По теореме взаимности $\int_V \rho_1\varphi_2\, dV = \int_V \rho_2\varphi_1\, dV$

$$\Rightarrow W_{вз} = \int_V \rho_1\varphi_2\, dV$$

Ф-ла может быть исп-на для такого типа:



Обычно исп. индекс 0 (а не 2) для внешних источников. Вместо инд. 1 → ничего.

$$\Rightarrow \boxed{W_{вз} = \int_V \rho\varphi_0\, dV}$$

~ если вносится в другое внешнее поле потенц. созд. внешними по отн. к ρ источниками.

Примеры: 1) Точечный заряд во внешнем поле.

$$\rho = q\delta(\vec r - \vec r_q)$$

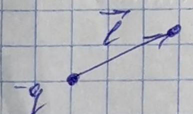
$$W_{вз} = \int_V q\delta(\vec r - \vec r_q)\varphi_0(\vec r)\, dV = q\varphi_0(\vec r_q)$$

~ энергетический смысл потенциала → потенциал поля в некоторой точке есть величина, которая численно совпадает с энергией взаимодействия единичного заряда, помещ. в данную точку с этим полем.

2) Жёсткий диполь – диполь, момент которого не зависит от внешнего поля.

Мягкий диполь – дипольный момент зависит от внешнего поля.

→ Жёсткий диполь (во внешнем поле)



$\vec p = q\vec l$ ~ т.к. жёсткий, конфигурация зарядов не меняется

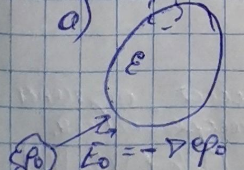
$$\Rightarrow \rho = -q\delta(\vec r) + q\delta(\vec r - \vec l)$$

$W_{вз} = -q\varphi_0(0) + q\cdot\varphi_0(\vec l)$ = { пусть l мало, разложим в ряд } =

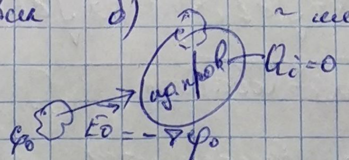
$$= -q\varphi_0(0) + q\varphi_0(0) + q\nabla\varphi_0(0)\vec l = \underbrace{q\vec l}_{\vec p}\,\underbrace{\nabla\varphi}_{-\vec E_0} = -(\vec p, \vec E_0)$$

3) Мягкий диполь во внешнем поле – $W_{вз}$ не можем применить как выше – конфигурация зарядов изменяется.

а) ~ например диэлектрик



б) ~ или идеальный проводник



Используем общую формулу:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\, dV + \underbrace{\frac{1}{2}Q_i\varphi_i}_{\text{а) нет} \quad \text{б) } Q_i = 0} = \frac{1}{2}\int_V \underset{\rho_0}{\rho}\,\underset{\varphi_0+\varphi_{дип}}{\varphi}\, dV = \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \rho_0\varphi_0\, dV}_{W_{собств}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \rho_0\varphi_{дип}\, dV}_{W_{вз}}$$

$W_{вз} = \frac{1}{2}\int_V \rho_0 \varphi_{ind}\, dV = \frac{1}{2}\int_V \rho_{ind}\varphi_0\, dV$ = {по т. взаимности $\rho_0 \to \varphi_0$; $\rho_{ind} \to \varphi_{ind}$}

$W_{вз} = \frac{1}{2}\int_V \rho_{ind}(\vec r)\varphi_0(\vec r)\, dV$ ⊜ {т.к. объём интегрирования мал} =

$\varphi_0(\vec r) = \varphi_0(0) + \underbrace{\nabla\varphi_0(0)}_{-\vec E_0}\cdot\vec r + \dots$

$$⊜ \underbrace{\frac{1}{2}\int_V \rho_{ind}\, dV}_{=0}\cdot\varphi_0(0) + \frac{1}{2}\underbrace{\int_V \rho_{ind}(\vec r)\vec r\, dV}_{\vec p}\cdot(-\vec E_0)$$

=0 ~ т.к. у диполя число $-q$ и $+q$ одинаково.

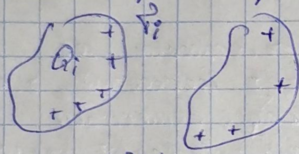
$$\Rightarrow W_{вз} = -\frac{1}{2}(\vec p, \vec E_0)$$

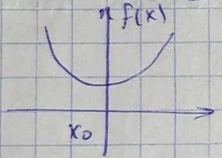
При решении задач всегда задавайтесь вопросом, какой диполь?

Теорема Томсона.

~ Заряды на проводниках, расположенных в диэлектрике или свободном пр-ве распределяются по поверхности проводников таким образом, чтобы энергия электрического поля была минимальна.

Док-во: рассмотрим проводник и мысленно перераспределим заряды.





$\sigma_i + \delta\sigma_i$ $\Rightarrow$ нужно доказать, что $\delta W_e = 0$

$$\delta W_e = \frac{1}{8\pi}\delta\int_V \underbrace{\vec E\vec D}_{\varepsilon E^2}\, dV = \frac{1}{8\pi}\int_V \varepsilon\cdot 2\vec E\,\delta\vec E\, dV = \frac{1}{4\pi}\int_V \vec E\,\delta\vec D\, dV =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_V (\nabla\varphi, \delta\vec D)\, dV = -\frac{1}{4\pi}\int_V [\mathrm{div}(\varphi\,\delta\vec D) - \varphi\,\underbrace{\mathrm{div}\,\delta\vec D}_{4\pi\delta\rho}]\, dV =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_{S_R\to\infty + \sum_i S_i}\varphi\,\delta\vec D\, d\vec S$$ ⊜ {$\delta\rho = 0$, т.к. мы меняли только поверхностные заряды} =

$$⊜ -\frac{1}{4\pi}\underbrace{\oint_{S_R\to\infty}\overset{\sim\frac{1}{R}}{\varphi}\,\overset{\sim\frac{1}{R^2}}{\delta\vec D}\, d\vec S}_{=0} + \left(-\frac{1}{4\pi}\right)\sum_i \varphi_i \oint_{S_i}\delta\vec D\,\underbrace{d\vec S}_{\vec n\, dS} = -\frac{1}{4\pi}\sum_i\varphi_i\oint_{S_i}\underbrace{\delta D_{n\,вн}}_{4\pi\delta\sigma_i}\, dS =$$

$S_R \sim R^2$, $\vec n = -\vec n_{вн}$

$$= \sum_i \varphi_i \underbrace{\oint_{S_i}\delta\sigma_i\, dS}_{\delta Q_i} = 0$$ ~ полный заряд не изменился.

$$\Rightarrow \delta W_e = 0, \text{ ч.т.д.}$$

То, что этот экстремум — минимум, следует из того, что состояние равновесия должно быть устойчивым.

8. Силы в электрическом поле. Энергетический метод расчёта обобщённых сил. Выражения для силы в системе проводников с постоянными зарядами и постоянными потенциалами. Силы, действующие на заряд и диполь во внешнем поле; момент сил, действующих на диполь. Плотность силы, действующей на поверхность проводника. Плотность объёмной силы в диэлектрике. Сведение объёмных сил к поверхностным натяжениям. Тензор натяжений в среде.

Силы в электростат. поле. Энергетич. способ расчётов обобщ. сил

Вспомним теорему Пойнтинга: $\frac{\partial W}{\partial t} = -Q - \Pi + A^{ст}$, где

$A^{ст} = A^{немех}_{ст} + A^{мех}_{ст}$, $A^{мех}_{ст} = -A^{мех}_{поля} = -\vec F \vec v$

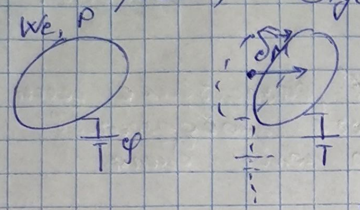
механ. и немех. сторонних источников.

A ~ мощность; тогда за малое время Δt:

$$\Delta W = -Q\Delta t - \Pi\Delta t + \underbrace{A^{немех}_{ст}\cdot\Delta t}_{\Delta P} - \vec F \underbrace{\vec v \Delta t}_{\Delta \vec r}$$

Чтобы остаться в пределах статики → нужно перейти к вариационным выражениям:

P – работа; Пусть есть объект с W_e, переместим его на малое расстояние $\delta \vec r$, тогда изменение W_e и P:



$\Rightarrow W_e + \delta W_e, \quad P + \delta P$

т.к. у нас нет перемещения и других сторонних зарядов → перемещение чисто механическое

$$\delta W_e = \delta P - \underbrace{\vec F \delta \vec r}_{F \delta \xi}, \quad \delta \text{ ~ вариация.}$$

ξ ~ любая величина спец. положения → можем не конкретизировать, что меняется в этот момент, т.е. ξ – обобщ. координата; F ~ тоже обобщ. величина ($\xi = \vec r \to F$ – сила; если $\xi \to$ угол $\to F$ – момент силы.)

$$\boxed{F_\alpha \delta \xi_\alpha = -\delta(W_e - P)}$$

Если сторонние источники отсутствуют $P = 0$:

$$F_\alpha \delta \xi_\alpha = -\delta W_e$$

Замечание о термодинам-ле смысле энергии эл-ого поля:

$F_\alpha \delta \xi_\alpha = -dU + \delta Q$ Из термодинамики $\delta Q = T dS$ ~ энтропия.

$\Rightarrow F_\alpha \delta \xi_\alpha = -dU + T dS$. $dS = \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{интегрир. множитель}} \delta Q$

Надо догадаться, что все рассматриваемые процессы изотермические $\Rightarrow T dS = d(TS)$

$$F_\alpha \delta \xi_\alpha = -dU + T dS = -dU + d(TS) = -d(\underbrace{U - TS}_{\mathcal{F}})$$

$\mathcal{F}$ ~ свободная энергия системы.

Далее упоминаем теорему Томсона (было ранее)

Силы в системах проводников с заданными зарядами и заданными потенциалами.

а) $P = 0$

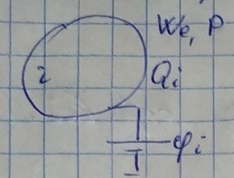
$F_\alpha \delta \xi_\alpha = -(\delta W_e)_Q$ ~ при условии заданных зарядов

$$\delta W_e = \underbrace{W_e(\xi + \delta \xi)}_{\text{т.к. } \delta\xi \text{ ~ мало}} - W_e(\xi) \approx W_e(\xi) + \frac{\partial W_e}{\partial \xi_\alpha} \delta \xi_\alpha - W_e(\xi) = \frac{\partial W_e}{\partial \xi_\alpha} \delta \xi_\alpha$$

$$F_\alpha \delta\xi_\alpha = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial \xi_\alpha}\right)_Q \delta\xi_\alpha \Rightarrow F_\alpha = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial \xi_\alpha}\right)_Q$$

В координатах (x, y, z): $\boxed{\vec F = -(\nabla W_e)_Q}$

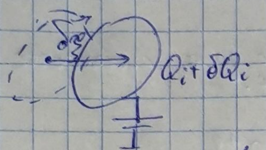
б) Система проводников с фиксированными потенциалами



Совершаем виртуальное перемещение, но потенциал сохранился → а заряд мог измениться на δQ_i

$$W_e + \delta W_e, \quad P + \delta P$$

$$\delta P = \sum_i \varphi_i \delta Q_i$$



$$F_\alpha \delta\xi_\alpha = -\delta(W_e - P)_\varphi$$

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_i Q_i \varphi_i$$

$$\delta(W_e - P)_\varphi = \frac{1}{2}\sum_i \delta(Q_i \cdot \varphi_i)_\varphi - \sum_i \varphi_i \delta Q_i = \frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \delta Q_i - \sum_i \varphi_i \delta Q_i =$$

т.к. φ фикс. → варьируется только Q

$$= -\frac{1}{2}\sum_i \varphi_i \delta Q_i = -(\delta W_e)_\varphi$$

$$\Rightarrow F_\alpha \delta\xi_\alpha = -\delta(W_e - P)_\varphi = (\delta W_e)_\varphi$$

$$\boxed{F_\alpha = \left(\frac{\partial W_e}{\partial \xi_\alpha}\right)_\varphi} \longrightarrow \boxed{\vec F = (\nabla W_e)_\varphi}$$

← энергия возраст. за счёт внешних источников (батарейки)

Примеры расчётов обобщ. сил в электростатике.

1. Точечный заряд во внешнем поле.

$$F_\alpha \delta\xi_\alpha = -(\delta W_e)_q = -\delta W_{вз}; \quad W_{вз} = q\varphi_0$$

$$\vec F = -\nabla W_{вз} = -\nabla(q\varphi_0) = q\vec E_0$$

2. Объёмное распределение заряда во внешнем поле.

$$W_{вз} = \int_V \rho(\vec r)\varphi_0(\vec r)\,dV$$

$$F_\alpha \delta\xi_\alpha = -(\delta W_e)_\rho = -(\delta W_{вз})_\rho$$

$$(\delta W_{вз})_\rho = \left(\delta \int_V \rho(\vec r)\varphi_0(\vec r)\,dV\right)_\rho = \int_V \rho(\vec r)\underbrace{\delta\varphi_0(\vec r)}_{\varphi_0(\vec r + \delta\vec\xi) - \varphi_0(\vec r)}\,dV$$

$$\varphi_0(\vec r + \delta\vec\xi) = \varphi_0(\vec r) + \nabla\varphi_0(\vec r)\cdot\delta\vec\xi$$

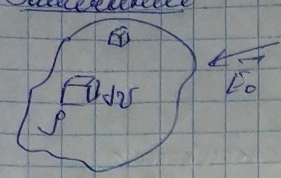
$$\Rightarrow (\delta W_{вз})_\rho = \int_V \rho(\vec r)\nabla\varphi_0(\vec r)\,dV \cdot \delta\vec\xi$$

$$\Rightarrow F_\alpha \delta\xi_\alpha = -(\delta W_{вз})_\rho = -\int_V \rho(\vec r)\nabla\varphi_0(\vec r)\,dV \cdot \delta\vec\xi = \int_V \rho(\vec r)\vec E_0(\vec r)\,dV \cdot \delta\vec\xi =$$

$$= \int_V \rho(\vec r) E_{0\alpha}(\vec r)\,dV \cdot \delta\xi_\alpha \Rightarrow F_\alpha = \int_V \rho E_{0\alpha}\,dV$$

$$\vec F = \int_V \rho\vec E_0\,dV = \int_V \rho\vec E\,dV$$

Замечание:



$\rho\, dV$ — как точечный заряд, человек, сидящий в dV на самом деле измер. поле $\vec{E}_0$ + поле, созд. зарядами (поля самодействия) → вклад обеспеч. только внешнее поле, самодействие в конкретных точках компенсируется

$$\Rightarrow \vec{F} = \rho \vec{E}$$

3) Сила, действующая на элементарный диполь.

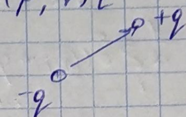
а) Жёсткий диполь → заряды фиксированы → $W_{вз}$ опр. всё.

$$\vec{F} = -\nabla W_{вз} = \nabla(\vec{p}, \vec{E})$$

$$W_{вз} = -(\vec{p}, \vec{E}_0)$$ дальше может писать не будем, для краткости а так понятно, что внешнее поле.

$$\vec{F} = \nabla(\vec{p}, \vec{E}) = [\vec{p}, \underset{0}{\operatorname{rot}\vec{E}}] + [\vec{E}, \operatorname{rot}\vec{p}] + (\vec{E}, \nabla)\vec{p} + (\vec{p}, \nabla)\vec{E}$$

в статике.



$$\Rightarrow \vec{F} = (\vec{p}, \nabla)\vec{E}$$

т.е. на масштабе диполя поле $\vec{E}$ должно изменяться.

б) Мягкий диполь, → $(\delta W_e) = \delta W_{вз}$.

$$\vec{F} = -\nabla W_{вз}, \quad W_{вз} = -\frac{1}{2}(\vec{p}, \vec{E});$$

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{p}, \vec{E})$$

Поскольку диполь мягкий → $\vec{p} = \vec{p}(\vec{E}) = \alpha \vec{E}$, где $\alpha = const$.

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{\alpha}{2}\nabla(\vec{E}, \vec{E}) = \frac{\alpha}{2}\nabla \vec{E}^2$$

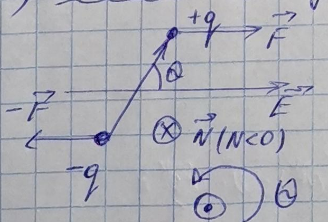
$$\nabla \vec{E}^2 = 2[\vec{E}, \underset{0}{\operatorname{rot}\vec{E}}] + 2(\vec{E}, \nabla)\vec{E} = 2(\vec{E}, \nabla)\vec{E}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\nabla \vec{E}^2 = (\vec{E}, \nabla)\vec{E}$$ и возвращ. обратно

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{2}\nabla \vec{E}^2 = \alpha(\vec{E}, \nabla)\vec{E} = (\vec{p}, \nabla)\vec{E}$$

⇒ то же самое, что физически естественно, поле не знает какой у нас диполь.

4) Момент сил, действующий на диполь (подразум. жёсткий)



Если мягкий диполь → момент выстраивается по полю $\vec{E}$ и не имеет смысла вводить $\vec{N}$

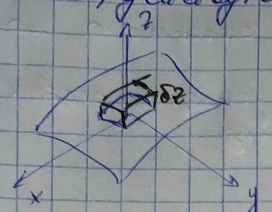
$$N = -\frac{\partial W_{вз}}{\partial \theta}$$

роль $F \to N$, $\xi \to \theta$ из $F_\alpha = -\frac{\partial W_{вз}}{\partial \xi_\alpha}$

$$\Rightarrow N = -\frac{\partial W_{вз}}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\{-\underbrace{(\vec{p}, \vec{E})}_{pE\cos\theta}\} = -pE\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{N} = [\vec{p}, \vec{E}]}$$

5) Сила, действующая на единицу площади пов-ти проводника.



Пользуемся тем, что:

$$(\delta W_e)_\rho = (\delta W_e)_{\vec D}$$

$$w_e = \frac{\vec E \vec D}{8\pi} = \frac{\vec D^2}{8\pi\varepsilon}$$

Совершим аналогично вирт. перемещ. на δz.

$F_z \delta z = -(\delta W_e)_{\vec D}$, т.к. пов-ть дана, менять энергии также, учтём с «–»

$$(\delta W_e)_{\vec D} = -\frac{\vec D^2}{8\pi\varepsilon}\Delta S\,\delta z$$

$$F_z \delta z = \underbrace{\frac{\vec D^2}{8\pi\varepsilon}}_{w_e}\Delta S\,\delta z \Rightarrow \frac{F_z}{\Delta S} = w_e$$

$$f_z^{пов} = w_e$$

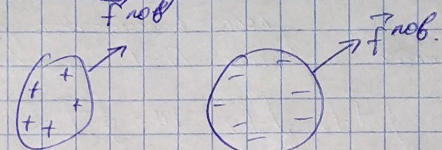
поверхностная плотность силы.

Аналогично: $F_x \delta x = -(\delta W_e)_{\vec D} = 0$ — энергия не изменится с пов-ю

$$F_y \delta y = -(\delta W_e)_{\vec D} = 0$$

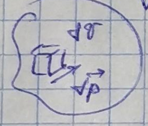
$$\Rightarrow \boxed{\vec f^{пов} = w_e \vec n_{вн}}$$

необриц.



6) Силы в диэлектриках (объёмная плотность пондеромоторной силы)

Сила действ. на элемент. диэл. диполь: $\vec F = (\vec p, \nabla)\vec E$



$d\vec p = \vec P\, dV \Rightarrow$ для элемент. диполя: $d\vec F = (d\vec p, \nabla)\vec E$

$$d\vec F = (\underbrace{d\vec p}_{\vec P dV}, \nabla)\vec E \Rightarrow \vec f = \frac{d\vec F}{dV} = (\vec P, \nabla)\vec E = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}(\vec E, \nabla)\vec E$$

$\vec P = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\vec E$; док-м: $(\vec E, \nabla)\vec E = \frac{1}{2}\nabla \vec E^2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec f = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\nabla \vec E^2}$$

— но это допущение много предположений, которые на практике не выполняются.

Если τ — плотность диэлектрика.

τ: $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ — явление стрикции — изменение плотности под действием поля.

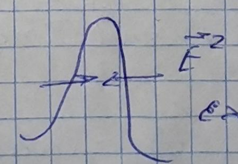
Без док-ва → ф-ла для $\vec f$ с учётом электрострикции:

$$\vec f = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\tau\right) - \frac{1}{8\pi}\vec E^2 \nabla\varepsilon$$

Если диэлектрик жидкий или газообр., то обычно $\varepsilon = 1 + C\tau$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\cdot\tau = C\tau = \varepsilon - 1$$

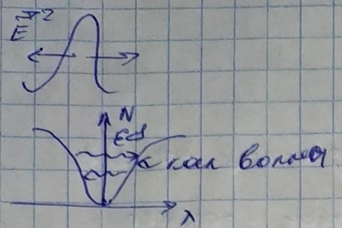
$$\Rightarrow \vec f = \frac{1}{8\pi}\nabla\left((\varepsilon - 1)\vec E^2\right) - \frac{1}{8\pi}\vec E^2\nabla\varepsilon = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\nabla\vec E^2$$



В электростатике нет диэл. с $\varepsilon < 1$, но в среде с дисперсией

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$\Rightarrow \varepsilon < 1$ м.б. $\Rightarrow$ плазма выталк. из более сильного поля.



Если есть ещё какие-то заряды, которые прикреплены к диэлектрику

$$\vec F = \rho \vec E + \dots$$

Сведение объёмных сил к поверхностным натяжениям. Тензор напряжения

$\vec F = \int_V \vec f\, dV \Rightarrow \vec F = \oint_S \vec f^{\,пов} dS$, тензор 1го ранга.

вспомним, что $\vec f = div\, \hat T$ ← тензор 2го ранга.

$f_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$, т.е. $f_x = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z}$

$f_y = \dots$, $f_z = \dots$

как вычислять дивергенцию тензора.

Известная теорема О-Г гласит следующее:

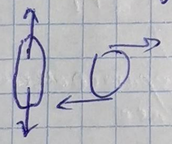
$$\vec F = \int_V \vec f\, dV = \int_V div\,\hat T\, dV = \oint_S \hat T\, d\vec S = \oint_S \hat T\, d\vec S = \oint_S \underbrace{\hat T \vec n}_{\vec f^{\,пов}}\, dS$$ ~ из тензорного анализа

$$\Rightarrow \vec f^{\,пов} = \hat T \vec n, \quad \vec n = (n_x, n_y, n_z)$$

Тогда: $f_x^{пов} = T_{xx} n_x + T_{xy} n_y + T_{xz} n_z$; аналогично $f_y^{пов} = \dots$; $f_z^{пов} = \dots$

$$\Rightarrow f_i^{пов} = T_{ij} n_j \quad \text{(суммирование по } j\text{)}$$

Для полной эквивалентности $\vec f$ на $\vec f^{\,пов}$ не достаточно только равенства нулю равнодействующей силы, но и Σ моментов сил $=0$.



Необходимое и достаточное усл. эквивал. замены объёмных сил с плотностью $\vec f = div\,\hat T$ с пов-ными силами $f^{пов}$, явл. условие симметрии этого тензора отн. главной диагонали

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$$

Пусть в общем случае есть и др. заряды, тогда:

$$\vec f = \rho \vec E + \frac{1}{8\pi}\nabla\left(E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\tau\right) - \frac{1}{8\pi}E^2 \nabla\varepsilon; \quad \vec f = \vec f' + \vec f'', \text{ где}$$

$\vec f' = \rho\vec E - \frac{1}{8\pi}E^2\nabla\varepsilon$ ← Просто замена.

$\vec f'' = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)$ ~ стрикционный член.
(учитывает явл. электрострикции)

$\vec f = div\,\hat T$ → будем аналогично делить $\hat T = \hat T' + \hat T''$

$\Rightarrow \vec f' = div\,\hat T'$; $\vec f'' = div\,\hat T''$

$\hat T'$ ~ Максвелловский тензор натяжения.

$\hat T''$ ~ стрикционная часть тензора натяжения.

$$\underbrace{\vec f^{\,пов}}_{\hat T \vec n} = \underbrace{\vec f^{\,пов'}}_{\hat T' \vec n} + \underbrace{\vec f^{\,пов''}}_{\hat T'' \vec n}$$

Переходим к анализу $\vec{f}''$:

единичный тензор

$$f_x'' = \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{E}^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\tau\right) + \frac{\partial}{\partial y}\cdot 0 + \frac{\partial}{\partial z}0$$

$$f_y'' = \frac{\partial}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\tau\right) + \frac{\partial}{\partial z}0 \qquad \Rightarrow \boxed{\hat{T}'' = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\cdot\tau\cdot\hat{I}}$$

$$f_z'' = \frac{\partial}{\partial x}\cdot 0 + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\vec{E}^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\tau\right) \qquad \Rightarrow T_{\alpha\beta}'' = T_{\beta\alpha}''$$

Теперь работаем с $\vec{f}' = \rho\vec{E} - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\nabla\varepsilon$;

$$f_x' = \rho E_x - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}; \quad f_y' = \rho E_y - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}; \quad f_z' = \rho E_z - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}$$

Из уравнения Максвелла:

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\vec{D}$$

$$f_x' = \frac{1}{4\pi}E_x\operatorname{div}\vec{D} - \frac{1}{8\pi}\vec{E}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_x\vec{D}) - \frac{1}{4\pi}\underbrace{(\nabla E_x, \vec{D})}_{(\vec{D},\, \nabla E_x)} - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}$$

$$(\vec{D}, \nabla)E_x = \varepsilon(\vec{E}, \nabla)E_x.$$

$$\Rightarrow f_x' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_x\vec{D}) - \frac{\varepsilon}{4\pi}(\vec{E}, \nabla)E_x - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}$$

Используем то, что $(\vec{E}, \nabla)\vec{E} = \frac{1}{2}\nabla\vec{E}^2$

$$(\vec{E}, \nabla)E_x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\vec{E}^2$$

$$\Rightarrow f_x' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_x\vec{D}) - \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}\vec{E}^2 - \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_x\vec{D}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon\vec{E}^2)$$

$$\Rightarrow \quad f_x' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_x\vec{D}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon\vec{E}^2)$$

— для x-й компоненты, для остальных всё аналогично.

$$f_y' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_y\vec{D}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon\vec{E}^2)$$

$$f_z' = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}(E_z\vec{D}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon\vec{E}^2)$$

Распишем: $\vec{D} = \{D_x, D_y, D_z\}$

$$f_x' = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{E_x D_x}_{\substack{\varepsilon E_x^2 \\ \varepsilon E_x E_x}} - \frac{\varepsilon\vec{E}^2}{2}\Big) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}(\underbrace{E_x D_y}_{\substack{\varepsilon E_y \\ \varepsilon E_x E_y}}) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}(\underbrace{E_x D_z}_{\substack{\varepsilon E_z \\ \varepsilon E_x E_z}})$$

$$\Rightarrow f_x' = \frac{\partial T_{xx}'}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}'}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}'}{\partial z}, \text{ где}$$

$$T_{xx}' = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_x^2 - \frac{\vec{E}^2}{2}\right); \quad T_{xy}' = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_x E_y; \quad T_{xz}' = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_x E_z.$$

аналогично для других, в более общем виде получим:

$$T_{\alpha\beta}' = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_\alpha E_\beta - \frac{\vec{E}^2}{2}\delta_{\alpha\beta}\right)$$

Примеры: 1) вычисление $\vec{f}^{\text{пов}''}$

$$\vec{f}^{\text{пов}''} = \hat{T}''\vec{n} = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\cdot\tau\underbrace{\hat{I}\vec{n}}_{\vec{n}} = \frac{1}{8\pi}\vec{E}^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\cdot\vec{n}$$

2) Вычисление $\vec{f}^{пов'}$

$\vec{f}^{пов'} = \hat{\tau}'\vec{n}$; $f_\alpha^{пов'} = T_{\alpha\beta}' n_\beta = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_\alpha E_\beta - \frac{\vec{E}^2}{2}\delta_{\alpha\beta}\right) n_\beta$

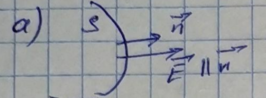
$E_\beta n_\beta = (\vec{E}, \vec{n}) = E_n$ — проекция на нормаль.

$\delta_{\alpha\beta} n_\beta = n_\alpha$.

$\Rightarrow f_\alpha^{пов'} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_\alpha E_n - \frac{\vec{E}^2}{2} n_\alpha\right)$ → легко теперь написать для вектора.

$$\vec{f}^{пов'} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\vec{E}E_n - \frac{\vec{E}^2}{2}\vec{n}\right)$$

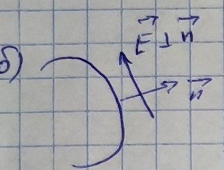
Важные частные случаи: (например у пов-ти идеального проводника).

а) 

$\vec{E} = E\vec{n}$ (т.е. $E = E_n$)

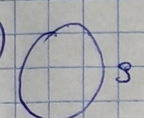
$\vec{f}^{пов'} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E^2\vec{n} - \frac{\vec{E}^2}{2}\vec{n}\right) = \{E^2 = \vec{E}^2\} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\vec{n} = w_e\vec{n}$

→ тянет вдоль силовых линий.

б) 

Пусть оказалось, что где-то $\vec{E} \perp \vec{n}$ $\Rightarrow E_n = 0$

$\vec{f}^{пов'} = -\frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi}\vec{n} = -w_e\vec{n}$ — поле как бы давит на пов-ть.

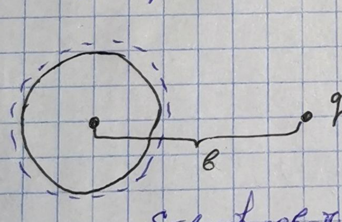
в) 

$\hat{\tau}'$, $f^{пов'} \neq 0$ — есть пустая огр. пов-ть.

$\vec{F} = \oint_S \vec{f}^{пов'} dS \neq 0$ — действ. равнод. сила $\neq 0$ ⇒ основа для объяснения концепции эфира. (но от неё отказались, приписывая только импульс, аналогичный механическому.)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{мех} + \vec{G}\right)$$

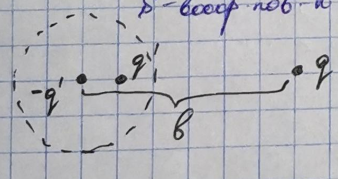
Примеры применения формул:

1) 

Найти силу взаим. т.з. и сферы.

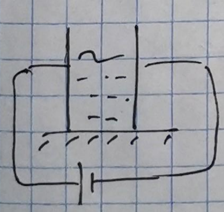
$\vec{F} = \int_V \rho\vec{E}\,dV = \oint_S \vec{f}^{пов}\,dS$

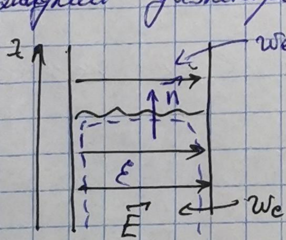
S - вообр. пов-ть.



Если поля не меняются → выражение для силы при изображении также не поменяется.

2) Имеется жидкий диэлектрик в конденсаторе → насколько поднимется? вверх.

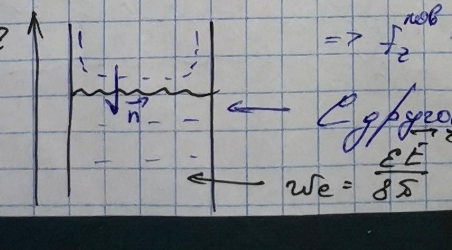




Заполняем конденсатор вдоль силовых линий ⇒ $\vec{E} = const$, опр. исключительно потенциалом батареи.

⇒ из прошлого $\vec{E} \perp \vec{n}$ ⇒

$\Rightarrow f_z^{пов} = -\frac{\vec{E}^2}{8\pi}$; $F_z = -\frac{\vec{E}^2}{8\pi}\Delta S$



← С другой стороны среда

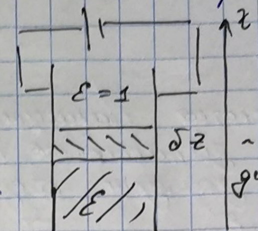
$F_z^{пов} = \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi}$; $F_z = \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi}\Delta S$.

=> Тогда суммарная сила на границе сред:

$F_{z\Sigma} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\vec{E}^2 \Delta S$ ~ должна уравн. силой тяжести:

$mg = \rho V g = \rho \Delta S \cdot hg$ → можно найти h.

Можно из других рассуждений: через изменение энергии.



~ сместится диэл. на δz.

$F_z \delta z = (\delta W_e)_\varphi$

$F_z \delta z = \frac{\varepsilon \vec{E}^2}{8\pi} \Delta S \delta z - \frac{\vec{E}^2}{8\pi}\Delta S \delta z$

$\|$ $F_{z\Sigma}$. — плотн.-ть энергии с ε проникает в ту часть, где ε = 1. ~ энергия добавляет

=> $F_{z\Sigma} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\vec{E}^2 \Delta S$ ~ и т.д. получили то же самое.

Постоянные токи.

Уравнения теории постоянных токов в проводящей среде. Граничные условия для плотности тока. Понятия идеального электрода и идеального изолятора. Формальная аналогия с электростатикой; примеры её использования для решения задач. Понятие сопротивления. Токи в квазилинейных проводниках. Законы Кирхгофа. Закон Джоуля – Ленца.

Ур-я Максвелла в случае статики:

$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\xrightarrow{\partial/\partial t = 0}$ $\text{rot}\,\vec{E} = 0$

$\text{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ $\xrightarrow{\partial/\partial t = 0}$ $\text{div}\,\vec{j} = 0$ — без сторон. сил-в

=> В токостатике нужно решать следующие уравнения:

$\text{rot}\,\vec{E} = 0$, $\text{div}\,\vec{j} = 0$, $\vec{E} = -\nabla\varphi$.

Материальное ур-е связи: $\vec{j} = \underbrace{\sigma \vec{E}}_{\vec{j}_{пр}} + \vec{j}^{ст}$ ~ ток проводимости.

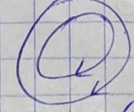
им удобно $\vec{j}^{ст} = \sigma \vec{E}^{ст}$ => $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{ст})$

Отметим:

1) т.к. $\sigma \neq 0$ и $\sigma \neq \infty$ → поле внутри проводника $E \neq 0$ (т.е. σ конечное).

2) $\text{div}\,\vec{j} = 0$ ~ у линий $\vec{j}$ нет ни начала, ни конца → замкн. линии.

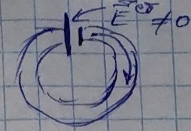
$\int \text{div}\,\vec{j}\, dV = \oint_S \vec{j}\, d\vec{S} = 0$



3) При задании сторонних источников: $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{ст})$

$\frac{\vec{j}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{E}^{ст}$; $\oint_L \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l} = \underbrace{\oint_L \vec{E}\, d\vec{l}}_{=0,\ т.к.\ \vec{E} = -\nabla\varphi} + \underbrace{\oint_L \vec{E}^{ст} d\vec{l}}_{\mathcal{E}^{ст}}$ => $\oint_L \frac{\vec{j}}{\sigma} d\vec{l} = \mathcal{E}^{ст}$

$\mathcal{E}^{ст} \neq 0$ => $\mathcal{E}^{ст}$ не должно быть везде потенциальным, чтобы интеграл не равнялся 0.



Работаем с уравнениями:

$$\vec j = \sigma \vec E + \underbrace{\sigma \vec E^{ст}}_{\vec j^{ст}}$$; учтём, что $\vec E = -\nabla\varphi$

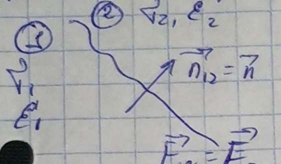
$$\left.\begin{aligned} &\vec j = -\sigma\nabla\varphi + \vec j^{ст} \\ &\operatorname{div}\vec j = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{div}(\sigma\nabla\varphi) = \operatorname{div}\vec j^{ст}$$

Если $\sigma = const \Rightarrow \operatorname{div}\nabla = \Delta$

$\Rightarrow$ $\Delta\varphi = \frac{1}{\sigma}\operatorname{div}\vec j^{ст}$ — аналогичное ур-е Пуассона.

$$\Delta\varphi = \operatorname{div}\vec E^{ст}$$

Если имеются границы раздела сред нужно так же использовать ГУ: будем записывать ГУ, считая что на самой границе сторонние заряды отсутствуют.



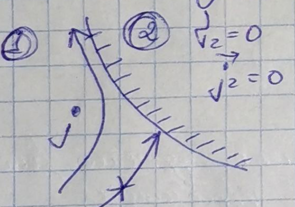
$\vec E_{1\tau} = \frac{\vec j_{1,2}}{\sigma_{1,2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\vec j_{1\tau}}{\sigma_1} = \frac{\vec j_{2\tau}}{\sigma_2}}$ — скачок τ составл. тока.

Если вспомним $\operatorname{div}\vec j = 0$, знаем из прошлого:

$$(\vec n_{12}, \vec j_2 - \vec j_1) = 0 \Rightarrow \boxed{j_{1n} = j_{2n} = j_n}$$

Есть ещё ГУ:
$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = 4\pi\sigma^e \\ &E_{1,2n} = \frac{j_{1,2n}}{\sigma_{1,2}} = \frac{j_n}{\sigma_{1,2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\sigma^e = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right) j_n}$$

Условия на границе с идеальным изолятором.



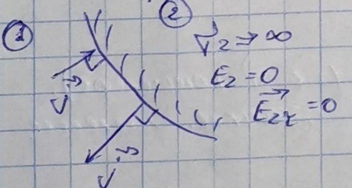
Пусть ② — идеальный изолятор, т.е. в нём $\sigma_2 = 0 \Rightarrow \vec j_2 = 0 \Rightarrow j_{2n} = 0 \Rightarrow \vec j_{1n} = 0$ — из Г.У.

Т.к. $\sigma_1 E_{1n} = 0 \Rightarrow E_{1n} = 0$ — т.е. нормальная компонента поля обращается в ноль.

Линии поля касаются изолятора $\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$

Идеальный электрод = идеальный проводник (в нём $\vec E = 0$) $(\sigma_2 \to \infty)$

Рассмотрим идеальный электрод.



Т.к. в нём $E_2 = 0 \Rightarrow \vec E_{2\tau} = 0$ из ГУ $\to E_{1\tau} = 0$

$\Rightarrow \vec j \perp$ границе, либо втекает, либо утекает.

$j_{1\tau} = \sigma_1 E_{1\tau} = 0$

Формальная аналогия между токостатикой и электростатикой.

Электростатика

$\vec E = -\nabla\varphi$

$\vec D = \varepsilon\vec E$

Токостатика

$\vec E = -\nabla\varphi$

$\vec j = \sigma\vec E$

Уравнения

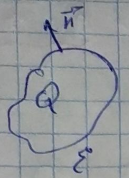
$\operatorname{div}\vec D = 0$

$\operatorname{div}(\varepsilon\nabla\varphi) = 0$

$\operatorname{div}\vec j = 0$

$\operatorname{div}(\sigma\nabla\varphi) = 0$

Граничные усл-я на поверхности идеальных проводников (электродов)



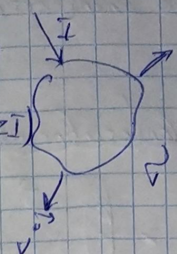
$E_\tau = 0$ ($\varphi = const$)

$\oint_S \vec D\, d\vec S = 4\pi Q$

$\oint_S \varepsilon E_n\, dS = 4\pi Q$

$E_\tau = 0$ ($\varphi = const$)

$\oint_S \sigma E_n\, dS = I$ (т.о. $4\pi Q \rightleftarrows I$)



$\oint_S \underset{\sigma\vec E + \vec j^{ст}}{\vec j}\, d\vec S = 0 \Rightarrow \underbrace{\oint_S \sigma\vec E\, d\vec S}_{\oint_S \sigma E_n\, dS} + \underbrace{\oint_S \vec j^{ст}\, d\vec S}_{-I} = 0$

„−" т.к. ток втекает, а потом растекается

Соответствия, вытекающие из таблицы:

$\vec E \rightleftarrows \vec E$

$\varphi \rightleftarrows \varphi$

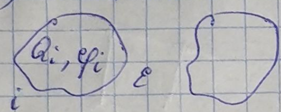
$\vec D \rightleftarrows \vec j$

$\varepsilon \rightleftarrows \sigma$

$4\pi Q \rightleftarrows I$ $\left(Q \rightleftarrows \frac{I}{4\pi}\right)$

Примеры:

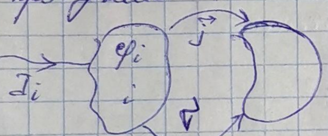
1) Если есть набор проводников



$\varphi_i = \sum_k b_{ik}(\varepsilon) Q_k$

$Q_i = \sum_k C_{ik}(\varepsilon)\varphi_k$

Теперь расс-м конфигурацию электродов, между ними проводник:



$Q \rightleftarrows \frac{I}{4\pi}$

$\varphi_i = \frac{1}{4\pi}\sum_k b_{ik}(\varepsilon\to\sigma) I_k$

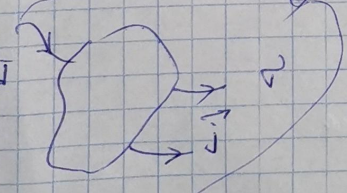
$I_i = 4\pi \sum_k C_{ik}(\varepsilon\to\sigma)\varphi_k$.

Естественно ввести обозначения: $R_{ik} = \frac{1}{4\pi} b_{ik}(\varepsilon\to\sigma)$ ~ по размерности сопротивление

$\varphi_{ik} = \sum_k R_{ik} I_k$ $\Leftarrow$ $G_{ik} = 4\pi C_{ik}(\varepsilon\to\sigma)$ ~ по размерности обр. R_{ik} → проводимость.

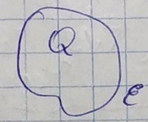
$I_i = \sum_k G_{ik}\varphi_k$

2) Сопротивление проводника между идеальным электродом и ∞ (сопр-я заземления.)



$R = \frac{\varphi - \overset{=0}{\varphi(\infty)}}{I} \to \frac{\varphi}{4\pi Q}$ Это соотв. задаче из электростатики

$\frac{Q}{\varphi} = C(\varepsilon)$ ←



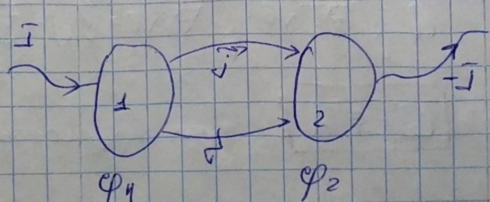
ещё где-то источник.

$C(\varepsilon) = \varepsilon C_0$, где C_0 – значение при $\varepsilon = 1$.

$\Rightarrow R = \frac{\varphi}{I} \to \frac{\varphi}{4\pi Q} = \frac{1}{4\pi C(\varepsilon)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon C_0} \to \frac{1}{4\pi\sigma C_0}$

$R = \frac{1}{4\pi\sigma C_0}$

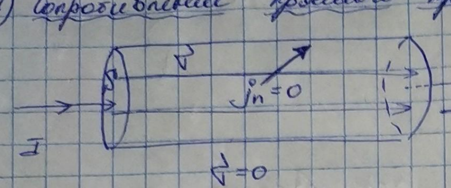
3) Сопротивление проводника между 2мя идеальными проводниками.



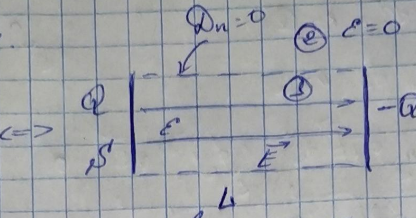
$R = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{I} \to \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{4\pi Q} = \frac{1}{4\pi C(\varepsilon)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon C_0}$

В электростатике: $\Rightarrow \frac{Q}{\varphi_1-\varphi_2} = C(\varepsilon) \Rightarrow \underline{R = \frac{1}{4\pi\lambda C_0}}$

4) Сопротивление прямого провода.



$\Leftrightarrow$



$D_{1n} = D_{2n} = \varepsilon_2 E_{2n}$ $\overset{\shortparallel}{0}$

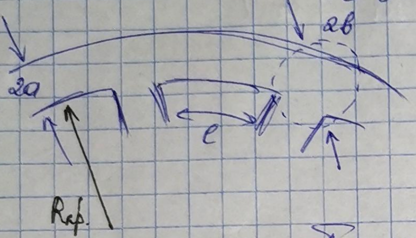
$\Rightarrow D_{1n} = 0$

получим поле в плоском конденсаторе

$$C = \varepsilon \cdot \underbrace{\frac{S}{4\pi L}}_{C_0}$$

$$\underline{R = \frac{1}{4\pi\lambda C_0} = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}}$$

Квазилинейные проводники



Провод с другими припоями, пусть
$a \ll L$, $R_{кр.}$
$b \ll L$, $R_{кр.}$

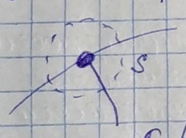
Заменяем на абстракцию:
- квазилинейный проводник
Плотность тока можно рассчитать:

$$j = \frac{I}{S}\ ;\quad I = jS$$

если плотность тока однородна по сечению.

Правила Кирхгофа: для квазилинейных проводников

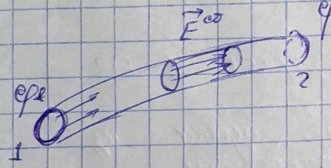
1 закон Кирхгофа: для узла



$$\oint_S \vec j\, d\vec S = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_k I_k = 0}$$

- с учётом втекающих и вытекающих токов

2 закон Кирхгофа:



$$\frac{\vec j}{\lambda} = \vec E + \vec E^{ст}$$

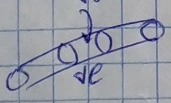
$$\underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \frac{\vec j\, d\vec l}{\lambda}}_{\int_{(1)}^{(2)} \frac{j\, dl}{\lambda}} = \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec E\, d\vec l}_{\varphi_1-\varphi_2} + \underbrace{\int_{(1)}^{(2)} \vec E^{ст}\, d\vec l}_{\mathcal{E}_{12}^{ст}}$$

$$\int_{(1)}^{(2)} \frac{j\, dl}{\lambda} = \int_{(1)}^{(2)} \frac{I}{S}\frac{1}{\lambda}\, dl = I\int_{(1)}^{(2)} \frac{dl}{\lambda S} = IR$$

- сопр. кусочков суммируется.

$$\Rightarrow \boxed{IR = (\varphi_1-\varphi_2) + \mathcal{E}_{12}^{ст}}$$

Энергетические соотношения токостатики.
(закон Джоуля - Ленца.)



$$Q = \int_V \frac{j^2}{\lambda}\, dV = \int_V \frac{j^2}{\lambda}\, dV = \left\{ j = \frac{I}{S} \right\} = \int_V \frac{I^2}{\lambda S^2}\, dV = I^2 \int \frac{\overset{= S\,dl}{dV}}{\lambda S^2} = I^2 \underbrace{\int \frac{dl}{\lambda S}}_{R} = I^2 R$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = I^2 R}$$

- мощность джоулевых потерь.

Магнитостатика

1. Ур-я, описывающие магнитное поле постоянных токов. Векторный потенциал. Уравнения для векторного потенциала в однородной среде и его решение. Закон Био-Савара

Уравнения, описывающие магнитное поле:

$$\operatorname{rot}\vec H = \underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial \vec D}{\partial t}}_{=0} + \frac{4\pi}{c}\vec j \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases}\operatorname{rot}\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec j\\ \operatorname{div}\vec B = 0\\ \vec B = \mu\vec H\end{cases}}$$

Знаем, что $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$

Из $\operatorname{div}\vec B = 0$ введём $\vec B = \operatorname{rot}\vec A$, где $\vec A$ – векторный потенциал

$\vec A$ – определяется с точностью до градиента произвольной скал-й ф-ии.

$$\underset{\text{старый}}{\vec A_{ст}} \to \vec A_{нов} = \vec A_{ст} - \nabla\psi \quad (*)$$

Вычисляем $\vec B = \operatorname{rot}\vec A$ для старого и нового $\vec A$:

$$\operatorname{rot}\vec A_{нов} = \operatorname{rot}\vec A_{ст} - \underbrace{\operatorname{rot}\nabla\psi}_{0} = \operatorname{rot}\vec A_{ст} = \vec B$$

~ в этом состоит калибровочная инвариантность. (или градиентная)

т.е. поле $\vec B$ не меняется относительно преобразования векторного потенциала по $(*)$.

$$\vec H = \frac{1}{\mu}\vec B = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec A \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec A\right) = \frac{4\pi}{c}\vec j,$$ если $\mu = const$ (среда однор-а)

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec A = \frac{4\pi\mu}{c}\vec j$$

исп. формулы для вект. преобр. $\Rightarrow \nabla\operatorname{div}\vec A - \Delta\vec A = \frac{4\pi\mu}{c}\vec j \quad (1)$

~ с помощью калибровочного преобр. можно векторный потенциал подобрать так, что: $\operatorname{div}\vec A = 0$ ~калибровка Кулона.

Проверим, ~~что~~:
$\vec A_{ст}$: $\operatorname{div}\vec A_{ст} \neq 0$

$\vec A_{нов} = \vec A_{ст} - \nabla\psi$, так что $\operatorname{div}\vec A_{нов} = 0$

$\Rightarrow \operatorname{div}(\vec A_{ст} - \nabla\psi) = 0$, учитываем $\operatorname{div}\nabla = \Delta$

$\Rightarrow \Delta\psi = \underbrace{\operatorname{div}\vec A_{ст}}_{\neq 0} \Rightarrow$ ур-е Пуассона ~ решение есть всегда.
$\Rightarrow$ найдём $\psi = \ldots$

и всегда сможем обеспечить условие калибровки. Далее всегда считаем, что это условие выполнено

Из (1): $\Rightarrow \begin{cases}\Delta\vec A = -\frac{4\pi\mu}{c}\vec j\\ \operatorname{div}\vec A = 0\end{cases}$ Ясно, что векторный потенциал определён до какого-то пост. вектора. Но тут аналогично с электрическим потенциалом.

Логично считать $\vec A(\infty) = 0$, будет совершенно однозначно

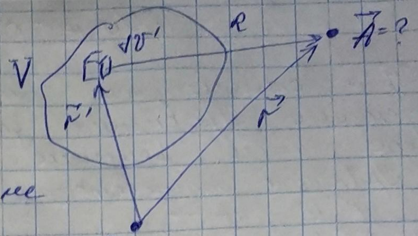
При переходе к декартовой с.к.:

$$\left.\begin{aligned}\Delta A_{x,y,z} &= -\frac{4\pi\mu}{c} j_{x,y,z}\\ \Delta\varphi &= -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho\end{aligned}\right\}$$ математический вид ур-ий совпадает, уже такое ур-е решали.

Запишем решение по аналогии: $A_{x,y,z}(\vec r) = \frac{\mu}{c}\int\limits_V \frac{j_{x,y,z}(\vec r')}{R}\,dV'$

V ~ по всей области, занятой источниками

$\Rightarrow \vec A(\vec r) = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\vec j(\vec r')}{R}\, dV'$, где $R = |\vec r - \vec r'|$

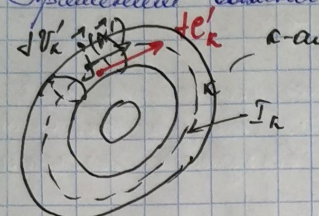


Проверим, что всё хорошо с калибр. Кулона:
$\operatorname{div}\vec A(\vec r) = 0$, т.е. $(\nabla_{\vec r}, \vec A(\vec r)) = 0$
подставляем решение (μ/c = const можно не писать.)

$$\nabla_{\vec r}\cdot\int_V \frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV' = \left\{\begin{array}{l}\text{т.к. интегр. по ' переменной,}\\ \text{а } \nabla_{\vec r}\text{, то вносим под интеграл.}\end{array}\right\} =$$
$$= \int_V \nabla_{\vec r}\cdot\frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r - \vec r'|}dV' = \int_V \nabla_{\vec r}\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\cdot \vec j(\vec r')\,dV' = -\int_V \frac{\vec R\cdot\vec j(\vec r')}{R^3}dV'$$

$$\nabla_{\vec r}\frac1R = -\nabla_{\vec r'}\frac1R = -\frac{\vec R}{R^3}$$

Применим важный искусственный приём.



т.к. все токи замкнуты (в токовой статике), то можно разбить на к элементарных замкнутых трубок, тогда

$$\vec j(\vec r')\underbrace{dV'_k}_{S_k\, dl'_k} = I_k\, d\vec l'_k$$

т.к. слева стоит вектор и справа вектор, перенесём

$$\Rightarrow \nabla_{\vec r}\int_V\frac{\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}dV' = \ldots = (-1)\int_V\frac{\vec R\cdot\vec j(\vec r')\,dV'}{R^3} = \sum_k I_k\oint_{L_k}(-1)\frac{\vec R}{R^3}d\vec l_k = \left\{\begin{array}{l}\text{верное}\\ \text{соотн.}\end{array}\ \frac{\vec R}{R^3} = -\nabla_{\vec r'}\frac1R\right\} =$$

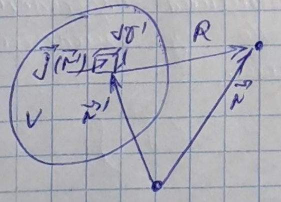
$$= \left\{\begin{array}{l}\text{т.к. интеграл от градиента}\\ \text{по замкнутому контуру} \to \text{равен } 0\end{array}\right\} = 0$$, ч.т.д.

Закон Био-Савара:
Чтобы найти магнитное поле пользуемся простой ф-лой:

$$\vec H = \frac{\vec B}{\mu} = \frac1\mu \operatorname{rot}_{\vec r}\vec A(\vec r) = \frac1\mu\cdot\frac\mu c\int_V \operatorname{rot}_{\vec r}\frac{\vec j(\vec r')}{R}dV' = \left\{\begin{array}{l}\text{т.к. rot действ. по } \vec r\text{, то на}\\ \vec j(\vec r') \text{ действ. не будет}\end{array}\right\} =$$
$$= \frac1c\int_V\Big[\underbrace{\nabla_{\vec r}\frac1R}_{-\frac{\vec R}{R^3}}, \vec j(\vec r')\Big]dV' = \frac1c\int_V\frac{[\vec j(\vec r'),\vec R]}{R^3}dV'$$

$\Rightarrow$ Отдельный вклад элементарных токов: $d\vec H = \frac1c\frac{[\vec j(\vec r'),\vec R]}{R^3}dV'$

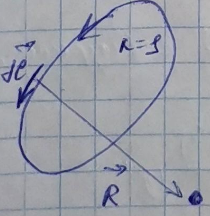
Геометрический смысл:



иногда встречаются квазилинейные проводники. Рассмотрим следствие для них., пользуемся преобр-м:

$$\vec j\, dV'_k = I_k\, d\vec l'_k$$ — когда есть квазилин. замкнутые контуры.

$$\vec A(\vec r) = \frac\mu c\int_V\frac{\vec j(\vec r')}{R}dV' = \frac\mu c\sum_k I_k\oint_{L_k}\frac{d\vec l'_k}{R}$$

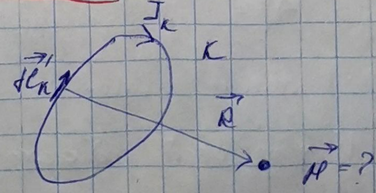


Для самого магнитного поля:

$$\vec H = \frac1c\int_V\frac{[\vec j(\vec r'),\vec R]}{R^3}dV' = \frac1c\sum_k I_k\oint_{L_k}\frac{[d\vec l'_k,\vec R]}{R^3}$$

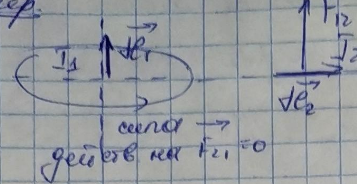
вклад от элемента контура:

$$dH_k = \frac1c I_k\frac{[d\vec l_k,\vec R]}{R^3}$$



Физический смысл это всё имеет только после интегрирования, иначе можно прийти к парадоксам.

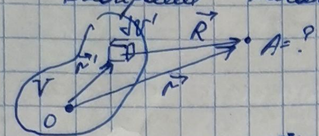
Пример:



– нарушен 3 ЗН., но цепь на самом деле должна быть замкн.

2. Поле произвольной системы токов на большом расстоянии от неё (разложение по мультиполям). Магнитный дипольный момент. Поле магнитного диполя.

Выбираем начало координат внутри источников или в окрестности:



$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,')\frac{1}{R}\,dV' \ominus$$ как в электростатике, разложение $1/R$

$r >> \max|\vec{r}\,'|$ $\ominus \frac{\mu}{c}\int \vec{j}(\vec{r}\,')\cdot\left\{\frac{1}{r} + x'_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec{r}\,'=0} + \ldots\right\}dV'$

вспомним: $\left(\frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\frac{1}{R}\right)\Big|_{\vec{r}\,'=0} = \frac{x_\alpha}{r^3}$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\mu}{cr}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,')\,dV'}_{\vec{A}_0 \sim \text{опис. магн. монополь}} + \underbrace{\frac{\mu}{c}\frac{1}{r^3}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,')\cdot \underbrace{x'_\alpha x_\alpha}_{(\vec{r},\vec{r}\,')}\,dV'}_{\vec{A}_1 \sim \text{опис. магн. диполь}} + \ldots$$

Убедимся в этом:

$\vec{A}_0 \overset{?}{=} 0 \rightarrow \int_V \vec{j}(\vec{r}\,')\,dV' \overset{?}{=} 0$ – достаточно убедится для проекций j_x, j_y или j_z

например j_x:

$$\operatorname{div}(x\vec{j}) = x\operatorname{div}\vec{j} + (\underbrace{\nabla x}_{\vec{x}_0}, \vec{j}) = x\operatorname{div}\vec{j} + j_x$$

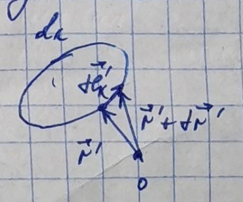
Вычисляем интеграл по объёму:

$$\int_V j_x\,dV = \int_V \{\operatorname{div}(x\vec{j}) - x\operatorname{div}\vec{j}\}\,dV = \{\text{по т. О.-Г.}\} = \underbrace{\oint_{S_R\to\infty} x\vec{j}\,d\vec{S}}_{=0} - \int x\operatorname{div}\vec{j}\,dV$$

$\Rightarrow \int_V j_x\,dV = -\int x\operatorname{div}\vec{j}\,dV$ т.к. токи замкнуты в пр-ве.

Для ограниченных в пр-ве токов, получили: $\int_V \vec{j}\,dV = \int_V \vec{r}\operatorname{div}\vec{j}\,dV$

Но в статике $\operatorname{div}\vec{j} = 0 \Rightarrow \int_V \vec{j}\,dV = 0 \Rightarrow \vec{A}_0 = 0$, ч.т.д., что логично, ведь магнитных зарядов нет.



Смотрим $\vec{A}_1$:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu}{cr^3}\int_V \vec{j}(\vec{r}\,')(\vec{r},\vec{r}\,')\,dV' = \frac{\mu}{cr^3}\sum_k I_k \oint_{L_k}(\vec{r},\vec{r}\,')\underbrace{d\vec{e}_k}_{d\vec{r}\,'}$$

исп-м: $\vec{j}\,dV' = I_k\,d\vec{e}_k$ + из рисунка $d\vec{r}\,' = d\vec{e}_k$.

Запишем вспомогательные математ. соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &d_{\vec{r}\,'}\{(\vec{r},\vec{r}\,')\vec{r}\,'\} = (\vec{r}, d\vec{r}\,')\vec{r}\,' + (\vec{r},\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' \\ &[\vec{r},[\vec{r}\,', d\vec{r}\,']] = (\vec{r}, d\vec{r}\,')\vec{r}\,' - (\vec{r},\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,' \end{aligned}\right\} -$$

$$d_{\vec{r}\,'}\{(\vec{r},\vec{r}\,')\vec{r}\,'\} - [\vec{r},[\vec{r}\,', d\vec{r}\,']] = 2(\vec{r},\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,'$$

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu}{cr^3}\,\frac{1}{2}\sum_k I_k \oint_{L_k} \{d\vec{r}'(\vec{r},\vec{r}')\vec{r}'\} + [[\vec{r}', d\vec{r}'], \vec{r}]\} \ominus$$

$\oint_{L_k} d\vec{r}' (\ldots) = 0$ т.к. интеграл по замкн. контуру от полного дифф-ла $=0$

$$\ominus \frac{\mu}{cr^3}\,\frac{1}{2}\sum_k I_k \oint_{L_k} [[\vec{r}', \underbrace{d\vec{r}'}_{d\vec{e}_k'}], \vec{r}] = \frac{\mu}{cr^3}\,\frac{1}{2}\int_V [[\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')], \vec{r}]\, dV' \ominus$$

возвращаемся обратно к $\vec{j}\,dV' = I_k\, d\vec{e}_k'$

$$\ominus \frac{[\frac{\mu}{2c}\int_V [\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')]\,dV', \vec{r}]}{r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{A}_1 = \frac{[\vec{p}^m, \vec{r}]}{r^3}, \text{ где } \vec{p}^m = \frac{\mu}{2c}\int_V [\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')]\,dV'$$

~ вектор магнитного дип-ого момента

Напряжённость поля $\vec{H}$ магнитного диполя:

$\vec{A} = \frac{[\vec{p}^m, \vec{r}]}{r^3}$ ~ спр-во, если находимся на конечном расстоянии от точечного диполя.

$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = -\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,[\underbrace{\vec{p}^m}_{\vec{a}=\mathrm{const}}, \underbrace{\nabla \tfrac{1}{r}}_{\vec{b}}]$$

вспоминаем формулу: $\mathrm{rot}[\vec{a},\vec{b}] = \vec{a}\,\mathrm{div}\,\vec{b} - \vec{b}\,\underbrace{\mathrm{div}\,\vec{a}}_{=0} + (\vec{b},\nabla)\vec{a} - (\vec{a},\nabla)\vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{H} = -\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,[\vec{p}^m, \nabla\tfrac{1}{r}] = -\frac{1}{\mu}\{\vec{p}^m \underbrace{\mathrm{div}\,\nabla\tfrac{1}{r}}_{\Delta\frac{1}{r}=0} - (\vec{p}^m,\nabla)\nabla\tfrac{1}{r}\} =$$

$\Delta\frac{1}{r}=0$ ~ при $r \neq 0$ ф-а Грина.

$$= \frac{1}{\mu}(\vec{p}^m,\nabla)\nabla\frac{1}{r} \overset{?}{=} -\frac{1}{\mu}\nabla(\vec{p}^m, \frac{\vec{r}}{r^3})$$

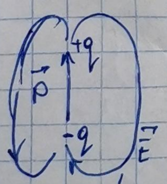
проверка: $-\nabla(\vec{p}^m, \frac{\vec{r}}{r^3}) = \nabla(\vec{p}^m, \nabla\frac{1}{r}) = [\vec{p}^m, \underbrace{\mathrm{rot}\,\nabla\tfrac{1}{r}}_{=0}] + [\nabla\tfrac{1}{r}, \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{p}^m}_{=0}] +$, т.к. $\vec{p}^m = \mathrm{const}$

$$+ \underbrace{(\nabla\tfrac{1}{r},\nabla)\vec{p}^m}_{=0} + (\vec{p}^m,\nabla)\nabla\frac{1}{r}, \text{ ч.т.д.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{H} = -\nabla\frac{(\vec{p}^m, \vec{r})}{\mu r^3}}$$

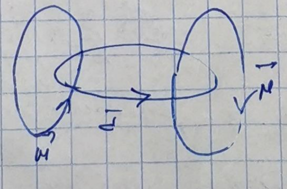
3. Скалярный потенциал магнитного поля. Магнитный листок как эквивалент линейного контура с током. Аналогия между магнитостатическими и электростатическими полями как проявление принципа двойственности. Конструктивные и прямые методы решения краевых задач магнитостатики (метод изображений и метод заполнения магнетиком; шар в однородном магнитном поле, магнитное экранирование.

Аналогия между дипольной электростатикой и магнитостатикой, как частный случай принципа двойственности:

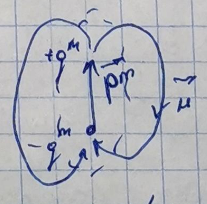


$\vec{E} = -\nabla\varphi^e$

$\varphi^e = \frac{(\vec{p}^e, \vec{r})}{\varepsilon r^3}$



<=>



Перейдём заменой:
$\vec{E} \to \vec{H}$
$\varepsilon \to \mu$
$\vec{p}^e \to \vec{p}^m$
$\varphi^e \to \varphi^m$

$\Rightarrow \vec{H} = -\nabla\varphi^m, \quad \varphi^m = \frac{(\vec{p}^m, \vec{r})}{\mu r^3}$

Если смотреть только на область вне, наблюдатель не знает, чем создано H

Можно получить обратно заменой: $\vec{H} \to -\vec{E}$; $\mu \to \varepsilon$; $\vec{p}^m \to -\vec{p}^e$; $\varphi^m \to -\varphi^e$

Магнитный листок как эквивалент линейного контура с током.
~ „двойной магнитный слой"

Рассм-м линейный контур с током, и наложим на него пов-ть → сетку.

→ На смежных участках ток компенсируется => ток течёт только по ободу конт. в целом.

Для малого элемента (элементарный дип. момент): $d\vec{p}^{\,m} = \frac{\mu}{c} I\, dS \cdot \vec{n}$

Магнитный дип. момент в ед. площади → поверхностный магнитный момент:

$$\vec{p}^{\,m\,пов} = \frac{d\vec{p}^{\,m}}{dS} = \frac{\mu}{c} I \vec{n}$$ ~ аналог эл-го двойного слоя.

Воспользуемся принципом перестановочной двойственности:

$$\varphi^e = \frac{1}{\varepsilon}\int_S \frac{(\vec{p}^{\,e\,пов}, \vec{R})}{R^3}\, dS' \quad => \quad \varphi^m = \frac{1}{\mu}\int_S \frac{(\vec{p}^{\,m\,пов}, \vec{R})}{R^3}\, dS'$$

Для скачка потенциала: $\varphi_2^e - \varphi_1^e = \frac{4\pi}{\varepsilon}(\vec{n}_{12}, \vec{p}^{\,e\,пов})$

$$=> \varphi_2^m - \varphi_1^m = \frac{4\pi}{\mu}(\vec{n}_{12}, \vec{p}^{\,m\,пов})$$

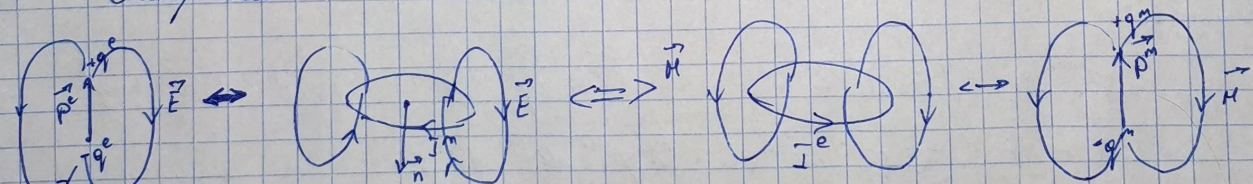
Продолжение аналогии между электростатикой и магнитостатикой (на языке уравнений).

Запишем для областей вне источников.

Электростатика	Магнитостатика
$\operatorname{rot}\vec{E} = 0 \quad (\vec{E} = -\nabla\varphi^e)$	$\operatorname{rot}\vec{H} = 0$
$\operatorname{div}\vec{D} = 0$	$\operatorname{div}\vec{B} = 0$
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$	$\vec{B} = \mu\vec{H}$
ГУ:	
E_τ - непр.	H_τ - непр.
D_n - непр.	B_n ~ непр.

Далее аналогию можно продолжить, вводя фиктивные магнитные токи.

Электростатика | Магнитостатика



$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$, $\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho^e$

$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,m}$, $\operatorname{div}\vec{D} = 0$

$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}^{\,e}$, $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

$\operatorname{rot}\vec{H} = 0$, $\operatorname{div}\vec{B} = 4\pi\rho^m$

$$=> \boxed{\vec{p}^{\,e} = -\frac{\varepsilon}{2c}\int_V [\vec{r}\,', \vec{j}^{\,m}(\vec{r}\,')]\, dV'} \qquad \boxed{\vec{p}^{\,m} = \frac{\mu}{2c}\int_V [\vec{r}\,', \vec{j}^{\,e}(\vec{r}\,')]\, dV'}$$ ~ из принципа перест. двойств-ти

И возникает вопрос → нельзя ли в электростатике создать то же поле $\vec{E}$ с помощью кольцевого тока. Из принципа перестановочной двойственности → можно, вводя магнитные токи.

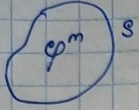
Т.е. чтобы перейти слева направо переходят заменой

↳ $\vec{E} \to \vec{H}$, $\vec{p}^{\,e} \to \vec{p}^{\,m}$, $\varepsilon \to \mu$, $\vec{j}^{\,m} \to -\vec{j}^{\,e}$

наоборот: $\vec H \to -\vec E$, $\vec p^m \to -\vec p^e$, $\mu \to \varepsilon$, $\vec j^e \to \vec j^m$

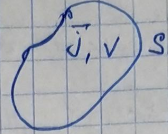
* Единственность решения задачи магнитостатики.

Знаем $\vec H = -\nabla\varphi^m$



Поэтому на S можем задать: $S: \varphi|_S$, или $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S$.

более сложно, если есть токи.



Тогда решение единственно, если на S задается:
$$S: \vec A_\tau, \text{ либо } \vec B_\tau \longleftrightarrow \frac{\partial \vec A}{\partial n}\Big|_S.$$

Док-во аналогично электростатике:
Если есть A_1, H_1 и $\vec A_2, \vec H_2$ зададим разностное поле: $\vec A_3 = \vec A_1 - \vec A_2$ ($\vec H_3 = \vec H_1 - \vec H_2$), $\vec j_3 = 0$

$S: \vec A_{3\tau} = 0$, либо $\vec B_{3\tau} = 0$; $\mu \vec H_{3\tau} = 0$, $H_{3\tau} = 0$

т.е. док-м от противного:

$$\operatorname{div}[\vec A_3, \vec H_3] = \vec H_3 \underbrace{\operatorname{rot}\vec A_3}_{\vec B_3 = \mu \vec H_3} - \vec A_3 \underbrace{\operatorname{rot}\vec H_3}_{\frac{4\pi}{c}\vec j_3 = 0}, \quad \text{т.к. } \vec j_3 = 0$$

далее интегрируем по $\int_V \dots dV$

$$\oint_S [\vec A_3, \vec H_3]\, \underbrace{d\vec S}_{\vec n\, dS} = \int_V \mu \vec H_3^2\, dV$$ — вклад дают только τ-компоненты

$$\oint_S [\vec A_{3\tau}, \underbrace{\vec H_{3\tau}}_{0}]\, \vec n\, dS \Rightarrow \int_V \mu \vec H_3^2\, dV = 0$$ — это возможно если $\vec H_3 = 0 \Rightarrow \vec H_1 = \vec H_2$, т.е. решение единственно

Теорема взаимности в магнитостатике.

Вводятся фиктивные магнитные заряды. Всё аналогично с электростатикой, только формулируем для магн. зарядов:

$$\int_V \rho^{m(1)}\varphi^{m(2)}\, dV = \int_V \rho^{m(2)}\varphi^{m(1)}\, dV; \quad \rho^m = -\operatorname{div}\vec M$$

перепишем:

$$\int_V \rho^{m(1)}\varphi^{m(2)}\, dV = -\int_V \operatorname{div}\vec M^{(1)}\cdot\varphi^{m(2)}\, dV = -\int_V \{\operatorname{div}(\varphi^{m(2)}\vec M^{(1)}) - (\nabla\varphi^{m(2)}, \vec M^{(1)})\}\, dV =$$

$$= \{\text{по т. О.-Г.}\} = -\oint_{S_{R\to\infty}} \varphi^{m(2)}\vec M^{(1)}\, d\vec S + \int_V \nabla\varphi^{m(2)}\vec M^{(1)}\, dV \ominus$$

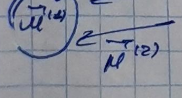
на бесконечности $\vec M^{(1)} = 0$ — нет в бесконечности намагн. тел. и $\nabla\varphi^{m(2)} = -\vec H^{(2)}$

$$\ominus -\int_V \vec M^{(1)}\vec H^{(2)}\, dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_V \vec M^{(1)}\vec H^{(2)}\, dV = \int_V \vec M^{(2)}\vec H^{(1)}\, dV}$$ — „полевая" формулировка теорема взаимности.

Некоторые следствия:

$\int_V \vec M^{(1)}\vec H^{(2)}\, dV$ пусть размер тела $\to 0$ в т. (1), тогда поле можно считать постоянным в этой точке.



$$\Rightarrow \int_V \vec M^{(1)}\vec H^{(2)}\, dV = \vec H^{(2)}(1)\int_V \vec M^{(1)}\, dV = \vec p^{m(1)}\vec H^{(2)}(1)$$ — в точке

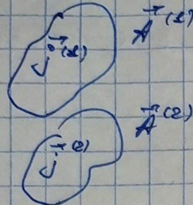
Если повторим такие же рассуждения для правой части:

$$\Rightarrow \boxed{\vec p^{\,m(1)} \vec H^{(2)}(1) = \vec p^{\,m(2)} \vec H^{(1)}(2)}$$

Но сразу получается из принципа двойственности:

$$\boxed{\vec p^{\,e(1)} \vec E^{(2)}(1) = \vec p^{\,e(2)} \vec E^{(1)}(2)}$$ ← (можно вывести раньше)

Другая формулировка теоремы взаимности:

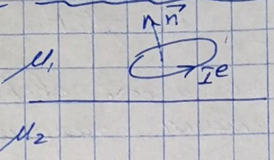


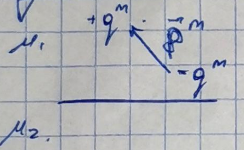
$$\boxed{\int_V \vec j^{(1)} \vec A^{(2)} dV = \int_V \vec j^{(2)} \vec A^{(1)} dV}$$ ← док-во в лекциях.

Методы решения краевых задач магнитостатики:

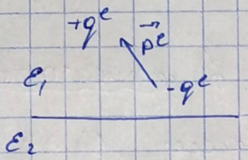
1. Метод изображений

Найти поле, но виток с током можно заменить магнитным диполем.





<=>



← заменяем по принципу двойственности.

=> Исп. метод изображений для электростатики и по принципу двойственности найти решение.

2. Заполнение магнетиком (всё аналогично электростатике)

а) Заполнение вдоль силовых трубок магнитного поля.

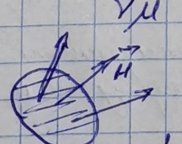
$\nabla\mu \perp \vec H, \vec B$ => Сохраняется структура $\vec H$, док-во не требуется, т.к. всё переводится из электростатики

Если при таком заполнении сохр. фикс. токи, то сохраняется не только структура $\vec H$, но и знач. $\vec H$

$$\oint_L \vec H d\vec l = \frac{4\pi}{c} I$$

б) Заполнение вдоль (магнитных) эквипотенциалей

$\nabla\mu \parallel \vec H, \vec B$ → сохраняется структура $\vec B$



$$\int_S \vec B d\vec S = \Phi$$

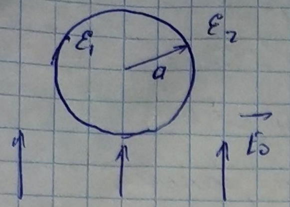
замкн. контур

Если данное заполнение рассматр. при фикс. магнитных потоков, то сохр. не только структура $\vec B$, но и значение.

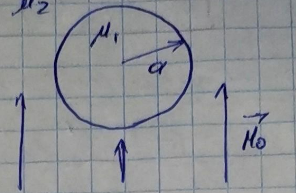
3. О методе разделения переменных: ограничимся одним примером → шар

получили: $$\vec p^{\,e} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \cdot \varepsilon_2 a^3 \vec E_0$$

решение можно получить заменой:



$\vec E_0 \to \vec H_0$
$\varepsilon_{1,2} \to \mu_{1,2}$
$E_{1,2} \to H_{1,2}$
$\vec p^{\,e} \to \vec p^{\,m}$

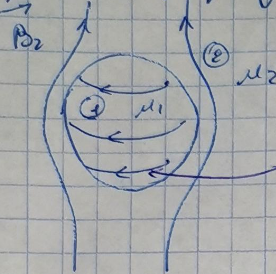


$$\Rightarrow \vec p^{\,m} = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+2\mu_2}\,\mu_2 a^3 \vec H_0$$

Т.е., чтобы шар был сверхпроводящим нужно положить $\mu_1 = 0$ (см. ниже), тогда:

$$\vec p^{\,m} = -\frac{1}{2}\mu_2 a^3 \vec H_0$$

Вопрос о сверхпроводимости:

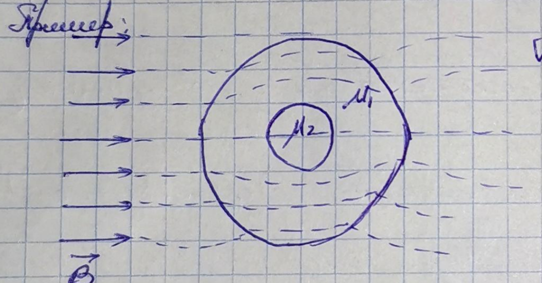


$\Rightarrow B_{2n} = 0$
$\parallel$
$B_{1n} = \mu_1 H_{1n} \Rightarrow \mu_1 = 0$

это и есть сверхпроводящие токи, возникают из-за скачка тангенц. компонент $\vec H$.

Замечание об экранировании в магнитостатике.

Пример:

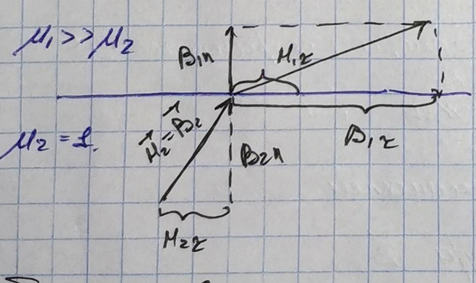


делаем $\mu_1 >> \mu_2$

Силовые линии преломляются и поэтому через центр пройдёт меньше линий.

Оценочно: $\frac{|\vec B_{int}|}{|\vec B_0|} \sim \frac{\mu_2}{\mu_1} \ll 1$.

Качественно можно объяснить через граничные условия:



4. Поля, создаваемые намагниченными телами. Замена намагниченности эквивалентными электрическими токами или магнитными зарядами

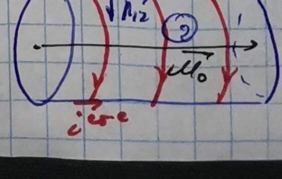
$\vec M^{ст} \neq 0$ ст – сторонние.

$\vec j^{\,e} = c\,\mathrm{rot}\,\vec M \Rightarrow \vec j^{\,ст\,e} = c \cdot \mathrm{rot}\,\vec M^{ст}$

$\vec i^{\,e} = c\,[\vec n_{12}, \vec M_2 - \vec M_1]$ – как граничное условие.

Пусть для определённости имеем цилиндр; 1
и пусть внутри есть вектор намагниченности:

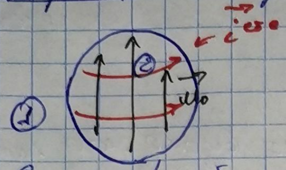
$\vec M_2 = \vec M^{ст} \equiv \vec M_0$



$\vec{M}_1 = 0 \Rightarrow \vec{i}^{\,ст\,0} = c[\vec{n}_{12}, \underbrace{\vec{M}_2^{\,ст}}_{\vec{M}_0} - \underbrace{\vec{M}_1^{\,ст}}_{0}] = c[\vec{n}_{12}, \vec{M}_0]$ => ток обтекает соленоид.

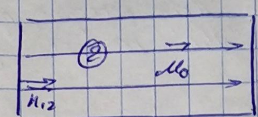
т.е. это сторонний намагн. ток, который можно заменить исходную задачу.

Например: с шаром, если провести всё аналогично



Есть и другой способ, он связан с поляризацией, из принципа двойственности:

$$\rho^e = -\operatorname{div}\vec{P} \to \rho^m = -\operatorname{div}\vec{M}$$

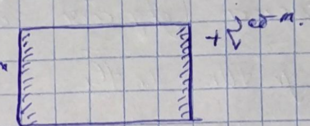


а для дивергенции знаем хорошее граничное условие:

$$\sigma^m = -(\vec{n}_{12}, \vec{M}_2 - \vec{M}_1)$$

$$\sigma^{ст.m} = -(\vec{n}_{12}, \underbrace{\vec{M}_2}_{\vec{M}_0} - \vec{M}_1) = -(\vec{n}_{12}, \vec{M}_0)$$

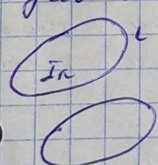
=> $-\sigma^{ст\,m}$



=> И далее рассчитывать поле от магнитных зарядов, или эл-их, потом заменять по принципу двойственности.

5. Поле системы квазилинейных токов. Коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции.

Пусть есть система витков, посчитаем поток.



$$\Phi = \int_S \vec{B}\,d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot}\vec{A}\,d\vec{S} = \oint_l \vec{A}\,d\vec{l} \; ; \quad \vec{A} = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\,dV'$$

$\vec{j}\,dV' = I\,d\vec{l}\,'$ — замена перехода к виткам с током

$\vec{A} = \frac{\mu}{c}\sum_m I_m \oint_{l_m} \frac{d\vec{l}_m}{R}$ — дальше ' (штрих) не пишем, интегр. по контуру.

$$\vec{A} = \frac{\mu}{c}\sum_m I_m \oint_{l_m} \frac{d\vec{l}\,'_m}{R} = \sum_m \vec{A}_m \Rightarrow \boxed{\vec{A}_m = \frac{\mu}{c} I_m \oint_{l_m} \frac{d\vec{l}_m}{R}}$$ — отдельный вклад парциальных витков.

Поток через k-ый виток:

$$\Phi_k = \oint_{l_k} \vec{A}\,d\vec{l}_k = \oint_{l_k} \sum_m \vec{A}_m\,d\vec{l}_k = \sum_m \underbrace{\oint_{l_k} \vec{A}_m\,d\vec{l}_k}_{\Phi_{km}}$$ — магнитный поток через k-ый виток, созданный полями витков m.

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_k = \sum_m \Phi_{km}}$$

$$\Rightarrow \Phi_k = \sum_m \oint_{l_k} \vec{A}_m\,d\vec{l}_k = \sum_m \oint_{l_k} \left\{ \frac{\mu I_m}{c} \oint_{l_m} \frac{d\vec{l}_m}{R} \right\} d\vec{l}_k$$

$$\Rightarrow \Phi_k = \frac{1}{c} \sum_m I_m\, \mu \oint_{l_k}\oint_{l_m} \frac{d\vec{l}_k\, d\vec{l}_m}{R},$$

$\Phi_{km} \sim I_m$ — можно ввести коэф-т пропорциональности.

$\Phi_{km} = \frac{1}{c} L_{km} I_m$, если $k \neq m$ L_{km} – коэф-т взаимной индукции

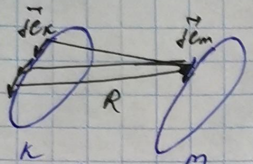
$$\Rightarrow \boxed{L_{km} = \frac{c\,\Phi_{km}}{I_m}}$$

если $k = m$ L_{kk} ~ коэф-т самоиндукции ($L_{kk} \equiv L_k$)

$$\Rightarrow \boxed{L_k = \frac{c\,\Phi_{kk}}{I_k}} \longrightarrow \text{это определения}$$

$$\Rightarrow \Phi_k = \sum_m \Phi_{km} = \frac{1}{c} \sum_m L_{km} I_m$$

$$\Rightarrow \left\{ L_{km} = \mu \oint_{\ell_k} \oint_{\ell_m} \frac{d\vec{\ell}_k\, d\vec{\ell}_m}{R} \right\}$$ – из неё видно, что $L_{km} = L_{mk}$

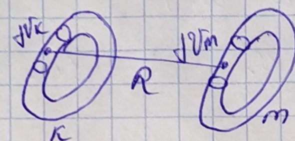


например при фикс. $d\ell_m$ считаем по различным $d\ell_k$, потом сдвигаем $d\ell_m$ и повторяем процедуру.

Но если взять L_{kk}, то $R \to 0$ и интеграл расходится. Нужна другая модель.

$\vec{j}_k\, dV_k = I_k\, d\vec{\ell}_k \Rightarrow d\vec{\ell}_k = \ldots$

$\vec{j}_m\, dV_m = I_m\, d\vec{\ell}_m \Rightarrow d\vec{\ell}_m = \ldots$



$$\Rightarrow L_{km} = \frac{\mu}{I_k I_m} \int_{V_k} \int_{V_m} \frac{\vec{j}_k\, \vec{j}_m}{R}\, dV_k\, dV_m$$ → в криволин. с.к. из них вылазит R → и уже при подсчёте L_{kk} $R \to 0$ сократится.

6. Энергия и силы в магнитном поле. Представление энергии в виде интеграла по области источников. Энергия системы квазилинейных токов. Сила, действующая на элемент квазилинейного контура с током. Сила и вращающий момент, действующие на магнитный диполь. Плотность объёмной силы в среде.

Представление энергии м.п. в виде интегралов по объёму.

$$W^m = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{H}\vec{B}\, dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \vec{H} \operatorname{rot}\vec{A}\, dV = \frac{1}{8\pi} \int_V \{ \underbrace{\operatorname{div}[\vec{A},\vec{H}]}_{\vec{H}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{H}} + \vec{A}\underbrace{\operatorname{rot}\vec{H}}_{\frac{4\pi}{c}\vec{j}} \} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \oint_{S_{R\to\infty}} [\vec{A},\vec{H}]\, d\vec{S} + \frac{1}{2c} \int_V \vec{j}\vec{A}\, dV$$

если брать инт. от бесконечного объёма, всё равно интегрирование будет там, где есть источники.

Можно разложить по мультиполям: (в беск. точке наблюдения).

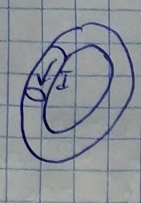
$$W^m = \underbrace{\frac{1}{8\pi} \oint_{S_{R\to\infty}} [\underset{\sim\frac{1}{R^2}}{\vec{A}}, \underset{\sim\frac{1}{R^3}}{\vec{H}}]\, d\vec{S}}_{=0} + \frac{1}{2c} \int_V \vec{j}\vec{A}\, dV.$$

$$\Rightarrow \boxed{W^m = \frac{1}{2c} \int_V \vec{j}(\vec{r})\, \vec{A}(\vec{r})\, dV}$$

Ответить на вопрос, где размазана энергия, как и в электростатике, в магнитостатике нельзя.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{c} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{R} dV'$$, $\vec{j}$ – одно и тоже, но в разных точках объёма

$$W^m = \frac{\mu}{2c^2} \iint_{VV} \frac{\vec{j}(\vec{r})\, \vec{j}(\vec{r}\,')}{R}\, dV\, dV'$$



$$W^m = \frac{I^2}{2c^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{I^2}\iint_{VV} \frac{\vec j(\vec r)\,\vec j(\vec r')}{R}\, dV\, dV'}_{}$$

L — коэфф-т самоиндукции проводника.

$$\Rightarrow \boxed{W^m = \frac{LI^2}{2c^2}}$$

Энергия системы квазилинейных контуров

Полная энергия:

$$\boxed{W^m = \frac{1}{2c}\int_V \vec j \vec A\, dV = \frac{1}{2c}\sum_k I_k \oint_{L_k} \vec A\, d\vec l_k = \frac{1}{2c}\sum_k I_k \Phi_k}$$

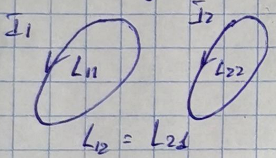
$$\vec j\, dV = I_k\, d\vec l_k$$

Если у нас мн-во витков: $\Phi_k = \sum_m \Phi_{km}$ — магнитный поток от всех m_k контуров $+ \Phi_{kk}$ собств. магн. поток.

$$\Rightarrow W^m = \frac{1}{2c}\sum_k\sum_m I_k \Phi_{km} = \left\{\Phi_{km} = \frac{1}{c} L_{km} I_m\right\} = \frac{1}{2c^2}\sum_k\sum_m L_{km} I_k I_m$$

Собственная энергия и энергия взаимодействия с фиксированными токами.

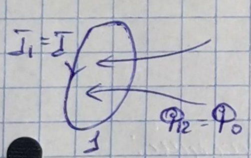
— фикс-ми — имеется ввиду, что после приведения во взаимодействие токи в контурах не изменяются.



$$\Rightarrow W^m = \frac{1}{2c^2}\left(L_{11} I_1^2 + L_{22} I_2^2 + \underbrace{L_{12} I_1 I_2 + L_{21} I_2 I_1}_{\text{энергия взаимод.}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W^m_{вз} = \frac{1}{c^2} L_{12} I_1 I_2}$$

заметим $\frac{1}{c} L_{12} I_2 = \Phi_{12}$, перепишем: $\boxed{W^m_{вз} = \frac{1}{c} I_1 \Phi_{12}}$



Пусть есть виток 1, поток от 2го (где-то из бесконечности) — внешний (обозначим 0)

Тогда удобно, если знаем поток:

$$\boxed{W^m_{вз} = \frac{1}{c} I \Phi_0}$$

Φ_0 — не содержит собственного потока!

Замечания о потоке м.п. через контур, обр-й идеальным квазилинейным проводником.

$$\vec j = \sigma(\vec E + \vec E^{ст}) \Rightarrow \frac{\vec j}{\sigma} = \vec E + \vec E^{ст}$$

$$\underbrace{\oint_L \frac{\vec j}{\sigma} d\vec l}_{\int_L \frac{I}{\sigma S} dl} = \underbrace{\oint_L \vec E\, d\vec l}_{-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec B\, d\vec S} + \underbrace{\oint_L \vec E^{ст} d\vec l}_{\mathcal{E}^{ст}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{E}^{ст}$$

$$\Rightarrow IR = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{E}^{ст}$$

В случае идеального провод. $R = 0$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathcal{E}^{ст} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}^{ind} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

тогда $\mathcal{E}^{ind} + \mathcal{E}^{ст} = 0$

Рассмотрим частные случаи:

а) $\mathcal{E}^{ст}=0$

$\Rightarrow \mathcal{E}^{ind} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Phi = const$, где

$\Phi = \Phi_{собств} + \Phi_0$ Если крутим виток $\to \Phi_0$ меняется, тогда меняется и $\Phi_{собств}$, чтобы $\Phi = const$, а $\Phi_{собств} \sim I \Rightarrow$ меняется собств. ток в контуре.

б) $\mathcal{E}^{ст} \neq 0$, и требуем $I = const$

$\Rightarrow \mathcal{E}^{ст} = -\mathcal{E}^{ind} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_I = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}\right)_I \Rightarrow \mathcal{E}^{ст}$ должно меняться по такому закону

при пост. токе

в) Посчитаем работу:

Δt, ΔP, рассмотрим когда $I = const$.

$dq = I dt \Leftrightarrow \Delta q = I \Delta t \Rightarrow \Delta P = \int \mathcal{E}^{ст} dq = \int \mathcal{E}^{ст} I dt = I \int \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}\right)_I dt = \frac{1}{c} I \underbrace{(\Delta \Phi_0)_I}_{(\Delta\Phi)_I}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta P = \frac{1}{c} I (\Delta \Phi)_I}$$

Энергетический метод расчета обобщ. сил. в магнитостатике.

Аналогия с электростатикой

$$\underbrace{F_\alpha \delta \xi_\alpha}_{\vec{F}\delta\vec{\xi}} = -\delta(W^m - P)$$

1) Если $P = 0 \Rightarrow F_\alpha \delta \xi_\alpha = -(\delta W^m)_\Phi$

$$F_\alpha = -\left(\frac{\partial W^m}{\partial \xi_\alpha}\right)_\Phi$$

2) I-фикс., $P \neq 0$ (витки с фиксированными токами)

$F_\alpha \delta \xi_\alpha = -\delta (W^m - P)_I = -(\delta W^m)_I + (\delta P)_I$

смотрим на прошлые формулы, только теперь для вариаций:

$(\delta P)_I = \frac{1}{c}\sum_k I_k (\delta \Phi_k)_I$

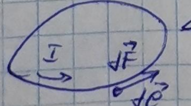
Из $W^m = \frac{1}{2c}\sum_k I_k \Phi_k \Rightarrow (\delta W^m)_I = \frac{1}{2c}\sum_k I_k (\delta\Phi_k)_I$

$\Rightarrow F_\alpha \delta\xi_\alpha = -\frac{1}{2c}\sum_k I_k (\delta\Phi_k)_I + \frac{1}{c}\sum_k I_k(\delta\Phi_k)_I = \frac{1}{2c}\sum_k I_k(\delta\Phi_k)_I = (\delta W^m)_I$

$\Rightarrow F_\alpha \delta\xi_\alpha = (\delta W^m)_I \to F_\alpha = \left(\frac{\partial W^m}{\partial \xi_\alpha}\right)_I$

Работа положительна $\to$ положительно изменение энергии, что кажется неправильным, но есть сторонние источники! Из-за них энергия увеличивается.

1. Сила, действующая на элемент квазилин. контура с фикс. током.

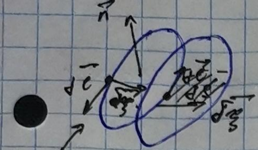


$\vec{F} = \oint_L d\vec{F}$ ~ только тогда имеет смысл.

$\vec{F}\delta\vec{\xi} = \oint_L d\vec{F}\cdot\delta\vec{\xi} = (\delta W^m)_I = (\delta W^m_{вз})_I$,

т.к. ток фиксир, эн. витка и внешн. поля не изменяется

Совершаем виртуальное перемещение витка.



Используем $W_{вз}^m = \frac{1}{c} I \Phi_0$

$$\Rightarrow \vec F \delta\vec\xi = (\delta W^m_{вз})_I = \frac{1}{c} I(\delta\Phi_0)_I = \frac{I}{c}\oint[\underbrace{\delta\vec\xi, d\vec l}_{\vec n\, dS}]\vec B_0 =$$

$[\delta\vec\xi, d\vec l] = (-\vec n)\, dS$ $\qquad [\delta\vec\xi, d\vec l] \uparrow\uparrow \vec n$

$$= \frac{I}{c}\oint_L [d\vec l, \vec B_0]\delta\vec\xi$$

– как бы с одной стороны площадь добавил, а с другой убрал, в итоге интеграл дает элементарный поток.

$\Rightarrow d\vec F = \frac{I}{c}[d\vec l, \vec B_0]$ – сила Ампера.

$$\Rightarrow \vec F = \oint_L \frac{I}{c}[d\vec l, \vec B_0] = \oint_L \frac{I}{c}[d\vec l, \vec B]$$

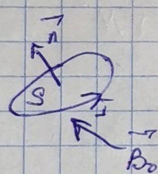
на самом деле можно написать так, собственные поля скомпенсируются и остается только внешнее поле

2. Объёмная пл-ть силы в магн. поле

Из предыдущей ф-лы: $I d\vec l = \vec j\, dV$

$$\vec F = \int_V \frac{[\vec j, \vec B]}{c} dV = \int_V \vec f\, dV \Rightarrow \boxed{\vec f = \frac{1}{c}[\vec j, \vec B]}$$

3. Сила, действующая на виток с фикс. током, вращающий момент, действующий на виток.



$$W^m_{вз} = \frac{1}{c} I\Phi_0 = \frac{1}{c} I(\vec B_0, \vec n) S = (\underbrace{\frac{\mu}{c} I S \vec n}_{\vec p^m}, \vec H_0) = (\vec p^m, \vec H_0) = (\vec p^m_н, \vec B_0)$$

$\vec p^m$ – магн. диполь.

$\vec p^m_н = \frac{\vec p^m}{\mu}$ – новое.

Вспомним электростатику: $W_{вз}^e = -(\vec p^e, \vec E_0)$ минус

Но ситуации разные! Диполь живёт сам по себе, а мы смотрим на виток, на который действ. сторонние источники.

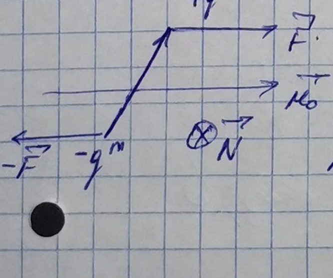
Если пишут $W^m_{вз} = -(\vec p^m, \vec H_0)$, то подразумевают фиксированный магнитный диполь!

$$\vec F = (\nabla W^m)_I = (\nabla W^m_{вз})_I = \nabla(\vec p^m, \vec H_0) = [\vec p^m, \mathrm{rot}\,\vec H_0] + [\vec H_0, \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec p^m}_{0}] +$$

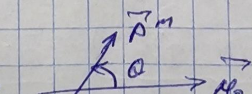
$$+ (\vec p^m, \nabla)\vec H_0 + \underbrace{(\vec H_0, \nabla)\vec p^m}_{0} = (\vec p^m, \nabla)\vec H_0$$

$\frac{4\pi}{c}\vec j = 0$ – в точке распол. диполя!

$$\Rightarrow \vec F = (\vec p^m_н, \nabla)\vec B_0$$



Есть соотношение



$\odot\, N > 0$

$$N = \frac{\partial}{\partial\theta}(W_{вз})_I = \frac{\partial}{\partial\theta}\underbrace{(\vec p^m, \vec H_0)}_{p^m H_0 \cos\theta} = -p^m H_0 \sin\theta$$

$$\vec N = [\vec p^m, \vec H_0] = [\vec p^m_н, \vec B_0]$$

Объёмная пл-ть пондеромоторной силы в магнитостатике.

Связано с намагниченностью и сообв. магнитными моментами

Ранее:

$\vec F = (\vec p^{\,m}, \nabla)\vec H_0$ (дальше нолик не пишем)

$d\vec p^{\,m} = \vec M\, dV$

$\Rightarrow d\vec F = (\underbrace{d\vec p^{\,m}}_{\vec M dV}, \nabla)\vec H$

$\Rightarrow \vec f = \frac{d\vec F}{dV} = (\vec M, \nabla)\vec H = \frac{\mu-1}{4\pi}(\vec H, \nabla)\vec H$

$\vec M = \frac{\mu-1}{4\pi}\vec H$

Чуть преобразуем: $\nabla \vec H^2 = \nabla(\vec H, \vec H) = 2[\vec H, \mathrm{rot}\,\vec H] + 2(\vec H, \nabla)\vec H$

$\frac{4\pi}{c}\vec j = 0$ ~ в том месте, где лежит магнетик (это сторонние токи)

Тогда получим:

$\boxed{\vec f = \frac{\mu-1}{8\pi}\nabla \vec H^2}$

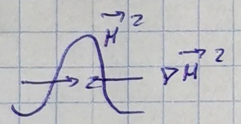
~ но есть „дефект" — не учтено явление стрикции.

Пусть плотность магнетика $\tau \rightarrow \mu = \mu(\tau)$ под воздействием внешнего поля (магнитострикция)

Без вывода, с её учётом: $\vec f = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec H^2 \frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau\right) - \frac{\vec H^2}{8\pi}\nabla\mu$

Если имеем дело с жидкими или газообр. магнетиками, для них обычно $\mu = 1 + C\tau$

$\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau = C\tau = \mu - 1 \Rightarrow \vec f = \frac{1}{8\pi}\nabla\left((\mu-1)\vec H^2\right) - \frac{\vec H^2}{8\pi}\nabla\mu = \frac{\mu-1}{8\pi}\nabla\vec H^2$



Магнетики делятся на:
парамагнетики $\mu > 0$ ~ магн. втягив в обл. сильного поля
диамагнетики $\mu < 0$ ~ для них наоборот

Если есть ещё токи, то действ. доп. магн. сила Лоренца.

Сведение объёмных сил к поверхностным натяжениям в магнит-е.

$\vec F = \int_V \vec f\, dV' - \oint_S \vec f^{\,пов} dS$ ~ или можно интерпр. как действие к элементарным пов-ям.

силы, прилож. к каждому элементу объёма.

Тогда можно ввести тензор натяжения:

$\vec f = \mathrm{div}\,\hat T$; $\vec f^{\,пов} = \hat T \cdot \vec n$

$\vec f = \frac{1}{c}[\vec j, \vec B] + \underbrace{\frac{1}{8\pi}\nabla\left(\vec H^2 \frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau\right)}_{f''} - \frac{1}{8\pi}\vec H^2\nabla\mu = \vec f' + \vec f''$

Тогда и тензор $\hat T = \hat T' + \hat T''$ — стрикционная часть тензора натяжений

$\vec f^{\,пов} (\hat T' + \hat T'')\vec n = \vec f^{\,пов'} + \vec f^{\,пов''}$

Начнём со стрикционного слагаемого:

$\vec f'' = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(H^2\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau\right)$ из электростатики: $\vec f'' = \frac{1}{8\pi}\nabla\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)$

$$\hat f'' = \frac{1}{8\pi}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\hat I$$

чисто по аналогии, проделывая те же выкладки (просто заменой можно получить)

$$\boxed{\hat f'' = \frac{1}{8\pi}H^2\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau\hat I}$$

Сложнее с максвелловским натяжением:

$\vec f' = \frac{1}{c}[\overset{\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\vec H}{\vec j}, \overset{\mu\vec H}{\vec B}] - \frac{1}{8\pi}H^2\nabla\mu$, $\quad \mathrm{rot}\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec j \to \vec j = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\vec H$

$\Rightarrow \vec f' = -\frac{\mu}{4\pi}[\vec H, \mathrm{rot}\vec H] - \frac{1}{8\pi}H^2\nabla\mu$ ← здесь выкладки отлич-ся

$$\nabla H^2 = \nabla(\vec H, \vec H) = 2[\vec H, \mathrm{rot}\vec H] + 2(\vec H, \nabla)\vec H$$

$-[\vec H, \mathrm{rot}\vec H] = -\frac{1}{2}\nabla H^2 + (\vec H, \nabla)\vec H$ $\quad$ $\mathrm{rot}\vec H$ не зануляем, т.к. пишем для более общего случая, когда есть токи

$$\vec f' = -\frac{\mu}{8\pi}\nabla H^2 + \frac{\mu}{4\pi}(\vec H, \nabla)\vec H - \frac{1}{8\pi}H^2\nabla\mu = \frac{\mu}{4\pi}(\vec H, \nabla)\vec H - \frac{1}{8\pi}\nabla(\mu H^2)$$

Запишем в виде проекций на коорд. оси:

$f'_x = \frac{\mu}{4\pi}(\vec H, \nabla)H_x - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x}(\mu H^2)$, аналогично f'_y, f'_z

докажем вспомог. соотношение:

$$\mathrm{div}(H_x\vec B) = H_x\underbrace{\mathrm{div}\vec B}_{0} + (\nabla H_x, \vec B) = (\vec B, \nabla H_x) = (\underbrace{\vec B}_{\mu\vec H}, \nabla)H_x = \mu(\vec H, \nabla)H_x$$

$f'_x = \frac{1}{4\pi}\mathrm{div}(H_x\overset{\mu\vec H}{\vec B}) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu H^2}{8\pi}\right)$, и аналогично f'_y, f'_z

$$\Rightarrow f'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu H_x H_x}{4\pi} - \frac{\mu H^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu H_x H_y}{4\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu H_x H_z}{4\pi}\right) = \frac{\partial\sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma'_{xz}}{\partial z}$$

Обобщённо: $\boxed{\sigma'_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{4\pi}\left(H_\alpha H_\beta - \frac{H^2}{2}\delta_{\alpha\beta}\right)}$

$\boxed{\sigma''_{\alpha\beta} = \sigma''_{\beta\alpha}}$; $\quad \boxed{\sigma'_{\alpha\beta} = \sigma'_{\beta\alpha}}$