Tutorium Allgemeines Lineares Modell

BSc Psychologie SoSe 2022

Klausurfragen

Belinda Fleischmann

(1)

Welche fundamentalen Grundannahmen sind **nicht** zutreffend?

(a) Sowohl in der frequentistischen als auch in der Bayesianischen Statistik sind die Parameter probabilistischer Modelle fest, unbekannte Konstanten, die als wahre, aber unbekannte, Parameterwerte bezeichnet werden.

(b) In der Bayesianischen Statistik werden über Parameterwerte und Modelle keine probabilistischen Aussagen getroffen.

(c) In der frequentistischen Statistik spiegeln Wahrscheinlihckeiten die relative Frequenz des Auftretens eines zufälligen Ereigenissen wieder und beschreiben objektive Eigenschaften der realen Wert.

(d) In der Bayesianischen Statistik werden probabilistische Aussagen über Parameter mithilfe von Wahrscheinlichkeitsverteilungen getroffen, auf deren Grundlage optimale Enscheidungen im Sinne von Kosten-Nutzenfunktionen getroffen werden können.

(2)

Welche Aussage bezüglich einer Warhscheinlichkeitsfunktion ist zutreffend?

(a) $\pi : \Omega \to [0,1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion, wenn gilt, dass $\prod_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) \leq 1$.

(b) Wenn gilt, dass $\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) = 1$, und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, dann heißt die durch $\pi : \Omega \to [0,1], \omega \mapsto \pi(\omega) := \mathbb{P}(\omega)$ definierte Funktion Wahrscheinlichkeitsfunktion von $\mathbb{P}$ auf Ω.

(c) Es sei $\pi : \Omega \to [0,1], \omega \mapsto \pi(\omega) := \mathbb{P}(\omega)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion von $\mathbb{P}$ auf Ω. Dann gilt $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) \leq 1$

(d) Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ ist per Definition nicht σ-additiv.

(3)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(\cdot|B) \geq 0$. Dann gilt...

(a) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(B|A)$

(b) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)$

(c) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(B)$

(d) dass, bedinge Wahrscheinlichkeiten aus totalen Warhscheinlichkeiten berechnet werden klönnen, gemeinsame Wahrscheinlickeiten jedoch nicht.

(4)

Welche Definition einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer Zufallsvariable ist **nicht** zutreffend?

(a) (Wahrscheinlichkeits)Masse $=$ (Wahrscheinlichkeits)Dichte $\times$ (Mengen)Volumen

(b) Es sei X eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathbb{R}$ und WDF $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$. Dann unterliegt X einer *Normalverteilung (oder Gauß-Verteilung) mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$*, wobei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

(c) Es sei X eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := \mathbb{R}_{>0}$ und WDF $p : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, x \mapsto p(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$ wobei Γ die Gammafunktion bezeichne. Dann unterliegt X einer *Gammaverteilung mit Formparameter $\alpha > 0$ und Skalenparameter $\beta > 0$.*

(d) Es sei X eine Zufallsvariable mit Ergebnisraum $\mathcal{X} := [0,1]$ und WDF $p : \mathcal{X} \to [0,1], x \mapsto p(x) := \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{>0}$, wobei Γ die Gammafunktion bezeichne. Dann unterliegt X einer Beta-Verteilung mit Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.

(5)

Welche Aussage bezüglich Marginalverteilungen trifft zu?

(a) Die Wahrscheinlichkeitsmassefunktionen der univariaten Marginalverteilungen kontinuierlicher Zufallsvektoren ergeben sich durch Integration.

(b) Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der univariaten Marginalverteilungen diskreter Zufallsvektoren ergeben sich durch Summation.

(c) $X = (X_1, ..., X_n)$ sei ein n-dimensionaler diskreter Zufallsvektor mit Wahrscheinlichkeitsmassefunktion p_X und Komponentenergebnisräumen $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$. Dann ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der $i$ten Komponente X_i von X als

$$p_{X_i} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x_i \mapsto p_{X_i}(x_i) :=$$
$$\int_{x_1} \cdots \int_{x_{i-1}} \int_{x_{i+1}} \cdots \int_{x_n} p_X(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n. \quad (1)$$

(d) Univariate Marginalverteilungen sind die Verteilungen der Komponenten eines Zufallsvektors.

(6)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X := (X_1, X_2)$ ein zweidimensionaler Zufallsvektor. Die Zufallsvariablen X_1, X_2 mit Ergebnisräumen $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ heißen *unabhängig*, wenn ...

(a) für alle $S_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ und $S_2 \subseteq \mathcal{X}_2$ gilt, dass $\mathbb{P}_X(X_1 \in S_1, X_2 \in S_2) = \mathbb{P}_{X_1}(X_1 \in S_1)\mathbb{P}_{X_2}(X_2 \in S_2)$.

(b) für alle $S_1 \subseteq \mathcal{X}_1$ und $S_2 \subseteq \mathcal{X}_2$ gilt, dass $\mathbb{P}_X(X_1 \in S_1, X_2 \in S_2) = \mathbb{P}_{X_1}(X_1 \in S_1)\mathbb{P}_{X_2}(X_1 \in S_1|\{X_2 \in S_2\})$.

(c) $\mathbb{P}(\{X_1 \in S_1\})|\{X_2 \in S_2\}) \neq \mathbb{P}(\{X_1 \in S_1\})$

(d) $\mathbb{P}(\{X_1 \in S_1\})|\{X_2 \in S_2\}) = \mathbb{P}(\{X_2 \in S_2\}|\{X_1 \in S_1\})$

(6)

X und Y seien zwei Zufallsvariablen und es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Varianz, dass ...

(a) $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + \mathbb{C}(X, Y)$ und $\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - \mathbb{C}(X, Y)$.

(b) die gemeinsame Varianz von X und Y durch gewichtete Addition der jeweiligen Varianzen $\mathbb{V}(X)$ und $\mathbb{V}(Y)$ berechnen lässt.

(c) $\mathbb{V}(aX + bY + c) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\mathbb{C}(X, Y)$

(d) $\mathbb{V}(aX + bY + c) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2(ab)^2\mathbb{C}(X, Y)$

(7)

Welche Aussagen bezüglich der Gesetze der großen Zahlen ist zutreffend?

(a) Intuitiv besagt nur das starke Gesetz der großen Zahlen, dass sich das Stichprobenmittel von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen für eine große Anzahl an Zufallsvariablen dem Erwartungswert der zugrundeliegenden Verteilung nähert. Laut dem schwachen Gesetz trifft dies nur für normalverteile Zufallsvariablen zu.

(b) $\bar{X}_n \xrightarrow[n \to \infty]{P} \mu$ heißt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Stichprobenmittel nahe dem Erwartungswert der zugrundeliegenden Verteilung liegt, sich 1 nähert, wenn $n \to \infty$.

(c) $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und gleichverteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Weiterhin bezeichne $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ das Stichprobenmittel der X_i, $i = 1, \ldots, n$. Dann kovergiert $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathsf{P}} X$.

(d) Keine der Aussagen ist zutreffend.

(8)

Was wird mit dem folgenden R-Code ausgeführt?

```
n        = 1e4
mu       = 1
sigsqr   = 2
X        = rnorm(n, mu, sqrt(sigsqr))
Y        = X^2
```

(a) "'sigsqr = 2 "' definiert eine Standartabweichung von 2.

(b) "'X = rnorm(n, mu, sqrt(sigsqr)"' realisiert 10000 Datenpunkte einer transfomierten normalverteilten Zufallsvariable.

(c) "'Y"' enhält 10000 Datenpunkte einer normalverteilten Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu = 1$ und $\sigma = 2$

(d) Keine der Aussagen ist zutreffend.

(9)

Welches der unten stehenden Verfahren ist kein Standardproblem der Frequentistischen Inferenz?

(a) Parameterschätzung

(b) Konfidenzintervalle

(c) Korrelation

(d) Hypothesentests

(10)

Es sei $\hat{\theta}_n$ ein **asymptotisch effizienter** Schätzer für θ.

(a) Der Schätzer ist implizit für alle Stichprobengrößen erwartungstreu.

(b) Der Schätzer hat eine Standardabweichung gleich der Cramér-Rao-Schranke.

(c) Die Verteilung von $\hat{\theta}_n$ ist für große Stichprobengrößen $n > 30$ durch eine Normalverteilung gegeben.

(d) $\hat{\theta}_n \overset{a}{\sim} N\left(\theta, J_n(\theta)^{-1}\right)$