Tutorium

Wahrscheinlichketstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(4) Zufallsvariablen

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff der Zufallsvariable.
2. Erläutern Sie die Gleichung $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}(\{\xi = x\})$.
3. Erläutern Sie die Bedeutung von $\mathbb{P}(\xi = x)$.
4. Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion.
5. Definieren Sie die Begriffe der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.
6. Definieren Sie den Begriff der kumulativen Verteilungsfunktion.
7. Schreiben sie die Intervallwahrscheinlichkeit einer Zufallsvariable mithilfer ihrer KVF.
8. Definieren Sie die WDF und KVF einer normalverteilten Zufallsvariable.
9. Schreiben Sie den Wert $P(x)$ der KVF einer Zufallsvariable mithilfe ihrer WDF.
10. Schreiben Sie den Wert $p(x)$ der WDF einer Zufallsvariable mithilfe ihrer KVF.
11. Definieren Sie den Begriff der inversen Verteilungsfunktion.

1. Definieren Sie den Begriff der Zufallsvariable.

Definition (Zufallsvariable)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{X}, \mathcal{S})$ ein *Messraum*. Dann ist eine *Zufallsvariable (ZV)* definiert als eine Abbildung $\xi : \Omega \to \mathcal{X}$ mit der *Messbarkeitseigenschaft*

$$\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in S\} \in \mathcal{A} \text{ für alle } S \in \mathcal{S}. \tag{1}$$

2. Erläutern Sie die Gleichung $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}(\{\xi = x\})$.

- $\mathbb{P}_\xi(\xi = x)$ ist die Wahrscheinlichkeit (genauer gesagt das Wahrscheinlichkeitsmaß des Wahrscheinlichkeitsraums $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P}_\xi)$) dafür, dass die Zufallsvariable ξ den Wert x annimmt.
- Diese Wahrscheinlichkeit entspricht der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{\xi = x\})$ (genauer gesagt dem Wahrscheinlichktsmaß des Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$).
- Dabei ist $\mathbb{P}(\{\xi = x\})$ die Wahrscheinlichkeit für die Menge $\{\xi = x\}$, welche definiert ist als

$$\{\xi = x\} := \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x\}, \text{ wobei } x \in \mathcal{X}.$$

Das ist die Menge *der* ω's, die von ξ auf x abgebildet werden, also das Urbild von x.

2. Erläutern Sie die Gleichung $\mathbb{P}_\xi(\xi = x) = \mathbb{P}(\{\xi = x\})$.

Beispiel

Für das Werfen zweier Würfel ist ein sinnvolles Wahrscheinlichkeitsraum-Modell

- $\Omega := \{(r, b) | r \in \mathbb{N}_6, b \in \mathbb{N}_6\}$
- $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$.
- $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit $\mathbb{P}(\{(r, b)\}) = 1/36$ für alle $(r, b) \in \Omega$.

Die Augenzahl-Summenbildung wird dann sinnvoller Weise durch die Zufallsvariable

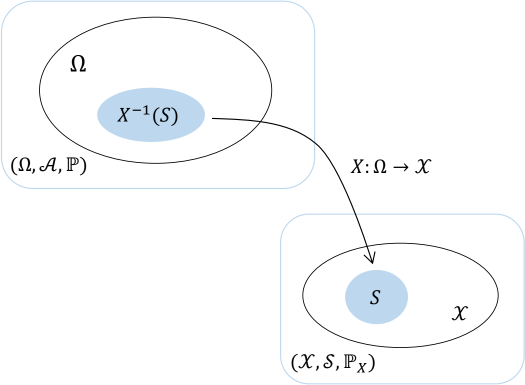
$$\xi : \Omega \to \mathcal{X}, (r, b) \mapsto \xi((r, b)) := r + b.$$

beschrieben, wobei $\mathcal{X} := \{2, 3, ..., 12\}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die ZV den Wert 2 annimmnt, also $\mathbb{P}_\xi(\xi = 2)$ im Wahrscheinlichkeitsraums $(\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathbb{P}_\xi)$ wäre dann gleich der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\{\xi = 2\})$ im Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, also der Wahrscheinlichkeit des Urbilds von x, nämlich $\mathbb{P}(\xi^{-1}(\{2\}))$. Formal

$$\mathbb{P}_\xi(\xi = 2) = \mathbb{P}(\{\xi = 2\}) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(\{2\})) = \mathbb{P}(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}$$

Veranschaulichung



$$\mathbb{P}\big(X^{-1}(S)\big) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in S\}) =: \mathbb{P}_X(S)$$

3. Erläutern Sie die Bedeutung von $\mathbb{P}(\xi = x)$.

Bei der Notation der Verteilung von Zufallsvariablen wird of auf das ZV Subskript verzichtet. $\mathbb{P}(\xi = x)$ steht dann für $\mathbb{P}_\xi(\xi = x)$, was die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ZV ξ den Wert x annimmt repräsentiert.

Weitere Beispiele sind

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\xi \in S\right) = \mathbb{P}_\xi\left(\xi \in S\right), S \subset \mathcal{X}, \\
\mathbb{P}\left(\xi \leq x\right) = \mathbb{P}_\xi\left(\xi \leq S\right), x \in \mathcal{X}.
\end{aligned}
$$

4. Definieren Sie den Begriff der Wahrscheinlichkeitsmassefunktion.

Definition (Diskrete ZV, Wahrscheinlichkeitsmassefunktion)

Eine Zufallsvariable ξ heißt *diskret*, wenn ihr Ergebnisraum $\mathcal{X}$ endlich oder abzählbar ist und eine Funktion der Form

$$p : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto p(x) \tag{2}$$

existiert, für die gilt

(1) $\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$ und

(2) $\mathbb{P}_{\xi}(\xi = x) = p(x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$.

Eine entsprechende Funktion p heißt *Wahrscheinlichkeitsmassefunktion (WMF)* von ξ.