Tutorium

Wahrscheinlichketstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(2) Wahrscheinlichkeitsräume

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie Sinn und Zweck der Wahrscheinlichkeitstheorie.
2. Erläutern Sie den Begriff des Zufallsvorgangs.
3. Definieren Sie den Begriff der σ-Algebra.
4. Definieren Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes.
5. Definieren Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums.
6. Erläutern Sie den Begriff der Ergebnismenge Ω.
7. Erläutern Sie den Begriff eines Ereignisses $A \in \mathcal{A}$.
8. Erläutern Sie den Begriff des Ereignissystems $\mathcal{A}$.
9. Erläutern Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$.
10. Erläutern Sie die stillschweigende Mechanik des Wahrscheinlichkeitsraummodells.
11. Welche σ-Algebra wählt man sinnvoller Weise für ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlicher Ergebnismenge?
12. Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion.
13. Warum ist der Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion bei der Modellierung eines Zufallsvorgans durch einen Wahrscheinlichkeitsraums mit endlicher Ergebnismenge hilfreich?
14. Erläutern Sie die Modellierung des Werfens eines Würfels mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.
15. Erläutern Sie die Modellierung des gleichzeitigen Werfens eines roten und eines blauen Würfels mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.
16. Erläutern Sie die Modellierung des Werfens einer Münze mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.
17. Erläutern Sie die Modellierung des gleichzeitigen Werfens zweier Münzen mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.

1. Erläutern Sie Sinn und Zweck der Wahrscheinlichkeitstheorie.

In der Datenwissenschaft nutzen wir die Wahrscheinlichkeitstheorie dafür, die mit der Modellierung und Vorhersage der "Realität" verbundenen Unsicherheit zu modellieren und zu quantifizieren.

Anders ausgedrückt, verwenden wir wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle, um bestimmte Eigenschaften und Zufallsvorgänge der Realität zu repräsentieren (i.e. modellieren).

2. Erläutern Sie den Begriff des Zufallsvorgangs.

Zufallsvorgänge sind Phänomene, die von Menschen nicht mit absoluter Sicherheit vorhergesagt werden können.

Wahrscheinlichkeitstheorie - Schaubild

Repräsentation zentraler Eigenschaften

Modellierung

Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

Probabilistisches Modell

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), X : \Omega \to \mathbb{R}$

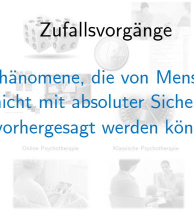
Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\mathbb{P}_X(S) = \mathbb{P}(X^{-1}(S))$

Realität

Zufallsvorgänge

Phänomene, die von Menschen nicht mit absoluter Sicherheit vorhergesagt werden können.



Vorhersagen

Quantifizierung von Unsicherheit

3. Definieren Sie den Begriff der σ-Algebra.

Definition (σ-Algebra)

Ω sei eine Menge und $\mathcal{A}$ sei eine Menge von Teilmengen von Ω. $\mathcal{A}$ heißt *σ-Algebra auf* Ω, wenn

- $\Omega \in \mathcal{A}$ ist,
- $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter der Bildung von Komplementärmengen ist, also wenn für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt, dass auch $A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ ist,
- $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter der abzählbaren Vereinigung von Ereignissen ist, also wenn aus $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ folgt, dass auch $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ ist.

Anmerkungen:

- Eine andere *Menge von Teilmengen* einer Menge, die wir kennen, ist die Potenzmenge.
- Zur Wdhl.: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist definiert als die Menge *aller* Teilmengen der Menge M.
- Für die Spezifikation eines Wahrscheinlichkeitsmodells kann im Falle eines endlichen Ω als σ-Algebra die Potenzmenge von Ω gewählt werden.

Wdhl.: Übunsbeispiel Potenzmenge

Geben Sie jeweils die Potenzmenge $\mathcal{P}$ an.

1. $M := \{1, 2, 3\}$
   $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
2. $N := \{5, 6\}$
   $\mathcal{P}(N) = \{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{5, 6\}\}$

4. Definieren Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes.

Es seien Ω eine beliebige nichtleere Menge von *Ergebnissen* ω (*Ergebnismenge*) und $\mathcal{A}$ eine *σ-Algebra auf* Ω (*Ereignissystem*).

Dann heißt eine Abbildung der Form $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit den Eigenschaften

- *Nicht-Negativität* $\mathbb{P}(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$,
- *Normiertheit* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und
- *σ-Additivität* $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ für paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$

ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*.

5. Definieren Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums.

Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)

Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Triple $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei

- Ω eine beliebige nichtleere Menge von *Ergebnissen* ω ist und *Ergebnismenge* heißt,
- $\mathcal{A}$ eine *σ-Algebra auf* Ω ist und *Ereignissystem* heißt,
- $\mathbb{P}$ eine Abbildung der Form $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit den Eigenschaften
  - *Nicht-Negativität* $\mathbb{P}(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$,
  - *Normiertheit* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und
  - *σ-Additivität* $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ für paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$

  ist und *Wahrscheinlichkeitsmaß* heißt.

Das Tuple $(\Omega, \mathcal{A})$ aus Ergebnismenge und Ereignissystem wird als *Messraum* bezeichnet.

6. Erläutern Sie den Begriff der Ergebnismenge Ω.

- Die Ergebnismenge Ω ist die Menge aller möglichen Eregebnisse eines Zufallsvogangs.
- Wenn wir endliche Wahrscheinlichkeitsräume mit $|\Omega| < \infty$ betrachen, haben wir nur endlich viele ("diskrete") Elemente.

7. Erläutern Sie den Begriff eines Ereignisses $A \in \mathcal{A}$.

- *Ereignisse* stellt man sich am besten als Zusammenfassung (ein oder) mehrerer Ergebnisse vor.
- Auch einzelne Ergebnisse $\omega \in \Omega$ sind mögliche Ereignisse.
- Betrachtet man $\omega \in \Omega$ als Ereignis, so nennt man es *Elementarereignis* und schreibt $\{\omega\}$.

8. Erläutern Sie den Begriff des Ereignissystems $\mathcal{A}$.

- Sinn des Ereignissystems ist es, alle Ereignisse, die sich basierend auf einer gegebenen Ergebnismenge bei Auswahl eines $\omega \in \Omega$ ergeben können, mathematisch zu repräsentieren.
- Das Ereignissystem $\mathcal{A}$ ist die vollständige Menge aller möglichen Ereignisse bei gegebenem Ω.
- Für endliches Ω und für $\Omega := \mathbb{R}$ sind passende Ereignissysteme schon lange bekannt.

$$\begin{aligned}
\Omega \text{ ist endlich} \quad &\Rightarrow \text{Man wählt für } \mathcal{A} \text{ die Potenzmenge von } \Omega \\
\Omega \text{ ist } \mathbb{R} \quad &\Rightarrow \text{Man wählt für } \mathcal{A} \text{ die } \textit{Borelsche } \sigma\textit{-Algebra } \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\
\Omega \text{ ist } \mathbb{R}^n \quad &\Rightarrow \text{Man wählt für } \mathcal{A} \text{ die } \textit{Borelsche } \sigma\textit{-Algebra } \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

9. Erläutern Sie den Begriff des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$.

- Während $(\Omega, \mathcal{A})$ die *strukturelle Basis* eines Wahrscheinlichkeitsraummodells ist, repräsentiert $\mathbb{P}$ die probabilistischen Charakteristika eines Wahrscheinlichkeitsraummodells.
- $\mathbb{P}$ entspricht der *funktionellen Basis* eines Wahrscheinlichkeitsraummmodells.
- Es gilt $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$
  - $\mathbb{P}$ ordnet also (nur) allen Mengen des Ereignissystems Wahrscheinlichkeiten zu.
  - Mit $\{\omega\} \in \mathcal{A} \, \forall \, \omega \in \Omega$ ordnet $\mathbb{P}$ auch den Elementareignissen Wahrscheinlichkeiten zu.
    - $\{\omega\} \in \mathcal{A} \, \forall \, \omega \in \Omega$ wird gelesen als "Die Menge bestehend aus einem ω ist ein Element des Ereignissystems $\mathcal{A}$ für alle ω, die ein Element der Ergebnismenge Ω sind")
    - Mit anderen Worten, $\mathbb{P}$ ordnet allen Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zu. Da auch jedes 'Einzelergebnis' ein Ereignis ist, nämlich ein Elementarereignis, ordnet $\mathbb{P}$ intuitiv ausgedrückt auch jedem ω eine Wahrscheinlichkeit zu.
- Wahrscheinlichkeiten sind Zahlen in $[0, 1]$, nicht Prozente (20%) oder Verhältnisse (50:50).
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ entspricht der Tatsache, dass in jedem Durchgang sicher $\omega \in \Omega$ gilt.
- In jedem Durchgang eines Zufallsvorgangs tritt also zumindest ein Elementarereignis ein.

10. Erläutern Sie die stillschweigende Mechanik des Wahrscheinlichkeitsraummodells.

- Wir stellen uns sequentielle *Durchgänge* eines *Zufallsvorgangs* vor.
- In jedem Durchgang wird genau ein ω aus Ω mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{\omega\})$ *realisiert*.
- $\mathbb{P}(\{\omega\})$ bestimmt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ω in einem Durchgang aus Ω realisiert wird.

11. Welche σ-Algebra wählt man sinnvoller Weise für ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlicher Ergebnismenge?

Die Potenzmenge von Ω, $\mathbb{P}(\Omega)$

12. Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Definition (Wahrscheinlichkeitsfunktion)

Ω sei eine endliche Menge. Dann heißt eine Funktion $\pi : \Omega \to [0,1]$ *Wahrscheinlichkeitsfunktion*, wenn gilt, dass

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1. \tag{1}$$

Sei weiterhin $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann heißt die durch

$$\pi : \Omega \to [0,1], \omega \mapsto \pi(\omega) := \mathbb{P}(\{\omega\}) \tag{2}$$

definierte Funktion *Wahrscheinlichkeitsfunktion* von $\mathbb{P}$ auf Ω.

13. Warum ist der Begriff der Wahrscheinlichkeitsfunktion bei der Modellierung eines Zufallsvorgangs durch einen Wahrscheinlichkeitsraum mit endlicher Ergebnismenge hilfreich?

- Wahrscheinlichkeitsfunktionen erlauben im Falle endlicher Ergebnismengen Ω das Festlegen von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}$ durch die Definition der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $(\pi(\omega))$.
- Somit können alle Ereignisse aus den Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\pi(\omega)$ berechnet werden.

Theorem (Definition eines W-Maßes durch eine W-Funktion)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *sei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlicher Ergebnismenge und* $\pi : \Omega \to [0, 1]$ *sei eine Wahrscheinlichkeitsfunktion. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß* $\mathbb{P}$ *auf* Ω *mit* π *als Wahrscheinlichkeitsfunktion von* $\mathbb{P}$*. Dieses Wahrscheinlichkeitsmaß ist definiert als*

$$\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1], A \mapsto \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \pi(\omega). \tag{3}$$

Anmerkung:

- Gemäß der Definition eines Wahrscheinlichketsraums ist das Wahrscheinlichkeitsmaß gegeben als die Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$
- Ohne Wahrscheinlichkeitsfunktion gestaltet es sich schwierig, die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Ereignisse $A \in \mathcal{A}$ zu bestimmen. Was ist z.B. die Wahrscheinlichkeit dafür, eine gerade Augenzahl $(A = \{2, 4, 6\})$ zu würfeln?
- Wir nehmen intuitiv die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\pi(\omega)$, nämlich $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

14. Erläutern Sie die Modellierung des Werfens eines Würfels mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.

Definition des Messraums $(\Omega, \mathcal{A})$ (strukturelle Basis):

(1) Eine sinnvolle Definition der Ergebnismenge ist $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(2) Da es sich um eine *endliche* Ergebnismenge handelt, wählen wir als σ-Algebra $\mathcal{A}$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. $\mathcal{A}$ enthält dann automatisch alle möglichen Ereignisse.

- Die Kardinalität von $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ ist $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^6 = 64$. Mit anderen Worten, es gibt 64 mögliche Ereignisse.
- Jedes Ereignis ist eine (unechte) Teilmenge der Ergebnismenge. Formal: $A \subseteq \Omega \; \forall A \in \mathcal{A}$.

Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ (funktionelle Basis):

(3) Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kann durch Festlegung von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden.

- Für das Modell eines unverfälschten Würfels würde man folgendes wählen:

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \frac{1}{|\Omega|} := 1/6 \text{ für alle } \omega \in \Omega$$

- z.B. ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis 'Es fällt eine gerade Augenzahl' mit der σ-Additivät von $\mathbb{P}$ wie folgt

$$\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \mathbb{P}(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

15. Erläutern Sie die Modellierung des gleichzeitigen Werfens eines roten und eines blauen Würfels mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.

Definition des Messraums $(\Omega, \mathcal{A})$ (strukturelle Basis):

(1) Eine sinnvolle Definition der Ergebnismenge ist $\Omega := \{(r, b) | r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ mit Kardinalität $|\Omega| = 36$, wobei r die Augenzahl des blauen Würfels und b die Augenzahl des roten Würfels repräsentieren soll.

(2) Da es sich um eine *endliche* Ergebnismenge handelt, wählen wir als σ-Algebra $\mathcal{A}$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. $\mathcal{A}$ enthält dann automatisch alle möglichen Ereignisse.
  - Die Anzahl der in diesem Modell möglichen Ereignisse (die Kardinalität von $\mathcal{A}$) ergibt sich zu $|\mathcal{A}| = 2^{|\Omega|} = 2^{36} = 68.719.476.736$
  - Jedes Ereignis ist eine (unechte) Teilmenge der Ergebnismenge. Formal: $A \subseteq \Omega \ \forall A \in \mathcal{A}$.

Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ (funktionelle Basis):

(3) Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kann durch Definition von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden.
  - Für das Modell zweier unverfälschter Würfel würde man folgendes wählen

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \text{ für alle } \omega \in \Omega$$

(fortgesetzt)

- z.B. ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis ‘Die Summe der gefallenen Zahlen ist Vier’ mit der σ-Additivät von $\mathbb{P}$ zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{(1,3),(3,1),(2,2)\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{(1,3)\} \cup \{(3,1)\} \cup \{(2,2)\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\{(1,3)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(3,1)\}\right) + \mathbb{P}\left(\{(2,2)\}\right) \\
&= 1/36 + 1/36 + 1/36 \\
&= 1/12.
\end{aligned}$$

16. Erläutern Sie die Modellierung des Werfens einer Münze mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.

Definition des Messraums $(\Omega, \mathcal{A})$ (strukturelle Basis):

(1) Eine sinnvolle Definition der Ergebnismenge ist $\Omega := \{H, T\}$, wobei H "Heads" und T "Tails" repräsentiert. Es wäre auch jede andere binäre Definition von Ω möglich.

(2) Da es sich um eine *endliche* Ergebnismenge handelt, wählen wir als σ-Algebra $\mathcal{A}$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. $\mathcal{A}$ enthält dann automatisch alle möglichen Ereignisse.

- Die Kardinalität von $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ ist $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^2 = 4$. Mit anderen Worten, es gibt 4 mögliche Ereignisse.
- Jedes Ereignis ist eine (unechte) Teilmenge der Ergebnismenge. Formal: $A \subseteq \Omega \; \forall A \in \mathcal{A}$.

(fortgesetzt)

Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ (funktionelle Basis):

(3) Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kann durch Festlegung von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden.

- Die Normiertheit von $\mathbb{P}(\Omega)$ bedingt hier insbesondere, dass

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{H\}) + \mathbb{P}(\{T\}) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\{T\}) = 1 - \mathbb{P}(\{H\}).$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \frac{1}{|\Omega|} := 1/6 \text{ für alle } \omega \in \Omega$$

- Bei Festlegung der Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $\{H\}$ wird also die Wahrscheinlichkeit des Elementarereignis $\{T\}$ sofort mit festgelegt (andersherum natürlich ebenso). Für das Modell einer fairen Münze würde man $\mathbb{P}(\{H\}) = \mathbb{P}(\{T\}) = 1/2$ wählen. Die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse ist in diesem Fall

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\{H\}) = 1/2, \mathbb{P}(\{T\}) = 1/2 \text{ und } \mathbb{P}(\{H, T\}) = 1.$$

17. Erläutern Sie die Modellierung des gleichzeitigen Werfens zweier Münzen mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsraums.

Definition des Messraums $(\Omega, \mathcal{A})$ (strukturelle Basis):

(1) Eine sinnvolle Definition der Ergebnismenge ist $\Omega := \{HH, HT, TH, TT\}$, wobei H "Heads" und T "Tails" repräsentieren.

(2) Da es sich um eine *endliche* Ergebnismenge handelt, wählen wir als σ-Algebra $\mathcal{A}$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$. $\mathcal{A}$ enthält dann automatisch alle möglichen Ereignisse.

- Die Kardinalität von $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ ist $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^4 = 16$. Mit anderen Worten, es gibt 16 mögliche Ereignisse.
- Jedes Ereignis ist eine (unechte) Teilmenge der Ergebnismenge. Formal: $A \subseteq \Omega \; \forall A \in \mathcal{A}$.

Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ (funktionelle Basis):

(3) Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kann durch Festlegung von $\mathbb{P}(\{\omega\})$ für alle $\omega \in \Omega$ festgelegt werden.

- Für das Modell zweier fairer Münzen könnte man folgendes wählen

$$\mathbb{P}(\{HH\}) = \mathbb{P}(\{HT\}) = \mathbb{P}(\{TH\}) = \mathbb{P}(\{TT\}) = \frac{1}{4}$$