Tutorium Allgemeines Lineares Modell

BSc Psychologie SoSe 2022

6. Termin: Normalverteilungen

Belinda Fleischmann

Selbstkontrollfragen - Normalverteilungen

1. Definieren Sie die WDF eines multivariaten normalverteilten Zufallsvektors und erläutern Sie diese.
2. Geben Sie die Definitionen des Erwartungswerts und der Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors wieder.
3. Was repräsentieren die Elemente einer Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors?
4. Welche Werte haben der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix eines normalverteilten Zufallsvektors?
5. Beweisen Sie die letzte Gleichung im Beweis der funktionalen Form der WDF der bivariaten Normalverteilung.
6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten

   $$\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ und } \Sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.
7. Geben Sie das Theorem zur nichtsingulären linearen Transformation multivariater Normalverteilungen wieder.
8. Geben Sie das Theorem zur linear-affinen Transformation multivariater Normalverteilungen wieder.
9. Geben Sie das Theorem zu Unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen wieder.
10. Erläutern Sie den Begriff des sphärischen Kovarianzmatrixparameters.
11. Skizzieren Sie den Beweis des Theorem zu Unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen.

1. Definieren Sie die WDF eines multivariaten normalverteilten Zufallsvektors und erläutern Sie diese.

Die WDF eines multivariat normalverteilten Zufallsvektors ist definiert als

$$p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{>0},\ \upsilon \mapsto p(\upsilon) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\upsilon - \mu)^T \Sigma^{-1} (\upsilon - \mu)\right).$$

Hierbei sind

- $\mu \in \mathbb{R}^n$ der *Erwartungswertparameter*, welche dem Wert höchster WD entspricht
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ der positive-definite *Kovarianzmatrixparameter*
- $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}$ die Normalisierungskonstante, wobei $|\Sigma|$ die Determinante von Σ ist, (Anm.: die Normalisierungskonstante wird verwendet, sodass die Fläche unter dem Graphen der WDF 1 ergibt)
- und Σ^{-1} die (ebenfalls positiv-definite) Inverse des Kovarianzmatrixparameters

Die WDF nimmt (als Definitionsmenge/“input”) einen Wert $\upsilon \in \mathbb{R}^n$ aus dem Ergebnisraum von y (also einen n-dimensionalen Wert, den der Zufallsvektor y annehmen kann) und gibt eine reelle Zahl ($\mathbb{R}_{>0}$) zurück, welche die Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt.

Anmerkung:

- Werte der WDF für bestimmte $\upsilon \in \mathbb{R}^n$ sind *nicht* die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Zufallsvariable y diesen Wert υ annimmt, sondern die Wahrscheinlichkeitsdichte für bestimmte υ.
- Die Inverse einer p.d. Matrix ist auch p.d.
- Wir bezeichnen die WDF eines multivariat normalverteilten Zufallsvektors bezeichnen auch mit $N(\upsilon; \mu, \Sigma)$.

2. Geben Sie die Definitionen des Erwartungswerts und der Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors wieder.

Definition (Erwartungswert und Kovarianzmatrix von Zufallsvektoren)

y sei ein n-dimensionaler Zufallvektor. Dann ist der *Erwartungwert* von y definiert als der n-dimensionale Vektor

$$\mathbb{E}(y) := (\mathbb{E}(y_1), \ldots, \mathbb{E}(y_n))^T \tag{1}$$

und die *Kovarianzmatrix* von y ist definiert als die $n \times n$ Matrix

$$\mathbb{C}(y) := \mathbb{E}\left((y - \mathbb{E}(y))(y - \mathbb{E}(y))^T\right) \tag{2}$$

3. Was repräsentieren die Elemente einer Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors?

Einzelne Elemente $\mathbb{C}(y_i, y_j)$ der Kovarianzmatrix $\mathbb{C}(y)$ repräsentieren die Kovarianzen von je zwei der Komponenten $y_1, ..., y_n$ von y.

Anmerkung:

- Auf der Diagonalen stehen die Varianzen der jeweiligen Komponenten.

Zur Erinnerung

Theorem (Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors)

y sei ein n-dimensionaler Zufallvektor und $\mathbb{C}(y)$ sei seine Kovarianzmatrix. Dann gilt

$$\mathbb{C}(y) = \Big(\mathbb{C}(y_i, y_j)\Big)_{1 \le i,j \le n} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}(y_1, y_1) & \mathbb{C}(y_1, y_2) & \cdots & \mathbb{C}(y_1, y_n) \\ \mathbb{C}(y_2, y_1) & \mathbb{C}(y_2, y_2) & \cdots & \mathbb{C}(y_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}(y_n, y_1) & \mathbb{C}(y_n, y_2) & \cdots & \mathbb{C}(y_n, y_n) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

4. Welche Werte haben der Erwartungswert und die Kovarianzmatrix eines normalverteilten Zufallsvektors?

Der Erwartungswert eines normalverteilten Zufallsvektors entspricht seinem Erwartungswertparameter, formal $\mathbb{E}(y) = \mu$ und die Kovarianzmatrix eines normalverteilten Zufallsvektors entspricht seinem Kovarianzmatrixparameter, formal $\mathbb{C}(y) = \Sigma$.

5. Beweisen Sie die letzte Gleichung im Beweis der funktionalen Form der WDF der bivariaten Normalverteilung.

Teil 1/6

Gefragt ist nach dem Beweis für die Gleichung

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^{-\frac{2}{2}} \left(\sigma_{22}\sigma_{11}\sqrt{(1-\rho^2)}\right)^{-1} \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2-\sigma_{12}^4}\begin{pmatrix} \upsilon_1-\mu_1 & \upsilon_2-\mu_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_{22}^2 & -\sigma_{12}^2 \\ -\sigma_{12}^2 & \sigma_{11}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \upsilon_1-\mu_1 \\ \upsilon_2-\mu_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}\sigma_{11}\sigma_{22}} \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right) + \left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

Der Beweis ergibt sich aus der Definition der Matrixmultiplikation

Zur Erinnerung

Definition (Matrixmultiplikation)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$. Dann ist die *Matrixmultiplikation* von A und B definiert als die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{m \times k} \to \mathbb{R}^{n \times k},\ (A, B) \mapsto \cdot(A, B) := AB \tag{4}$$

mit

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{ik} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{ik} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

5. Beweisen Sie die letzte Gleichung im Beweis der funktionalen Form der WDF der bivariaten Normalverteilung.

Teil 2/6

Durch Matrixmultiplikation ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \upsilon_1 - \mu_1 & \upsilon_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{22}^2 & -\sigma_{12}^2 \\ -\sigma_{12}^2 & \sigma_{11}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_1 - \mu_1 \\ \upsilon_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\upsilon_1 - \mu_1)\sigma_{22}^2 + (\upsilon_2 - \mu_2)(-\sigma_{12}^2) & (\upsilon_1 - \mu_1)(-\sigma_{12}^2) + (\upsilon_2 - \mu_2)\sigma_{11}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \upsilon_1 - \mu_1 \\ \upsilon_2 - \mu_2 \end{pmatrix} \\
&= \left((\upsilon_1 - \mu_1)\sigma_{22}^2 + (\upsilon_2 - \mu_2)(-\sigma_{12}^2)\right)(\upsilon_1 - \mu_1) + \left((\upsilon_1 - \mu_1)(-\sigma_{12}^2) + (\upsilon_2 - \mu_2)\sigma_{11}^2)\right)(\upsilon_2 - \mu_2) \\
&= (\upsilon_1 - \mu_1)^2\sigma_{22}^2 - (\upsilon_2 - \mu_2)\sigma_{12}^2(\upsilon_1 - \mu_1) - (\upsilon_1 - \mu_1)\sigma_{12}^2(\upsilon_2 - \mu_2) + (\upsilon_2 - \mu_2)^2\sigma_{11}^2) \\
&= (\upsilon_1 - \mu_1)^2\sigma_{22}^2 - 2(\upsilon_2 - \mu_2)\sigma_{12}^2(\upsilon_1 - \mu_1) + (\upsilon_2 - \mu_2)^2\sigma_{11}^2
\end{aligned}
$$

5. Beweisen Sie die letzte Gleichung im Beweis der funktionalen Form der WDF der bivariaten Normalverteilung.

Teil 3/6

mit der Definition von ρ

$$\rho = \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \Rightarrow \rho = \frac{\sigma_{21}^2}{\sigma_{11}\sigma_{22}} \Rightarrow \sigma_{12}^2 = \sigma_{21}^2 = \rho\sigma_{11}\sigma_{22}$$

lässt sich der Term

$$(\upsilon_1 - \mu_1)^2\sigma_{22}^2 - 2(\upsilon_2 - \mu_2)\sigma_{12}^2(\upsilon_1 - \mu_1) + (\upsilon_2 - \mu_2)^2\sigma_{11}^2$$

umschreiben zu

$$(\upsilon_1 - \mu_1)^2\sigma_{22}^2 - 2(\upsilon_1 - \mu_1)(\upsilon_2 - \mu_2)\rho\sigma_{11}\sigma_{22} + (\upsilon_2 - \mu_2)^2\sigma_{11}^2$$

5. Beweisen Sie die letzte Gleichung im Beweis der funktionalen Form der WDF der bivariaten Normalverteilung.

Teil 4/6 Anschließend können wir den Term umformen wie folgt

$$
\begin{aligned}
&(\upsilon_1-\mu_1)^2\sigma_{22}^2 - 2(\upsilon_1-\mu_1)(\upsilon_2-\mu_2)\rho\sigma_{11}\sigma_{22} + (\upsilon_2-\mu_2)^2\sigma_{11}^2 \quad \Big| \cdot \frac{\sigma_{11}^2}{\sigma_{11}^2}\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22}^2} \\
&= (\upsilon_1-\mu_1)^2\frac{\sigma_{22}^2\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2} - 2\rho(\upsilon_1-\mu_1)(\upsilon_2-\mu_2)\frac{\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2} + (\upsilon_2-\mu_2)^2\frac{\sigma_{11}^2\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2} \\
&= \sigma_{11}^2\sigma_{22}^2\left((\upsilon_1-\mu_1)^2\frac{1}{\sigma_{11}^2} - 2\rho(\upsilon_1-\mu_1)(\upsilon_2-\mu_2)\frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22}} + (\upsilon_2-\mu_2)^2\frac{1}{\sigma_{22}^2}\right) \\
&= \sigma_{11}^2\sigma_{22}^2\left(\frac{(\upsilon_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}^2} - 2\rho\frac{(\upsilon_1-\mu_1)(\upsilon_2-\mu_2)}{\sigma_{11}\sigma_{22}} + \frac{(\upsilon_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}^2}\right) \\
&= \sigma_{11}^2\sigma_{22}^2\left(\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{(\upsilon_1-\mu_1)}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{(\upsilon_2-\mu_2)}{\sigma_{22}}\right) + \left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

5. Beweisen Sie die letzte Gleichung im Beweis der funktionalen Form der WDF der bivariaten Normalverteilung.

Teil 5/6

Abschließend erhalten wir mit

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2-\sigma_{12}^4} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2-(\rho\sigma_{11}\sigma_{22})^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2-\rho^2\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2}$$

und

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2-\rho^2\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2}\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2\left(\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)^2-2\rho\left(\frac{(\upsilon_1-\mu_1)}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{(\upsilon_2-\mu_2)}{\sigma_{22}}\right)+\left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)^2\right)\\
&=-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)^2-2\rho\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)+\left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

5. Beweisen Sie die letzte Gleichung im Beweis der funktionalen Form der WDF der bivariaten Normalverteilung.

Teil 6/6

die zu beweisende Gleichung

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^{-\frac{2}{2}} \left(\sigma_{22}\sigma_{11}\sqrt{(1-\rho^2)}\right)^{-1} \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_{11}^2\sigma_{22}^2-\sigma_{12}^4}\begin{pmatrix}\upsilon_1-\mu_1 & \upsilon_2-\mu_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_{22}^2 & -\sigma_{12}^2\\ -\sigma_{12}^2 & \sigma_{11}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\upsilon_1-\mu_1\\ \upsilon_2-\mu_2\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}\sigma_{11}\sigma_{22}} \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{\upsilon_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)+\left(\frac{\upsilon_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten $\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\Sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.

Teil 1/9 - Visualisierung der WDF

```
# R Paket für multivariate Normalverteilungen
library(mvtnorm)

# Parameterdefinition
mu     = c(10,15)                                  # Erwartungswertparameter
Sigma  = matrix(c(3,1,1,2), 2)                     # Kovarianzmatrixparameter

# Ergebnisraumdefintion
y_min  = 0                                         # y_i Minimum
y_max  = 20                                        # y_i Maximum
y_res  = 1e3                                       # y_i Auflösung (1e3 --> 1000 Werte)
y_1    = seq(y_nin, y_nax, length.out = y_res)    # y_1 Raum
y_2    = seq(y_nin, y_nax, length.out = y_res)    # y_2 Raum
y      = expand.grid(y_1,y_2)                      # y = (y_1,y_2)^T Raum

# Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionauswertung
WDF = dmvnorm(as.matrix(y), mu, Sigma)             # Multivariate WDF (als Vektor)
p      = matrix(WDF, nrow = y_res)                 # Matrixkonversion der WDF
```

6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten $\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\Sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.

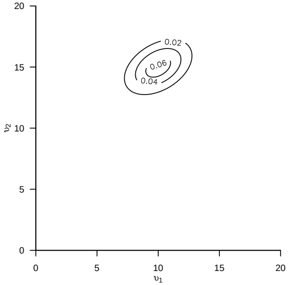
Teil 2/9 - Visualisierung der WDF

```
# Visualisierung
contour(
  y_1,
  y_2,
  p,
  xlim      =  c(y_nin,y_nax),
  ylim      =  c(y_nin,y_nax),
  xlab      = TeX("$\\upsilon_1$"),
  ylab      = TeX("$\\upsilon_2$"),
  nlevels   = 5)
```

Definition und Eigenschaften - Selbstkontrollfragen

6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten $\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\Sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.

Teil 3/9 - Visualisierung der WDF



6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten $\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\Sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.

Teil 4/9 - Realisierungen

```
# R Paket für multivariate Normalverteilungen
library(mvtnorm)

# Parameterdefinition
mu     = c(10,15)              # \mu \in \mathbb{R}^2
Sigma  = matrix(c(3,1,1,2), 2)  # \Sigma in \mathbb{R}^{2 \times 2}

# Zufallsvektorrealisierungen
Realisierungen = rmvnorm(n = 100, mu, Sigma)
print(Realisierungen[1:8,])    # Ausgabe der ersten 8 Realisierungen
```

```
>       [,1] [,2]
> [1,]  7.70 14.9
> [2,]  5.85 14.2
> [3,] 11.43 16.8
> [4,]  6.82 14.1
> [5,]  9.49 14.5
> [6,]  9.26 15.7
> [7,] 12.98 13.4
> [8,] 10.27 12.6
```

6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten $\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\Sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.

Teil 5/9 - Visualisierung der 100 Realisierungen

```
# R Paket für latex
library(latex2exp)

# Abbildungsparameter
par(
  family       = "sans",
  pty          = "s",       # plotting type "s" = square plotting region
  bty          = "l",       # boxtype
  lwd          = 1,
  las          = 1,         # Achsenbeschriftung 1 = horizontal
  mgp          = c(2,1,0), # margin line für Achsenbeschriftung und Linie
  xaxs         = "i",
  yaxs         = "i",
  font.main    = 1,
  cex          = .7,
  cex.main     = 1.2)
```

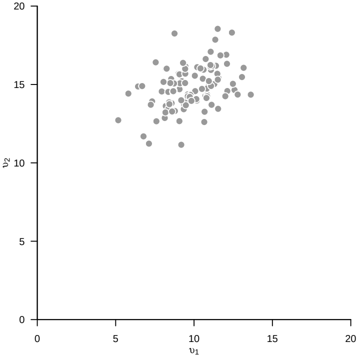
6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten $\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\Sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.

Teil 6/9 - Visualisierung der 100 Realisierungen

```
# Visualisierung
plot(
  Realisierungen,
  xlim  = c(min(Realisierungen[,1])-1,max(Realisierungen[,1])+1),
  ylim  = c(min(Realisierungen[,2])-1,max(Realisierungen[,2])+1),
  xlab  = TeX("$\\upsilon_1$"),
  ylab  = TeX("$\\upsilon_2$"),
  pch   = 21,        # plotting character 21 = kl. Kreis
  col   = "white",   # color Umrandung
  bg    = "gray60",  # background color
  cex   = 1.5)       # Größe der pch
```

6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten $\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\Sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.

Teil 7/9 - Visualisierung der 100 Realisierungen



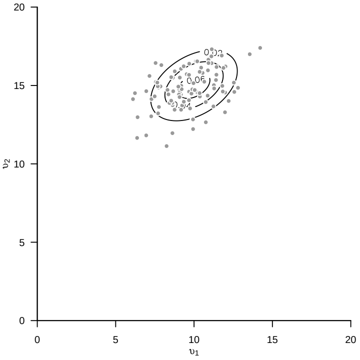
6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten $\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\Sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.

Teil 8/9 - Visualisierung der WDF und der 100 Realisierung

```
# Visualisierung der WDF und der 100 Realisierung
contour(
  y_1,
  y_2,
  p,
  xlim      =  c(y_nin,y_nax),
  ylim      =  c(y_nin,y_nax),
  xlab      = TeX("$\\upsilon_1$"),
  ylab      = TeX("$\\upsilon_2$"),
  nlevels   = 5)
points(
  Realisierungen,
  pch   = 21,
  col   = "white",
  bg    = "gray60",
  cex   = 1)
```

6. Visualisieren Sie die WDF eines 2-dimensionalen normalverteilten Zufallsvektors mit den Parameterwerten $\mu := \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ und $\Sigma := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Generieren Sie 100 Realisierungen aus dieser Verteilung und visualisieren Sie diese.

Teil 9/9 - Visualisierung der WDF und der 100 Realisierung



7. Geben Sie das Theorem zur nichtsingulären linearen Transformation multivariater Normalverteilungen wieder.

Theorem (Nichtsinguläre lineare Transformation)

$x \sim N(\mu, \Sigma)$ sei ein normalverteilter n-dimensionaler Zufallsvektor und es sei $y := Ax$ mit einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

$$y \sim N\left(A\mu, A\Sigma A^T\right) \tag{6}$$

Anmerkung:

- Eine Matrix ist singulär, wenn die Determinante gleich 0 ist und sie entsprechend auch keine Inverse besitzt

8. Geben Sie das Theorem zur linear-affinen Transformation multivariater Normalverteilungen wieder.

Theorem (Linear-affine Transformation)

$x \sim N(\mu, \Sigma)$ sei ein normalverteilter n-dimensionaler Zufallsvektor und es sei $y := Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$y \sim N\left(A\mu + b, A\Sigma A^T\right) \tag{7}$$

9. Geben Sie das Theorem zu Unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen wieder.

Theorem (Unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen)

Für $i = 1, ..., n$ seien $N(\upsilon_i; \mu_i, \sigma^2)$ die WDFen von n unabhängigen univariaten normalverteilten Zufallsvariablen $y_1, ..., y_n$ mit $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$. Weiterhin sei $N(\upsilon; \mu, \sigma^2 I_n)$ die WDF eines n-variaten Zufallsvektors y mit Erwartungswertparameter $\mu := (\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$p_y(\upsilon) = p_{y_1,...,y_n}(\upsilon_1, ..., \upsilon_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{y_i}(\upsilon_i) \tag{8}$$

und insbesondere

$$N\left(\upsilon; \mu, \sigma^2 I_n\right) = \prod_{i=1}^{n} N\left(\upsilon_i; \mu_i, \sigma^2\right). \tag{9}$$

10. Erläutern Sie den Begriff des sphärischen Kovarianzmatrixparameters.

- Ein *sphärischer* Kovarianzmatrixparameter hat die Form $\sigma^2 I_n$
- Sphärische Kovarianzmatrixparamter von n-variaten Normalverteilungen entsprechen n unabhängigen univariaten Normalverteilungen und umgekehrt.
- Die sphärische Form spiegelt die Unabhängigkeit der univariaten Zufallsvariablen wieder, da alle nicht-Diagonal-Elemente gleich 0 sind (i.e. $(\sigma^2 I_n)_{ij} = 0$ für $i \neq j$) und ensprechend keine Kovarianzen existieren.

Beispiel

Für $i = 1, .., 5$ seien seien $N(\upsilon; \mu_i, \sigma^2)$ die WDFen von n unabhängigen **univariaten** normalverteilten Zufallsvariablen $y_1, \dots, y_n$ mit $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 = 9$. Weiterhin sei $N(\upsilon; \mu, \sigma^2 I_n)$ die WDF eines n-variaten (**multivariaten**) Zufallsvektors y mit Erwartungswertparameter $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$N\left(\upsilon; \mu, \sigma^2 I_n\right) = \prod_{i=1}^{n} N\left(\upsilon_i; \mu_i, \sigma^2 = 9\right).$$

mit

$$\sigma^2 I_n = 9 I_n = 9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

11. Skizzieren Sie den Beweis des Theorem zu Unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen.

Zuerst schreiben wir die multivariate WDF $N\left(\upsilon; \mu, \sigma^2 I_n\right)$ nach der Definition einer WDF eines multivariaten normalverteilen Zufallsvektors auf, wobei wir anstelle des Kovarianzmatrixparameters Σ den sphärischen Kovarianzmatrixparameter $\sigma^2 I_n$ einsetzen.

Da der sphärische Kovarianzmatrixparameter eine Diagonalmatrix ist, entspricht dessen Determinante dem Produkt der Diagonaleinträge und der **Term vor der Exponantialfunktion** lässt sich umschreiben zu einem n-fachen Produkt der Normalisierungskonstante.

Der **Term der Exponentialfunktion** wird durch Matrixmultiplikation zu einem Term, der aus einer multiplikativen Konstante und einer Summe der quadrierten Differenzen zwischen υ_i und y_i besteht. Mit der Eigenschaft von Exponentialfunktion (i.e. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$) können wir die Exponentialfunktion umschreiben zu einem Produkt von Exponentialfunktionen des Terms.

Mit den Eigenschaften von Produkten können wir beide Produkte zusammenfassen und erhalten ein Produkt von univariaten Normalverteilungen.