Tutorium Allgemeines Lineares Modell

BSc Psychologie SoSe 2022

5. Termin: Matrizen

Belinda Fleischmann

Organisatorisches

Ersatztermin für 16. Juni

- Montag, 13. Juni 15.00 - 17.00 Uhr

Follow-up letzte Woche

Kann man R^2 in Prozent ausdrücken?

- $\mathsf{R}^2 := \frac{\mathsf{SQE}}{\mathsf{SQT}}$
- $0 \leq \mathsf{R}^2 \leq 1$. Das heißt, R^2 ist streng genommen kein Prozentwert (Vorsicht bei der Beschriftung von Achsen in Grafiken)
- Das Bestimmtheitsmaß drückt aus, welcher Anteil der Datenvariabilität - quantifiziert durch SQT - durch die Ausgleichsgerade erklärt wird.

Selbstkontrollfragen - Matrizen

1. Geben Sie Definition einer Matrix wieder.
2. Nennen Sie sechs Matrixoperationen.
3. Geben Sie Definitionen der Matrixaddition und -subtraktion wieder.
4. Geben Sie die Definition der Skalarmultiplikation für Matrizen wieder.
5. Geben Sie die Definition der Matrixtransposition wieder.
6. Es seien
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ und } c := 2 \tag{1}$$
   Berechnen Sie
$$D := c\left(A - B^T\right) \text{ und } E := (cA)^T + B. \tag{2}$$
   per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.
7. Geben Sie die Definition der Matrixmultiplikation wieder.
8. Es seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Prüfen Sie, ob folgende Matrixprodukte definiert sind, und wenn ja, geben Sie die Größe der resultierenden Matrix and
$$ABC, \quad ABC^T, \quad , A^TCB^T \quad , BAC \tag{3}$$

Selbstkontrollfragen

9. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

   Berechnen Sie die Matrixprodukte

$$AB, \qquad B^T A^T, \qquad \left(B^T A^T\right)^T, \qquad AC \tag{5}$$

   per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

10. Invertieren Sie die Matrizen A und B aus der vorherigen Aufgabe mithilfe von matlib::inv und überprüfen Sie die Inverseeigenschaft der inversen Matrizen mithilfe von R.
11. Geben Sie die Formel für die Determinante von $A := (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2} \in \mathbb{R}^2$ wieder.
12. Geben Sie die Formel für die Determinante von $A := (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathbb{R}^3$ wieder.
13. Berechnen Sie die Determinanten von

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } C := \text{diag}(1, 2, 3) \tag{6}$$

   per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Selbstkontrollfragen

14. Geben Sie die Definition einer symmetrischen Matrix wieder.
15. Geben Sie die Definition einer Diagonalmatrix wieder.
16. Geben Sie die Definition einer orthogonalen Matrix wieder.
17. Geben Sie die Definition einer positiv-definiten Matrix wieder.
18. Geben Sie die Definition des Rangs einer Matrix wieder
19. Wann sagt man, dass eine Matrix vollen Spaltenrang hat?
20. Bestimmen Sie dien Rang folgender Matrizen durch überlegen und mithilfe von R

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

1. Geben Sie Definition einer Matrix wieder.

Definition (Matrix)

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Zahlen, die wie folgt bezeichnet wird

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} := (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}. \tag{8}$$

2. Nennen Sie sechs Matrixoperationen.

- Matrixaddition
- Matrixsubtraktion
- Skalarmultiplikation
- Matrixtransposition
- Matrixmultiplikation
- Matrixinversion

3. Geben Sie Definitionen der Matrixaddition und -subtraktion wieder.

Teil 1/2

Definition (Matrixaddition)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Addition* von A und B definiert als die Abbildung

$$+ : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m},\ (A, B) \mapsto +(A, B) := A + B \tag{9}$$

mit

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

3. Geben Sie Definitionen der Matrixaddition und -subtraktion wieder.

Teil 2/2

Definition (Matrixsubtraktion)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Subtraktion* von A und B definiert als die Abbildung

$$- : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m},\ (A, B) \mapsto -(A, B) := A - B \tag{11}$$

mit

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2m} - b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nm} - b_{nm} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

4. Geben Sie die Definition der Skalarmultiplikation für Matrizen wieder.

Definition (Skalarmultiplikation)

Es sei $c \in \mathbb{R}$ ein Skalar und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Skalarmultiplikation* von c und A definiert als die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m},\ (c, A) \mapsto \cdot(c, A) := cA \tag{13}$$

mit

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1m} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nm} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

5. Geben Sie die Definition der Matrixtransposition wieder.

Definition (Matrixtransposition)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann ist die *Transposition* von A definiert als die Abbildung

$$\cdot^T : \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{m \times n},\ A \mapsto \cdot^T(A) := A^T \tag{15}$$

mit

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{16}$$

6. Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, und $c := 2$. Berechnen Sie $D := c\left(A - B^T\right)$ und $E := (cA)^T + B$ per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Teil 1/3 - Berechunung mit Hand

$$D = 2\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^T\right) = 2\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$E = \left(2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right)^T + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Rang - Selbstkontrollfragen

6. Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, und $c := 2$. Berechnen Sie $D := c\left(A - B^T\right)$ und $E := (cA)^T + B$ per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Teil 2/3 - Berechnung mit R

```
# Definitionen
A = matrix(c(1,2,
             2,1),
           nrow  = 2,
           byrow = TRUE)
B = matrix(c(3,0,
             1,2),
           nrow  = 2,
           byrow = TRUE)
c = 2
```

6. Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, und $c := 2$. Berechnen Sie $D := c\left(A - B^T\right)$ und $E := (cA)^T + B$ per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Teil 3/3 - Berechnung mit R

```
# Berechnung
D = c*(A - t(B))
E = t(c*A) + B

# Ausgabe
print(D)
```

```
>      [,1] [,2]
> [1,]   -4    2
> [2,]    4   -2
```

```
print(E)
```

```
>      [,1] [,2]
> [1,]    5    4
> [2,]    5    4
```

7. Geben Sie die Definition der Matrixmultiplikation wieder.

Definition (Matrixmultiplikation)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$. Dann ist die *Matrixmultiplikation* von A und B definiert als die Abbildung

$$\cdot : \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{m\times k} \to \mathbb{R}^{n\times k},\ (A,B) \mapsto \cdot(A,B) := AB \tag{17}$$

mit

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mk} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{1i}b_{ik} \\ \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{2i}b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^m a_{ni}b_{ik} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

8. Es seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Prüfen Sie, ob folgende Matrixprodukte definiert sind, und wenn ja, geben Sie die Größe der resultierenden Matrix an

$$ABC, \quad ABC^T, \quad , A^TCB^T \quad , BAC$$

- für ABC gilt (informell) $(3 \times 2)(2 \times 4)(3 \times 4) \rightarrow AB$, mit $(3 \times 2)(2 \times 4) = (3 \times 4)$ wäre definiert, aber die Multiplikation des Resultats mit C, also $(AB)C$, für die $(3 \times 4)(3 \times 4)$, ist nicht definiert. Das sieht man auch daran, dass für BC gilt $(2 \times 4)(3 \times 4) \Rightarrow$ nicht definiert.
- für ABC^T gilt $(3 \times 2)(2 \times 4)(4 \times 3) = (3 \times 3)$
- für A^TCB^T gilt $(2 \times 3)(3 \times 4)(4 \times 2) = (2 \times 2)$
- für BAC gilt $(2 \times 4)(3 \times 2)(3 \times 4) \Rightarrow$ nicht definiert.

9. Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.Berechnen Sie die Matrixprodukte AB, $B^T A^T$, $\left(B^T A^T\right)^T$ und AC per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Teil 1/4 - Berechnung per Hand

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 21 & 23 & 13 \\ 5 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 21 & 5 \\ 8 & 23 & 12 \\ 4 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left(B^T A^T\right)^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 \\ 21 & 23 & 13 \\ 5 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 31 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Rang - Selbstkontrollfragen

9. Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.Berechnen Sie die Matrixprodukte AB, $B^T A^T$ $\left(B^T A^T\right)^T$ und AC per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Teil 2/4 - Berechnung mit R

```r
# Definitionen
A = matrix(c(1,2,3,
             4,5,6,
             3,2,0),
           nrow  = 3,
           byrow = TRUE)
B = matrix(c(1,2,2,
             1,3,1,
             2,0,0),
           nrow  = 3,
           byrow = TRUE)
C = matrix(c(1,3,2),
           nrow  = 3,
           byrow = TRUE)
```

Rang - Selbstkontrollfragen

9. Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.Berechnen Sie die Matrixprodukte AB, $B^T A^T$ $\left(B^T A^T\right)^T$ und AC per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Teil 3/4 - Berechnung mit R

```
# Ausgabe
print(A %*% B)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    9    8    4
> [2,]   21   23   13
> [3,]    5   12    8
```

```
print(t(B) %*% t(A))
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    9   21    5
> [2,]    8   23   12
> [3,]    4   13    8
```

Rang - Selbstkontrollfragen

9. Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.Berechnen Sie die Matrixprodukte AB, $B^T A^T$ $\left(B^T A^T\right)^T$ und AC per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Teil 4/4 - Berechnung mit R

```
# Ausgabe
print(t(t(B) %*% t(A)))
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    9    8    4
> [2,]   21   23   13
> [3,]    5   12    8
```

```
print(A %*% C)
```

```
>      [,1]
> [1,]   13
> [2,]   31
> [3,]    9
```

10. Invertieren Sie die Matrizen A und B aus der vorherigen Aufgabe mithilfe von matlib::inv und überprüfen Sie die Inverseeigenschaft der inversen Matrizen mithilfe von R.

Teil 1/4 - Definition der Matrizen

```
library(matlib)  # Import des matlib packages

# Definitionen
A = matrix(c(1,2,3,
             4,5,6,
             3,2,0),
           nrow  = 3,
           byrow = TRUE)
B = matrix(c(1,2,2,
             1,3,1,
             2,0,0),
           nrow  = 3,
           byrow = TRUE)
```

10. Invertieren Sie die Matrizen A und B aus der vorherigen Aufgabe mithilfe von matlib::inv und überprüfen Sie die Inverseeigenschaft der inversen Matrizen mithilfe von R.

Teil 2/4 - Berechnung der Inversen mit `inv()`

```r
# Matrixinversion mit inv()
print(inv(A))
```

```
>       [,1]  [,2] [,3]
> [1,] -4.00  2.00   -1
> [2,]  6.00 -3.00    2
> [3,] -2.33  1.33   -1
```

```r
print(inv(B))
```

```
>       [,1] [,2]   [,3]
> [1,]  0.00  0.0  0.500
> [2,] -0.25  0.5 -0.125
> [3,]  0.75 -0.5 -0.125
```

10. Invertieren Sie die Matrizen A und B aus der vorherigen Aufgabe mithilfe von matlib::inv und überprüfen Sie die Inverseeigenschaft der inversen Matrizen mithilfe von R.

Teil 3/4 - Berechnung der Inversen mit `solve()`

```
# Matrixinversion mit solve()
print(solve(A))
```

```
>       [,1]  [,2] [,3]
> [1,] -4.00  2.00   -1
> [2,]  6.00 -3.00    2
> [3,] -2.33  1.33   -1
```

```
print(solve(B))
```

```
>       [,1] [,2]   [,3]
> [1,]  0.00  0.0  0.500
> [2,] -0.25  0.5 -0.125
> [3,]  0.75 -0.5 -0.125
```

10. Invertieren Sie die Matrizen A und B aus der vorherigen Aufgabe mithilfe von matlib::inv und überprüfen Sie die Inverseeigenschaft der inversen Matrizen mithilfe von R.

Teil 4/4 - Zeigen der Inverseeigenschaft

```
# Multiplikation der Matrizen mit ihren Inversen
print(inv(A) %*% A)
```

```
>         [,1]   [,2] [,3]
> [1,]  1e+00  0e+00    0
> [2,]  0e+00  1e+00    0
> [3,] -1e-08 -1e-08    1
```

```
print(inv(B) %*% B)
```

```
>      [,1] [,2] [,3]
> [1,]    1    0    0
> [2,]    0    1    0
> [3,]    0    0    1
```

11. Geben Sie die Formel für die Determinante von $A := (A_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathbb{R}^2$ wieder.

Es sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 2} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dann gilt

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

12. Geben Sie die Formel für die Determinante von $A := (A_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathbb{R}^3$ wieder.

Es sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann gilt

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

13. Berechnen Sie die Determinanten von $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $C := \text{diag}(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Teil 1/2 - Berechnung per Hand

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 2 \times 2 - 1 \times 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} \\ &= 3 \times 3 \times 3 + 2 \times 2 \times 1 + 1 \times 2 \times 2 - 2 \times 2 \times 3 - 3 \times 2 \times 2 - 1 \times 3 \times 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(C) &= c_{11}c_{22}c_{33} + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} - c_{12}c_{21}c_{33} - c_{11}c_{23}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} \\ &= 1 \times 2 \times 3 + 0 \times 0 \times 0 + 0 \times 0 \times 0 - 0 \times 0 \times 3 - 1 \times 0 \times 0 - 0 \times 2 \times 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Determinanten - Selbstkontrollfragen

13. Berechnen Sie die Determinanten von $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $C :=$ diag$(1, 2, 3)$ per Hand und überprüfen Sie Ihre Rechnung mit R.

Teil 2/2 - Berechnung mit R

```r
# Definitionen
A = matrix(c(2,1,
             1,2),
           nrow  = 2,
           byrow = TRUE)
B = matrix(c(3,2,1,
             2,3,2,
             1,2,3),
           nrow  = 3,
           byrow = TRUE)
C = diag(c(1,2,3))
# print(C)  # Ausgabe C

# Berechnung und Ausgabe der Determinanten
cat("det(A) =", det(A),
    "\ndet(B) =", det(B),
    "\ndet(C) =", det(C))
```

```
> det(A) = 3
> det(B) = 8
> det(C) = 6
```

14. Geben Sie die Definition einer symmetrischen Matrix wieder.

Eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn gilt dass $S^T = S$.

15. Geben Sie die Definition einer Diagonalmatrix wieder.

Eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Diagonalmatrix*, wenn $d_{ij} = 0$ für $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$.

16. Geben Sie die Definition einer orthogonalen Matrix wieder.

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *orthogonal*, wenn ihre Spaltenvektoren wechselseitig *orthonormal* sind.

17. Geben Sie die Definition einer positiv-definiten Matrix wieder.

Definition (Positiv-definite Matrix)

Eine quadratische Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv-definit (p.d.), wenn

- C eine symmetrische Matrix ist und
- für alle $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n$ gilt, dass $x^T C x > 0$ ist.

18. Geben Sie die Definition des Rangs einer Matrix wieder.
19. Wann sagt man, dass eine Matrix vollen Spaltenrang hat?

Definition (Rang einer Matrix)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und

$$a_1 := \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, a_2 := \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, ..., a_n := \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{19}$$

seien die *Spalten(vektoren)* von A. Dann ist *der Rang von* A, geschrieben als $\text{rg}(A)$ definiert als die maximale Anzahl der linear unabhängigen Spalten(vektoren) von A. Ist die Anzahl der maximal linear unabhängigen Spalten(vektoren) von A gleich m, so sagt man, dass A *vollen Spaltenrang hat*.

20. Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen durch überlegen und mithilfe von R

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rang - Selbstkontrollfragen

20. Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen durch überlegen und mithilfe von R

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teil 1/2

```
# Matrixdefinitionen
X_1 = matrix(c(1,1,
               1,2,
               1,3),
          nrow  = 3,
          byrow = TRUE)
X_2 = matrix(c(1,1,0,
               1,1,0,
               1,0,1,
               1,0,1),
          nrow  = 4,
          byrow = TRUE)
X_3 = matrix(c(1,0,
               1,0,
               1,1,
               1,1),
          nrow  = 4,
          byrow = TRUE)
```

Rang - Selbstkontrollfragen

20. Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen durch überlegen und mithilfe von R

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teil 2/2

```
# Berechnung der Ränge
rg_X_1 = qr(X_1)$rank
rg_X_2 = qr(X_2)$rank
rg_X_3 = qr(X_3)$rank


# Ausgabe
cat("rg(X_1) = ", rg_X_1,
    "\nrg(X_2) = ", rg_X_2,
    "\nrg(X_3) = ", rg_X_3)
```

```
> rg(X_1) =  2
> rg(X_2) =  2
> rg(X_3) =  2
```