Tutorium

Wahrscheinlichketstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

11. Erläutern Sie den Begriff des asymptotischen Erwartungstreue eines Schätzers

Definition (Asymptotische Erwartungstreue)

$\upsilon := \upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim p_\theta$ sei die Stichprobe eines parametrischen statistischen Produktmodells $\mathcal{M}$ und $\hat{\tau}_n$ sei ein Schätzer für τ. $\hat{\tau}_n$ heißt *asymptotisch erwartungstreu*, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}_\theta(\hat{\tau}_n(\upsilon)) = \tau(\theta) \text{ für alle } \theta \in \Theta. \tag{1}$$

Bemerkungen

- Asymptotisch erwartungstreue Schätzer sind für "unendlich große" Stichproben erwartungstreu.
- Erwartungstreue Schätzer sind immer auch asymptotisch erwartungstreu.

12. Erläutern Sie den Begriff der Konsistenz eines Schätzers.

Definition (Konsistenz)

$\upsilon := \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n \sim p_\theta$ sei die Stichprobe eines parametrischen statistischen Produktmodells $\mathcal{M}$ und $\hat{\tau}_n$ sei ein Schätzer von τ. Eine Folge von Schätzern $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \ldots$ wird dann eine *konsistente Folge von Schätzern* genannt, wenn für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $\theta \in \Theta$ gilt, dass

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}_\theta \left(|\hat{\tau}_n(\upsilon) - \tau(\theta)| \geq \epsilon \right) = 0.$$

Wenn $\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \ldots$ eine konsistente Folge von Schätzern ist, dann heißt $\hat{\tau}_n$ *konsistenter Schätzer*.

Bemerkungen

- Für $n \to \infty$ wird die Wahrscheinlichkeit, dass $\hat{\tau}_n(\upsilon)$ beliebig nah bei $\tau(\theta)$ liegt, groß.
- Für $n \to \infty$ wird die Wahrscheinlichkeit, dass $\hat{\tau}_n(\upsilon)$ von $\tau(\theta)$ abweicht, klein.
- Diese Eigenschaften gelten für alle möglichen wahren, aber unbekannten, Parameterwerte.
- Die Konvergenz ist *Konvergenz in Wahrscheinlichkeit*.
- Konsistenz von Schätzern kann direkt oder mit Kriterien nachgewiesen werden.

13. Erläutern Sie den Begriff der asymptotischen Normalität eines Schätzers.

Definition (Asymptotische Normalität)

$\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim p_\theta$ sei die Stichprobe eines parametrischen statistischen Produktmodells $\mathcal{M}$ und $\hat{\theta}_n$ sei ein Parameterschätzer für θ. Weiterhin sei $\tilde{\theta} \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswertparameter μ und Varianzparameter σ^2. Wenn $\hat{\theta}_n$ in Verteilung gegen $\tilde{\theta}$ konvergiert, dann heißt $\hat{\theta}_n$ *asymptotisch normalverteilt* und wir schreiben

$$\hat{\theta}_n \overset{a}{\sim} N(\mu, \sigma^2). \tag{2}$$

Bemerkung

- Konvergenz in Verteilung heißt $\lim_{n\to\infty} P_n(\hat{\theta}_n) = P(\tilde{\theta})$.

14. Nennen Sie vier Eigenschaften eines Maximum-Likelihood Schätzers.

Theorem (Eigenschaften von Maximum-Likelihood Schätzern)

$\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim p_\theta$ sei die Stichprobe eines parametrischen statistischen Produktmodells $\mathcal{M}$ und $\hat{\theta}_n^{\text{ML}}$ sei ein Maximum-Likelihood Schätzer für θ. Dann gilt, dass $\hat{\theta}_n^{\text{ML}}$

(1) nicht notwendigerweise erwartungstreu, aber

(2) konsistent,

(3) asymptotisch normalverteilt und

(4) asymptotisch erwartungstreu.

Bemerkungen

- Maximum-Likelihood Schätzer sind überdies asymptotisch effizient