Tutorium

Wahrscheinlichketstheorie und Frequentistische Inferenz

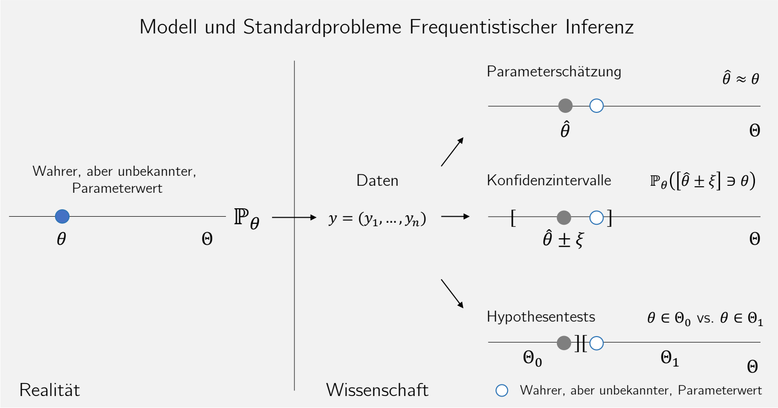
BSc Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(11) Konfidenzintervalle

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff des δ-Konfidenzintervalls.
2. Geben Sie zwei Interpretationen eines δ-Konfidenzintervalls.
3. Erläutern Sie die typischen Schritte zur Konstruktion eines δ-Konfidenzintervalls.
4. Definieren Sie die T-Konfidenzintervallstatistik und geben Sie ihre Verteilung an.
5. Geben Sie das δ-Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Normalverteilung an.
6. Definieren Sie die U-Konfidenzintervallstatistik und geben Sie ihre Verteilung an.
7. Geben Sie das δ-Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung an.


Modell und Standardprobleme Frequentistischer Inferenz
Wahrer, aber unbekannter, Parameterwert
θ
Θ
$\mathbb{P}_\theta$
Daten
$y = (y_1, \dots, y_n)$
Parameterschätzung
$\hat{\theta} \approx \theta$
$\hat{\theta}$
Θ
Konfidenzintervalle
$\mathbb{P}_\theta([\hat{\theta} \pm \xi] \ni \theta)$
$\hat{\theta} \pm \xi$
Θ
Hypothesentests
$\theta \in \Theta_0$ vs. $\theta \in \Theta_1$
Θ_0
Θ_1
Θ
Realität
Wissenschaft
Wahrer, aber unbekannter, Parameterwert

Standardannahmen Frequentistischer Inferenz

$\mathcal{M}$ sei ein statistisches Modell mit Stichprobe $\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim p_\theta$. **Es wird angenommen, dass ein konkret vorliegender Datensatz $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ eine der möglichen Realisierungen von $\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim p_\theta$ ist.** Aus Frequentistischer Sicht kann man eine Studie unter gleichen Umständen unendlich oft wiederholen und zu jedem Datensatz Schätzer oder Statistiken auswerten, z.B. das Stichprobenmittel:

Datensatz (1) : $y^{(1)} = \left(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, ..., y_n^{(1)}\right)$ mit $\bar{y}^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i^{(1)}$

Datensatz (2) : $y^{(2)} = \left(y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, ..., y_n^{(2)}\right)$ mit $\bar{y}^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i^{(2)}$

Datensatz (3) : $y^{(3)} = \left(y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, ..., y_n^{(3)}\right)$ mit $\bar{y}^{(3)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i^{(3)}$

Datensatz (4) : $y^{(4)} = \left(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, ..., y_n^{(4)}\right)$ mit $\bar{y}^{(4)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i^{(4)}$

Datensatz (5) : $y^{(5)} = ...$

Um die Qualität statistischer Methoden zu beurteilen betrachtet die Frequentistische Statistik deshalb die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Schätzern und Statistiken unter Annahme von $\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim p_\theta$. Was zum Beispiel ist die Verteilung der $\bar{y}^{(1)}$, $\bar{y}^{(2)}$, $\bar{y}^{(3)}$, $\bar{y}^{(4)}$, ... also die Verteilung der Zufallsvariable $\bar{\upsilon}$?

Wenn eine statistische Methode im Sinne der Frequentistischen Standardannahmen "gut" ist, dann heißt das also, dass sie bei häufiger Anwendung "im Mittel gut" ist. Im Einzelfall, also im Normalfall nur eines vorliegenden Datensatzes, kann sie auch "schlecht" sein.

1. Definieren Sie den Begriff des δ-Konfidenzintervalls.

Definition (δ-Konfidenzintervall)

Es sei $\upsilon = \upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim p_\theta$ eine Stichprobe, $\delta \in]0, 1[$, und $G_u(\upsilon)$ und $G_o(\upsilon)$ seien zwei Statistiken. Dann ist ein δ-*Konfidenzintervall* ein Intervall der Form $\kappa := [G_u, G_o]$, so dass

$$\mathbb{P}_\theta (\kappa \ni \theta) = \mathbb{P}_\theta (G_u(\upsilon) \leq \theta \leq G_o(\upsilon)) = \delta \text{ für alle } \theta \in \Theta \text{ gilt.} \tag{1}$$

δ heißt das *Konfidenzniveau* oder die *Überdeckungswahrscheinlichkeit* des Konfidenzintervalls. Die Statistiken $G_u(\upsilon)$ und $G_o(\upsilon)$ sind die unteren und oberen Grenzen des Konfidenzintervalls.

Bemerkungen

- θ ist fest, nicht zufällig, und unbekannt.
- κ ist ein zufälliges Intervall, weil $G_u(\upsilon)$ und $G_o(\upsilon)$ Zufallsvariablen sind.
- $\kappa \ni \theta$ bedeutet $\theta \in \kappa$, aber κ ist zufällig und steht deshalb vorn (cf. $\mathbb{P}(\xi = x)$).
- Ein δ-Konfidenzintervall überdeckt den wahren Wert θ mit Wahrscheinlichkeit δ.
- Oft wird $\delta = 0.95$ gewählt, also 95%-*Konfidenzintervalle* betrachtet.

2. Geben Sie zwei Interpretationen eines δ-Konfidenzintervalls.

(1) Wird ein Zufallsvorgang unter gleichen Umständen häufig wiederholt, so überdeckt das zugehörige δ-Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten Parameterwert im langfristigen Mittel in $\delta \cdot 100\%$ der Fälle. Technischer ausgedrückt, für unabhängig und identisch realisierte Stichproben einer Verteilung mit wahrem, aber unbekannten, Parameter θ überdeckt im langfristigen Mittel ein entsprechendes δ-Konfidenzintervall θ in $\delta \cdot 100\%$ aller Fälle.

(2) Gegeben sei eine Menge von Zufallsvorgängen mit wahren, aber unbekannten, Parametern $\theta_1, \theta_2, \ldots$ und realisierte δ-Konfidenzintervalle für eben jene Menge von wahren, aber unbekannten Parametern $\theta_1, \theta_2, \ldots$ Dann überdecken im langfristigen Mittel $\delta \cdot 100\%$ der Konfidenzintervalle den wahren, aber unbekannten, Wert θ_i für $i = 1, 2, \ldots$. Technischer ausgedrückt, für unabhängig realisierte Stichproben von Verteilungen mit wahren, aber unbekannten, Parametern $\theta_1, \theta_2, \ldots$ überdecken im langfristigen Mittel entsprechende δ-Konfidenzintervalle θ_i für $i = 1, 2, \ldots$ in $\delta \cdot 100\%$ aller Fälle.

3. Erläutern Sie die typischen Schritte zur Konstruktion eines δ-Konfidenzintervalls.

Allgemeine Konstruktion von Konfidenzintervallen

(1) Definition des statistischen Modells

(2) Definition der Konfidenzintervallstatistik

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik

(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

(5) Definition des Konfidenzintervalls

4. Definieren Sie die T-Konfidenzintervallstatistik und geben Sie ihre Verteilung an.

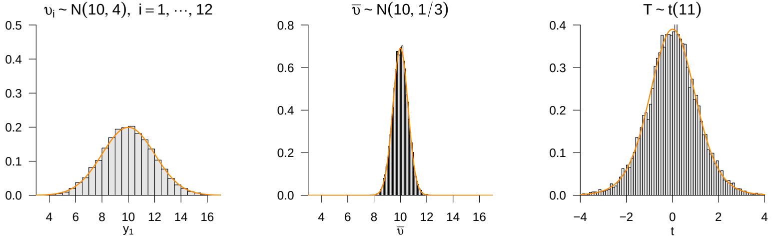
T-Konfidenzintervallstatistik:

$$T := \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{\upsilon} - \mu) \text{ mit } \bar{\upsilon} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \upsilon_i \text{ und } S := \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\upsilon_i - \bar{\upsilon})^2}.$$

Verteilung:

- Für die T-Konfidenzintervallstatistik gilt $T \sim t(n-1)$, die T-Konfidenzintervallstatistik ist also eine t-verteilte Zufallsvariable mit Freiheitsgradparameter $n-1$.
- Die T-Konfidenzintervallstatistik ist eine Funktion der Stichprobe $\upsilon_1, ..., \upsilon_n$ (via $\bar{\upsilon}$ und S), während ihre Verteilung weder von μ noch von σ^2 abhängt.
- Wir bezeichnen die die WDF einer t-verteilten Zufallvariable mit t, die KVF einer t-verteilten Zufallvariable mit Ψ und die inverse KVF einer t-verteilten Zufallvariable mit Ψ^{-1}.

Verteilung der T-Konfidenzintervallstatistik



5. Geben Sie das δ-Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Normalverteilung an.

Es sei $\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit unbekannten Parametern μ und σ^2, es sei $\delta \in]0, 1[$ und es sei

$$t_\delta := \Psi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right). \tag{2}$$

Definiere

$$\kappa := \left[\bar{\upsilon} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_\delta, \bar{\upsilon} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_\delta\right]. \tag{3}$$

Dann gilt wie oben gezeigt

$$\mathbb{P}(\kappa \ni \mu) = \delta. \tag{4}$$

Damit ist κ ein δ-Konfidenzintervall für μ.

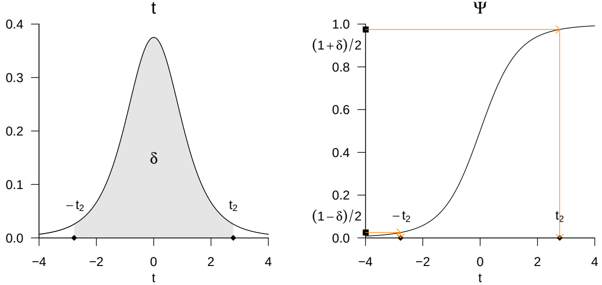
Man beachte, dass κ ein zufälliges Intervall ist, weil $\bar{\upsilon}$ und S Zufallsvariablen sind.

Etablierung der Konfidenzbedingung (Erwartungswertparameter)

Für $\delta \in]0,1[$ seien

$$t_1 := \Psi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right) \text{ und } t_2 := \Psi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right) \tag{5}$$

Es gilt dann $(1+\delta)/2 - (1-\delta)/2 = \delta$ und zum Beispiel gilt für $n = 5$ und $\delta = 0.95$, $t_1 = \Psi^{-1}(0.025; 4) = -2.57$ und $t_2 = \Psi^{-1}(0.975; 4) = 2.57$. Weiterhin gilt mit der Symmetrie von $t(n-1)$, $t_1 = -t_2$. Es gilt hier also per Definition $\mathbb{P}(-t_2 \le T \le t_2) = \delta$.



Von Konfidenzbedingung zu Konfidenzintervall (Erwartungswertparameter)

Mit der Definition von t_2 wie oben folgt dann aber

$$
\begin{aligned}
\delta &= \mathbb{P}\left(-t_2 \leq T \leq t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-t_2 \leq \frac{\sqrt{n}}{S}(\bar{\upsilon} - \mu) \leq t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{S}{\sqrt{n}}t_2 \leq \bar{\upsilon} - \mu \leq \frac{S}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\bar{\upsilon} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_2 \leq -\mu \leq -\bar{\upsilon} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{\upsilon} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_2 \geq \mu \geq \bar{\upsilon} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{\upsilon} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_2 \leq \mu \leq \bar{\upsilon} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\bar{\upsilon} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_2, \bar{\upsilon} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_2\right] \ni \mu\right).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Wir können nun das gesuchte Konfidenzintervall definieren.

6. Definieren Sie die U-Konfidenzintervallstatistik und geben Sie ihre Verteilung an.

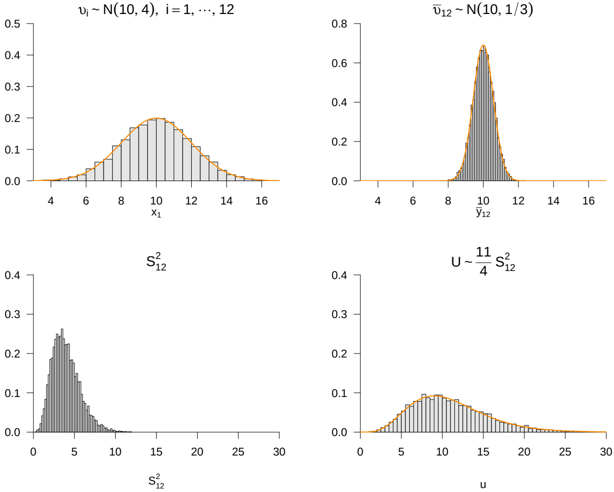
U-Konfidenzintervallstatistik:

$$U := \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \text{ mit } S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\upsilon_i - \bar{\upsilon})^2 .$$

Verteilung:

- Für die U-Konfidenzintervallstatistik gilt $U \sim \chi^2(n-1)$.
- Die U-Konfidenzintervallstatistik ist eine Funktion von $\upsilon_1, ..., \upsilon_n$ (via S^2) und σ^2, während ihre Verteilung nicht von σ^2 abhängt.
- Wir bezeichnen die WDF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit χ^2, die KVF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit Ξ und die inverse KVF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit Ξ^{-1}.

Verteilung der U-Konfidenzintervallstatistik



7. Geben Sie das δ-Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung an.

Es sei $\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine Stichprobe mit unbekanntem Varianzparameter σ^2 und bekanntem oder unbekanntem Erwartungswertparamter μ und es seien weiterhin $\delta \in]0, 1[$ sowie

$$\xi_1 := \Xi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right) \text{ und } \xi_2 := \Xi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right). \tag{7}$$

Definiere

$$\kappa := \left[\frac{(n-1)S^2}{\xi_2}, \frac{(n-1)S^2}{\xi_1}\right]. \tag{8}$$

Dann gilt wie oben gezeigt

$$\mathbb{P}(\kappa \ni \sigma^2) = \delta. \tag{9}$$

Damit ist κ ein δ-Konfidenzintervall für σ^2.

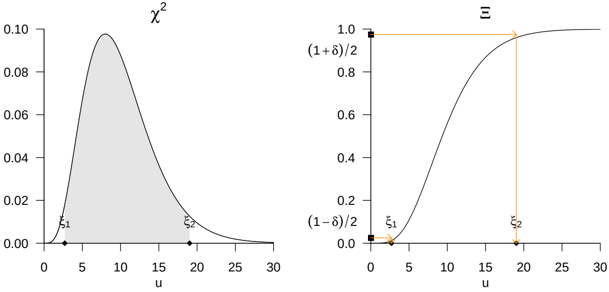
Man beachte, dass κ ein zufälliges Intervall ist, weil S^2 eine Zufallsvariable ist.

Etablierung der Konfidenzbedingung (Varianzparameter)

Für $\delta \in]0,1[$ seien

$$\xi_1 := \Xi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right) \text{ und } \xi_2 := \Xi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right) \tag{10}$$

Es gilt dann $(1+\delta)/2 - (1-\delta)/2 = \delta$ gilt und zum Beispiel gilt für $n = 10$ und $\delta = 0.95$, $\xi_1 := \Xi^{-1}(0.025; 9) = 2.70$ und $\xi_2 := \Xi^{-1}(0.975; 9) = 19.0$. Es gilt hier also per Definition $\mathbb{P}(\xi_1 \leq U \leq \xi_2) = \delta$.



Von Konfidenzbedingung zu Konfidenzintervall (Varianzparameter)

Mit der Definition von ξ_1 und ξ_2 wie oben folgt dann aber

$$
\begin{aligned}
\delta &= \mathbb{P}\left(\xi_1 \le U \le \xi_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\xi_1 \le \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 \le \xi_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\xi_1^{-1} \ge \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \ge \xi_2^{-1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\xi_1} \ge \sigma^2 \ge \frac{(n-1)S^2}{\xi_2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\xi_2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2)}{\xi_1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{(n-1)S^2}{\xi_2}, \frac{(n-1)S^2)}{\xi_1}\right] \ni \sigma^2\right).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Wir können nun das gesuchte Konfidenzintervall definieren.