



# Tutorium

## Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

Inhalte basieren auf Kursmaterialien für WTFI von Dirk Ostwald, lizenziert unter CC BY-NC-SA 4.0

### (3) Tutorium - Elementare Wahrscheinlichkeiten

*Follow up zu Fragen im Tutorium*

Es sei  $\Omega$  eine unendliche Menge und eine Menge  $A \subseteq \Omega$ . Kann dann die Komplementärmenge  $A^c$  auch unendlich sein?

Ja, die Komplementärmenge einer unendlichen Menge kann unendlich sein, muss aber nicht. Es kommt ganz darauf an, wie genau  $A$  definiert ist.

### Beispiel 1)

$\Omega := \mathbb{R}$  und  $A := [-\infty, 0[$ .

Dann ist die Komplementärmenge bzgl.  $\Omega$  gegeben als  $A^c := \{x | x \notin A\} = [0, \infty[$ .

### Beispiel 2)

$\Omega := \mathbb{R}$  und  $A := ]-\infty, 0[ \cup ]0, \infty, [$ .

Dann ist die Komplementärmenge bzgl.  $\Omega$  gegeben als  $A^c := \{x | x \notin A\} = \{0\}$ .

Warum lautet die zweite Aussage des Theorems weitere Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten  $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$  und nicht  $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ ?

### Theorem (Weitere Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien  $A, B \in \mathcal{A}$  Ereignisse. Dann gelten

1.  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .
2.  $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
3.  $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .
5.  $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

### Theorem (Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  sei ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt

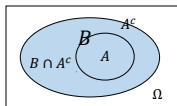
$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0. \tag{1}$$

Warum  $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ ? (fortgeführt)

A

$$A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \cap A^c)$$

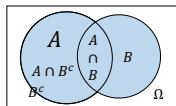
$$A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$$



B

$$(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$$

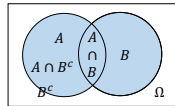
$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$



C

$$B \cap (A \cap B^c) = \emptyset$$

$$A \cup B = B \cup (A \cap B^c)$$



- Zunächst gilt (vgl. Abbildung A)  $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \cap A^c)$ , mit  $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$ .  
 $A \cap (B \cap A^c) = \emptyset$  sagt uns, dass  $A$  und  $(B \cap A^c)$  disjunkt sind.
- Die Wahrscheinlichkeit für  $B$  ist dann die Wahrscheinlichkeit der Vereinigung  $A \cup (B \cap A^c)$ .
- Mit der  $\sigma$ -Additivität  $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$  für paarweise disjunkte  $A_i \in \mathcal{A}$  folgt dann  
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c)$$
- Mit  $\mathbb{P}(B \cap A^c) \geq 0$  folgt dann  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .

### Was sind Beispiele für abhängige oder unabhängige Ereignisse?

#### Beispiel für abhängige Ereignisse

- Wir betrachten das Würfeln mit einem Würfel
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{2\}$  sei das Ereignis "Wir würfeln eine 2".
- $B = \{2, 4, 6\}$  sei das Ereignis "Wir würfeln eine gerade Zahl".
- Die Schnittmenge der beiden Ereignisse ("Wir würfeln eine Zahl, die eine 2 *und* eine gerade Zahl ist.") ist dann  $A \cap B = \{2\}$ .
- Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse sind  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$  und  $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$
- Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Ereignisse ist  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$
- Die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $A$  gegeben das Ereignis  $B$  ist dann

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$$

### Was sind Beispiele für abhängige oder unabhängige Ereignisse?

#### Beispiel 1 für unabhängige Ereignisse

- Wir betrachten das Würfeln mit einem Würfel
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \{2\}$  sei das Ereignis "Wir würfeln eine 2".
- $B = \Omega$  sei das Ereignis "Es fällt eine beliebige Augenzahl".
- Die Schnittmenge der beiden Ereignisse ("Wir würfeln eine Zahl, die eine 2 ist *und* eine beliebige Zahl ist.") ist dann  $A \cap B = \{2\}$ .
- Die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse sind  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$  und  $\mathbb{P}(B) = 1$
- Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Ereignisse ist  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$
- Die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $A$  gegeben das Ereignis  $B$  ist dann

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$$

### Was sind Beispiele für abhängige oder unabhängige Ereignisse?

#### Beispiel 2 für unabhängige Ereignisse

- Wir betrachten das Würfeln mit zwei Würfeln
- $\Omega = \{(r, b) | r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- $A = \{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$  sei das Ereignis "Auf dem roten Würfel fällt eine Drei".
- $B = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$  sei das Ereignis "Auf dem blauen Würfel fällt eine Drei".
- Die Schnittmenge der beiden Ereignisse ("Auf dem roten Würfel fällt eine Drei *und* auf dem blauen Würfel fällt eine Drei.") ist dann  $A \cap B = \{(3, 3)\}$ .
- Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\{(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}) \\ &= \mathbb{P}(\{(3, 1)\}) \cup \mathbb{P}(\{(3, 2)\}) \cup \mathbb{P}(\{(3, 3)\}) \cup \mathbb{P}(\{(3, 4)\}) \cup \mathbb{P}(\{(3, 5)\}) \cup \mathbb{P}(\{(3, 6)\}) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

- Analog dazu ist auch  $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$
- Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit der Ereignisse ist  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(3, 3)\}) = \frac{1}{36}$
- Die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $A$  gegeben das Ereignis  $B$  ist dann

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$$