Tutorium

Wahrscheinlichketstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

(3) Elementare Wahrscheinlichkeiten

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie die Frequentistische Interpretation der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.
2. Erläutern Sie die Bayesianische Interpretation der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.
3. Geben Sie die Definition der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse wieder.
4. Erläutern Sie die intuitive Bedeutung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse.
5. Geben Sie das Theorem zu weiteren Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten wieder.
6. Geben Sie die Definition der Unabhängigkeit zweier Ereignisse wieder.
7. Geben Sie die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und der bedingten Wahrscheinlichkeit wieder.
8. Geben Sie das Theorem zur bedingten Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit wieder.
9. Erläutern Sie den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit vor dem Hintergrund des Theorems zur bedingten Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit.
10. Geben Sie das Theorem zu gemeinsamen und bedingten Wahrscheinlichkeiten wieder.
11. Geben Sie das Gesetz von der totalen Wahrscheinlichkeit wieder.
12. Geben Sie das Theorem von Bayes wieder.
13. Erläutern Sie das Theorem von Bayes im Rahmen der Bayesianischen Inferenz.
14. Beweisen Sie das Theorem von Bayes.

Repräsentation zentraler Eigenschaften

Modellierung

Modell

Wahrscheinlichkeitstheorie

Probabilistisches Modell

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \xi : \Omega \to \mathbb{R}$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\mathbb{P}_\xi(S) = \mathbb{P}(\xi^{-1}(S))$

Realität

Zufallsvorgänge

Phänomene, die von Menschen nicht mit absoluter Sicherheit vorhergesagt werden können.

Vorhersagen

Quantifizierung von Unsicherheit

Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)

Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Triple $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei

- Ω eine beliebige nichtleere Menge von *Ergebnissen* ω ist und *Ergebnismenge* heißt,
- $\mathcal{A}$ eine *σ-Algebra auf* Ω ist und *Ereignissystem* heißt,
- $\mathbb{P}$ eine Abbildung der Form $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit den Eigenschaften
  - *Nicht-Negativität* $\mathbb{P}(A) \geq 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$,
  - *Normiertheit* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und
  - *σ-Additivität* $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ für paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{A}$

  ist und *Wahrscheinlichkeitsmaß* heißt.

Das Tuple $(\Omega, \mathcal{A})$ aus Ergebnismenge und Ereignissystem wird als *Messraum* bezeichnet.

Verknüpfungen von Mengen - Wiederholung

Definition (Mengenoperationen)

M und N seien zwei Mengen.

- Die *Vereinigung von M und N* ist definiert als die Menge
$$M \cup N := \{x | x \in M \text{ oder } x \in N\}, \tag{1}$$
wobei *oder* im inklusiven Sinne als *und/oder* zu verstehen ist.
- Der *Durchschnitt von M und N* ist definiert als die Menge
$$M \cap N := \{x | x \in M \text{ und } x \in N\}. \tag{2}$$
- Die *Differenz von M und N* ist definiert als die Menge
$$M \setminus N := \{x | x \in M \text{ und } x \notin N\}. \tag{3}$$
- Die *symmetrische Differenz von M und N* ist definiert als die Menge
$$M \Delta N := \{x | x \in M \text{ oder } x \in N, \text{ aber } x \notin M \cap N\}, \tag{4}$$
wobei *oder* hier also im exklusiven Sinne zu verstehen ist.

Definition (Komplementärmenge)

Es sei A eine Teilmenge von U. Dann heißt die Menge

$$A^c := U \setminus A = \{x \in U | x \notin A\}$$

Komplementärmenge von A.

1. Erläutern Sie die Frequentistische Interpretation der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

- Nach der **Frequentistischen Interpretation** ist $\mathbb{P}(A)$ die idealisierte relative Häufigkeit, mit der das Ereignis A unter den gleichen äußeren Bedingungen einzutreten pflegt.
- Zum Beispiel ist die frequentistische Interpretation von $\mathbb{P}(\{6\})$ im Modell des Werfens eines Würfels "Wenn man einen Würfel unendlich oft werfen würde und die relative Häufigkeit des Elementareignisses $\{6\}$ bestimmen würde, dann wäre diese relative Häufigkeit gleich $\mathbb{P}(\{6\})$."

2. Erläutern Sie die Bayesianische Interpretation der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses.

- Nach der **Bayesianischen Interpretation** ist $\mathbb{P}(A)$ der Grad der Sicherheit, den eine Beobachter:in aufgrund ihrer subjektiven Einschätzung der Lage dem Eintreten des Ereignisses A zumisst.
- Zum Beispiel ist die Bayesianische Interpretation von $\mathbb{P}(\{6\})$ im Modell des Werfen eines Würfels "Basierend auf meinen Erfahrungen mit dem Werfen eines Würfels bin ich mir zu $\mathbb{P}(\{6\}) \cdot 100$ Prozent sicher, dass der Würfel beim nächsten Wurf eine 6 zeigt."

3. Geben Sie die Definition der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse wieder.

Definition (Gemeinsame Wahrscheinlichkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $A, B \in \mathcal{A}$. Dann heißt

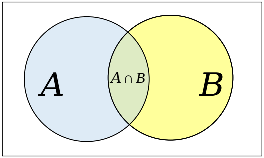
$$\mathbb{P}(A \cap B) \tag{5}$$

die *gemeinsame Wahrscheinlichkeit von A und B.*

4. Erläutern Sie die intuitive Bedeutung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse.

- Intuitiv entspricht $\mathbb{P}(A \cap B)$ der Wahrscheinlichkeit, dass A und B gleichzeitig (*gemeinsam*) eintreten.
- In der Mechanik des W-Raummodells ist $\mathbb{P}(A \cap B)$ die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Durchgang des Zufallsvorgang ein ω mit sowohl $\omega \in A$ als auch $\omega \in B$ realisiert wird.

Visualisierung einer Schnittmenge

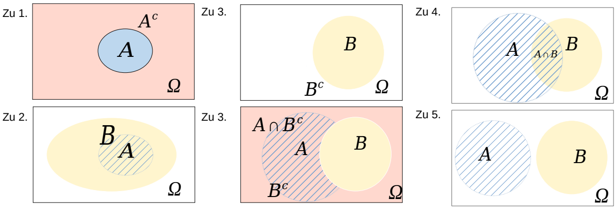


5. Geben Sie das Theorem zu weiteren Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten wieder.

Theorem (Weitere Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $A, B \in \mathcal{A}$ Ereignisse. Dann gelten

1. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
2. $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
3. $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
5. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.



6. Geben Sie die Definition der Unabhängigkeit zweier Ereignisse wieder.

Definition (Unabhängige Ereignisse)

Zwei Ereignisse $A \in \mathcal{A}$ and $B \in \mathcal{A}$ heißen *(stochastisch) unabhängig*, wenn

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B). \tag{6}$$

Eine Menge von Ereignissen $\{A_i | i \in I\} \subset \mathcal{A}$ mit beliebiger Indexmenge I heißt (stochastisch) unabhängig, wenn für jede endliche Untermenge $J \subseteq I$ gilt, dass

$$\mathbb{P}\left(\cap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j). \tag{7}$$

7. Geben Sie die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und der bedingten Wahrscheinlichkeit wieder.

Definition (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ seien Ereignisse mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Die *bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gegeben das Ereignis B* ist definiert als

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{8}$$

Weiterhin heißt das für ein festes $B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$ definierte Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}(\ |B) : \mathcal{A} \to [0,1], A \mapsto \mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{9}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit gegeben Ereignis B*.

8. Geben Sie das Theorem zur bedingten Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit wieder.

Theorem (Bedingte Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ seien unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A). \tag{10}$$

9. Erläutern Sie den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit vor dem Hintergrund des Theorems zur bedingten Wahrscheinlichkeit unter Unabhängigkeit.

- Die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse bedeutet, dass das Wissen um das Eintreten eines der beiden Ereignisse die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen Ereignisses nicht ändert.
- So ist beispielsweise bei Unabhängigkeit der Ereignisse A und B die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A|B)$ gleich der Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$, weil bei Unabhängigkeit gilt, dass $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ (vgl. erste Gleichung) und $\mathbb{P}(B)$, das im Zähler und Nenner des Terms steht rausgekürzt werden kann (vgl. zweite Gleichung).

10. Geben Sie das Theorem zu gemeinsamen und bedingten Wahrscheinlichkeiten wieder.

Theorem (Gemeinsame und bedingte Wahrscheinlichkeiten)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(\cdot|B) \geq 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A). \tag{11}$$

11. Geben Sie das Gesetz von der totalen Wahrscheinlichkeit wieder.

Theorem (Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, ..., A_k$ sei eine Partition von Ω. Dann gilt für jedes $B \in \mathcal{A}$, dass

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i). \tag{12}$$

12. Geben Sie das Theorem von Bayes wieder.

Theorem (Theorem von Bayes)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, ..., A_k$ sei eine Partition von Ω mit $\mathbb{P}(A_i) > 0$ für alle $i = 1, ..., k$. Wenn $\mathbb{P}(B) > 0$ gilt, dann gilt für jedes $i = 1, ..., k$, dass

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}. \tag{13}$$

13. Erläutern Sie das Theorem von Bayes im Rahmen der Bayesianischen Inferenz.

- Im Rahmen der **Bayesianischen Inferenz** ist das Theorem von Bayes zentral;
- hier wird $\mathbb{P}(A_i)$ oft *Prior Wahrscheinlichkeit* und $\mathbb{P}(A_i|B)$ oft *Posterior Wahrscheinlichkeit des Ereignisses* A_i genannt.
- Wie oben erläutert entspricht $\mathbb{P}(A_i|B)$ dann der aktualisierten Wahrscheinlichkeit von A_i, wenn man um das Eintreten von B weiß.

14. Beweisen Sie das Theorem von Bayes.

Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}.$$

$\square$