Tutorium

Wahrscheinlichketstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(6) Erwartungswert, Varianz, Kovarianz

Selbstkontrollfragen

1. Definieren und interpretieren Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariable.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert einer Bernoulli Zufallsvariable.
3. Nennen Sie drei Eigenschaften des Erwartungswerts.
4. Definieren und interpretieren Sie die Varianz einer Zufallsvariable.
5. Berechnen Sie die Varianz einer Bernoulli Zufallsvariable.
6. Drücken Sie $\mathbb{E}(\xi^2)$ mithilfe der Varianz und des Erwartungswerts von ξ aus.
7. Was ist $\mathbb{V}(a\xi)$ für konstantes $a \in \mathbb{R}$?
8. Definieren Sie die Kovarianz und Korrelation zweier Zufallsvariablen ξ und υ.
9. Geben Sie das Theorem zur Varianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit wieder.
10. Definieren Sie den Begriff der Stichprobe.
11. Definieren Sie den Begriff des Stichprobenmittels.
12. Definieren Sie Stichprobenvarianz und Stichprobenstandardabweichung.

Selbstkontrollfragen

13. Erläutern Sie die Unterschiede zwischen dem Erwartungswertparameter, dem Erwartungswert und dem Stichprobenmittel von normalverteilten Zufallsvariablen.
14. Definieren Sie die Kovarianz und die Korrelation zweier Zufallsvariablen.
15. Schreiben Sie die Kovarianz zweier Zufallsvariablen mithilfe von Erwartungswerten.
16. Geben Sie das Theorem zur Korrelation und Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen wieder.
17. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit?
18. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen im Allgemeinen?

Wdhl.: Modell und Realität

Repräsentation zentraler Eigenschaften

Modellierung

Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

Probabilistisches Modell

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \xi : \Omega \to \mathbb{R}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\mathbb{P}_\xi(S) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(S))$

Realität

Zufallsvorgänge

Phänomene, die von Menschen nicht mit absoluter Sicherheit vorhergesagt werden können.

Vorhersagen

Quantifizierung von Unsicherheit

Wdhl.: Modell und Realität

Wir nehmen an, dass die BDI Score Fehler der Proband:innen Realisierungen **unabhängiger und identisch** normalverteilter Zufallsvariablen sind.

Modellierung

Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

$$y_{1j} = \mu_1 + \varepsilon_{1j}\,, \varepsilon_{1j} \sim N(0, \sigma^2), j = 1, \ldots, n_1$$

$$y_{2j} = \mu_2 + \varepsilon_{2j}\,, \varepsilon_{2j} \sim N(0, \sigma^2), j = 1, \ldots, n_2$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon_{ij}) = 0, \mathbb{V}(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2 \;\; \forall\, i, j$$

$$\mathbb{C}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}) = 0 \;\; \forall\, i \neq k, j \neq l$$

Realität

Zufallsvorgang

Online Psychotherapie   Klassische Psychotherapie

Klinische Studie zum Vergleich der Effekte von Face-to-Face und Online PT bei Depression

Patient ID	Bedingung	Prä-PT BDI	Post-PT BDI	(Post-Prä) PT BDI
1	Online	29	19	-10
2	Online	[illegible]	30	-3
3	Klassisch	[illegible]	11	[illegible]
4	Online	19	26	7
5	Online	35	29	-6
6	Klassisch	48	10	-38
7	Online	20	15	-5
8	Online	18	11	-7
9	Online	48	28	-20
10	Klassisch	49	23	-26
11	Klassisch	39	10	-29
12	Online	36	24	-12
13	Online	21	27	6
14	Online	46	14	-32
15	Online	20	17	-3
16	Klassisch	23	10	-13

Vorhersagen

1. Definieren und interpretieren Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariable.

Definition (Erwartungswert)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und ξ sei eine Zufallsvariable. Dann ist der *Erwartungswert von* ξ definiert als

- $\mathbb{E}(\xi) := \sum_{x \in \mathcal{X}} x \, p_\xi(x)$, wenn $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ diskret mit WMF p_ξ und Ergebnisraum $\mathcal{X}$ ist,
- $\mathbb{E}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x \, p_\xi(x) \, dx$, wenn $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ kontinuierlich mit WDF p_ξ ist.

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable heißt *existent*, wenn er endlich ist.

Bemerkungen

- Der Erwartungswert ist eine skalare Zusammenfassung einer Verteilung.
- Intuitiv ist $\mathbb{E}(\xi) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ für eine große Zahl n von Kopien ξ_i von ξ.
- Für manche Verteilungen, wie etwa bei einer Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ mit Erwartungswert*parameter* μ und Varianz*parameter* σ^2, entspricht der Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi)$ dem Erwartungswert*parameter* μ, wie die Beweise im VL-Skript zeigen. $\mathbb{E}(\xi)$ und μ sind aber nicht das gleiche!
- Intuitiv kann der Erwartungswert als der Mittelwert von sehr vielen Realisierungen einer ZV verstanden werden. Anders ausgedrückt, bei einer großen Zahl an Realisierungen nähert sich der Mittelwert dem Erwartungswert an.
- Der Erwartungswert kann bestimmt werden, wenn Messraum und Verteilung einer ZV festgelegt wurden.
  - Durch den Messraum wissen wir, welche Werte die ZV annehmen kann.
  - Die Verteilung sagt uns, mit welcher Wahrscheinlichkeitsmasse /-dichte diese Werte assoziiert sind.

2. Berechnen Sie den Erwartungswert einer Bernoulli Zufallsvariable.

Es sei $\xi \sim \text{Bern}(\mu)$. Dann gilt $\mathbb{E}(\xi) = \mu$.

Beweis

ξ ist diskret mit $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. Also gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \sum_{x \in \{0,1\}} x \,\text{Bern}(x; \mu) \\ &= 0 \cdot \mu^0 (1-\mu)^{1-0} + 1 \cdot \mu^1 (1-\mu)^{1-1} \\ &= 1 \cdot \mu^1 (1-\mu)^0 \\ &= \mu. \end{aligned} \tag{1}$$

□

Konkretes Beispiel:

Es sei $\xi \sim \text{Bern}(\mu)$ mit $\mu = 0.5$. Per Definition ist $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ gegeben. Wenn wir sagen, dass das Ergebnis $0 \in \mathcal{X}$ Kopf und $1 \in \mathcal{X}$ Zahl repräsentiert, können wir mit einer Bernoullig-ZV und indem wir ein $\mu = 0.5$ wählen, einen Münzwurf modellieren. Dann ergibt sich für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(\xi) = \mu = 0.5$$

Wdhl.: Bernoulli ZV

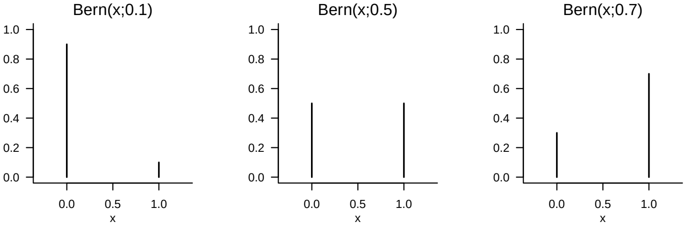
Definition (Bernoulli-Zufallsvariable)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ und WMF

$$p : \mathcal{X} \to [0, 1], x \mapsto p(x) := \mu^x (1 - \mu)^{1-x} \text{ mit } \mu \in [0, 1]. \tag{2}$$

Dann sagen wir, dass ξ einer *Bernoulli-Verteilung mit Parameter* $\mu \in [0, 1]$ unterliegt und nennen ξ eine *Bernoulli-Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $\xi \sim \text{Bern}(\mu)$ ab. Die WMF einer Bernoulli-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$\text{Bern}(x; \mu) := \mu^x (1 - \mu)^{1-x}. \tag{3}$$



$\mathbb{E}(\xi) = 0.1$ $\mathbb{E}(\xi) = 0.5$ $\mathbb{E}(\xi) = 0.7$

3. Nennen Sie drei Eigenschaften des Erwartungswerts.

Theorem (Eigenschaften des Erwartungswerts)

(1) (Linear-affine Transformation) Für eine Zufallsvariable ξ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(a\xi + b) = a\mathbb{E}(\xi) + b. \tag{4}$$

(2) (Linearkombination) Für Zufallsvariablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}(\xi_i). \tag{5}$$

(3) (Faktorisierung bei Unabhängigkeit) Für unabhängige Zufallsvariablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ gilt

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_i). \tag{6}$$

4. Definieren und interpretieren Sie die Varianz einer Zufallsvariable.

Definition (Varianz und Standardabweichung)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi)$. Die *Varianz von* ξ ist definiert als

$$\mathbb{V}(\xi) := \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2\right), \tag{7}$$

unter der Annahme, dass dieser Erwartungswert existiert. Die *Standardabweichung von* ξ ist definiert

$$\mathbb{S}(\xi) := \sqrt{\mathbb{V}(\xi)}. \tag{8}$$

Bemerkungen

- Die Varianz misst die Streuung (Breite) einer Verteilung.
- Quadration ist nötig wegen $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi)) = \mathbb{E}(\xi) - \mathbb{E}(\xi) = 0$.
- Intuitiv quantifiziert die Varianz, wie "viel"die Werte, die eine ZV annehmen kann "variieren", besser gesagt vom Erwartungswert abweichen. Oder anders ausgedrückt um den Erwartungswert streuen.

5. Berechnen Sie die Varianz einer Bernoulli Zufallsvariable.

Es sei $\xi \sim \mathrm{Bern}(\mu)$. Dann ist die Varianz von ξ gegeben durch $\mathbb{V}(\xi) = \mu(1-\mu)$.

Beweis

ξ ist eine diskrete Zufallsvariable und es gilt $\mathbb{E}(\xi) = \mu$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\xi) &= \mathbb{E}\left((\xi-\mu)^2\right) \\
&= \sum_{x \in \{0,1\}} (x-\mu)^2 \mathrm{Bern}(x;\mu) \\
&= (0-\mu)^2 \mu^0 (1-\mu)^{1-0} + (1-\mu)^2 \mu^1 (1-\mu)^{1-1} \\
&= \mu^2(1-\mu) + (1-\mu)^2 \mu \\
&= \left(\mu^2 + (1-\mu)\mu\right)(1-\mu) \\
&= \left(\mu^2 + \mu - \mu^2\right)(1-\mu) \\
&= \mu(1-\mu).
\end{aligned} \tag{9}$$

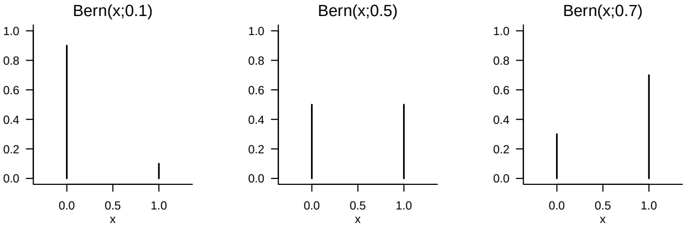
□

Konkretes Beispiel:

Es sei $\xi \sim \mathrm{Bern}(\mu)$ mit $\mu = 0.5$. Dann ergibt sich für die Varianz

$$\mathbb{V}(\xi) = \mu(1-\mu) = 0.5(0.5) = 0.25$$

Weitere Beispiele



$$\mathbb{E}(\xi) = 0.1 \qquad \mathbb{E}(\xi) = 0.5 \qquad \mathbb{E}(\xi) = 0.7$$

$$\mathbb{V}(\xi) = 0.1 \cdot 0.9 = 0.09 \qquad \mathbb{V}(\xi) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25 \qquad \mathbb{V}(\xi) = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21$$

6. Drücken Sie $\mathbb{E}(\xi^2)$ mithilfe der Varianz und des Erwartungswerts von ξ aus.

Gemäß Varianzverschiebungssatz gilt $\mathbb{V}(\xi) = \mathbb{E}\left(\xi^2\right) - \mathbb{E}(\xi)^2$.

Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\xi) &= \mathbb{E}\left(\xi^2\right) - \mathbb{E}(\xi)^2 \\ \Leftrightarrow \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{E}(\xi)^2 &= \mathbb{E}\left(\xi^2\right) \end{aligned}$$

Somit können wir $\mathbb{E}(\xi^2)$ mithilfe der Varianz $\mathbb{V}(\xi)$ und des Erwartungswerts $\mathbb{E}(\xi)$ von ξ aufschreiben, wobei wir den Erwartungswert in Quadrat nehmen, formal

$$\mathbb{E}\left(\xi^2\right) = \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{E}(\xi)^2.$$

7. Was ist $\mathbb{V}(a\xi)$ für konstantes $a \in \mathbb{R}$?

Nach dem ersten Satz des Theorems zu Varianzeigenschaften (Linear-affine Transformation) gilt für eine Zufallsvariable ξ und $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{V}(a\xi + b) = a^2\mathbb{V}(\xi) \text{ und } \mathbb{S}(a\xi + b) = |a|\mathbb{S}(\xi).$$

Somit gilt

$$\mathbb{V}(a\xi) = a^2\mathbb{V}(\xi)$$

8. Definieren Sie die Kovarianz und Korrelation zweier Zufallsvariablen ξ und υ.

Definition (Kovarianz und Korrelation)

Die *Kovarianz* zweier Zufallsvariablen ξ und υ ist definiert als

$$\mathbb{C}(\xi, \upsilon) := \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))\,(\upsilon - \mathbb{E}(\upsilon))\right). \tag{10}$$

Die *Korrelation* zweier Zufallsvariablen ξ und υ ist definiert als

$$\rho(\xi, \upsilon) := \frac{\mathbb{C}(\xi, \upsilon)}{\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\sqrt{\mathbb{V}(\upsilon)}} = \frac{\mathbb{C}(\xi, \upsilon)}{\mathbb{S}(\xi)\mathbb{S}(\upsilon)}. \tag{11}$$

Bemerkungen

- Die Kovarianz von ξ mit sich selbst ist die Varianz von ξ,

$$\mathbb{C}(\xi, \xi) = \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2\right) = \mathbb{V}(\xi). \tag{12}$$

- $\rho(\xi, \upsilon)$ wird auch *Korrelationskoeffizient* von ξ und υ genannt.
- Wenn $\rho(\xi, \upsilon) = 0$ ist, werden ξ und υ *unkorreliert* genannt.

9. Geben Sie das Theorem zur Varianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit wieder.

Nach dem zweiten Satz des Theorems zu Varianzeigenschaften (Linearkombination bei Unabhängigkeit) gilt für unabhängige Zufallsvariablen $\xi_1, ..., \xi_n$ und $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{V}(\xi_i).$$

10. Definieren Sie den Begriff der Stichprobe.

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ seien Zufallsvariablen. Dann nennt man $\xi_1, \ldots, \xi_n$ auch eine *Stichprobe*.

11. Definieren Sie den Begriff des Stichprobenmittels.

Das *Stichprobenmittel* von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ist definiert als der arithmetische Mittelwert

$$\bar{\xi}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i. \tag{13}$$

Bemerkungen

- $\mathbb{E}(\xi), \mathbb{V}(\xi)$, und $\mathbb{S}(\xi)$ sind Kennzahlen einer Zufallsvariable ξ.
- $\bar{\xi}_n, S_n^2$, und S_n sind Kennzahlen einer Stichprobe $\xi_1, \ldots, \xi_n$.
- $\bar{\xi}_n, S_n^2$, und S_n sind Zufallsvariablen, ihre Realisationen werden mit $\bar{x}_n, s_n^2$, und s_n bezeichnet.
- Hingegen sind Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi)$ und Varianz $\mathbb{V}(\xi)$ nicht zufällig.
- Stichprobenkennzahlen können berechnet werden, wenn wir Realisierungen einer ZV haben.

12. Definieren Sie Stichprobenvarianz und Stichprobenstandardabweichung.

Die *Stichprobenvarianz* von $\xi_1, ..., \xi_n$ ist definiert als

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \bar{\xi}_n)^2. \tag{14}$$

Die *Stichprobenstandardabweichung* ist definiert als

$$S_n := \sqrt{S_n^2}. \tag{15}$$

Stichprobenmittel, -varianz und -standardabweichung

- Es seien $\xi_1, ..., \xi_{10} \sim N(1, 2)$.
- Wir nehmen die folgenden Realisationen an

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0.54	1.01	-3.28	0.35	2.75	-0.51	2.32	1.49	0.96	1.25

- Die Stichprobenmittelrealisation ist

$$\bar{x}_{10} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{6.88}{10} = 0.68. \tag{16}$$

- Die Stichprobenvarianzrealisation ist

$$s_{10}^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x}_{10})^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 0.68)^2 = \frac{25.37}{9} = 2.82. \tag{17}$$

- Die Stichprobenstandardabweichungrealisation ist

$$s_{10} = \sqrt{s_{10}^2} = \sqrt{2.82} = 1.68. \tag{18}$$

13. Erläutern Sie die Unterschiede zwischen dem Erwartungswertparameter, dem Erwartungswert und dem Stichprobenmittel von normalverteilten Zufallsvariablen.

- Der Erwartungswertparameter, so wie wir ihn für die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ definieren, ist eine im Modell gegebene Größe, welche die funktionale Form (i.e. $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$) der Normalverteilung (mit) vorgibt.
  - Unterschiedliche Werte für den Parameter μ ergeben unterschiedliche funktionale Formen (vgl. Einheit (4) Zufallsvariablen)
- Der Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi)$ ist eine Kennzahl einer Zufallsvariable ξ.
  - Für eine gegebene ZV mit definiertem Messraum und Verteilung ergibt sich immer der gleiche Erwartungswert.
- Das Stichprobenmittel $\bar{\xi}_n$ ist eine Kennzahle einer Stichprobe $\xi_1, ..., \xi_n$.
  - $\bar{\xi}_n$ ist eine Zufallsvariable, dessen Realisation mit $\bar{x}_n$ bezeichnet wird; so wie die Realisation einer Stichprobe mit $x_1, ..., x_n$ bezeichnet wird.
  - Für eine gegebene Stichprobe $\xi_1, ..., \xi_n$ ist das Stichprobenmittel immer die Kennzahl $\bar{\xi}_n$.
  - Jede Realisation einer Stichprobe $(x_1, ..., x_n)$ hat zugehörige Stichprobenkennzahlen, zu denen auch das Stichprobenmittel $\bar{x}_n$ zählt. Dieser Wert ist bei gegebener Stichprobenrealisation immer der gleiche.
  - Verschiedenen Realisationen $x_1, ..., x_n$ einer Stichprobe $\xi_1, ..., \xi_n$ können (und werden aller Wahrscheinlichkeit nach) verschiedene Werte für die Realisation $\bar{x}_n$ des Stichprobenmittels $\bar{\xi}_n$ ergeben.

14. Definieren Sie die Kovarianz und die Korrelation zweier Zufallsvariablen.

Definition (Kovarianz und Korrelation)

Die *Kovarianz* zweier Zufallsvariablen ξ und υ ist definiert als

$$\mathbb{C}(\xi, \upsilon) := \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))(\upsilon - \mathbb{E}(\upsilon))\right). \tag{19}$$

Die *Korrelation* zweier Zufallsvariablen ξ und υ ist definiert als

$$\rho(\xi, \upsilon) := \frac{\mathbb{C}(\xi, \upsilon)}{\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\sqrt{\mathbb{V}(\upsilon)}} = \frac{\mathbb{C}(\xi, \upsilon)}{\mathbb{S}(\xi)\mathbb{S}(\upsilon)}. \tag{20}$$

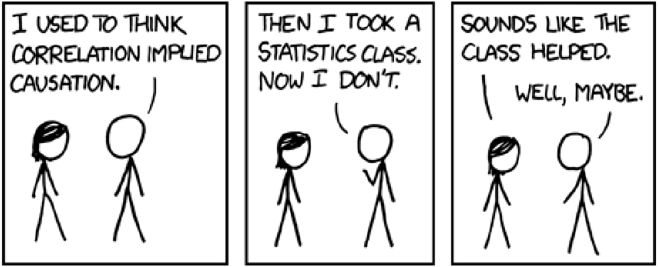
Bemerkungen

- Die Kovarianz von ξ mit sich selbst ist die Varianz von ξ,

$$\mathbb{C}(\xi, \xi) = \mathbb{E}\left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2\right) = \mathbb{V}(\xi). \tag{21}$$

- $\rho(\xi, \upsilon)$ wird auch *Korrelationskoeffizient* von ξ und υ genannt.
- Wenn $\rho(\xi, \upsilon) = 0$ ist, werden ξ und υ *unkorreliert* genannt.
- Es gilt $-1 \le \rho(\xi, \upsilon) \le 1$.

Korrelation und Kausalität



(Quelle: https://xkcd.com/552/)

Beispiel (aus VL)

Es sei $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ ein Zufallsvektor mit WMF p_{ξ_1,ξ_2} definiert durch

$p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$p_{\xi_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.10	0.05	0.15	0.30
$x_1 = 2$	0.60	0.05	0.05	0.70
$p_{\xi_2}(x_2)$	0.70	0.10	0.20	

ξ_1, ξ_2 sind also zwei Zufallsvariablen mit einer definierten bivariaten Verteilung. Um $\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2)$ und $\rho(\xi_1, \xi_2)$ zu berechnen, halten wir zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(\xi_1) = \sum_{x_1=1}^{2} x_1 p_{\xi_1}(x_1) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.7 = 1.7 \tag{22}$$

und

$$\mathbb{E}(\xi_2) = \sum_{x_2=1}^{3} x_2 p_{\xi_2}(x_2) = 1 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 = 1.5. \tag{23}$$

Mit der Definition der Kovarianz von ξ_1 und ξ_2, gilt dann

Beispiel (aus VL)

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2) \\
&= \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))) \\
&= \sum_{x_1=1}^{2} \sum_{x_2=1}^{3} (x_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(x_2 - \mathbb{E}(\xi_2)) p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) \\
&= \sum_{x_1=1}^{2} \sum_{x_2=1}^{3} (x_1 - 1.7)(x_2 - 1.5) p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) \\
&= \sum_{x_1=1}^{2} (x_1 - 1.7)(1 - 1.5) p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, 1) \\
&\qquad + (x_1 - 1.7)(2 - 1.5) p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, 2) \\
&\qquad + (x_1 - 1.7)(3 - 1.5) p_{\xi_1,\xi_2}(x_1, 3) \\
&= \quad (1 - 1.7)(1 - 1.5) p_{\xi_1,\xi_2}(1, 1) + (1 - 1.7)(2 - 1.5) p_{\xi_1,\xi_2}(1, 2) + (1 - 1.7)(3 - 1.5) p_{\xi_1,\xi_2}(1, 3) \\
&\quad + (2 - 1.7)(1 - 1.5) p_{\xi_1,\xi_2}(2, 1) + (2 - 1.7)(2 - 1.5) p_{\xi_1,\xi_2}(2, 2) + (2 - 1.7)(3 - 1.5) p_{\xi_1,\xi_2}(2, 3) \\
&= \quad (-0.7) \cdot (-0.5) \cdot 0.10 \qquad + (-0.7) \cdot 0.5 \cdot 0.05 \qquad + (-0.7) \cdot 1.5 \cdot 0.15 \\
&\quad + 0.3 \cdot (-0.5) \cdot 0.60 \qquad + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.05 \qquad + 0.3 \cdot 1.5 \cdot 0.05 \\
&= 0.035 - 0.0175 - 0.1575 - 0.09 + 0.0075 + 0.0225 \\
&= -0.2.
\end{aligned}
$$

15. Schreiben Sie die Kovarianz zweier Zufallsvariablen mithilfe von Erwartungswerten.

Gemäß Kovarianzverschiebungssatz gilt für zwei Zufallsvariablen ξ und υ

$$\mathbb{C}(\xi, \upsilon) = \mathbb{E}(\xi\upsilon) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(\upsilon)$$

Die Kovarianz ergibt sich aus der Differenz von dem Erwartungswert des Produktes und dem Produkt beider Erwartungswerte.

16. Geben Sie das Theorem zur Korrelation und Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen wieder.

Theorem (Korrelation und Unabhängigkeit)

ξ und υ seien zwei Zufallsvariablen. Wenn ξ und υ unabhängig sind, dann ist $\mathbb{C}(\xi, \upsilon) = 0$ und ξ und υ sind unkorreliert. Ist dagegen $\mathbb{C}(\xi, \upsilon) = 0$ und sind ξ und υ somit unkorreliert, dann sind ξ und υ nicht notwendigerweise unabhängig.

17. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit?

Generell gilt

$$\mathbb{V}(a\xi + b\upsilon + c) = a^2\mathbb{V}(\xi) + b^2\mathbb{V}(\upsilon) + 2ab\mathbb{C}(\xi, \upsilon).$$

Da bei bei Unabhängigkeit $\mathbb{C}(\xi, \upsilon) = 0$, ist die Varianz der Summe zweier ZVen gegeben durch die Summe der Varianzen, formal

$$\mathbb{V}(\xi + \upsilon) = \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{V}(\upsilon).$$

18. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen im Allgemeinen?

Theorem (Varianzen von Summen und Differenzen von Zufallsvariablen)

ξ und υ seien zwei Zufallsvariablen und es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathbb{V}(a\xi + b\upsilon + c) = a^2\mathbb{V}(\xi) + b^2\mathbb{V}(\upsilon) + 2ab\mathbb{C}(\xi, \upsilon). \tag{24}$$

Speziell gelten

$$\mathbb{V}(\xi + \upsilon) = \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{V}(\upsilon) + 2\mathbb{C}(\xi, \upsilon) \tag{25}$$

und

$$\mathbb{V}(\xi - \upsilon) = \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{V}(\upsilon) - 2\mathbb{C}(\xi, \upsilon) \tag{26}$$

Bemerkungen

- Varianzen von Zufallsvariablen addieren sich nicht einfach. (Außer die ZVen sind unabhängig, dann gilt der zweite Satz des Theorems zu Eigenschaften der Varianz (Linearkombination bei Unabhängigkeit)
- Die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen hängt von ihrer Kovarianz ab.