Tutorium Allgemeines Lineares Modell

BSc Psychologie SoSe 2022

1. Termin: Organisatorisches und Vektoren

Belinda Fleischmann

Organisatorisches

Termine:

- jeden Donnerstag
  - außer 26.05. (Christi Himmelfahrt)
  - Gruppe 1: 11.15 - 12.45 Uhr [G22A-112]
  - Gruppe 2: 13.15 - 14.45 Uhr [G22A-209]

Vorbereitung für das Tutorium:

- Selbstkontrollfragen der letzten VO bearbeiten
- Offene Fragen zur letzten VO vorbereiten
- Gerne Fragen auf moodle posten

Kontakt

- per Mail: belinda.fleischmann@ovgu.de

Ziele der Veranstaltung

Allgemeines Ziel des Tutoriums

- Wiederholung der Lehrinhalte der VO Allgemeines Lineares Modell (Modul B.2)
- Besprechung der Selbstkontrollfragen

Ziel der heutigen Veranstaltung

- Wiederholung mathematischer Grundlagen zur Vorbereitung für ALM
- Im Spezifischen: Vektoren

Vektoren

Vektoren

Motivation

- In der Statistik wollen wir aus Daten Sinn generieren.
- Einzelne Datenpunkte bestehen häufig aus mehreren Zahlen.
  - z.B. Abhängige Variable = (Alter, IQ)
- Datenpunkte, die aus mehreren Zahlen bestehen, nennen wir Vektoren.
- Vektorraumstrukturen definieren den mathematischen Umgang mit Vektoren.

Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Lineare Unabhängigkeit

Selbstkontrollfragen

Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Lineare Unabhängigkeit

Selbstkontrollfragen

Definition (Vektorraum)

Es seien V eine nichtleere Menge und S eine Menge von Skalaren. Weiterhin sei eine Abbildung (oder Funktion)

$$+ : V \times V \to V, (v_1, v_2) \mapsto +(v_1, v_2) := v_1 + v_2, \tag{1}$$

genannt *Vektoraddition*, definiert. Schließlich sei eine Abbildung

$$\cdot : S \times V \to V, (s, v) \mapsto \cdot(s, v) := sv, \tag{2}$$

genannt *Skalarmuliplikation* definiert. Dann wird das Tupel $(V, S, +, \cdot)$ genau dann *Vektorraum* genannt, wenn für beliebige Elemente $v, w, u \in V$ und $a, b \in S$ folgende Bedingungen gelten:

(1) Kommutativität der Vektoraddition $v + w = w + v$.

(2) Assoziativität der Vektoraddition $(v + w) + u = v + (w + u)$.

(3) Existenz eines neutralen Elements der Vektoraddition $\exists 0 \in V$ mit $v + 0 = 0 + v = v$.

(4) Existenz inverser Elemente der Vektoraddition $\forall v \in V \exists - v \in V$ mit $v + (-v) = 0$.

(5) Existenz eines neutralen Elements der Skalarmultiplikation $\exists 1 \in S$ mit $1 \cdot v = v$.

(6) Assoziativität der Skalarmultiplikation $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(7) Distributivität hinsichtlich der Vektoraddition $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$.

(8) Distributivität hinsichtlich der Skalaraddition $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$.

Reeller Vektorraum

Bemerkungen

- Es gibt viele sehr verschiedene Vektorräume.
- Beipiele für Mengen, auf denen eine Vektorraumstruktur definiert werden kann, sind
  - Die Menge der reellen m-Tupel
  - Die Menge der Matrizen
  - Die Menge der Polynome
- Wir sind hier nur an der Vektorraumstruktur auf den reellen m-Tupeln interessiert
- Zur Erinnerung: die reellen m-Tupel bezeichnen wir mit

$$\mathbb{R}^m := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R} \text{ für alle } 1 \leq i \leq m \right\}$$

- Wir sprechen $\mathbb{R}^m$ als "R hoch m" aus.
- Die Elemente $x \in \mathbb{R}^m$ nennen wir *reelle Vektoren* oder einfach *Vektoren*

Definition (Reeller Vektorraum)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ und $a \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Vektoraddition* durch

$$+ : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, (x, y) \mapsto x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

und die *Skalarmultiplikation* durch

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, (a, x) \mapsto ax = a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_m \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Dann bildet $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ mit den Rechenregeln der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ einen Vektorraum, den wir den *reellen Vektorraum* nennen.

Bemerkungen

- Man sagt, dass Vektoraddition und Skalarmultiplikation *komponentenweise* durchgeführt werden.

Reeller Vektorraum

Beispiele

1) Für $x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $y := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $x + y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+0 \\ 3+(-3) \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2) Für $x := \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $y := \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ gilt $x - y = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 8-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) Für $x := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $a := 3$ gilt $ax = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Reeller Vektorraum

Rechenbeispiele in R

Bsp. 1)

```
x = matrix(c(1,2,3,4), nrow = 4)   # Vektordefinition
y = matrix(c(2,0,-3,1), nrow = 4)  # Vektordefinition
x + y                              # Vektoraddition
```

```
>      [,1]
> [1,]    3
> [2,]    2
> [3,]    0
> [4,]    5
```

Bsp. 2)

```
x = matrix(c(4,8), nrow = 2)  # Vektordefinition
y = matrix(c(2,7), nrow = 2)  # Vektordefinition
x - y                         # Vektorsubtraktion
```

```
>      [,1]
> [1,]    2
> [2,]    1
```

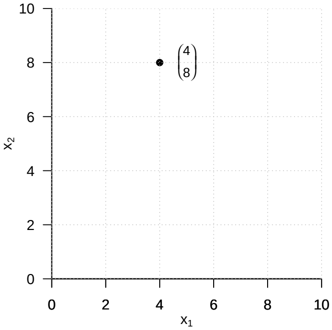
Bsp. 3)

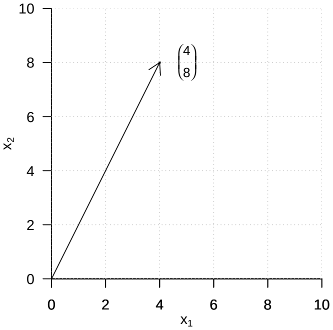
```
x = matrix(c(3,2,1), nrow = 3)  # Vektordefinition
a = 3                           # Skalardefinition
a * x                           # Skalarmultiplikation
```

```
>      [,1]
> [1,]    9
> [2,]    6
> [3,]    3
```

Reeller Vektorraum

Visualisierung von $x := \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

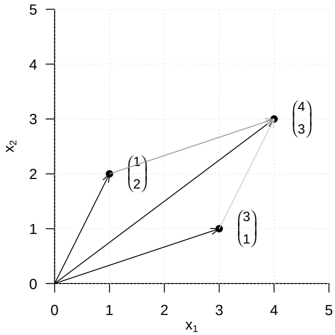




Reeller Vektorraum

Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$

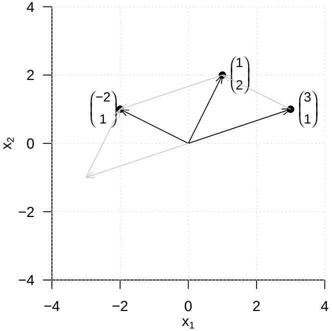
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Reeller Vektorraum

Vektorsubtraktion in $\mathbb{R}^2$

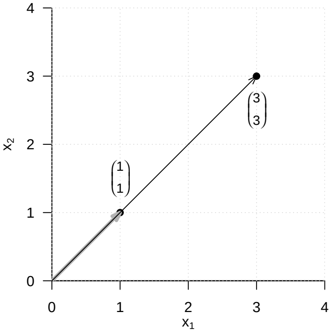
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Reeller Vektorraum

Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^2$

$$3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$



Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Lineare Unabhängigkeit

Selbstkontrollfragen

Definition (Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^m$)

Das *Skalarprodukt auf* $\mathbb{R}^m$ ist definiert als die Abbildung

$$\langle\rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle(x, y)\rangle := \langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{m} x_i y_i. \tag{5}$$

Bemerkungen

- Das Skalarprodukt heißt Skalarprodukt, weil das Ergebnis ein Skalar ist, und nicht weil Skalare multipliziert werden.

Beispiel für Skalarprodukt

Es seien

$$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } y := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Dann ergibt sich

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 2 + 0 + 3 = 5. \tag{7}$$

```r
# Vektordefinition
x = matrix(c(1,2,3), nrow = 3)
y = matrix(c(2,0,1), nrow = 3)
```

```r
# Skalarprodukt mit R's komponentenweiser Multiplikation (*) und sum()
sum(x*y)
```

```
> [1] 5
```

```r
# Skalarprodukt mit R's Matrixtransposition t() und -multiplikation (%*%)
t(x) %*% y
```

```
>      [,1]
> [1,]    5
```

Euklidischer Vektorraum

Definition (Euklidischer Vektorraum)

Das Tupel $((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ aus dem reellen Vektorraum $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ und dem Skalarprodukt $\langle\rangle$ auf $\mathbb{R}^m$ heißt *reeller kanonischer Euklidischer Vektorraum*.

Bemerkungen

- Generell heißt jedes Tupel aus einem Vektorraum (nicht nur reeller Vektorraum) und einem Skalarprodukt "Euklidischer Vektorraum".
- Informell sprechen wir aber oft auch einfach von $\mathbb{R}^m$ von "Euklidischer Vektorraum" und insbesondere bei $((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ von "Euklidischer Vektorraum".
- Der Unterschied zwischen einem Euklidischen Vektorraum und einem Vektorraum ist, dass es im Euklidischen Vektorraum neben Vektoraddition $(+)$ und Skalarmultiplikation $(\cdot)$ noch das Skalarprodukt $(\langle\rangle)$ gibt.
- Ein Euklidischer Vektorraum ist ein Vektorraum mit geometrischer Struktur, die durch das Skalarprodukt induziert wird.
- Mithilfe des Skalarproduktes können wir im Euklidischen Vektorraum die *Länge* eines Vektors, den *Abstand* zweier Vektoren und den *Winkel* zwischen zwei Vektoren bestimmen.

Euklidischer Vektorraum

Definition (Länge, Abstand, Winkel)

$((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ sei der Euklidische Vektorraum.

- Die *Länge* eines Vektors $x \in \mathbb{R}^m$ ist definiert als

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}. \tag{8}$$

- Der *Abstand* zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ ist definiert als

$$d(x, y) := \|x - y\|. \tag{9}$$

- Der *Winkel* α zwischen zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ mit $x, y \neq 0$ ist definiert durch

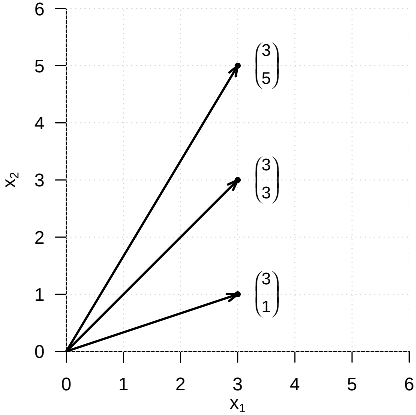
$$0 \leq \alpha \leq \pi \text{ und } \cos\alpha := \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \tag{10}$$

Bemerkungen

- $\|x\|$ wird auch *Norm von* x oder ℓ_2*-Norm von* x genannt.
- Für den Abstand gilt, dass
  - $d(x, y) \geq 0$, $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$ und $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
- $\cos$ ist auf $[0, \pi]$ bijektiv, also invertierbar

Euklidischer Vektorraum

Beispiele für Vektorlängen in $\mathbb{R}^2$



Beispiele Vektorlängen in $\mathbb{R}^2$

$$\left\|\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \approx 5.83$$

```
norm(matrix(c(3,5), nrow = 2), type = "2")  # Vektorlänge = l_2 Norm (type = "2")
```

```
> [1] 5.83
```

$$\left\|\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \approx 4.24$$

```
norm(matrix(c(3,3), nrow = 2), type = "2")  # Vektorlänge = l_2 Norm (type = "2")
```

```
> [1] 4.24
```

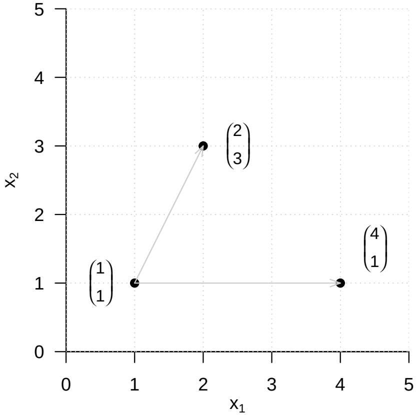
$$\left\|\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\rangle} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \approx 3.16$$

```
norm(matrix(c(3,1), nrow = 2), type = "2")  # Vektorlänge = l_2 Norm (type = "2")
```

```
> [1] 3.16
```

Euklidischer Vektorraum

Beispiele für Abstände zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^2$



Beispiele Abstände zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^2$

$$d\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}\approx 2.24$$

```
norm(matrix(c(1,1), nrow = 2) - matrix(c(2,3), nrow = 2), type = "2")
```

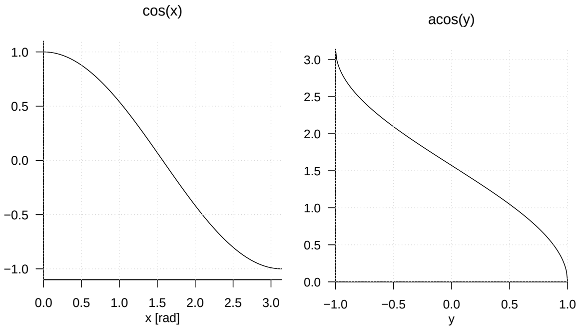
```
> [1] 2.24
```

$$d\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right)=\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=\sqrt{9}=3$$

```
norm(matrix(c(1,1), nrow = 2) - matrix(c(4,1), nrow = 2), type = "2")
```

```
> [1] 3
```

Kosinus und Arkuskosinus auf $[0, \pi]$



Umrechnung zwischen Gradmaß [deg] und Bogenmaß [rad]:

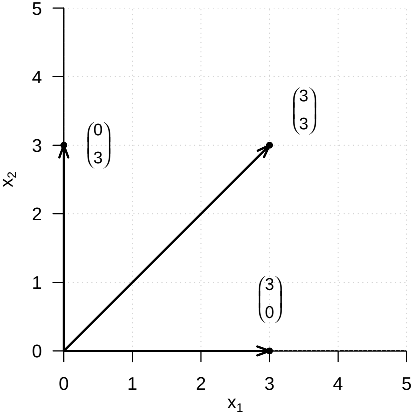
$$\text{deg} = \text{rad} \cdot \frac{180}{\pi}, \ \text{rad} = \text{deg} \cdot \frac{\pi}{180} \tag{11}$$

Beispiele

$$0\pi \text{ rad } = 0.00 \text{ rad } = 0 \text{ deg }, \ \frac{\pi}{2} \text{ rad } \approx 1.57 \text{ rad } = 90 \text{ deg }, \ \pi \text{ rad } \approx 3.14 \text{ rad } = 180 \text{ deg}$$

Euklidischer Vektorraum

Beispiele für Winkel zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^2$



Beispiel 1) für Winkel zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Winkel in Radians

$$\alpha = \text{acos}\left(\frac{\left\langle \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \right\|}\right) = \text{acos}\left(\frac{3 \cdot 3 + 0 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 3^2}}\right) = \text{acos}\left(\frac{9}{3 \cdot \sqrt{18}}\right) = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$$

Winkel in Grad

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45$$

Berechnung in R

```
x = matrix(c(3,0), nrow = 2)                              # Vektor 1
y = matrix(c(3,3), nrow = 2)                              # Vektor 2
w = acos(sum(x*y)/(sqrt(sum(x*x))*sqrt(sum(y*y)))) * 180/pi    # Winkel in Grad
print(w)
```

```
> [1] 45
```

Beispiel 2) für Winkel zwischen Vektoren in $\mathbb{R}^2$

Winkel in Radians

$$\alpha = \text{acos}\left(\frac{\left\langle \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \right\|}\right) = \text{acos}\left(\frac{3 \cdot 0 + 0 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2}}\right) = \text{acos}\left(\frac{0}{3 \cdot \sqrt{3 \cdot 3}}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$$

Winkel in Grad

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi} = 90$$

Berechnung in R

```
x = matrix(c(3,0), nrow = 2)                               # Vektor 1
y = matrix(c(0,3), nrow = 2)                               # Vektor 2
w = acos(sum(x*y)/(sqrt(sum(x*x))*sqrt(sum(y*y)))) * 180/pi     # Winkel in Grad
print(w)
```

```
> [1] 90
```

Definition (Orthogonalität und Orthonormalität von Vektoren)

$((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ sei der Euklidische Vektorraum.

- Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ heißen *orthogonal*, wenn gilt, dass

$$\langle x, y \rangle = 0 \tag{12}$$

- Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^m$ heißen *orthonormal*, wenn gilt, dass

$$\langle x, y \rangle = 0 \text{ und } \|x\| = \|y\| = 1. \tag{13}$$

Bemerkungen

- Für orthogonale und orthonormale Vektoren gilt insbesondere auch

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = \frac{0}{\|x\| \|y\|} = 0 \tag{14}$$

also

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^\circ \tag{15}$$

Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Lineare Unabhängigkeit

Selbstkontrollfragen

Definition (Linearkombination)

$\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ sei eine Menge von k Vektoren eines Vektorraums V. Dann ist die *Linearkombination* der Vektoren in $v_1, v_2, ..., v_k$ mit den skalaren Koeffizienten $a_1, a_2, ..., a_k$ definiert als der Vektor

$$w := \sum_{i=1}^{k} a_i v_i \in V. \tag{16}$$

Beispiel einer Linearkombination

Es seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } a_1 := 2, a_2 := 3, a_3 := 0.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Definition (Lineare Unabhängigkeit)

V sei ein Vektorraum. Eine Menge $W := \{w_1, w_2, ..., w_k\}$ von Vektoren in V heißt *linear unabhängig*, wenn die einzige Repräsentation des Nullelements $0 \in V$ durch eine Linearkombination der $w \in W$ die triviale Repräsentation

$$0 = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_k w_k \text{ mit } a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0 \tag{17}$$

ist. Wenn die Menge W nicht linear unabhängig ist, dann heißt sie *linear abhängig*.

Bemerkungen

- Prinzipiell müsste man für jede Linearkombination der $w \in W$ prüfen, ob sie Null ist.
- Die beiden folgenden Theoreme zeigen, dass es auch einfacher geht.

Theorem (Lineare Abhängigkeit von zwei Vektoren)

V sei ein Vektorraum. Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in V$ sind linear abhängig, wenn einer der Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen Vektors ist.

Beweis v_1 sei ein skalares Vielfaches von v_2, also

$$v_1 = \lambda v_2 \text{ mit } \lambda \neq 0. \tag{18}$$

Dann gilt

$$v_1 - \lambda v_2 = 0. \tag{19}$$

Dies wiederum entspricht der Linearkombination

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \tag{20}$$

mit $a_1 = 1 \neq 0$ und $a_2 = -\lambda \neq 0$. Es gibt also eine Linearkombination des Nullelementes, die nicht die triviale Repräsentation ist, und damit sind v_1 und v_2 nicht linear unabhängig.

Lineare Unabhängigkeit

Beispiel linear abhängiger Vektoren

Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

v_1 ist also ein skalares Vielfaches von v_2, also

$$v_1 = \lambda v_2 \text{ mit } \lambda = 3. \tag{21}$$

Dann gilt

$$v_1 - \lambda v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{22}$$

Dies wiederum entspricht der Linearkombination

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \tag{23}$$

mit $a_1 = 1 \neq 0$ und $a_2 = -\lambda \neq 0$.

Theorem (Lineare Abhängigkeit einer Menge von Vektoren)

V sei ein Vektorraum und $w_1, ..., w_k \in V$ sei eine Menge von Vektoren in V. Wenn einer der Vektoren $w_i, i = 1, ..., k$ eine Linearkombination der anderen Vektoren ist, dann ist die Menge der Vektoren linear abhängig.

Beweis

Die Vektoren $w_1, ..., w_k$ sind genau dann linear abhängig, wenn gilt, dass $\sum_{i=1}^{n} a_i w_i = 0$ mit mindestens einem $a_i \neq 0$. Es sei also zum Beispiel $a_j \neq 0$. Dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = \sum_{i=1, i\neq j}^{n} a_i w_i + a_j w_j \tag{24}$$

Also folgt

$$a_j w_j = - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} a_i w_i \tag{25}$$

und damit

$$w_j = -a_j^{-1} \sum_{i=1, i\neq j}^{n} a_i w_i = - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} (a_j^{-1} a_i) w_i \tag{26}$$

Also ist w_j eine Linearkombination der $w_i, i = 1, ..., k$ mit $i \neq j$. □

Reeller Vektorraum

Euklidischer Vektorraum

Lineare Unabhängigkeit

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition eines Vektorraums wieder.
2. Geben Sie die Definition des reellen Vektorraums wieder.
3. Es seien

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } a := 2. \tag{27}$$

   Berechnen Sie

$$v = a(x+y) \text{ und } w = \frac{1}{a}(y-x) \tag{28}$$

   und überprüfen Sie ihre Rechnung mit R.

4. Geben Sie die Definition des Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^m$ wieder.
5. Für

$$x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{29}$$

   berechnen Sie

$$\langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle, \langle y, z \rangle \tag{30}$$

   und überprüfen Sie ihre Rechnung mithilfe von R.

6. Geben Sie die Definition des Euklidischen Vektorraums wieder.
7. Definieren Sie die Länge eines Vektors im Euklidischen Vektorraum.
8. Berechnen Sie die Längen der Vektoren x, y, z aus Aufgabe 5 und überprüfen Sie ihre Rechnung mit R.

Selbstkontrollfragen

9. Geben Sie Definition des Abstands zweier Vektoren im Euklidischen Vektorraum wieder.
10. Berechnen Sie $d(x, y)$, $d(x, z)$ und $d(y, z)$ für x, y, z aus Aufgabe 5.
11. Geben Sie die Definition des Winkels zwischen zwei Vektoren im Euklidischen Vektorraum wieder.
12. Berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren x und y, x und z, sowie y und z aus Aufgabe 5 mit R.
13. Definieren Sie die Begriffe der Orthogonalität und Orthonormalität von Vektoren.
14. Definieren Sie den Begriff der Linearkombination von Vektoren.
15. Definieren Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit von Vektoren.
16. Woran kann man erkennen, dass zwei Vektoren linear abhängig sind?
17. Dokumentieren Sie alle in dieser Einheit eingeführten R Befehle in einem Skript.