Tutorium

Wahrscheinlichketstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(5) Multivariate Verteilungen

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff des Zufallsvektors.
2. Definieren Sie den Begriff der multivariaten Verteilung eines Zufallsvektors.
3. Definieren Sie den Begriff der multivariaten WMF.
4. Definieren Sie den Begriff der multivariaten WDF.
5. Definieren Sie den Begriff der univariaten Marginalverteilung eines Zufallsvektors.
6. Wie berechnet man die WMF der $i$ten Komponente eines diskreten Zufallsvektors?
7. Wie berechnet man die WDF der $i$ten Komponente eines kontinuierlichen Zufallsvektors?
8. Definieren Sie den Begriff der Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen.
9. Wie erkennt man an der gemeinsamen WMF oder WDF eines zweidimensionalen Zufallsvektors, ob die Komponenten des Zufallsvektors unabhängig sind oder nicht?
10. Definieren Sie den Begriff der Unabhängigkeit von n Zufallsvariablen.
11. Definieren Sie den Begriff n unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen.

Wdhl.: Modell und Realität

Repräsentation zentraler Eigenschaften

Modellierung

Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

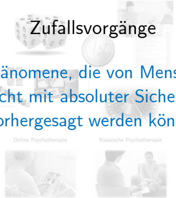
Probabilistisches Modell

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \xi : \Omega \to \mathbb{R}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\mathbb{P}_\xi(S) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(S))$

Realität



Zufallsvorgänge

Phänomene, die von Menschen nicht mit absoluter Sicherheit vorhergesagt werden können.

Vorhersagen

Quantifizierung von Unsicherheit

Wdhl.: Modell und Realität

Wir nehmen an, dass die BDI Scores der Proband:innen Realisierungen **unabhängiger und identisch** normalverteilter Zufallsvariablen sind.

Modellierung

Modell

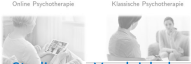
Wahrscheinlichkeitstheorie

$$y_{1j} \sim N(\mu_1, \sigma^2), j = 1, \dots, n_1$$

$$y_{2j} \sim N(\mu_2, \sigma^2), j = 1, \dots, n_2$$

Realität

Zufallsvorgang



Klinische Studie zum Vergleich der Effekte von Face-To-Face und Online Psychothrapie bei Depression

Vorhersagen

1. Definieren Sie den Begriff des Zufallsvektors.

Definition (Zufallsvektor)

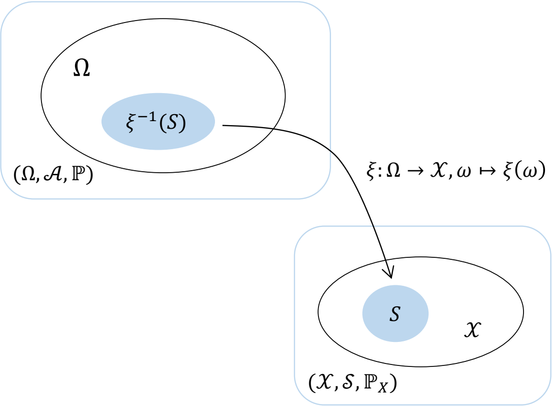
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n-dimensionaler Messraum. Ein n-dimensionaler *Zufallsvektor* ist definiert als eine Abbildung

$$\xi : \Omega \to \mathcal{X}, \omega \mapsto \xi(\omega) := \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \vdots \\ \xi_n(\omega) \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit der *Messbarkeitseigenschaft*

$$\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } S \in \mathcal{S}. \tag{2}$$

Veranschaulichung: Zufallsvektor



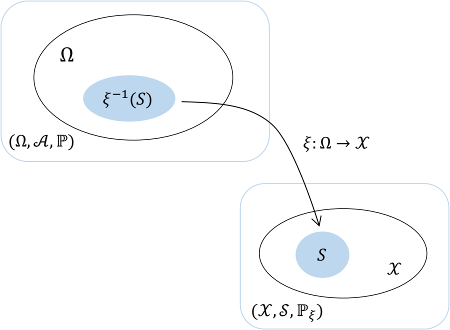
$$\xi\colon \Omega \to \mathcal{X}, \omega \mapsto \xi(\omega) \coloneqq \begin{pmatrix} \xi_1(\omega) \\ \vdots \\ \xi_n(\omega) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}\big(\xi^{-1}(S)\big) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}) =: \mathbb{P}_\xi(S)$$

Definition (Zufallsvariable)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ ein *Messraum*. Dann ist eine *Zufallsvariable (ZV)* definiert als eine Abbildung $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ mit der *Messbarkeitseigenschaft*

$$\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } S \in \mathcal{S}. \tag{3}$$



$$\mathbb{P}\big(\xi^{-1}(S)\big) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}) =: \mathbb{P}_\xi(S)$$

2. Definieren Sie den Begriff der multivariaten Verteilung eines Zufallsvektors.

Definition (Multivariate Verteilung)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n-dimensionaler Messraum und

$$\xi : \Omega \to \mathcal{X}, \omega \mapsto \xi(\omega) \tag{4}$$

sei ein Zufallsvektor. Dann heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_\xi$, definiert durch

$$\mathbb{P}_\xi : \mathcal{S} \to [0,1], S \mapsto \mathbb{P}_\xi(S) := \mathbb{P}(\xi^{-1}(S)) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}\right) \tag{5}$$

die *multivariate Verteilung des Zufallsvektor* ξ.

3. Definieren Sie den Begriff der multivariaten WMF.

Definition (Diskreter Zufallsvektor, Multivariate WMF)

ξ sei ein Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X}$. ξ heißt *diskreter Zufallsvektor* wenn der Ergebnisraum $\mathcal{X}$ endlich oder abzählbar ist und eine Funktion

$$p_\xi : \mathcal{X} \to [0, 1], x \mapsto p_\xi(x) \tag{6}$$

existiert, für die gilt

(1) $\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$ und

(2) $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = p(x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$.

Ein entsprechende Funktion p heißt *multivariate Wahrscheinlichkeitsmassefunktion (WMF)* von ξ.

4. Definieren Sie den Begriff der multivariaten WDF.

Definition (Kontinuierlicher Zufallsvektor, Multivariate WDF)

Ein Zufallsvektor ξ heißt *kontinuierlich*, wenn $\mathbb{R}^n$ der Ergebnisraum von ξ ist und eine Funktion

$$p_\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p_\xi(x), \tag{7}$$

existiert, für die gilt

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} p_\xi(x)\, dx = 1$ und

(2) $\mathbb{P}_\xi(x_1 \leq \xi \leq x_2) = \int_{x_{1_1}}^{x_{2_1}} \cdots \int_{x_{1_n}}^{x_{2_n}} p_\xi(s_1, ..., s_n)\, ds_1 \cdots ds_n.$

Eine entsprechende Funktion p heißt *multivariate Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)* von ξ.

5. Definieren Sie den Begriff der univariaten Marginalverteilung eines Zufallsvektors.

Definition (Univariate Marginalverteilung)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein n-dimensionaler Messraum, $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ sei ein Zufallsvektor, $\mathbb{P}_\xi$ sei die Verteilung von ξ, $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}$ sei der Ergebnisraum der $i$ten Komponente ξ_i von ξ, und $\mathcal{S}_i$ sei eine σ-Algebra auf ξ_i. Dann heißt die durch

$$\mathbb{P}_{\xi_i} : \mathcal{S}_i \to [0,1], S \mapsto \mathbb{P}_\xi \left(\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_{i-1} \times S \times \mathcal{X}_{i+1} \times \cdots \times \mathcal{X}_n \right) \text{ für } S \in \mathcal{S}_i \tag{8}$$

definierte Verteilung die *$i$te univariate Marginalverteilung von* ξ.

Anmerkungen:

- $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_{i-1} \times S \times \mathcal{X}_{i+1} \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ ist das kartesischer Produkt aus der Menge S und der Ergebnisräume $\mathcal{X}_j \subset \mathcal{X}, j \neq i$, also die Ergebnisräume, die *nicht* der Ergebnisraum $i$ten Komponente sind.
- Das Ergebnis des kartesischen Produkts $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_{i-1} \times S \times \mathcal{X}_{i+1} \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ ist wiederum eine Menge.

Beispiel (Marginale Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen)

Wir betrachten erneut den zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ der Werte in $\mathcal{X} := \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$ annimmt, wobei $\mathcal{X}_1 := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ seien.

Basierend auf der oben definierten WMF ergeben sich folgende marginale WMFen p_{ξ_1} und p_{ξ_2}:

$p_\xi(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{\xi_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.1	0.0	0.2	0.1	0.4
$x_1 = 2$	0.1	0.2	0.0	0.0	0.3
$x_1 = 3$	0.0	0.1	0.1	0.1	0.3
$p_{\xi_2}(x_2)$	0.2	0.3	0.3	0.2	

Man beachte, dass $\sum_{x_1=1}^{3} p_{\xi_1}(x_1) = 1$ und $\sum_{x_2=1}^{4} p_{\xi_2}(x_2) = 1$ gilt.

Die univariate Marginalverteilungen sind gemäß (8) für ξ_1 durch $\mathbb{P}_\xi(\mathcal{X}_2 \times S)$ und für ξ_2 durch $\mathbb{P}_\xi(\mathcal{X}_1 \times S)$.

Wir betrachten zum Bespeil die univariate Marginalverteilung von ξ_2:

- Das kartesische Produkt aus $\mathcal{X}_1$ und S ergibt eine Menge. So ergibt $\mathcal{X}_1 \times S$ die Menge $\{(1, S), (2, S), (3, S)\}$, für $S \in \mathcal{S}_2$.
- $S \in \mathcal{S}_2$ sagt uns, dass die Menge S ein Element der Menge von Teilmengen $\mathcal{S}_2$ ist. Dabei ist $\mathcal{S}_2$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{X}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$.
- In der Tabelle oben betrachten wir für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von ξ_2 die Wahrscheinlichkeiten für die Fälle, dass $S = \{1\}$ (erste Spalte), $S = \{2\}$ (zweite Spalte), $S = \{3\}$ (dritte Spalte) oder $S = \{4\}$ (vierte Spalte).
- z.B. ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite Komponente den Wert 1 annimment gegeben durch $p_{\xi_2}(1)$ und das entspricht der W'verteilung $\mathbb{P}_\xi(\mathcal{X}_1 \times S)$ für $S = \{1\}$, also $\mathbb{P}_\xi(\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\})$.

6. Wie berechnet man die WMF der $i$ten Komponente eines diskreten Zufallsvektors?

$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ sei ein n-dimensionaler diskreter Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsmassefunktion p_ξ und Komponentenergebnisräumen $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$. Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsmassefunktion der $i$ten Komponente ξ_i von ξ als

$$p_{\xi_i} : \mathcal{X}_i \to [0, 1], x_i \mapsto p_{\xi_i}(x_i) := \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} \cdots \sum_{x_n} p_\xi(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n). \quad (9)$$

7. Wie berechnet man die WDF der $i$ten Komponente eines kontinuierlichen Zufallsvektors?

$\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ sei ein n-dimensionaler kontinuierlicher Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion p_ξ und Komponentenergebnisraum $\mathbb{R}$. Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der $i$ten Komponente ξ_i von ξ als

$$p_{\xi_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x_i \mapsto p_{\xi_i}(x_i) := \int_{x_1} \cdots \int_{x_{i-1}} \int_{x_{i+1}} \cdots \int_{x_n} p_\xi(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_{i-1}\, dx_{i+1} ... dx_n. \tag{10}$$

8. Definieren Sie den Begriff der Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen.

Definition (Unabhängige Zufallsvariablen)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ ein zweidimensionaler Zufallsvektor. Die Zufallsvariablen ξ_1, ξ_2 mit Ergebnisräumen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ heißen *unabhängig*, wenn für alle $S_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ und $S_2 \subseteq \mathcal{X}_2$ gilt, dass

$$\mathbb{P}_\xi(\xi_1 \in S_1, \xi_2 \in S_2) = \mathbb{P}_{\xi_1}(\xi_1 \in S_1)\mathbb{P}_{\xi_2}(\xi_2 \in S_2). \tag{11}$$

Bemerkung: Die Definition unabhängiger Zufallsvariablen ist analog zu der Definition unabhängiger Ereignisse.

Wdhl.:

Definition (Unabhängige Ereignisse)

Zwei Ereignisse $A \in \mathcal{A}$ and $B \in \mathcal{A}$ heißen *(stochastisch) unabhängig*, wenn

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \tag{12}$$

Eine Menge von Ereignissen $\{A_i | i \in I\} \subset \mathcal{A}$ mit beliebiger Indexmenge I heißt (stochastisch) unabhängig, wenn für jede endliche Untermenge $J \subseteq I$ gilt, dass

$$\mathbb{P}\left(\cap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j). \tag{13}$$

9. Wie erkennt man an der gemeinsamen WMF oder WDF eines zweidimensionalen Zufallsvektors, ob die Komponenten des Zufallsvektors unabhängig sind oder nicht?

Unabhängigkeit zweier ZVen entspricht der Faktorisierung ihrer gemeinsam WMF/WDF. *Faktorisierung* bezeichnet die Produkteigenschaft $p_\xi(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)$. Mit anderen Worten, zwei ZVen oder die zwei Komponenten eines zweidimensionalen Zufallsvektors gelten als unabhängig, wenn die gemeinsame WMF oder WDF eines zweidimensionalen Zufallsvektors dem Produkt der marginalen WMF bzw. WDF entspricht.

Theorem (Unabhängigkeit und Faktorisierung der WMF/WDF)

(1) $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ sei ein diskreter Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, WMF p_ξ und marginalen WMFen p_{ξ_1}, p_{ξ_2}. Dann gilt

$$\xi_1 \text{ und } \xi_2 \text{ sind unabhängige Zufallsvariablen} \Leftrightarrow$$

$$p_\xi(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2. \tag{14}$$

(2) $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ sei ein kontinuierlicher Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathbb{R}^2$, WDF p_ξ und marginalen WDFen p_{ξ_1}, p_{ξ_2}. Dann gilt

$$\xi_1 \text{ und } \xi_2 \text{ sind unabhängige Zufallsvariablen} \Leftrightarrow$$

$$p_\xi(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2) \text{ für alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{15}$$

Beispiel: Unabhängigkeit diskreter Zufallsvariablen

Wir betrachten den zweidimensionalen Zufallsvektor $\xi := (\xi_1, \xi_2)$, der Werte in $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$ annimmt, und dessen gemeinsame und marginale WMFen die untenstehende Form haben

$p_\xi(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{\xi_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.10	0.00	0.20	0.10	0.40
$x_1 = 2$	0.10	0.20	0.00	0.00	0.30
$x_1 = 3$	0.00	0.10	0.10	0.10	0.30
$p_{\xi_2}(x_2)$	0.20	0.30	0.30	0.20	

Da hier gilt, dass

$$p_\xi(1, 1) = 0.10 \neq 0.08 = 0.40 \cdot 0.20 = p_{\xi_1}(1)p_{\xi_2}(1) \tag{16}$$

sind die Zufallsvariablen ξ_1 und ξ_2 nicht unabhängig.

Die gemeinsame Verteilung von ξ_1 und ξ_2 unter der Annahme der Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 bei gleichen Marginalverteilungen ergibt sich zu (Mit anderen Worten, wären ξ_1 und ξ_2 unabhäng, und die Marginalverteilungen gegeben wie oben, dann sähe die gemeinsame Verteilung so aus:)

$p_\xi(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$	$p_{\xi_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.08	0.12	0.12	0.08	0.40
$x_1 = 2$	0.06	0.09	0.09	0.06	0.30
$x_1 = 3$	0.06	0.09	0.09	0.06	0.30
$p_{\xi_2}(x_2)$	0.20	0.30	0.30	0.20	

Für jede gemeinsame Wahrscheinlichkeit (jede Zelle) gilt $p_\xi(x_1, x_2) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)$. z.B. $p_\xi(1, 1) = p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2) = 0.40 \cdot 0.20 = 0.08$

Beispiel: Unabhängigkeit diskreter Zufallsvariablen

Weiterhin ergeben sich im Falle der Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 zum Beispiel die bedingten Wahrscheinlichkeitsmassefunktion $p_{\xi_2|\xi_1}$ zu

$p_{\xi_1\vert\xi_2}(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$
$p_{\xi_2\vert\xi_1=1}(x_2\vert 1)$	$\frac{0.08}{0.40} = 0.2$	$\frac{0.12}{0.40} = 0.3$	$\frac{0.12}{0.40} = 0.3$	$\frac{0.08}{0.40} = 0.2$
$p_{\xi_2\vert\xi_1=2}(x_2\vert 2)$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$
$p_{\xi_2\vert\xi_1=3}(x_2\vert 3)$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.09}{0.30} = 0.3$	$\frac{0.06}{0.30} = 0.2$

Im Falle der Unabhängigkeit von ξ_1 und ξ_2 ändert sich die Verteilung von ξ_2 gegeben (oder im Wissen um) den Wert von ξ_1 also nicht und entspricht jeweils der Marginalverteilung von ξ_2. Dies entspricht natürlich der Intuition der Unabhängigkeit von Ereignissen im Kontext elementarer Wahrscheinlichkeiten.

Wdhl: Bedingte W'keit unter Unabhängigkeit

Theorem (Bedingte Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ seien unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A). \tag{17}$$

10. Definieren Sie den Begriff der Unabhängigkeit von n Zufallsvariablen. Zufallsvariablen.

Definition (n unabhängige Zufallsvariablen)

$\xi := (\xi_1, ..., \xi_n)$ sei ein n-dimensionaler Zufallsvektor mit Ergebnisraum $\mathcal{X} = \times_{i=1}^n \mathcal{X}_i$. Die n Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_n$ heißen *unabhängig*, wenn für alle $S_i \in \mathcal{X}_i, i = 1, ..., n$ gilt, dass

$$\mathbb{P}_\xi(\xi_1 \in S_1, ..., \xi_n \in S_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}_{\xi_i}(\xi_i \in S_i). \tag{18}$$

Wenn der Zufallsvektor eine n-dimensionale WMF oder WDF p_ξ mit marginalen WMFen oder WDFen $p_{\xi_i}, i = 1, ..., n$ besitzt, dann ist die Unabhängigkeit von $\xi_1, ..., \xi_n$ gleichbedeutend mit der Faktorisierung der gemeinsamen WMF oder WDF, also mit

$$p_\xi(\xi_1, ..., \xi_n) = \prod_{i=1}^n p_{\xi_i}(x_i). \tag{19}$$

11. Definieren Sie den Begriff n unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen.

Definition (Unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen)

n Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_n$ heißen *unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.)*, wenn

(1) $\xi_1, ..., \xi_n$ unabhängige Zufallsvariablen sind, und

(2) die Marginalverteilungen der ξ_i übereinstimmen, also gilt, dass

$$\mathbb{P}_{\xi_i} = \mathbb{P}_{\xi_j} \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq n. \tag{20}$$

Wenn die Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_n$ unabhängig und identisch verteilt sind und die $i$te Marginalverteilung $\mathbb{P}_\xi := \mathbb{P}_{\xi_i}$ ist, so schreibt man auch

$$\xi_1, ..., \xi_n \sim \mathbb{P}_\xi. \tag{21}$$