



Tutorium

Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Belinda Fleischmann

Inhalte basieren auf Kursmaterialien für WTFI von Dirk Ostwald, lizenziert unter CC BY-NC-SA 4.0

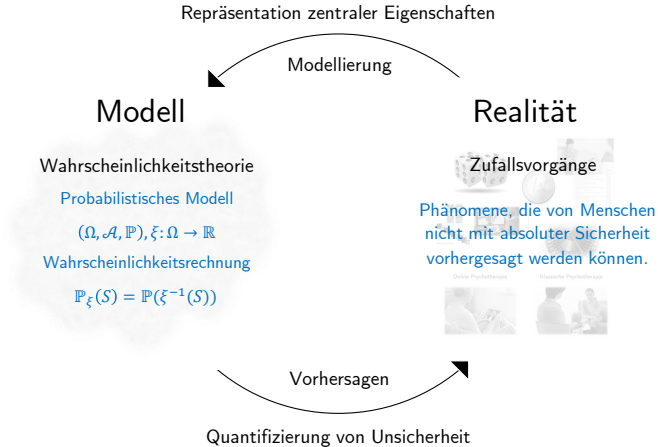
(6) Erwartungswert und Kovarianz

Selbstkontrollfragen

1. Definieren und interpretieren Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariable.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert einer Bernoulli Zufallsvariable.
3. Nennen Sie drei Eigenschaften des Erwartungswerts.
4. Definieren und interpretieren Sie die Varianz einer Zufallsvariable.
5. Berechnen Sie die Varianz einer Bernoulli Zufallsvariable.
6. Drücken Sie $\mathbb{E}(\xi^2)$ mithilfe der Varianz und des Erwartungswerts von ξ aus.
7. Was ist $\mathbb{V}(a\xi)$ für konstantes $a \in \mathbb{R}$?
8. Definieren Sie die Kovarianz und Korrelation zweier Zufallsvariablen ξ und ν .
9. Geben Sie das Theorem zur Varianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit wieder.
10. Definieren Sie den Begriff der Stichprobe.
11. Definieren Sie den Begriff des Stichprobenmittels.
12. Definieren Sie Stichprobenvarianz und Stichprobenstandardabweichung.

Selbstkontrollfragen

13. Erläutern Sie die Unterschiede zwischen dem Erwartungswertparameter, dem Erwartungswert und dem Stichprobenmittel von normalverteilten Zufallsvariablen.
14. Definieren Sie die Kovarianz und die Korrelation zweier Zufallsvariablen.
15. Schreiben Sie die Kovarianz zweier Zufallsvariablen mithilfe von Erwartungswerten.
16. Geben Sie das Theorem zur Korrelation und Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen wieder.
17. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit?
18. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen im Allgemeinen?



Wir nehmen an, dass die BDI Score Fehler der Proband:innen Realisierungen **unabhängiger und identisch** normalverteilter Zufallsvariablen sind.

Modell

Modellierung

Realität

Wahrscheinlichkeitstheorie

$$y_{1j} = \mu_1 + \varepsilon_{1j}, \varepsilon_{1j} \sim N(0, \sigma^2), j = 1, \dots, n_1$$

$$y_{2j} = \mu_2 + \varepsilon_{2j}, \varepsilon_{2j} \sim N(0, \sigma^2), j = 1, \dots, n_2$$

$$\mathbb{E}(\varepsilon_{ij}) = 0, \mathbb{V}(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2 \quad \forall i, j$$

$$\mathbb{C}(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{kl}) = 0 \quad \forall i \neq k, j \neq l$$

Zufallsvorgang

Online Psychotherapie

Klassische Psychotherapie



Klinische Studie zum Vergleich der Effekte von Face-to-Face und Online PT bei Depression

	Online	FS	FS
1	Online	-25	35
2	Online	-14	14
3	Online	-25	29
4	Online	14	29
5	Online	-25	29
6	Online	-25	29
7	Online	-25	29
8	Online	14	14
9	Online	48	29
10	Online	48	29
11	Online	48	29
12	Online	48	29
13	Online	48	29
14	Online	48	29
15	Online	48	29
16	Online	48	29
17	Online	48	29
18	Online	48	29
19	Online	48	29
20	Online	48	29
21	Online	48	29
22	Online	48	29
23	Online	48	29
24	Online	48	29
25	Online	48	29
26	Online	48	29
27	Online	48	29
28	Online	48	29
29	Online	48	29
30	Online	48	29
31	Online	48	29
32	Online	48	29
33	Online	48	29
34	Online	48	29
35	Online	48	29
36	Online	48	29
37	Online	48	29
38	Online	48	29
39	Online	48	29
40	Online	48	29
41	Online	48	29
42	Online	48	29
43	Online	48	29
44	Online	48	29
45	Online	48	29
46	Online	48	29
47	Online	48	29
48	Online	48	29
49	Online	48	29
50	Online	48	29
51	Online	48	29
52	Online	48	29
53	Online	48	29
54	Online	48	29
55	Online	48	29
56	Online	48	29
57	Online	48	29
58	Online	48	29
59	Online	48	29
60	Online	48	29
61	Online	48	29
62	Online	48	29
63	Online	48	29
64	Online	48	29
65	Online	48	29
66	Online	48	29
67	Online	48	29
68	Online	48	29
69	Online	48	29
70	Online	48	29
71	Online	48	29
72	Online	48	29
73	Online	48	29
74	Online	48	29
75	Online	48	29
76	Online	48	29
77	Online	48	29
78	Online	48	29
79	Online	48	29
80	Online	48	29
81	Online	48	29
82	Online	48	29
83	Online	48	29
84	Online	48	29
85	Online	48	29
86	Online	48	29
87	Online	48	29
88	Online	48	29
89	Online	48	29
90	Online	48	29
91	Online	48	29
92	Online	48	29
93	Online	48	29
94	Online	48	29
95	Online	48	29
96	Online	48	29
97	Online	48	29
98	Online	48	29
99	Online	48	29
100	Online	48	29

Vorhersagen

1. Definieren und interpretieren Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariable.

Definition (Erwartungswert)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum und ξ sei eine Zufallsvariable. Dann ist der *Erwartungswert* von ξ definiert als

- $\mathbb{E}(\xi) := \sum_{x \in \mathcal{X}} x p_{\xi}(x)$, wenn $\xi : \Omega \rightarrow \mathcal{X}$ diskret mit WMF p_{ξ} und Ergebnisraum \mathcal{X} ist,
- $\mathbb{E}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x) dx$, wenn $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kontinuierlich mit WDF p_{ξ} ist.

Der Erwartungswert einer Zufallsvariable heißt *existent*, wenn er endlich ist.

Bemerkungen

- Der Erwartungswert ist eine skalare Zusammenfassung einer Verteilung.
- Intuitiv ist $\mathbb{E}(\xi) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ für eine große Zahl n von Kopien ξ_i von ξ .
- Für manche Verteilungen, wie etwa bei einer Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ mit Erwartungswertparameter μ und Varianzparameter σ^2 , entspricht der Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi)$ dem Erwartungswertparameter μ , wie die Beweise im VL-Skript zeigen. $\mathbb{E}(\xi)$ und μ sind aber nicht das gleiche!
- Intuitiv kann der Erwartungswert als der Mittelwert von sehr vielen Realisierungen einer ZV verstanden werden. Anders ausgedrückt, bei einer großen Zahl an Realisierungen nähert sich der Mittelwert dem Erwartungswert an.
- Der Erwartungswert kann bestimmt werden, wenn Messraum und Verteilung einer ZV festgelegt wurden.
 - Durch den Messraum wissen wir, welche Werte die ZV annehmen kann.
 - Die Verteilung sagt uns, mit welcher Wahrscheinlichkeitsmasse /-dichte diese Werte assoziiert sind.

2. Berechnen Sie den Erwartungswert einer Bernoulli Zufallsvariable.

Es sei $\xi \sim \text{Bern}(\mu)$. Dann gilt $\mathbb{E}(\xi) = \mu$.

Beweis

ξ ist diskret mit $\mathcal{X} = \{0, 1\}$. Also gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\xi) &= \sum_{x \in \{0, 1\}} x \text{Bern}(x; \mu) \\ &= 0 \cdot \mu^0 (1 - \mu)^{1-0} + 1 \cdot \mu^1 (1 - \mu)^{1-1} \\ &= 1 \cdot \mu^1 (1 - \mu)^0 \\ &= \mu.\end{aligned}\tag{1}$$

□

Konkretes Beispiel:

Es sei $\xi \sim \text{Bern}(\mu)$ mit $\mu = 0.5$. Per Definition ist $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ gegeben. Wenn wir sagen, dass das Ergebnis $0 \in \mathcal{X}$ Kopf und $1 \in \mathcal{X}$ Zahl repräsentiert, können wir mit einer Bernoulli-ZV und indem wir ein $\mu = 0.5$ wählen, einen Münzwurf modellieren. Dann ergibt sich für den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(\xi) = \mu = 0.5$$

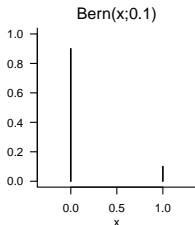
Definition (Bernoulli-Zufallsvariable)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ und WMF

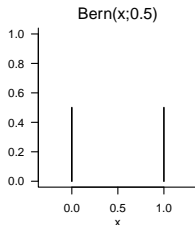
$$p : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1], x \mapsto p(x) := \mu^x (1 - \mu)^{1-x} \text{ mit } \mu \in [0, 1]. \quad (2)$$

Dann sagen wir, dass ξ einer *Bernoulli-Verteilung mit Parameter* $\mu \in [0, 1]$ unterliegt und nennen ξ eine *Bernoulli-Zufallsvariable*. Wir kürzen dies mit $\xi \sim \text{Bern}(\mu)$ ab. Die WMF einer Bernoulli-Zufallsvariable bezeichnen wir mit

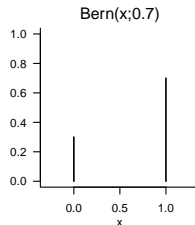
$$\text{Bern}(x; \mu) := \mu^x (1 - \mu)^{1-x}. \quad (3)$$



$$\mathbb{E}(\xi) = 0.1$$



$$\mathbb{E}(\xi) = 0.5$$



$$\mathbb{E}(\xi) = 0.7$$

3. Nennen Sie drei Eigenschaften des Erwartungswerts.

Theorem (Eigenschaften des Erwartungswerts)

- (1) (Linear-affine Transformation) Für eine Zufallsvariable ξ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}(a\xi + b) = a\mathbb{E}(\xi) + b. \quad (4)$$

- (2) (Linearkombination) Für Zufallsvariablen ξ_1, \dots, ξ_n und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(\xi_i). \quad (5)$$

- (3) (Faktorisierung bei Unabhängigkeit) Für unabhängige Zufallsvariablen ξ_1, \dots, ξ_n gilt

$$\mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n \xi_i \right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\xi_i). \quad (6)$$

4. Definieren und interpretieren Sie die Varianz einer Zufallsvariable.

Definition (Varianz und Standardabweichung)

Es sei ξ eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi)$. Die *Varianz* von ξ ist definiert als

$$\mathbb{V}(\xi) := \mathbb{E} \left((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2 \right), \quad (7)$$

unter der Annahme, dass dieser Erwartungswert existiert. Die *Standardabweichung* von ξ ist definiert

$$\mathbb{S}(\xi) := \sqrt{\mathbb{V}(\xi)}. \quad (8)$$

Bemerkungen

- Die Varianz misst die Streuung (Breite) einer Verteilung.
- Quadratur ist nötig wegen $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}(\xi)) = \mathbb{E}(\xi) - \mathbb{E}(\xi) = 0$.
- Intuitiv quantifiziert die Varianz, wie "viel" die Werte, die eine ZV annehmen kann "variieren", besser gesagt vom Erwartungswert abweichen. Oder anders ausgedrückt um den Erwartungswert streuen.

5. Berechnen Sie die Varianz einer Bernoulli Zufallsvariable.

Es sei $\xi \sim \text{Bern}(\mu)$. Dann ist die Varianz von ξ gegeben durch $\mathbb{V}(\xi) = \mu(1 - \mu)$.

Beweis

ξ ist eine diskrete Zufallsvariable und es gilt $\mathbb{E}(\xi) = \mu$. Also gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\xi) &= \mathbb{E} \left((\xi - \mu)^2 \right) \\&= \sum_{x \in \{0,1\}} (x - \mu)^2 \text{Bern}(x; \mu) \\&= (0 - \mu)^2 \mu^0 (1 - \mu)^{1-0} + (1 - \mu)^2 \mu^1 (1 - \mu)^{1-1} \\&= \mu^2 (1 - \mu) + (1 - \mu)^2 \mu \\&= \left(\mu^2 + (1 - \mu)\mu \right) (1 - \mu) \\&= \left(\mu^2 + \mu - \mu^2 \right) (1 - \mu) \\&= \mu(1 - \mu).\end{aligned}\tag{9}$$

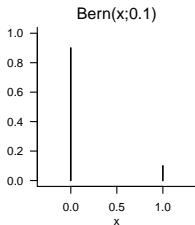
□

Konkretes Beispiel:

Es sei $\xi \sim \text{Bern}(\mu)$ mit $\mu = 0.5$. Dann ergibt sich für die Varianz

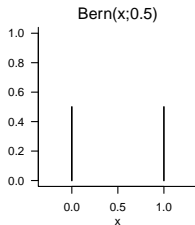
$$\mathbb{V}(\xi) = \mu(1 - \mu) = 0.5(0.5) = 0.25$$

Weitere Beispiele



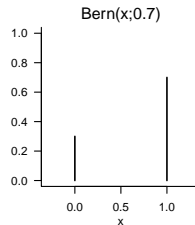
$$\mathbb{E}(\xi) = 0.1$$

$$\mathbb{V}(\xi) = 0.1 \cdot 0.9 = 0.09$$



$$\mathbb{E}(\xi) = 0.5$$

$$\mathbb{V}(\xi) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$



$$\mathbb{E}(\xi) = 0.7$$

$$\mathbb{V}(\xi) = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21$$

6. Drücken Sie $\mathbb{E}(\xi^2)$ mithilfe der Varianz und des Erwartungswerts von ξ aus.

Gemäß Varianzverschiebungssatz gilt $\mathbb{V}(\xi) = \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}(\xi)^2$.

Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\xi) &= \mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}(\xi)^2 \\ \Leftrightarrow \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{E}(\xi)^2 &= \mathbb{E}(\xi^2)\end{aligned}$$

Somit können wir $\mathbb{E}(\xi^2)$ mithilfe der Varianz $\mathbb{V}(\xi)$ und des Erwartungswerts $\mathbb{E}(\xi)$ von ξ aufschreiben, wobei wir den Erwartungswert in Quadrat nehmen, formal

$$\mathbb{E}(\xi^2) = \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{E}(\xi)^2.$$

SKF 7. Varianzeigenschaften

7. Was ist $\mathbb{V}(a\xi)$ für konstantes $a \in \mathbb{R}$?

Nach dem ersten Satz des Theorems zu Varianzeigenschaften (Linear-affine Transformation) gilt für eine Zufallsvariable ξ und $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{V}(a\xi + b) = a^2\mathbb{V}(\xi) \text{ und } \mathbb{S}(a\xi + b) = |a|\mathbb{S}(\xi).$$

Somit gilt

$$\mathbb{V}(a\xi) = a^2\mathbb{V}(\xi)$$

8. Definieren Sie die Kovarianz und Korrelation zweier Zufallsvariablen ξ und v .

Definition (Kovarianz und Korrelation)

Die *Kovarianz* zweier Zufallsvariablen ξ und v ist definiert als

$$\mathbb{C}(\xi, v) := \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))(v - \mathbb{E}(v))). \quad (10)$$

Die *Korrelation* zweier Zufallsvariablen ξ und v ist definiert als

$$\rho(\xi, v) := \frac{\mathbb{C}(\xi, v)}{\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\sqrt{\mathbb{V}(v)}} = \frac{\mathbb{C}(\xi, v)}{\mathbb{S}(\xi)\mathbb{S}(v)}. \quad (11)$$

Bemerkungen

- Die Kovarianz von ξ mit sich selbst ist die Varianz von ξ ,

$$\mathbb{C}(\xi, \xi) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2) = \mathbb{V}(\xi). \quad (12)$$

- $\rho(\xi, v)$ wird auch *Korrelationskoeffizient* von ξ und v genannt.
- Wenn $\rho(\xi, v) = 0$ ist, werden ξ und v *unkorreliert* genannt.

9. Geben Sie das Theorem zur Varianz von Linearkombinationen von Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit wieder.

Nach dem zweiten Satz des Theorems zu Varianzeigenschaften (Linearkombination bei Unabhängigkeit) gilt für unabhängige Zufallsvariablen ξ_1, \dots, ξ_n und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{V} \left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{V}(\xi_i).$$

10. Definieren Sie den Begriff der Stichprobe.

ξ_1, \dots, ξ_n seien Zufallsvariablen. Dann nennt man ξ_1, \dots, ξ_n auch eine *Stichprobe*.

11. Definieren Sie den Begriff des Stichprobenmittels.

Das *Stichprobenmittel* von ξ_1, \dots, ξ_n ist definiert als der arithmetische Mittelwert

$$\bar{\xi}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i. \quad (13)$$

Bemerkungen

- $\mathbb{E}(\xi)$, $\mathbb{V}(\xi)$, und $\mathbb{S}(\xi)$ sind Kennzahlen einer Zufallsvariable ξ .
- $\bar{\xi}_n$, S_n^2 , und S_n sind Kennzahlen einer Stichprobe ξ_1, \dots, ξ_n .
- $\bar{\xi}_n$, S_n^2 , und S_n sind Zufallsvariablen, ihre Realisationen werden mit \bar{x}_n , s_n^2 , und s_n bezeichnet.
- Hingegen sind Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi)$ und Varianz $\mathbb{V}(\xi)$ nicht zufällig.
- Stichprobenkennzahlen können berechnet werden, wenn wir Realisierungen einer ZV haben.

12. Definieren Sie Stichprobenvarianz und Stichprobenstandardabweichung.

Die *Stichprobenvarianz* von ξ_1, \dots, ξ_n ist definiert als

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_n)^2. \quad (14)$$

Die *Stichprobenstandardabweichung* ist definiert als

$$S_n := \sqrt{S_n^2}. \quad (15)$$

Stichprobenmittel, -varianz und -standardabweichung

- Es seien $\xi_1, \dots, \xi_{10} \sim N(1, 2)$.
- Wir nehmen die folgenden Realisationen an

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0.54	1.01	-3.28	0.35	2.75	-0.51	2.32	1.49	0.96	1.25

- Die Stichprobenmittelrealisation ist

$$\bar{x}_{10} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{6.88}{10} = 0.68. \quad (16)$$

- Die Stichprobenvarianzrealisation ist

$$s_{10}^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x}_{10})^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (x_i - 0.68)^2 = \frac{25.37}{9} = 2.82. \quad (17)$$

- Die Stichprobenstandardabweichungrealisation ist

$$s_{10} = \sqrt{s_{10}^2} = \sqrt{2.82} = 1.68. \quad (18)$$

13. Erläutern Sie die Unterschiede zwischen dem Erwartungswertparameter, dem Erwartungswert und dem Stichprobenmittel von normalverteilten Zufallsvariablen.

- Der Erwartungswertparameter, so wie wir ihn für die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ definieren, ist eine im Modell gegebene Größe, welche die funktionale Form (i.e. $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$) der Normalverteilung (mit) vorgibt.
 - Unterschiedliche Werte für den Parameter μ ergeben unterschiedliche funktionale Formen (vgl. Einheit (4) Zufallsvariablen)
- Der Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi)$ ist eine Kennzahl einer Zufallsvariable ξ .
 - Für eine gegebene ZV mit definiertem Messraum und Verteilung ergibt sich immer der gleiche Erwartungswert.
- Das Stichprobenmittel $\bar{\xi}_n$ ist eine Kennzahl einer Stichprobe ξ_1, \dots, ξ_n .
 - $\bar{\xi}_n$ ist eine Zufallsvariable, dessen Realisation mit \bar{x}_n bezeichnet wird; so wie die Realisation einer Stichprobe mit x_1, \dots, x_n bezeichnet wird.
 - Für eine gegebene Stichprobe ξ_1, \dots, ξ_n ist das Stichprobenmittel immer die Kennzahl $\bar{\xi}_n$.
 - Jede Realisation einer Stichprobe (x_1, \dots, x_n) hat zugehörige Stichprobenkennzahlen, zu denen auch das Stichprobenmittel \bar{x}_n zählt. Dieser Wert ist bei gegebener Stichprobenrealisation immer der gleiche.
 - Verschiedenen Realisationen x_1, \dots, x_n einer Stichprobe ξ_1, \dots, ξ_n können (und werden aller Wahrscheinlichkeit nach) verschiedene Werte für die Realisation \bar{x}_n des Stichprobenmittels $\bar{\xi}_n$ ergeben.

14. Definieren Sie die Kovarianz und die Korrelation zweier Zufallsvariablen.

Definition (Kovarianz und Korrelation)

Die *Kovarianz* zweier Zufallsvariablen ξ und v ist definiert als

$$\mathbb{C}(\xi, v) := \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))(v - \mathbb{E}(v))). \quad (19)$$

Die *Korrelation* zweier Zufallsvariablen ξ und v ist definiert als

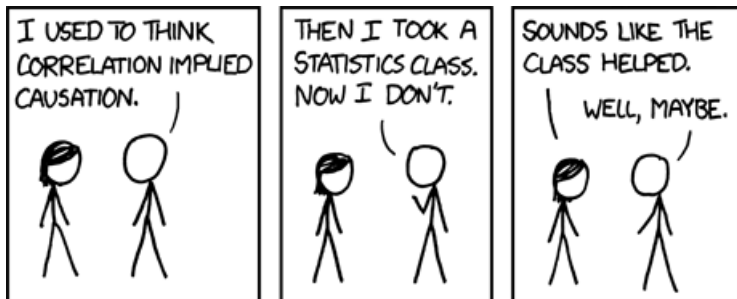
$$\rho(\xi, v) := \frac{\mathbb{C}(\xi, v)}{\sqrt{\mathbb{V}(\xi)}\sqrt{\mathbb{V}(v)}} = \frac{\mathbb{C}(\xi, v)}{\mathbb{S}(\xi)\mathbb{S}(v)}. \quad (20)$$

Bemerkungen

- Die Kovarianz von ξ mit sich selbst ist die Varianz von ξ ,

$$\mathbb{C}(\xi, \xi) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2) = \mathbb{V}(\xi). \quad (21)$$

- $\rho(\xi, v)$ wird auch *Korrelationskoeffizient* von ξ und v genannt.
- Wenn $\rho(\xi, v) = 0$ ist, werden ξ und v *unkorreliert* genannt.
- Es gilt $-1 \leq \rho(\xi, v) \leq 1$.



(Quelle: <https://xkcd.com/552/>)

Beispiel (aus VL)

Es sei $\xi := (\xi_1, \xi_2)$ ein Zufallsvektor mit WMF p_{ξ_1, ξ_2} definiert durch

$p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$p_{\xi_1}(x_1)$
$x_1 = 1$	0.10	0.05	0.15	0.30
$x_1 = 2$	0.60	0.05	0.05	0.70
$p_{\xi_2}(x_2)$	0.70	0.10	0.20	

ξ_1, ξ_2 sind also zwei Zufallsvariablen mit einer definierten bivariaten Verteilung. Um $\mathbb{C}(\xi_1, \xi_2)$ und $\rho(\xi_1, \xi_2)$ zu berechnen, halten wir zunächst fest, dass

$$\mathbb{E}(\xi_1) = \sum_{x_1=1}^2 x_1 p_{\xi_1}(x_1) = 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.7 = 1.7 \quad (22)$$

und

$$\mathbb{E}(\xi_2) = \sum_{x_2=1}^3 x_2 p_{\xi_2}(x_2) = 1 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.2 = 1.5. \quad (23)$$

Mit der Definition der Kovarianz von ξ_1 und ξ_2 , gilt dann

Beispiel (aus VL)

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}(\xi_1, \xi_2) \\ &= \mathbb{E}((\xi_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(\xi_2 - \mathbb{E}(\xi_2))) \\ &= \sum_{x_1=1}^2 \sum_{x_2=1}^3 (x_1 - \mathbb{E}(\xi_1))(x_2 - \mathbb{E}(\xi_2))p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) \\ &= \sum_{x_1=1}^2 \sum_{x_2=1}^3 (x_1 - 1.7)(x_2 - 1.5)p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) \\ &= \sum_{x_1=1}^2 (x_1 - 1.7)(1 - 1.5)p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, 1) \\ &\quad + (x_1 - 1.7)(2 - 1.5)p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, 2) \\ &\quad + (x_1 - 1.7)(3 - 1.5)p_{\xi_1, \xi_2}(x_1, 3) \\ &= (1 - 1.7)(1 - 1.5)p_{\xi_1, \xi_2}(1, 1) + (1 - 1.7)(2 - 1.5)p_{\xi_1, \xi_2}(1, 2) + (1 - 1.7)(3 - 1.5)p_{\xi_1, \xi_2}(1, 3) \\ &\quad + (2 - 1.7)(1 - 1.5)p_{\xi_1, \xi_2}(2, 1) + (2 - 1.7)(2 - 1.5)p_{\xi_1, \xi_2}(2, 2) + (2 - 1.7)(3 - 1.5)p_{\xi_1, \xi_2}(2, 3) \\ &= (-0.7) \cdot (-0.5) \cdot 0.10 \quad + (-0.7) \cdot 0.5 \cdot 0.05 \quad + (-0.7) \cdot 1.5 \cdot 0.15 \\ &\quad + 0.3 \cdot (-0.5) \cdot 0.60 \quad + 0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.05 \quad + 0.3 \cdot 1.5 \cdot 0.05 \\ &= 0.035 - 0.0175 - 0.1575 - 0.09 + 0.0075 + 0.0225 \\ &= -0.2. \end{aligned}$$

SKF 15. Kovarianzverschiebungssatz

15. Schreiben Sie die Kovarianz zweier Zufallsvariablen mithilfe von Erwartungswerten.

Gemäß Kovarianzverschiebungssatz gilt für zwei Zufallsvariablen ξ und v

$$C(\xi, v) = \mathbb{E}(\xi v) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(v)$$

Die Kovarianz ergibt sich aus der Differenz von dem Erwartungswert des Produktes und dem Produkt beider Erwartungswerte.

16. Geben Sie das Theorem zur Korrelation und Unabhängigkeit zweier Zufallsvariablen wieder.

Theorem (Korrelation und Unabhängigkeit)

ξ und ν seien zwei Zufallsvariablen. Wenn ξ und ν unabhängig sind, dann ist $\mathbb{C}(\xi, \nu) = 0$ und ξ und ν sind unkorreliert. Ist dagegen $\mathbb{C}(\xi, \nu) = 0$ und sind ξ und ν somit unkorreliert, dann sind ξ und ν nicht notwendigerweise unabhängig.

SKF 17. Varianz der Summe zweier ZVen bei Unabhgk.

17. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen bei Unabhängigkeit?

Generell gilt

$$\mathbb{V}(a\xi + bv + c) = a^2\mathbb{V}(\xi) + b^2\mathbb{V}(v) + 2ab\mathbb{C}(\xi, v).$$

Da bei Unabhängigkeit $\mathbb{C}(\xi, v) = 0$, ist die Varianz der Summe zweier ZVen gegeben durch die Summe der Varianzen, formal

$$\mathbb{V}(\xi + v) = \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{V}(v).$$

18. Was ist die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen im Allgemeinen?

Theorem (Varianzen von Summen und Differenzen von Zufallsvariablen)

ξ und v seien zwei Zufallsvariablen und es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathbb{V}(a\xi + bv + c) = a^2\mathbb{V}(\xi) + b^2\mathbb{V}(v) + 2ab\mathbb{C}(\xi, v). \quad (24)$$

Speziell gelten

$$\mathbb{V}(\xi + v) = \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{V}(v) + 2\mathbb{C}(\xi, v) \quad (25)$$

und

$$\mathbb{V}(\xi - v) = \mathbb{V}(\xi) + \mathbb{V}(v) - 2\mathbb{C}(\xi, v) \quad (26)$$

Bemerkungen

- Varianzen von Zufallsvariablen addieren sich nicht einfach. (Außer die ZVen sind unabhängig, dann gilt der zweite Satz des Theorems zu Eigenschaften der Varianz (Linearkombination bei Unabhängigkeit))
- Die Varianz der Summe zweier Zufallsvariablen hängt von ihrer Kovarianz ab.