# Tutorium

## Wahrscheinlichketstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

# (4) Zufallsvariablen

# Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff der Zufallsvariable.
2. Erläutern Sie die Gleichung $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}(\{\xi = x\})$.
3. Erläutern Sie die Bedeutung von $\mathbb{P}(\xi = x)$.
4. Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion.
5. Definieren Sie die Begriffe der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.
6. Definieren Sie den Begriff der kumulativen Verteilungsfunktion.
7. Schreiben sie die Intervallwahrscheinlichkeit einer Zufallsvariable mithilfer ihrer KVF.
8. Definieren Sie die WDF und KVF einer normalverteilten Zufallsvariable.
9. Schreiben Sie den Wert $P(x)$ der KVF einer Zufallsvariable mithilfe ihrer WDF.
10. Schreiben Sie den Wert $p(x)$ der WDF einer Zufallsvariable mithilfe ihrer KVF.
11. Definieren Sie den Begriff der inversen Verteilungsfunktion.

## 1. Definieren Sie den Begriff der Zufallsvariable.

### Definition (Zufallsvariable)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ ein *Messraum*. Dann ist eine *Zufallsvariable (ZV)* definiert als eine Abbildung $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ mit der *Messbarkeitseigenschaft*

$$\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } S \in \mathcal{S}. \tag{1}$$

## 2. Erläutern Sie die Gleichung $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}(\{\xi = x\})$.

- $\mathbb{P}_\xi(\xi = x)$ ist die Wahrscheinlichkeit (genauer gesagt das Wahrscheinlichkeitsmaß des Wahrscheinlichkeitsraums $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P}_\xi)$) dafür, dass die Zufallsvariable $\xi$ den Wert $x$ annimmt.
- Diese Wahrscheinlichkeit entspricht der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{\xi = x\})$ (genauer gesagt dem Wahrscheinlichktsmaß des Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$).
- Dabei ist $\mathbb{P}(\{\xi = x\})$ die Wahrscheinlichkeit für die Menge $\{\xi = x\}$, welche definiert ist als

$$\{\xi = x\} := \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x\}, \text{ wobei } x \in \mathcal{X}.$$

Das ist die Menge *der* $\omega$'s, die von $\xi$ auf $x$ abgebildet werden, also das Urbild von $x$.

## 2. Erläutern Sie die Gleichung $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}(\{\xi = x\})$.

*Beispiel*

Für das Werfen zweier Würfel ist ein sinnvolles Wahrscheinlichkeitsraum-Modell

- $\Omega := \{(r, b) | r \in \mathbb{N}_6, b \in \mathbb{N}_6\}$
- $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$.
- $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit $\mathbb{P}(\{(r, b)\}) = 1/36$ für alle $(r, b) \in \Omega$.

Die Augenzahl-Summenbildung wird dann sinnvoller Weise durch die Zufallsvariable

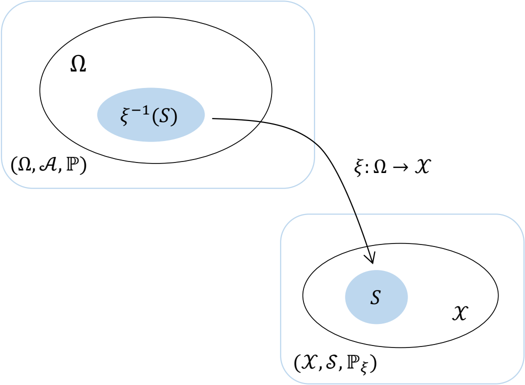
$$\xi : \Omega \to \mathcal{X}, (r, b) \mapsto \xi((r, b)) := r + b.$$

beschrieben, wobei $\mathcal{X} := \{2, 3, ..., 12\}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die ZV den Wert 2 annimmnt, also $\mathbb{P}_\xi(\xi = 2)$ im Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P}_\xi)$ wäre dann gleich der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{\xi = 2\})$ im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, also der Wahrscheinlichkeit des Urbilds von $x$, nämlich $\mathbb{P}(\xi^{-1}(\{2\}))$. Formal

$$\mathbb{P}_\xi(\xi = 2) = \mathbb{P}(\{\xi = 2\}) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(\{2\})) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}$$

# Veranschaulichung




$$\mathbb{P}\big(\xi^{-1}(S)\big) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\}) =: \mathbb{P}_\xi(S)$$

## 3. Erläutern Sie die Bedeutung von $\mathbb{P}(\xi = x)$.

Bei der Notation der Verteilung von Zufallsvariablen wird oft auf das ZV Subskript verzichtet. $\mathbb{P}(\xi = x)$ steht dann für $\mathbb{P}_\xi(\xi = x)$, was die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ZV $\xi$ den Wert $x$ annimmt, repräsentiert.

Weitere Beispiele sind

$$\mathbb{P}\left(\xi \in S\right) = \mathbb{P}_\xi\left(\xi \in S\right), S \subset \mathcal{X},$$
$$\mathbb{P}\left(\xi \leq x\right) = \mathbb{P}_\xi\left(\xi \leq S\right), x \in \mathcal{X}.$$

## Definition (Realisierung einer Zufallsvariable)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ sei ein Messraum und $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ sei eine Zufallsvariable. Dann heißt $\xi(\omega) \in \mathcal{X}$ auch *Realisierung der Zufallvariable*.

- In der Datenanalyse werden Daten typischerweise als Realisierungen von Zufallsvariablen modelliert.
- Da die Auswahl eines $\omega \in \Omega$ in einem Zufallsvorgang zufällig ist, erscheint $\xi(\omega)$ zufällig.

### Simulation von Zufallsvariablenrealisierungen (Summe zweier Würfel)

```
# Wahrscheinlichkeitsraummodell
Omega    = list()                              # Ergebnisrauminitialisierung
idx      = 1                                   # Ergebnisindexinitialisierung
for(r in 1:6){                                 # Ergebnisse roter  Würfel
    for(b in 1:6){                             # Ergebnisse blauer Würfel
        Omega[[idx]] = c(r,b)                  # \omega \in \Omega
        idx          = idx + 1 }}              # Ergebnisindexupdate
K        = length(Omega)                       # Kardinalität von \Omega
pi       = rep(1/K,1,K)                        # Wahrscheinlichkeitsfunktion \pi

# Zufallsvorgang
omega    = Omega[[which(rmultinom(1,1,pi) == 1)]] # Auswahl von \omega anhand \mathbb{P}({\omega})

# Auswertung der Zufallsvariable
xi_omega = sum(omega)                          # \xi(\omega)
```

```
> omega     :  4 2
> xi(omega) :  6
```

# Wdhl.: Modell und Realität

Repräsentation zentraler Eigenschaften

Modellierung

## Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

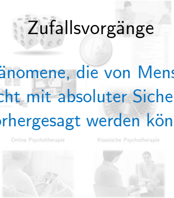
Probabilistisches Modell

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \xi : \Omega \to \mathbb{R}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\mathbb{P}_\xi(S) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(S))$

## Realität




Zufallsvorgänge

Phänomene, die von Menschen nicht mit absoluter Sicherheit vorhergesagt werden können.

Vorhersagen

Quantifizierung von Unsicherheit

# Wdhl.: Modell und Realität

Jedes Augenzahlpaar kommt im Mittel gleich häufig vor.

Basierend auf der Physik sollte jedes Augenzahlpaar die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Modellierung

## Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

$\Omega \coloneqq \{(r,b) | r \in \mathbb{N}_6, b \in \mathbb{N}_6\}$

$\mathcal{A} \coloneqq \mathcal{P}(\Omega)$ $\mathbb{P}(\{\omega\}) \coloneqq 1/36$

$\xi: \Omega \to \mathbb{R}, \xi(r,b) \coloneqq r + b$

## Realität

Zufallsvorgang


Vorhersagen

Die Summe der Augenzahlen ist eine Zufallsvariable mit Verteilung $\mathbb{P}_\xi$.

## 4. Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion.

### Definition (Diskrete ZV, Wahrscheinlichkeitsmassefunktion)

Eine Zufallsvariable $\xi$ heißt *diskret*, wenn ihr Ergebnisraum $\mathcal{X}$ endlich oder abzählbar ist und eine Funktion der Form

$$p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p(x) \tag{2}$$

existiert, für die gilt

(1) $\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$ und

(2) $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = p(x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$.

Eine entsprechende Funktion $p$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmassefunktion (WMF)* von $\xi$.

## Definition (Diskret-gleichverteilte Zufallsvariable)

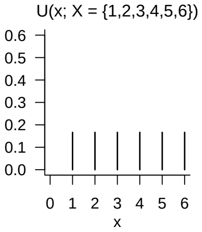
Es sei $\xi$ eine diskrete Zufallsvariable mit endlichem Ergebnisraum $\mathcal{X}$ und WMF

$$p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p(x) := \frac{1}{|\mathcal{X}|}. \tag{3}$$

Dann sagen wir, dass $\xi$ einer *diskreten Gleichverteilung* unterliegt und nennen $\xi$ eine *diskret-gleichverteilte Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $\xi \sim U(|\mathcal{X}|)$ ab. Die WMF einer diskret-gleichverteilten Zufallsvariable bezeichnen wir mit

$$U(x; |\mathcal{X}|) := \frac{1}{|\mathcal{X}|}. \tag{4}$$

Bsp.: Die ZV $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ beschreibe die Augenzahl eines Würfelwurfs mit einem Würfel, wobei $\mathcal{X} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



## 5. Definieren Sie die Begriffe der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

### Definition (Kontinuierliche ZV, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion)

Eine Zufallsvariable $\xi$ heißt *kontinuierlich*, wenn eine Funktion der Form

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p(x) \tag{5}$$

existiert, für die gilt

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$,

(2) $\mathbb{P}_{\xi}(\xi \in [a, b]) = \int_a^b p(x)\,dx$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

Eine entsprechende Funktion $p$ heißt *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)* von $\xi$.

Bemerkungen

- WDFen können Werte größer als $1$ annehmen.
- Es gilt $\mathbb{P}_{\xi}(\xi = a) = \int_a^a p(x)\,dx = 0$.
- Wahrscheinlichkeiten werden aus WDFen durch Integration berechnet.
- (Wahrscheinlichkeits)Masse = (Wahrscheinlichkeits)Dichte $\times$ (Mengen)Volumen.

# Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion - Beispiel

## Definition (Normalverteilte und standardnormalverteilte Zufallsvariablen)

Es sei $\xi$ eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}$ und WDF

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right). \tag{6}$$

Dann sagen wir, dass $\xi$ einer *Normalverteilung (oder Gauß-Verteilung) mit Parametern* $\mu \in \mathbb{R}$ *und* $\sigma^2 > 0$ unterliegt und nennen $\xi$ eine *normalverteilte Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $\xi \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ ab. Die WDF einer normalverteilten Zufallsvariable bezeichnen wir mit

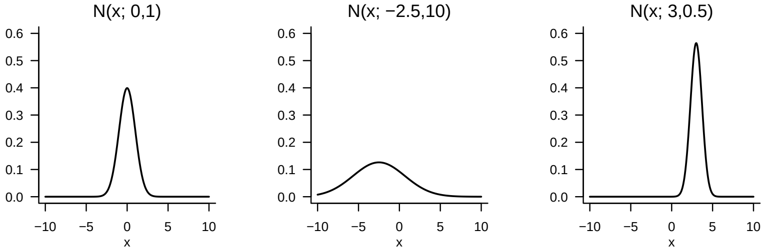
$$N\left(x; \mu, \sigma^2\right) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right). \tag{7}$$

Eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ heißt *standardnormalverteilte Zufallsvariable* und wird oft als $Z$*-Zufallsvariable* bezeichnet.

Bemerkungen

- Der Parameter $\mu$ entspricht dem Wert höchster Wahrscheinlichkeitsdichte.
- Der Parameter $\sigma^2$ spezifiziert die Breite der WDF.

# Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion - Beispiel



## 6. Definieren Sie den Begriff der kumulativen Verteilungsfunktion.

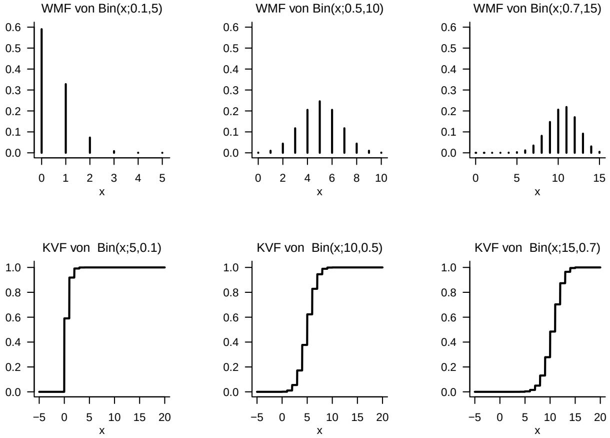
### Definition (Kumulative Verteilungsfunktion)

Die *kumulative Verteilungsfunktion (KVF)* einer Zufallsvariable $\xi$ ist definiert als

$$P : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto P(x) := \mathbb{P}(\xi \leq x). \tag{8}$$

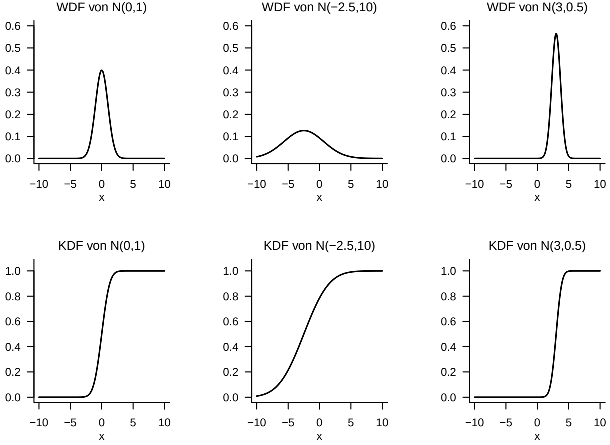
# Kumulativen Verteilungsfunktion - Beispiele

Binomial-Zufallsvariablen



# Kumulativen Verteilungsfunktion - Beispiele

## Normalverteilte Zufallsvariablen



## 7. Schreiben sie die Intervallwahrscheinlichkeit einer Zufallsvariable mithilfer ihrer KVF.

### Theorem (Intervallwahrscheinlichkeiten)

Es sei $\xi$ eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X}$ und $P$ ihre kumulative Verteilungsfunktion. Dann gilt für die *Intervallwahrscheinlichkeit* $\mathbb{P}(\xi \in ]x_1, x_2])$, dass

$$\mathbb{P}(\xi \in ]x_1, x_2]) = P(x_2) - P(x_1) \text{ für alle } x_1, x_2 \in \mathcal{X} \text{ mit } x_1 < x_2. \tag{9}$$

## 8. Definieren Sie die WDF und KVF einer normalverteilten Zufallsvariable.

Es sei $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Die WDF von $\xi$ ist

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right).$$

Die KVF von $\xi$ ist

$$P : \mathbb{R} \to ]0,1[, x \mapsto P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2\right) \, dt.$$

## 9. Schreiben Sie den Wert $P(x)$ der KVF einer Zufallsvariable mithilfe ihrer WDF.

$P(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt$

## 10. Schreiben Sie den Wert $p(x)$ der WDF einer Zufallsvariable mithilfe ihrer KVF.

$p(x) = \frac{d}{dx} P(x)$

Anmerkung: Die KVF ist die Stammfunktion der WDF und die WDF ist die Ableitung der KFV.

## 11. Definieren Sie den Begriff der inversen Verteilungsfunktion.

### Definition (Inverse Kumulative Verteilungsfunktion)

$\xi$ sei eine kontinuierliche Zufallsvariable mit KVF $P$. Dann heißt die Funktion

$$P^{-1} : ]0,1[ \to \mathbb{R}, q \mapsto P^{-1}(q) := \{x \in \mathbb{R} | P(x) = q\} \tag{10}$$

die *inverse kumulative Verteilungsfunktion von* $\xi$.

Bemerkungen

- $P^{-1}$ ist die Inverse von $P$, d.h. $P^{-1}(P(x)) = x$.
  Bsp.: Wir suchen den Wert $x$ (den eine ZV annehmen kann), für den die KVF den Wert 0.3 hat, also $P(x) = 0.3$. Die Inverse, also $P^{-1}(0.3)$ gibt uns diesen Wert.
- Offenbar gilt $P(x) = q \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi \leq x) = q$.
  vgl. Definition der KMF. $P : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto P(X) := \mathbb{P}(\xi \leq x)$
- Für $q \in ]0,1[$ ist also $P^{-1}(q)$ der Wert $x$ von $\xi$, so dass $\mathbb{P}(\xi \leq x) = q$ gilt.
  In unserem Beispiel oben gibt uns $P^{-1}(0.3)$ den Wert $x$, den eine ZV $\xi$ annehmen könnte, so dass gilt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $\xi$ kleiner oder gleich diesem Wert ist, bei $0.3$ liegt
- Wenn $Z \sim N(0,1)$ mit KVF $\Phi$ ist, dann gilt zum Beispiel $\Phi^{-1}(0.975) = 1.960$.
  Beantwortet die Frage Für welchen Wert x ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ZV kleiner oder gleich diesen Wert annimmt, 0.975?