Tutorium

Wahrscheinlichketstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(3) Tutorium - Elementare Wahrscheinlichkeiten

Follow up zu Fragen im Tutorium

Es sei Ω eine unendliche Menge und eine Menge $A \subseteq \Omega$. Kann dann die Komplementärmenge A^c auch unendlich sein?

Ja, die Komplementärmenge einer unendlichen Menge kann unendlich sein, muss aber nicht. Es kommt ganz darauf an, wie A genau definiert ist.

Beispiel 1)

$\Omega := \mathbb{R}$ und $A := [-\infty, 0[$.
Dann ist die Komplementärmenge bzgl. Ω gegeben als $A^c := \{x | x \notin A\} = [0, \infty[$.

Beispiel 2)

$\Omega := \mathbb{R}$ und $A :=]-\infty, 0[\cup]0, \infty, [$.
Dann ist die Komplementärmenge bzgl. Ω gegeben als $A^c := \{x | x \notin A\} = \{0\}$.

Follow-up

Warum lautet die zweite Aussage des Theorems weitere Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ und nicht $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$?

Theorem (Weitere Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $A, B \in \mathcal{A}$ Ereignisse. Dann gelten

1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
3. $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
5. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Theorem (Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0. \tag{1}$$

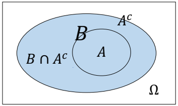
Follow-up

Warum $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$? (fortgeführt)

A

$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \cap A^c)$

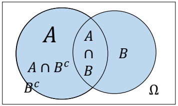
$A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$



B

$(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$

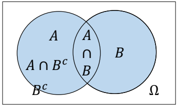
$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$



C

$B \cap (A \cap B^c) = \emptyset$

$A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$



- Zunächst gilt (vgl. Abbildung A) $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \cap A^c)$, mit $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$.
  $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$ sagt uns, dass A und $(B \cap A^c)$ disjunkt sind.
- Die Wahrscheinlichkeit für B ist dann die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung $A \cup (B \cap A^c)$.
- Mit der σ-*Additivität* $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ für paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$ folgt dann
  $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$
- Mit $\mathbb{P}(B \cap A^c) \geq 0$ folgt dann $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

Follow-up

Was sind Beispiele für abhängige oder unabhängige Ereignisse?

Definition (Unabhängige Ereignisse)

Zwei Ereignisse $A \in \mathcal{A}$ and $B \in \mathcal{A}$ heißen *(stochastisch) unabhängig*, wenn

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \tag{2}$$

Eine Menge von Ereignissen $\{A_i | i \in I\} \subset \mathcal{A}$ mit beliebiger Indexmenge I heißt (stochastisch) unabhängig, wenn für jede endliche Untermenge $J \subseteq I$ gilt, dass

$$\mathbb{P}\left(\cap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j). \tag{3}$$

Follow-up

Was sind Beispiele für abhängige oder unabhängige Ereignisse?

Definition (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ seien Ereignisse mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gegeben das Ereignis B* ist definiert als

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{4}$$

Weiterhin heißt das für ein festes $B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ definierte Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}(\ |B) : \mathcal{A} \to [0,1], A \mapsto \mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{5}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben Ereignis B*.

Theorem (Bedingte Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ seien unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}(B) \geq 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A). \tag{6}$$

Follow-up

Was sind Beispiele für abhängige oder unabhängige Ereignisse?

Beispiel für abhängige Ereignisse

- Wir betrachten das Würfeln mit einem Würfel
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{2\}$ sei das Ereignis "Wir würfeln eine 2".
- $B = \{2, 4, 6\}$ sei das Ereignis "Wir würfeln eine gerade Zahl".
- Die Schnittmenge der beiden Ereignisse ("Wir würfeln eine Zahl, die eine 2 *und* eine gerade Zahl ist.") ist dann $A \cap B = \{2\}$.
- Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse sind $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$ und $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$
- Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Ereignisse ist $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{12} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- Die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A gegeben das Ereignis B ist dann $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$

Was sind Beispiele für abhängige oder unabhängige Ereignisse?

Beispiel 1 für unabhängige Ereignisse

- Wir betrachten das Würfeln mit einem Würfel
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{2\}$ sei das Ereignis "Wir würfeln eine 2".
- $B = \Omega$ sei das Ereignis "Es fällt eine beliege Augenzahl".
- Die Schnittmenge der beiden Ereignisse ("Wir würfeln eine Zahl, die eine 2 ist *und* eine beliebige Zahl ist.") ist dann $A \cap B = \{2\}$.
- Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse sind $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$ und $\mathbb{P}(B) = 1$
- Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Ereignisse ist $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- Die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A gegeben das Ereignis B ist dann $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$

Follow-up

Was sind Beispiele für abhängige oder unabhängige Ereignisse?

Beispiel 2 für unabhängige Ereignisse

- Wir betrachten das Würfeln mit zwei Würfeln
- $\Omega = \{(r, b) | r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$ sei das Ereignis "Auf dem roten Würfel fällt eine Drei".
- $B = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$ sei das Ereignis "Auf dem blauen Würfel fällt eine Drei".
- Die Schnittmenge der beiden Ereignisse ("Auf dem roten würfel fällt eine Drei *und* auf dem blauen Würfel fällt eine Drei".) ist dann $A \cap B = \{(3, 3)\}$.
- Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}) \\
&= \mathbb{P}(\{(3,1)\}) \cup \mathbb{P}(\{(3,2)\}) \cup \mathbb{P}(\{(3,3)\}) \cup \mathbb{P}(\{(3,4)\}) \cup \mathbb{P}(\{(3,5)\}) \cup \mathbb{P}(\{(3,6)\}) \\
&= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

- Analog dazu ist auch $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$
- Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Ereignisse ist $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(3, 3)\}) = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- Die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A gegeben das Ereignis B ist dann $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$