Tutorium Allgemeines Lineares Modell

BSc Psychologie SoSe 2022

12. Termin (10) Einfaktorielle Varianzanalyse

Belinda Fleischmann

Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie das Anwendungsszenario einer einfaktoriellen Varianzanalyse (EVA).
2. Geben Sie die Definition des EVA Modells in Erwartungswertparameterdarstellung wieder.
3. Geben Sie die strukturelle Form des EVA Modells in Effektdarstellung wieder.
4. Erläutern Sie die Motivation für die Reparameterisierung des EVA Modells
5. Welche Bedeutung haben die Parameter $\mu_0, \alpha_2, ..., \alpha_p$ in der Effektparameterdarstellung des EVA Modells?
6. Warum gibt es bei p Gruppen eines EVA Szenarios nur die $p - 1$ Effektparameter $\alpha_2, ..., \alpha_p$?
7. Geben Sie die Designmatrixform des EVA Modells in Effektdarstellung wieder.
8. Formulieren Sie die Designmatrix eines EVA Modells mit $n_i = 3$ und $p = 2$.
9. Formulieren Sie die Designmatrix eines EVA Modells mit $n_i = 2$ und $p = 5$.
10. Geben Sie das Theorem zur Betaparameterschätzung im EVA Modell wieder.
11. Mit welchen deskriptiven Statistiken werden die Parameter $\mu_0, \alpha_2, ..., \alpha_p$ eines EVA Modells geschätzt?
12. Geben Sie das Theorem zur Quadratsummenzerlegung bei einfaktorieller Varianzanalyse wieder.
13. Erläutern Sie die Begriffe Total Sum of Squares, Between Sum of Squares, Within Sum of Squares der EVA.
14. Geben Sie die Definition des Effektstärkenmaßes η^2 an.

Selbstkontrollfragen

15. Wann nimmt das Effektstärkenmaß η^2 der EVA seinen Minimalwert an und wie lautet dieser?
16. Wann nimmt das Effektstärkenmaß η^2 der EVA seinen Maximalwert an und wie lautet dieser?
17. Geben Sie das Theorem zur F-Teststatistik der EVA wieder.
18. Erläutern Sie die Begriffe Mean Between Sum of Squares und Mean Within Sum of Squares der EVA.
19. Geben Sie das Theorem zum Zusammenhang von Effektstärkenmaß η^2 und F-Teststatistik der EVA wieder.
20. Geben Sie die Definition des EVA F-Test wieder.
21. Erläutern sie die Null- und Alternativhypothesen des EVA F-Tests.
22. Geben Sie das Theorem zur Testumfangkontrolle der EVA wieder.
23. Skizzieren Sie den Beweis zur Testumfangkontrolle der EVA.
24. Geben Sie den p-Wert zum F-Test der EVA wieder.
25. Betrachten Sie die Daten zur Therapiedauer der Patient:innen in der Face-to-Face, Online, und Waitlist Control Gruppe im Beispieldatensatz. Erstellen Sie ein Balkendiagramme der Gruppenmittelwerte und Gruppenstandardabweichungen und erläutern Sie dieses. Führen Sie zu diesen Daten einen EVA F-Test mit $\alpha := 0.05$ durch. Dokumentieren Sie ihre Ergebnisse. Was folgern Sie aus den sich ergebenen Resultaten?

1. Erläutern Sie das Anwendungsszenario einer einfaktoriellen Varianzanalyse (EVA).

Im Anwendungsszenario einer einfaktoriellen Varianzanalyse betrachten wir **zwei oder mehr Gruppen** (Stichprobe) randomisierter experimenteller Einheiten. Wir nehmen an, dass die Datenpunkte unabhängig und identisch normalverteilte Realisierungen von ZVen ($y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$) sind, wobei μ_i und σ^2 unbekannt sind.

Wir sind daran interessiert die *Unsicherheit*, die mit dem inferentiellen Testen der Nullhypothese identischer Gruppenerwartungswerte verbunden ist, im Sinne eines Hypothesentests zu *quantifizieren*.

$\Rightarrow$ Generalisierung des Zweistichproben-T-Tests bei unabhängigen Stichproben mit einfacher Nullhypothese für mehr als zwei Stichproben (bzw. Gruppen)

2. Geben Sie die Definition des EVA Modells in Erwartungswertparameterdarstellung wieder.

Definition (EVA Modell in Erwartungswertparameterdarstellung)

y_{ij} mit $i = 1, \ldots, p$ und $j = 1, \ldots, n_i$ seien Zufallsvariablen, die die Datenpunkte eines EVA Szenarios modellieren. Dann hat das *EVA Modell in Erwartungswertparameterdarstellung* die strukturelle Form

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \text{ mit } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } i = 1, \ldots, p, j = 1, \ldots, n_i \text{ mit } \mu_i \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0. \tag{1}$$

und die Datenverteilungsform

$$y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } i = 1, \ldots, p, j = 1, \ldots, n_i \text{ mit } \mu_i \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0. \tag{2}$$

Wenn $n_i := m$ für alle $i = 1, \ldots, p$ heißt das EVA Szenario *balanciert*.

3. Geben Sie die strukturelle Form des EVA Modells in Effektdarstellung wieder.

Theorem (EVA Modell in Effektdarstellung mit Referenzgruppe I)

Gegeben sei das EVA Modell in Erwartungswertparameterdarstellung. Dann können die Zufallsvariablen, die die Datenpunkte des EVA Szenarios modellieren, äquivalent in der **strukturellen Form**

$$
\begin{aligned}
y_{1j} &= \mu_0 + \varepsilon_{1j} && \text{mit } \varepsilon_{1j} \sim N(0, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } j = 1, \ldots, n_1 \\
y_{ij} &= \mu_0 + \alpha_i + \varepsilon_{ij} && \text{mit } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } i = 2, \ldots, p, j = 1, \ldots, n_i
\end{aligned}
\tag{3}
$$

mit

$$\alpha_i := \mu_i - \mu_1 \text{ für } i = 2, \ldots, p.$$

Theorem (EVA Modell in Effektdarstellung mit Referenzgruppe I)

Gegeben sei das EVA Modell in Erwartungswertparameterdarstellung. Dann können die Zufallsvariablen, die die Datenpunkte des EVA Szenarios modellieren, äquivalent in der strukturellen Form

$$\begin{aligned} y_{1j} &= \mu_0 + \varepsilon_{1j} && \text{mit } \varepsilon_{1j} \sim N(0, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } j = 1, \ldots, n_1 \\ y_{ij} &= \mu_0 + \alpha_i + \varepsilon_{ij} && \text{mit } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } i = 2, \ldots, p, j = 1, \ldots, n_i \end{aligned} \tag{4}$$

mit

$$\alpha_i := \mu_i - \mu_1 \text{ für } i = 2, \ldots, p$$

und in der entsprechenden Datenverteilungsform

$$\begin{aligned} y_{1j} &\sim N(\mu_0, \sigma^2) && \text{u.i.v. für } j = 1, \ldots, n_i \text{ mit } \mu_1 \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0 \\ y_{ij} &\sim N(\mu_0 + \alpha_i, \sigma^2) && \text{u.i.v. für } i = 2, \ldots, p, j = 1, \ldots, n_i \text{ mit } \alpha_i \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0 \end{aligned} \tag{5}$$

geschrieben werden. Wir nennen (4) und (5) strukturelle und Datenverteilungsform des *EVA Modells in Effektdarstellung mit Referenzgruppe*.

4. Erläutern Sie die Motivation für die Reparameterisierung des EVA Modells.

- Die Reparameterisierung des EVA Modells ist in Konsistenz mit mehrfaktoriellen Varianzanalysemodellen.
- **Kernidee** der Reparameterisierung ist es, den Erwartungswertparameter jeder Gruppe i als Summe eines *gruppenübergreifenden Erwartungswertparameters* $\mu_0 \in \mathbb{R}$ und jeweiliger *gruppenspezifischer Effektparameter* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ zu modellieren

$$\mu_i := \mu_0 + \alpha_i \text{ für } i = 1, \dots, p, \tag{6}$$

  wobei jedes gruppenspezifische α_i den Unterschied (die Differenz) zwischen jedem gruppenspezifischen Erwartungswertparameter μ_i und dem gruppenübergreifenden Erwartungswertparameter μ_0 modelliert.

- **Nachteil** hierbei ist, dass das in (6) dargestellte EVA Modell überparametrisiert ist
  - Aus p geschätzten Erwartungswerparametern (μ_i für $i = 1, \dots, p$) müssten $p + 1$ Betaparameter ($\beta = (\mu_0, \alpha_i, \dots, \alpha_p)^T$) geschätzt werden.
  - Die Darstellung ist *nicht eindeutig*, da die gleichen Werte für gruppenspezifische Erwartungswertparameter μ_i durch verschiedene Werte der Effektparameter α_i und gruppensübergreifenden Erwartungswertparameter μ_0 dargestellt werden können.
- Um dieses Problem zu umgehen, wird die **Nebenbedingung** $\alpha_1 := 0$ eingeführt, wodurch sich ergibt, dass

$$\begin{aligned} \mu_1 &:= \mu_0 \\ \mu_i &:= \mu_0 + \alpha_i \text{ für } i = 2, \dots, p. \end{aligned}$$

- Dadurch wird die erste Gruppe zur **Referenzgruppe** und die *gruppenspezifischen Effektparameter* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ modellieren die Differenz zwischen dem Erwartungswertparameter der $i$ten Gruppe und dem Erwartungswertparameter der ersten Gruppe ($\alpha_i = \mu_i - \mu_0 = \mu_i - \mu_1$ für $i = 1, \dots, p$)

5. Welche Bedeutung haben die Parameter $\mu_0, \alpha_2, ..., \alpha_p$ in der Effektparameterdarstellung des EVA Modells?

- μ_0 ist der Erwartungswertparameter der Referenzgruppe (da, $\alpha_1 := 0$, und somit $\mu_1 := \mu_0 + \alpha_1 = \mu_0$)
- die *gruppenspezifischen Effektparameter* $\alpha_i \in \mathbb{R}$ für $i = 2, ..., p$ modellieren die Differenzen zwischen dem Erwartungswertparameter der $i$ten Gruppe und dem Erwartungswertparameter der Referenzgruppe ($\alpha_i = \mu_i - \mu_0 = \mu_i - \mu_1$ für $i = 1, ..., p$)

6. Warum gibt es bei p Gruppen eines EVA Szenarios nur die $p - 1$ Effektparameter $\alpha_2, ..., \alpha_p$?

- Durch die **Nebenbedingung** $\alpha_1 := 0$ gilt $\mu_1 := \mu_0 + \alpha_1 = \mu_0$.
- Dadurch ist der Effekt in der ersten Gruppe durch den Erwartungswertparameter μ_0 repräsentiert.

7. Geben Sie die Designmatrixform des EVA Modells in Effektdarstellung wieder.

Theorem (EVA Modell in Effektdarstellung mit Referenzgruppe II)

Gegeben sei die strukturelle Form des EVA Modells in Effektdarstellung mit Referenzgruppe. Dann hat dieses Modell die Designmatrixform

$$y = X\beta + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0_n, \sigma^2 I_n), n := \sum_{i=1}^{p} n_i$$

$$y := \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \\ \vdots \\ y_{p1} \\ \vdots \\ y_{pn_p} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \; X := \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \; \beta := \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ und } \sigma^2 > 0.$$

8. Formulieren Sie die Designmatrix eines EVA Modells mit $n_i = 3$ und $p = 2$.

Es seien

$$p = 2 \text{ und } n_i := 3 \text{ für } i = 1, ..., p, \text{ also } n = 6.$$

Dann gilt

$$y = X\beta + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0_6, \sigma^2 I_6)$$

mit

$$y := \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{pmatrix}, \; X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 2}, \; \beta := \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ und } \sigma^2 > 0.$$

9. Formulieren Sie die Designmatrix eines EVA Modells mit $n_i = 2$ und $p = 5$.

Es seien

$$p = 5 \text{ und } n_i := 2 \text{ für } i = 1, \ldots, p, \text{ also } n = 10.$$

Dann gilt

$$y = X\beta + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0_{10}, \sigma^2 I_{10})$$

mit

$$y := \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{31} \\ y_{32} \\ y_{41} \\ y_{42} \\ y_{51} \\ y_{52} \end{pmatrix}, \; X := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{10 \times 5}, \; \beta := \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ und } \sigma^2 > 0.$$

10. Geben Sie das Theorem zur Betaparameterschätzung im EVA Modell wieder.

Theorem (Betaparameterschätzung im EVA Modell)

Gegeben sei die Designmatrixform des EVA in Effektdarstellung mit Referenzgruppe Dann ergibt sich für den Betaparameterschätzer

$$\hat{\beta} := \begin{pmatrix} \hat{\mu}_0 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \hat{\alpha}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_p - \bar{y}_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

wobei

$$\bar{y}_i := \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \tag{8}$$

das Stichprobenmittel der $i$ten Gruppe bezeichent.

11. Mit welchen deskriptiven Statistiken werden die Parameter $\mu_0, \alpha_2, ..., \alpha_p$ eines EVA Modells geschätzt?

Gegeben, dass die erste Gruppe die Referenzgruppe ist, wird

- der Erwartungswertparameter der ersten Gruppe durch das Stichprobenmittel der ersten Gruppe geschätzt, und
- die Effektparameter jeder Gruppe i durch die Differenz des Stichprobenmittels der $i$ten und der ersten Gruppe geschätzt.

12. Geben Sie das Theorem zur Quadratsummenzerlegung bei einfaktorieller Varianzanalyse wieder.

Theorem (Quadratsummenzerlegung bei einfaktorieller Varianzanalyse)

Für $i = 1, \ldots, p$ und $j = 1, \ldots, n_i$ sei y_{ij} die $j$te Datenvariable in der $i$ten Gruppe eines EVA Szenarios. Weiterhin seien

$$\bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \qquad \text{das } \textit{Gesamtstichprobenmittel}$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \qquad \text{das } i\textit{te Stichprobenmittel}$$

sowie

$$\text{SQT} := \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y})^2 \qquad \text{die } \textit{Total Sum of Squares}$$

$$\text{SQB} := \sum_{i=1}^{p} n_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 \qquad \text{die } \textit{Between Sum of Squares}$$

$$\text{SQW} := \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \qquad \text{die } \textit{Within Sum of Squares}$$

Dann gilt

$$\text{SQT} = \text{SQB} + \text{SQW}. \tag{9}$$

Bemerkung

- In Analogie zur Quadratsummenzerlegung bei einer Ausgleichsgerade (vgl. Einheit (3) Korrelation) wird die *Within Sum of Squares* auch als *Residual Sum of Squares* bezeichnet.

13. Erläutern Sie die Begriffe Total Sum of Squares, Between Sum of Squares, Within Sum of Squares der EVA.

Total Sum of Squares (SQT) Variabilität aller Daten um das Stichprobenmittel, definiert als die Summe der quadrierten Abstände zwischen allen Datenpunkten zum Gesamtstichprobenmittel.

Between Sum of Squares (SQB) Variabilität der Daten zwischen Gruppen, definiert als die Summe der quadrierten Abstände zwischen allen gruppenspezifischen Stichprobenmitteln zum Gesamtstichprobenmittel. Mit anderen Worten, quantifiziert die SQB, inwieweit die gruppenspezifischen Stichprobenmittel voneinander abweichen.

Within Sum of Squares (SQW) Variabilität der Daten innerhalb der Gruppen, definiert als die Summe der quadrierten Abstände zwischen gruppenspezifischen Datenpunkten zu gruppenspezifischen Stichprobenmitteln. Mit anderen Worten, quantifiziert die SQW, inwieweit die einzelnen Datenpunkte innerhalb einer Gruppe um dem gruppenspezifischen Stichprobenmittel streuen.

14. Geben Sie die Definition des Effektstärkenmaßes η^2 an.

Definition (Effektstärkenmaß η^2)

Für ein EVA Szenario seien die Between Sum of Squares SQB und die Total Sum of Squares SQT definiert wie oben. Dann ist das *Effektstärkenmaß* η^2 definiert als

$$\eta^2 := \frac{\mathsf{SQB}}{\mathsf{SQT}} \tag{10}$$

Bemerkungen

- η^2 ist analog zum Bestimmtheitsmaß R^2 der Regression definiert.
- η^2 gibt den Anteil der Varianz zwischen den Gruppen an der Gesamtvarianz der Daten an.

15. Wann nimmt das Effektstärkenmaß η^2 der EVA seinen Minimalwert an und wie lautet dieser?

Mit dem Theorem zur Quadratsummenzerlegung bei EVA gilt

$$\text{SQB} = 0 \Rightarrow \text{SQT} = \text{SQW und } \eta^2 = 0$$

η^2 nimmt seinem **Minimalwert** an, wenn *keine Variabilität der Daten zwischen Gruppen* besteht, also $\text{SQB} = 0$. Mit anderen Worten, wenn die gruppenspezifischen Stichprobenmittel nicht voneinander abweichen, und die gesamte Variabilität der Daten auf die **Variabilität der Daten innerhalb der Gruppen** zurückzuführen ist.

16. Wann nimmt das Effektstärkenmaß η^2 der EVA seinen Maximalwert an und wie lautet dieser?

Mit dem Theorem zur Quadratsummenzerlegung bei EVA gilt

$$\text{SQW} = 0 \Rightarrow \text{SQT} = \text{SQB und } \eta^2 = 1$$

η^2 nimmt seinem **Maximalwert** an, wenn *keine Variabilität der Daten innerhalb der Gruppen* besteht, also SQW $= 0$. Mit anderen Worten, wenn die Datenpunkte innerhalb der Gruppen nicht von den gruppenspezifischen Stichprobenmittel abweichen, und die gesamte Variabilität der Daten auf die **Variabilität der Daten zwischen den Gruppen** zurückzuführen ist.

17. Geben Sie das Theorem zur F-Teststatistik der EVA wieder.

Theorem (F-Teststatistik)

Es sei

$$y = X\beta + \varepsilon \text{ mit } \varepsilon \sim N(0_n, \sigma^2 I_n) \tag{11}$$

die Designmatrixform der Effektdarstellung mit Referenzgruppe des EVA Modells und im Sinne der Definition der F-Statistik (vgl. Einheit (7) Modellevaluation) sei dieses Modell partioniert mit $p_1 := 1$ und $p_2 := p - 1$. Weiterhin seien

$$\text{MSB} := \frac{\text{SQB}}{p-1} \qquad \text{die } \textit{Mean Between Sum of Squares}$$

$$\text{MSW} := \frac{\text{SQW}}{n-p} \qquad \text{die } \textit{Mean Within Sum of Squares}$$

respektive. Dann gilt

$$F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSW}}. \tag{12}$$

Bemerkungen

- Die F-Teststatistik der EVA ist ein Speialfall der allgemeinen F-Teststatistik zum Vergleich eines vollständigen Modells mit einem reduzierten Modell (vgl.(7) Modellevaluation)
- $p_1 := 1$ impliziert, dass das reduzierte Modell die Designmatrix $X_1 := 1_n$ hat.
- $p_1 := 1$ impliziert zudem, dass das reduzierte Modell den Betaparameter $\beta := \mu_0$ hat.
- $p_1 := 1$ impliziert damit auch, dass das reduzierte Modell keine Effektparameter hat.
- Die Zahl $p - 1$ wird auch als "Between Freiheitsgrade" bezeichnet.
- Die Zahl $n - p$ wird auch als "Within Freiheitsgrade" bezeichnet.

18. Erläutern Sie die Begriffe Mean Between Sum of Squares und Mean Within Sum of Squares der EVA.

Mean Between Sum of Squares (MSB) sind die SQB geteilt durch Anzahl der Gruppen minus 1.

Mean Within Sum of Squares (MSW) sind die SQW geteilt durch die Anzahl der Datenpunkte minus die Anzahl der Gruppen.

19. Geben Sie das Theorem zum Zusammenhang von Effektstärkenmaß η^2 und F-Teststatistik der EVA wieder.

Theorem (Effektstärkenmaß η^2 und F-Teststatistik)

Für ein EVA Szenario mit p Gruppen und Gesamtdatenpunktanzahl n seien das Effektstärkenmaß η^2 und die F-Teststatistik wie oben definiert. Dann gilt

$$\eta^2 = \frac{F(p-1)}{F(p-1) + (n-p)} \tag{13}$$

Bemerkungen

- Das Verhältnis von F und η^2 ist analog zum Verhältnis von T und Cohen's d.
- Die gleichzeitige Angabe von F und η^2 ist redundant.

20. Geben Sie die Definition des EVA F-Test wieder.

Definition (Einfaktorielle Varianzanalyse F-Test)

Gegeben sie das Modell der einfaktoriellen Varianzanalyse sowie die zusammengesetzten Null- und Alternativhypothesen

$$H_0 : \alpha_i = 0 \text{ für alle } i = 2, \ldots, p \Leftrightarrow \Theta_0 := \mathbb{R} \times \{0_{p-1}\} \tag{14}$$

und

$$H_1 : \alpha_i \neq 0 \text{ für mindestens ein } i = 2, \ldots, p \Leftrightarrow \Theta_1 := \mathbb{R}^p \setminus \mathbb{R} \times \{0_{p-1}\} \tag{15}$$

respektive. Weiterhin sei die F-Teststatistik definiert durch

$$F = \frac{\text{MSB}}{\text{MSW}} \tag{16}$$

mit der Mean Sum of Squares Between MSB und der Mean Sum of Square Within MSW definiert wie oben. Dann ist der *einfaktoriellen Varianzanalyse F-Test (EVA F-Test)* definiert als der kritische Wert-basierte Test

$$\phi(y) := 1_{\{F \geq k\}} := \begin{cases} 1 & F \geq k \\ 0 & F < k \end{cases}. \tag{17}$$

21. Erläutern sie die Null- und Alternativhypothesen des EVA F-Tests.

Die **Nullhypothese**

$$H_0 : \alpha_i = 0 \text{ für alle } i = 2, ..., p \Leftrightarrow \Theta_0 := \mathbb{R} \times \{0_{p-1}\}$$

beschreibt ein (hypothetisches Echte-Welt-) Szenario, in dem *alle* gruppenspezifischen Effektparameter a_i gleich 0 sind und sich somit die gruppenspezifischen Erwartungswertparameter μ_i nicht unterscheiden, da sie alle gleich μ_0 sind (weil $\mu_i = \mu_0 + \alpha_i$)

Die **Alternativhypothese**

$$H_1 : \alpha_i \neq 0 \text{ für mindestens ein } i = 2, ..., p \Leftrightarrow \Theta_1 := \mathbb{R}^p \setminus \mathbb{R} \times \{0_{p-1}\}$$

beschreibt ein (hypothetisches Echte-Wet-) Szenario, in dem *mindestens ein* gruppenspezifischer Effektparameter a_i nicht 0 ist und somit *mindestens ein* gruppenspezifiscer Erwartungswertparameter μ_i nicht gleich μ_0 ist.

22. Geben Sie das Theorem zur Testumfangkontrolle der EVA wieder.

Theorem (Testumfangkontrolle)

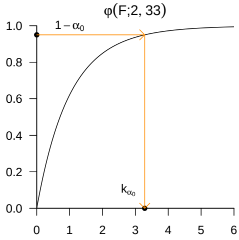
ϕ sei der F-Test zur einfaktoriellen Varianzanalyse. Dann ist ϕ ein Level-α_0-Test mit Testumfang α_0, wenn der kritische Wert definiert ist durch

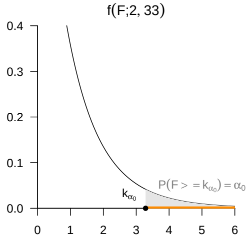
$$k_{\alpha_0} := \varphi^{-1}(1-\alpha_0; p-1, n-p), \tag{18}$$

wobei $\varphi^{-1}(\cdot; p-1, n-p)$ die inverse KVF der f-Verteilung mit Freiheitsgradparametern $p-1$ und $n-p$ ist.

Beispiel:

Wahl von $k_{\alpha_0} := \varphi^{-1}(1-\alpha_0; p-1, n-p)$ mit $p=3, n=12$ $\alpha_0 := 0.05$ und Ablehnungsbereich





23. Skizzieren Sie den Beweis zur Testumfangkontrolle der EVA.

- Wir wollen zeigen, dass der Test ϕ den Testumfang α_0 hat, wenn wir einen kritischen Wert wählen von

$$k_{\alpha_0} := \varphi^{-1}(1-\alpha_0; p-1, n-p)$$

- Mit dem kritischen Wert wollen wir kontrollieren, dass, falls die Nullhypothese zutrifft, der Testumfang höchstens α_0 ist, anders ausgedrückt, die Testgütefunktion $q_\phi(\beta) := \mathbb{P}_\beta(\phi = 1)$ (i.e. Wlkt Nullhypothese Ablehnen) im Definitionsbereich der Nullhypothesenparameter höchstens den Wert α_0 annimmt.
- Der Test ϕ lehnt die Nullhypothese ab, wenn $F \geq k$, wodurch sich der Ablehnungsbereich $[k, \infty[$.
- Da die F-Teststatistik nach einer nichtzentralen f-Verteilung verteilt ist (formal $F \sim f(\delta, p-1, n-p)$), ergibt sich für die funktionale Form der Testgütefunktion $\mathbb{P}_\beta(\phi = 1) = 1 - \varphi(k; \delta, p-1, n-p)$, also **1 minus den Wert der KVF der nichtzentralen f-Verteilung an der Stelle k und mit Nichtzentralitätsparameter δ und Freiheitsgradparametern $p-1$ und $n-p$**.
- Mit der Form des Nichtzentralitätsparameters, (vgl. (7) Modellevaluation) gegeben durch

$$\delta = \frac{1}{\sigma^2} K^T\beta \left(K^T(X^TX)^{-1}K\right)^{-1} K^T\beta$$

  ergibt sich unter der Nullhypothese, dass der Nichtzentralitätsparameter δ gleich 0 ist, wodurch die F-Teststatistik zentral-f-verteilt wäre.
- Wenn wir also *den F-Wert*, bzw. *die Stelle* k suchen, an dem die **KVF der zentralen f-Verteilung mit Freiheitsgradparametern $p-1$ und $n-p$** den Wert $1-\alpha_0$ annimmt, können wir die Inverse der KVF der zentralen f-Verteilung mit an "der Stelle" $1-\alpha_0$ Freiheitsgradparametern $p-1$ und $n-p$ verwenden, also $\varphi^{-1}(1-\alpha_0; p-1, n-p)$.

24. Geben Sie den p-Wert zum F-Test der EVA wieder.

Der p-Wert ist das kleinste Signifikanzlevel α_0, bei welchem man die Nullhypothese basierend auf einem vorliegenden Wert f der Teststatistik ablehnen würde. Formal,

$$\text{p-Wert} = \mathbb{P}(F \geq f) = 1 - \varphi(f; p-1, n-p).$$

25. Betrachten Sie die Daten zur Therapiedauer der Patient:innen in der **Face-to-Face**, **Online**, und **Waitlist Control** Gruppe im Beispieldatensatz. Erstellen Sie ein *Balkendiagramme* der Gruppenmittelwerte und Gruppenstandardabweichungen und erläutern Sie dieses. Führen Sie zu diesen Daten einen *EVA F-Test* mit $\alpha := 0.05$ durch. Dokumentieren Sie ihre Ergebnisse. Was *folgern* Sie aus den sich ergebenen Resultaten?

Anwendungsbeispiel - SKF 25 - Dateneinlesen

Daten einlesen

```
fname        = file.path(getwd(), "10_Daten", "10_Einfaktorielle_Varianzanalyse_Daten.csv")
D            = read.table(fname, sep = ",", header = TRUE)
```

	ID	Condition	PreBDI	PostBDI	BDI	Age	Duration
1	1	F2F	29	25	4	66	22
2	2	F2F	32	31	1	29	23
3	3	F2F	28	26	2	71	14
4	4	F2F	36	26	10	77	21
5	5	F2F	32	27	5	55	24
6	6	F2F	28	29	-1	50	24
7	7	F2F	33	27	6	31	16
8	8	F2F	33	27	6	20	17
9	9	F2F	33	25	8	73	23
10	10	F2F	30	26	4	28	13
41	41	ONL	31	27	4	70	23
42	42	ONL	31	25	6	63	16
43	43	ONL	34	29	5	41	23
44	44	ONL	34	29	5	28	14
45	45	ONL	30	24	6	43	22
46	46	ONL	30	33	-3	76	15
47	47	ONL	33	25	8	68	12
48	48	ONL	34	21	13	66	22
49	49	ONL	32	26	6	77	20
50	50	ONL	35	27	8	80	23
81	81	WLC	27	31	-4	59	21
82	82	WLC	29	35	-6	28	21
83	83	WLC	33	35	-2	41	14
84	84	WLC	24	29	-5	64	18
85	85	WLC	31	23	8	74	19
86	86	WLC	30	38	-8	62	18
87	87	WLC	32	32	0	34	17
88	88	WLC	28	32	-4	59	17
89	89	WLC	30	30	0	37	12
90	90	WLC	30	32	-2	77	23

Anwendungsbeispiel - SKF 25 - Deskriptive Statistiken

Deskriptive Statistiken

```
# Initialisierung eines Dataframes
tp            = c("F2F", "ONL", "WLC")                     # Therapiebedingungen
ntp           = length(tp)                          # Anzahl Therapiebedingungen
S             = data.frame(                         # Dataframeerzeugung
                n         = rep(NaN,ntp),           # Stichprobengrößen
                Max       = rep(NaN,ntp),           # Maxima
                Min       = rep(NaN,ntp),           # Minima
                Median    = rep(NaN,ntp),           # Mediane
                Mean      = rep(NaN,ntp),           # Mittelwerte
                Var       = rep(NaN,ntp),           # Varianzen
                Std       = rep(NaN,ntp),           # Standardabweichungen
                row.names = tp)                     # Therapiebedingungen

# Iterationen über Therapiebedingungen
for(i in 1:ntp){
  data        = D$Duration[D$Condition == tp[i]]    # Daten
  S$n[i]      = length(data)                        # Stichprobengröße
  S$Max[i]    = max(data)                           # Maxima
  S$Min[i]    = min(data)                           # Minima
  S$Median[i] = median(data)                        # Mediane
  S$Mean[i]   = mean(data)                          # Mittelwerte
  S$Var[i]    = var(data)                           # Varianzen
  S$Std[i]    = sd(data)                            # Standardabweichungen
}

# Ausgabe
print.AsIs(S)
```

```
>      n Max Min Median Mean  Var  Std
> F2F 40  24  13     18 18.2 12.0 3.46
> ONL 40  23  12     18 18.1 11.2 3.35
> WLC 40  24  12     18 18.4 11.1 3.33
```

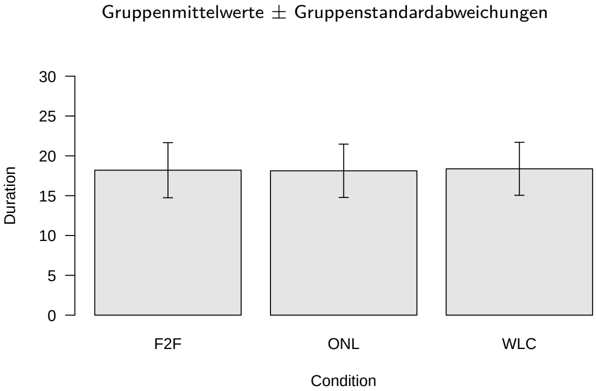
Anwendungsbeispiel - SKF 25 - Balkendiagramm

Balkendiagramm

```r
# Datenselektion
fname       = file.path(getwd(), "10_Daten", "10_Einfaktorielle_Varianzanalyse_Daten.csv")
D           = read.table(fname, sep = ",", header = TRUE)

# Datenselektion
A           = data.frame(                          # neuer Dataframe
                F2F = D$Duration[D$Condition == "F2F"],   # F2F Duration Daten
                ONL = D$Duration[D$Condition == "ONL"],   # ONL Duration Daten
                WLC = D$Duration[D$Condition == "WLC"])   # WLC Duration Daten

# Deskriptive Statistiken
groupmeans  = colMeans(A)                          # Gruppenmittelwerte
groupstds   = apply(A,2,sd)                        # Gruppenstandardabweichungen

# Balkendiagramm
par(                                               # für Details siehe ?par
family      = "sans",                              # Serif-freier Fonttyp
pty         = "m",                                 # Maximale Abbildungsregion
bty         = "l",                                 # L förmige Box
lwd         = 1,                                   # Liniendicke
las         = 1)                                   # Horizontale Achsenbeschriftung
x = barplot(                                       # Ausgabe der x-Ordinaten (?barplot für Details)
groupmeans,
ylim        = c(0,30),
col         = "gray90",
ylab        = "Duration",
xlab        = "Condition")
arrows(                                            # für Details siehe ?arrows
x0          = x,                                   # arrow start x-ordinate
y0          = groupmeans - groupstds,              # arrow start y-ordinate
x1          = x,                                   # arrow end   x-ordinate
y1          = groupmeans + groupstds,              # arrow end   y-ordinate
code        = 3,                                   # Pfeilspitzen beiderseits
angle       = 90,                                  # Pfeilspitzenwinkel -> Linie
length      = 0.05)                                # Linielänge

# PDF Speicherung
dev.copy2pdf(
file        = file.path(getwd(), "10_Abbildungen", "alm_10_aov_1_barplot.pdf"),
width       = 7,
height      = 4)
```

Anwendungsbeispiel - SKF 25 - Bankendiagramm

Balkendiagramm

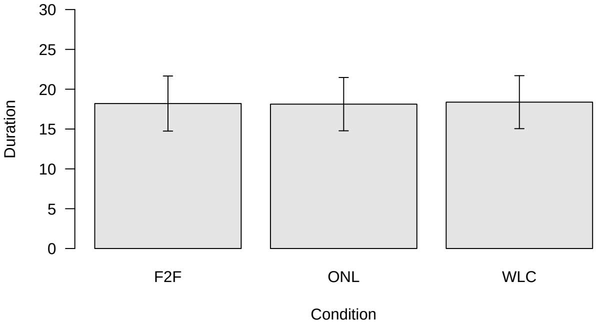



```
# Ausgabe
print.AsIs(S)
```

```
>      n Max Min Median Mean  Var  Std
> F2F 40  24  13     18 18.2 12.0 3.46
> ONL 40  23  12     18 18.1 11.2 3.35
> WLC 40  24  12     18 18.4 11.1 3.33
```

Anwendungsbeispiel - SKF 25 - Deskriptive Zusammenfassung

Deskriptive Stats Zusammenfassung



- In allen 3 Gruppen war die Therapiedauer im Mittel ähnlich hoch.

Anwendungsbeispiel - SKF 25 - EVA F-Test (manuell)

Modellformulierung, -schätzung und -evaluation

```r
# Datengruppen
y_1        = D$Duration[D$Condition == "F2F"]          # Therapiedauer in der F2F Gruppe
y_2        = D$Duration[D$Condition == "ONL"]          # Therapiedauer in der ONL Gruppe
y_3        = D$Duration[D$Condition == "WLC"]          # Therapiedauer in der WLC Gruppe

# Modellformulierung
p          = 3                                         # drei Gruppen
m          = length(y_1)                               # balancierters Design mit n_i = 40
n          = p*m                                       # Datenvektordimension
y          = matrix(c(y_1, y_2, y_3), nrow = n)        # Datenvektor
Xt         = cbind(                                    # Designmatrix vollständiges Modell
               matrix(1, nrow = n, ncol = 1),
               kronecker(diag(p),
                         matrix(1, nrow = m, ncol = 1)))
X          = Xt[,-2]
X_1        = X[,1]                                     # Designmatrix reduziertes Modell

# F-Teststatistikevaluation
beta_hat   = solve(t(X) %*% X) %*% t(X) %*% y          # Betaparameterschätzer vollständiges Modell
beta_hat_1 = solve(t(X_1) %*% X_1) %*% t(X_1) %*% y    # Betaparameterschätzer reduziertes Modell
eps_hat    = y - X %*% beta_hat                        # Residuenvektor vollständiges Modell
eps_hat_1  = y - X_1 %*% beta_hat_1                    # Residuenvektor reduziertes Modell
SQT        = t(eps_hat_1) %*% eps_hat_1                # Sum of Squares Total
SQW        = t(eps_hat)   %*% eps_hat                  # Sum of Squares Within
SQB        = SQT - SQW                                 # Sum of Squares Between
DFB        = p - 1                                     # Between Degrees of Freedom
DFW        = n - p                                     # Within  Degrees of Freedom
MSB        = SQB/DFB                                   # Mean Sum of Squares Between
MSW        = SQW/DFW                                   # Mean Sum of Squares Within
Eff        = MSB/MSW                                   # F-Teststatistik
p_value    = 1 - pf(Eff, p-1, n-p)                     # p-Wert
alpha_0    = 0.05                                      # Signifikanzlevel
k_alpha_0  = qf(1-alpha_0,p-1 ,n-p)                    # kritischer Wert
if(Eff >= k_alpha_0){                                  # Test 1_{F >= k_alpha_0}
    phi = 1                                            # Ablehnen von H_0
} else {
    phi = 0                                            # Nicht Ablehnen von H_0
}
```

Anwendungsbeispiel - SKF 25 - EVA F-Test (manuell) - Resultat

Resultat

```
# Ausgabe
cat("DFB        :" , DFB,
    "\nDFW       :", DFW,
    "\nSQB       :", SQB,
    "\nSQW       :", SQW,
    "\nMSB       :", MSB,
    "\nMSW       :", MSW,
    "\nF         :", Eff,
    "\nalpha_0   : ", alpha_0,
    "\nk_alpha_0 : ", k_alpha_0,
    "\nphi       :", phi,
    "\np         :", paste(p_value))
```

```
> DFB        : 2
> DFW       : 117
> SQB       : 1.32
> SQW       : 1334
> MSB       : 0.658
> MSW       : 11.4
> F         : 0.0577
> alpha_0   :  0.05
> k_alpha_0 :  3.07
> phi       : 0
> p         : 0.943928442054802
```

Anwendungsbeispiel - SKF 25 - EVA F-Test (mit aov())

F-Test mit R-Funktion "aov()"'

```
# Benutzung von R's aov Funktion und Ausgabe
res.aov = aov(D$Duration ~ D$Condition, data = D)
summary(res.aov)
```

```
>              Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
> D$Condition   2      1    0.66    0.06   0.94
> Residuals   117   1334   11.40
```

Anwendungsbeispiel - SKF 25 - Folgerung

Basierend auf dem F-Test können wir die Nullhypothese, dass keine Unterschiede zwischen Gruppen bestehen (modellformal, dass alle α_i für $i = 2, ..., p = 0$ sind), nicht ablehnen.