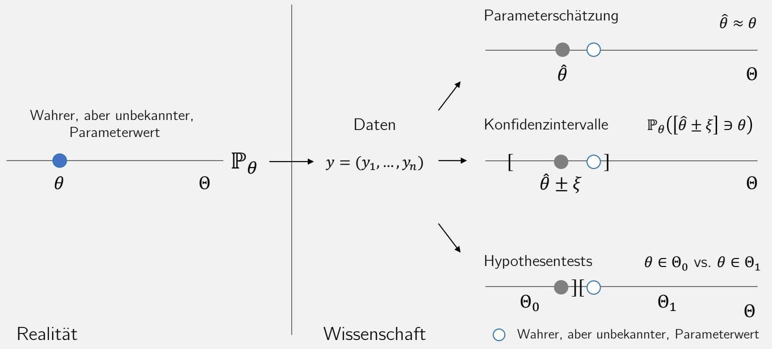
Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

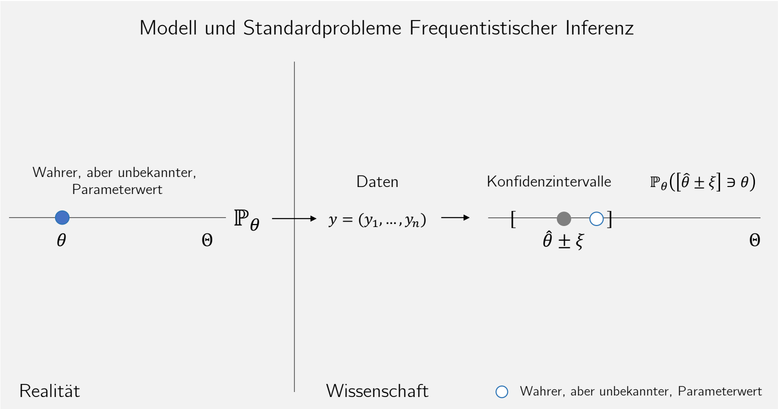
BSc Psychologie WiSe 2022/23

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(11) Konfidenzintervalle

Modell und Standardprobleme Frequentistischer Inferenz




Modell und Standardprobleme Frequentistischer Inferenz
Wahrer, aber unbekannter, Parameterwert
θ
Θ
$\mathbb{P}_\theta$
Daten
$y = (y_1, \dots, y_n)$
Konfidenzintervalle
$\mathbb{P}_\theta([\hat{\theta} \pm \xi] \ni \theta)$
$\hat{\theta} \pm \xi$
Θ
Realität
Wissenschaft
Wahrer, aber unbekannter, Parameterwert

Standardannahmen Frequentistischer Inferenz

$\mathcal{M}$ sei ein statistisches Modell mit Stichprobe $\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim p_\theta$. **Es wird angenommen, dass ein konkret vorliegender Datensatz $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ eine der möglichen Realisierungen von $\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim p_\theta$ ist.** Aus Frequentistischer Sicht kann man eine Studie unter gleichen Umständen unendlich oft wiederholen und zu jedem Datensatz Schätzer oder Statistiken auswerten, z.B. das Stichprobenmittel:

$$\text{Datensatz (1)} : y^{(1)} = \left(y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, ..., y_n^{(1)}\right) \text{ mit } \bar{y}_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^n y_i^{(1)}$$

$$\text{Datensatz (2)} : y^{(2)} = \left(y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, ..., y_n^{(2)}\right) \text{ mit } \bar{y}_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^n y_i^{(2)}$$

$$\text{Datensatz (3)} : y^{(3)} = \left(y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, ..., y_n^{(3)}\right) \text{ mit } \bar{y}_n^{(3)} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^n y_i^{(3)}$$

$$\text{Datensatz (4)} : y^{(4)} = \left(y_1^{(4)}, y_2^{(4)}, ..., y_n^{(4)}\right) \text{ mit } \bar{y}_n^{(4)} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^n y_i^{(4)}$$

$$\text{Datensatz (5)} : y^{(5)} = ...$$

Um die Qualität statistischer Methoden zu beurteilen betrachtet die Frequentistische Statistik deshalb die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Schätzern und Statistiken unter Annahme von $\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim p_\theta$. Was zum Beispiel ist die Verteilung der $\bar{y}_n^{(1)}$, $\bar{y}_n^{(2)}$, $\bar{y}_n^{(3)}$, $\bar{y}_n^{(4)}$, ... also die Verteilung der Zufallsvariable $\bar{\upsilon}_n$?

Wenn eine statistische Methode im Sinne der Frequentistischen Standardannahmen "gut" ist, dann heißt das also, dass sie bei häufiger Anwendung "im Mittel gut" ist. Im Einzelfall, also im Normalfall nur eines vorliegenden Datensatzes, kann sie auch "schlecht" sein.

Definition

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter der Normalverteilung

Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Definition (δ-Konfidenzintervall)

Es sei $\upsilon = \upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim p_\theta$ eine Stichprobe, $\delta \in]0, 1[$, und $G_u(\upsilon)$ und $G_o(\upsilon)$ seien zwei Statistiken. Dann ist ein δ-*Konfidenzintervall* ein Intervall der Form $\kappa_n := [G_u, G_o]$, so dass

$$\mathbb{P}_\theta\left(\kappa_n \ni \theta\right) = \mathbb{P}_\theta\left(G_u(\upsilon) \le \theta \le G_o(\upsilon)\right) = \delta \text{ für alle } \theta \in \Theta \text{ gilt.} \tag{1}$$

δ heißt das *Konfidenzniveau* oder die *Überdeckungswahrscheinlichkeit* des Konfidenzintervalls. Die Statistiken $G_u(\upsilon)$ und $G_o(\upsilon)$ sind die unteren und oberen Grenzen des Konfidenzintervalls.

Bemerkungen

- θ ist fest, nicht zufällig, und unbekannt.
- κ_n ist ein zufälliges Intervall, weil $G_u(\upsilon)$ und $G_o(\upsilon)$ Zufallsvariablen sind.
- $\kappa_n \ni \theta$ bedeutet $\theta \in \kappa_n$, aber κ_n ist zufällig und steht deshalb vorn (cf. $\mathbb{P}(\xi = x)$).
- Ein δ-Konfidenzintervall überdeckt den wahren Wert θ mit Wahrscheinlichkeit δ.
- Oft wird $\delta = 0.95$ gewählt, also 95%-*Konfidenzintervalle* betrachtet.

Definition

Zwei Interpretationen von δ-Konfidenzintervallen

(1) Wird ein Zufallsvorgang unter gleichen Umständen häufig wiederholt, so überdeckt das zugehörige δ-Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten Parameterwert im langfristigen Mittel in $\delta \cdot 100\%$ der Fälle. Technischer ausgedrückt, für unabhängig und identisch realisierte Stichproben einer Verteilung mit wahrem, aber unbekannten, Parameter θ überdeckt im langfristigen Mittel ein entsprechendes δ-Konfidenzintervall θ in $\delta \cdot 100\%$ aller Fälle.

(2) Gegeben sei eine Menge von Zufallsvorgängen mit wahren, aber unbekannten, Parametern $\theta_1, \theta_2, ...$ und realisierte δ-Konfidenzintervalle für eben jene Menge von wahren, aber unbekannten Parametern $\theta_1, \theta_2, ...$ Dann überdecken im langfristigen Mittel $\delta \cdot 100\%$ der Konfidenzintervalle den wahren, aber unbekannten, Wert θ_i für $i = 1, 2, ...$. Technischer ausgedrückt, für unabhängig realisierte Stichproben von Verteilungen mit wahren, aber unbekannten, Parametern $\theta_1, \theta_2, ...$ überdecken im langfristigen Mittel entsprechende δ-Konfidenzintervalle θ_i für $i = 1, 2, ...$ in $\delta \cdot 100\%$ aller Fälle.

Wir demonstrieren im Folgenden beide Interpretationen mithilfe von Simulationen.

Allgemeine Konstruktion von Konfidenzintervallen

(1) Definition des statistischen Modells

(2) Definition der Konfidenzintervallstatistik

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik

(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

(5) Definition des Konfidenzintervalls

Beispiele

(1) Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter der Normalverteilung

(2) Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung

Definition

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter der Normalverteilung

Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter der Normalverteilung

(1) Definition des statistischen Modells

Es sei $\upsilon := \upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine Stichprobe mit unbekannten Parametern μ und $\sigma^2 > 0$. Wir entwickeln ein δ-Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter μ.

(2) Definition der Statistik

Wir betrachten die T-Konfidenzintervallstatistik

$$T := \frac{\sqrt{n}}{S_n}(\bar{\upsilon}_n - \mu) \text{ mit } \bar{\upsilon}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \upsilon_i \text{ und } S_n := \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (\upsilon_i - \bar{\upsilon}_n)^2}. \qquad (2)$$

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik

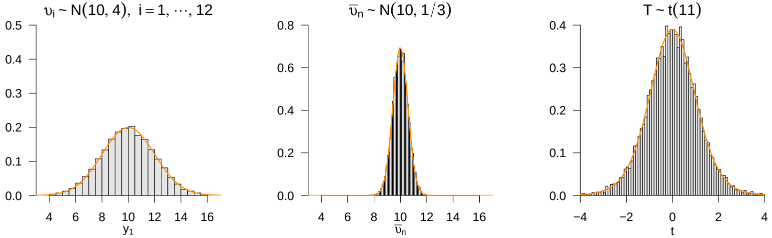
Für die T-Konfidenzintervallstatistik gilt $T \sim t(n-1)$, die T-Konfidenzintervallstatistik ist also eine t-verteilte Zufallsvariable mit Freiheitsgradparameter $n-1$. Wir verzichten auf einen Beweis. Die T-Konfidenzintervallstatistik ist eine Funktion der Stichprobe $\upsilon_1, ..., \upsilon_n$ (via $\bar{\upsilon}_n$ und S_n), während ihre Verteilung weder von μ noch von σ^2 abhängt. Wir bezeichnen die die WDF einer t-verteilten Zufallvariable mit t, die KVF einer t-verteilten Zufallvariable mit Ψ und die inverse KVF einer t-verteilten Zufallvariable mit Ψ^{-1}.

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik (fortgeführt)

```
# Modellformulierung
mu      = 10                                        # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 4                                         # wahrer bekannter Varianzparameter
n       = 12                                        # Stichprobengroesse
ns      = 1e4                                       # Anzahl Stichprobenrealisierungen
res     = 1e3                                       # Ausgangsraumaufloesung

# analytische Definitionen und Resultate
y_1     = seq(3,17,len = res)                       # y_1 Raum
t       = seq(-4,4,len = res)                       # t Raum
p_y_1   = dnorm(y_1,mu,sqrt(sigsqr))                # y_1 WDF
p_y_bar = dnorm(y_1,mu,sqrt(sigsqr/n))              # y_bar WDF
p_t     = dt(t,n-1)                                 # t WDF

# Simulation
y_i     = rep(NaN,ns)                               # y_1 Array
y_bar   = rep(NaN,ns)                               # \bar{y} Array
Tee     = rep(NaN,ns)                               # T Array
for(s in 1:ns){                                     # Simulationsiterationen
  y        = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))               # Stichprobenrealisierung
  y_i[s]   = y[1]                                   # \ups_i
  y_bar[s] = mean(y)                                # Stichprobenmittelrealisierung
  Tee[s]   = sqrt(n)*((y_bar[s] - mu)/sqrt(var(y))) # T-Statistik Realisierung
}
```

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter der Normalverteilung

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik (fortgeführt)

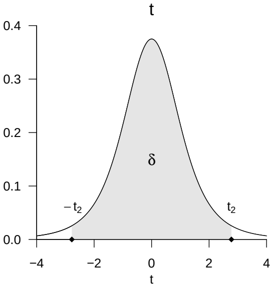


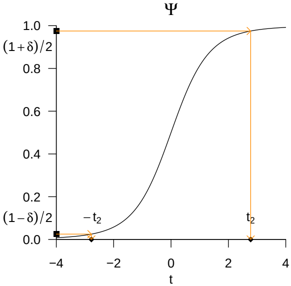
(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

Für $\delta \in]0,1[$ seien

$$t_1 := \Psi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right) \text{ und } t_2 := \Psi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right) \tag{3}$$

Es gilt dann $(1+\delta)/2 - (1-\delta)/2 = \delta$ und zum Beispiel gilt für $n = 5$ und $\delta = 0.95$, $t_1 = \Psi^{-1}(0.025; 4) = -2.57$ und $t_2 = \Psi^{-1}(0.975; 4) = 2.57$. Weiterhin gilt mit der Symmetrie von $t(n-1)$, $t_1 = -t_2$. Es gilt hier also per Definition $\mathbb{P}(-t_2 \leq T \leq t_2) = \delta$.





Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter der Normalverteilung

(4) Etablierung der Konfidenzbedingung (fortgeführt)

Mit der Definition von t_2 wie oben folgt dann aber

$$
\begin{aligned}
\delta &= \mathbb{P}\left(-t_2 \le T \le t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-t_2 \le \frac{\sqrt{n}}{S_n}(\bar{\upsilon}_n - \mu) \le t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \le \bar{\upsilon}_n - \mu \le \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\bar{\upsilon}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \le -\mu \le -\bar{\upsilon}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{\upsilon}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \ge \mu \ge \bar{\upsilon}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bar{\upsilon}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2 \le \mu \le \bar{\upsilon}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\bar{\upsilon}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2, \bar{\upsilon}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}}t_2\right] \ni \mu\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Wir können nun das gesuchte Konfidenzintervall definieren.

(5) Definition des Konfidenzintervalls

Es sei $\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ mit unbekannten Parametern μ und σ^2, es sei $\delta \in]0, 1[$, und es sei

$$t_\delta := \Psi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right). \tag{5}$$

Definiere

$$\kappa_n := \left[\bar{\upsilon}_n - \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_\delta, \bar{\upsilon}_n + \frac{S_n}{\sqrt{n}} t_\delta\right]. \tag{6}$$

Dann gilt wie oben gezeigt

$$\mathbb{P}(\kappa_n \ni \mu) = \delta. \tag{7}$$

Damit ist κ_n ein δ-Konfidenzintervall für μ. Man beachte, dass κ_n ein zufälliges Intervall ist, weil $\bar{\upsilon}_n$ und S_n Zufallsvariablen sind.

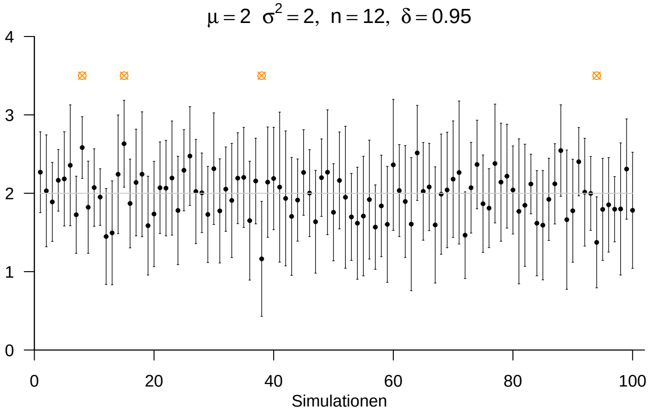
(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation der ersten Interpretation eines Konfidenzintervalls

```
# Modellformulierung
set.seed(1)                                             # random number generator seed
mu      = 2                                             # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 1                                             # w.a.u. Varianzparameter
sigma   = sqrt(sigsqr)                                  # w.a.u. St.Abweichungsparameter
n       = 12                                            # Stichprobengroesse
delta   = 0.95                                          # Konfidenzbedingung
t_delta = qt((1+delta)/2,n-1)                           # \Psi^-1((\delta + 1)/2, n-1)

# Simulation
ns      = 1e2                                           # Anzahl Simulationen
y_bar   = rep(NaN,ns)                                   # Stichprobenmittelarray
S       = rep(NaN,ns)                                   # St.Abweichungsarray
kappa   = matrix(rep(NaN,2*ns), ncol = 2)               # Konfidenzintervallarray
for(i in 1:ns){
   y          = rnorm(n,mu,sigma)                       # Stichprobenrealisierung
   y_bar[i]   = mean(y)                                 # Stichprobenmittel
   S[i]       = sd(y)                                   # Stichprobenstandardabweichung
   kappa[i,1] = y_bar[i] - (S[i]/sqrt(n))*t_delta       # untere KI Grenze
   kappa[i,2] = y_bar[i] + (S[i]/sqrt(n))*t_delta       # obere KI Grenze
}
```

(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation der ersten Interpretation eines Konfidenzintervalls



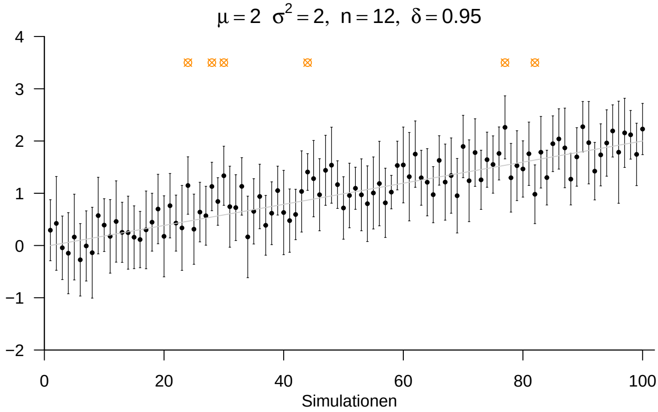
(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation der zweiten Interpretation eines Konfidenzintervalls

```
# Anzahl Simulationen mit \theta_1, \theta_2,...
set.seed(2)                                         # random number generator seed
ns      = 1e2                                       # Anzahl Simulationen

# Modellformulierung
mu      = 2 * seq(0,1,len = ns)                     # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 1                                         # w.a.u. Varianzparameter
sigma   = sqrt(sigsqr)                              # w.a.u. St.Abweichungsparameter
n       = 12                                        # Stichprobengroesse
delta   = 0.95                                      # Konfidenzbedingung
t_delta = qt((1+delta)/2,n-1)                       # \Psi^-1((\delta + 1)/2, n-1)

# Simulation
y_bar   = rep(NaN,ns)                               # Stichprobenmittelarray
S       = rep(NaN,ns)                               # St.Abweichungsarray
kappa   = matrix(rep(NaN,2*ns), ncol = 2)           # Konfidenzintervallarray
for(i in 1:ns){
   y           = rnorm(n,mu[i],sigma)               # Stichprobenrealisierung
   y_bar[i]    = mean(y)                            # Stichprobenmittel
   S[i]        = sd(y)                              # Stichprobenstandardabweichung
   kappa[i,1] = y_bar[i] - (S[i]/sqrt(n))*t_delta  # untere KI Grenze
   kappa[i,2] = y_bar[i] + (S[i]/sqrt(n))*t_delta  # obere KI Grenze
}
```

(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation der zweiten Interpretation eines Konfidenzintervalls



Definition

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter der Normalverteilung

Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung

(1) Definition des statistischen Modells

Es sei $\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine Stichprobe mit unbekanntem Varianzparameter $\sigma^2 > 0$ und bekanntem oder unbekanntem Erwartungswertparameter μ. Wir entwickeln ein δ-Konfidenzintervall für den Varianzparameter σ^2.

(2) Definition der Statistik

Wir betrachten die U-Konfidenzintervallstatistik

$$U := \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \text{ mit } S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\upsilon_i - \bar{\upsilon}_n)^2 . \tag{8}$$

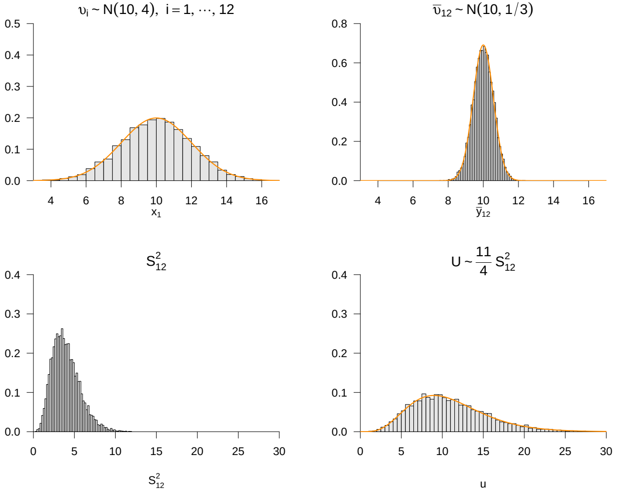
(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik

Für die U-Konfidenzintervallstatistik gilt $U \sim \chi^2(n-1)$. Für einen Beweis dieser Tatsache verweisen wir auf Casella and Berger (2012), Abschnitt 5.3. Die U-Konfidenzintervallstatistik ist eine Funktion von $\upsilon_1, ..., \upsilon_n$ (via S_n^2) und σ^2, während ihre Verteilung nicht von σ^2 abhängt. Wir bezeichnen die WDF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit χ^2, die KVF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit Ξ und die inverse KVF einer χ^2-verteilten Zufallvariable mit Ξ^{-1}.

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik (fortgeführt)

```
# Modellformulierung
mu      = 10                                    # wahrer Erwartungswertparameter
sigsqr  = 4                                     # wahrer bekannter Varianzparameter
n       = 12                                    # Stichprobengroesse
ns      = 1e4                                   # Anzahl Stichprobenrealisierungen
res     = 1e3                                   # Ausgangsraumaufloesung

# analytische Definitionen und Resultate
y_1     = seq(3,17,len = res)                   # y_1 Raum
y_bar   = seq(3,17,len = res)                   # y_bar Raum
u_1     = seq(0,30,len = res)                   # normalisierte S_n^2 Raum
p_y_1   = dnorm(y_1,mu,sqrt(sigsqr))            # y_1 WDF
p_y_bar = dnorm(y_bar,mu,sqrt(sigsqr/n))        # y_bar WDF
p_u     = dchisq(u_1,n-1)                       # u_1 WDF

# Simulation
y_i     = rep(NaN,ns)                           # y_1 Array
y_bar   = rep(NaN,ns)                           # \bar{y} Array
S_sqr   = rep(NaN,ns)                           # S^2 Array
U       = rep(NaN,ns)                           # U Array

for(s in 1:ns){                                 # Simulationsiterationen
  y         = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))          # Stichprobenrealisierung
  y_i[s]    = y[1]                              # \ups_i
  y_bar[s]  = mean(y)                           # Stichprobenmittelrealisierung
  S_sqr[s]  = var(y)                            # Stichprobenvarianzrealisierung

  # U-Statistik Realisiation
  U[s]      = ((n-1)/sigsqr)*S_sqr[s]
}
```

(3) Analyse der Verteilung der Konfidenzintervallstatistik (fortgeführt)

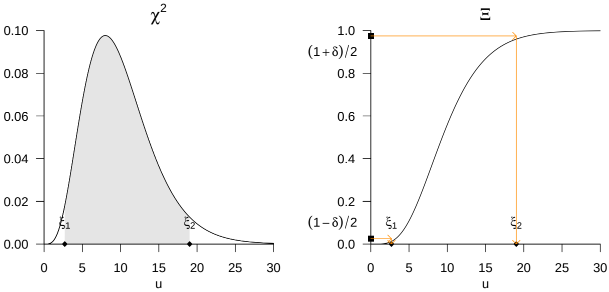


(4) Etablierung der Konfidenzbedingung

Für $\delta \in]0,1[$ seien

$$\xi_1 := \Xi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right) \text{ und } \xi_2 := \Xi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right) \tag{9}$$

Es gilt dann $(1+\delta)/2 - (1-\delta)/2 = \delta$ gilt und zum Beispiel gilt für $n = 10$ und $\delta = 0.95$, $\xi_1 := \Xi^{-1}(0.025; 9) = 2.70$ und $\xi_2 := \Xi^{-1}(0.975; 9) = 19.0$. Es gilt hier also per Definition $\mathbb{P}(\xi_1 \le U \le \xi_2) = \delta$.



Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung

(4) Etablierung der Konfidenzbedingung (fortgeführt)

Mit der Definition von ξ_1 und ξ_2 wie oben folgt dann aber

$$
\begin{aligned}
\delta &= \mathbb{P}\left(\xi_1 \le U \le \xi_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\xi_1 \le \frac{n-1}{\sigma^2} S_n^2 \le \xi_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\xi_1^{-1} \ge \frac{\sigma^2}{(n-1)S_n^2} \ge \xi_2^{-1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\xi_1} \ge \sigma^2 \ge \frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S_n^2)}{\xi_1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2}, \frac{(n-1)S_n^2)}{\xi_1}\right] \ni \sigma^2\right).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Wir können nun das gesuchte Konfidenzintervall definieren.

(5) Definition des Konfidenzintervalls

Es sei $\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ eine Stichprobe mit unbekanntem Varianzparameter σ^2 und bekanntem oder unbekanntem Erwartungswertparamter μ, und es seien weiterhin $\delta \in]0, 1[$ sowie

$$\xi_1 := \Xi^{-1}\left(\frac{1-\delta}{2}; n-1\right) \text{ und } \xi_2 := \Xi^{-1}\left(\frac{1+\delta}{2}; n-1\right). \tag{11}$$

Definiere

$$\kappa_n := \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\xi_2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\xi_1}\right]. \tag{12}$$

Dann gilt wie oben gezeigt

$$\mathbb{P}(\kappa_n \ni \sigma^2) = \delta. \tag{13}$$

Damit ist κ_n ein δ-Konfidenzintervall für σ^2. Man beachte, dass κ_n ein zufälliges Intervall ist, weil S_n^2 eine Zufallsvariable ist.

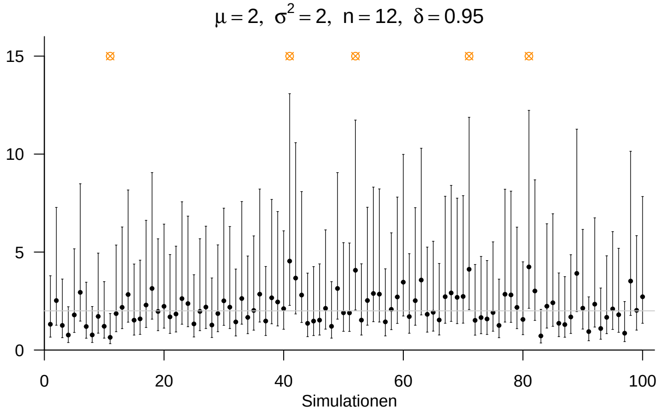
(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation

```
# Modellformulierung
set.seed(1)                                  # random number generator seed
mu      = 2                                  # w.a.u. Erwartungswertparameter
sigsqr  = 2                                  # w.a.u. Varianzparameter
n       = 12                                 # Stichprobengroesse
delta   = 0.95                               # Konfidenzbedingung
xi_1    = qchisq((1-delta)/2, n - 1)         # \Xi^2((1-\delta)/2; n - 1)
xi_2    = qchisq((1+delta)/2, n - 1)         # \Xi^2((1+\delta)/2; n - 1)

# Simulation
ns      = 1e2                                # Anzahl Simulationen
y_bar   = rep(NaN,ns)                        # Stichprobenmittelarray
S2      = rep(NaN,ns)                        # Stichprobenvarianzarray
kappa   = matrix(rep(NaN,2*ns), ncol = 2)    # Konfidenzintervallarray
for(i in 1:ns){                              # Simulationsiterationen
   y       = rnorm(n,mu,sqrt(sigsqr))        # Stichprobenrealisierung
   S2[i]   = var(y)                          # Stichprobenvarianz
   kappa[i,1]   = (n-1)*S2[i]/xi_2           # untere KI Grenze
   kappa[i,2]   = (n-1)*S2[i]/xi_1           # obere KI Grenze
}
```

(5) Definition des Konfidenzintervalls (fortgeführt)

Simulation



Definition

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter der Normalverteilung

Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Beispiel | Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapie bei Depression

Pre-BDI

n = 12

Post-BDI

BDI-II Fragebogen

Name | Alter | Geschlecht m / w | Datum

Anleitung: Dieser Fragebogen enthält 21 Gruppen von Aussagen. Bitte lesen Sie jede dieser Gruppen von Aussagen sorgfältig durch und suchen Sie sich dann in jeder Gruppe **eine Aussage** heraus, die am besten beschreibt, wie Sie sich **in den letzten zwei Wochen, einschließlich heute, gefühlt haben**. Kreuzen Sie die Zahl neben der Aussage an, die Sie sich herausgesucht haben (0, 1, 2 oder 3). Falls in einer Gruppe mehrere Aussagen gleichermaßen auf Sie zutreffen, kreuzen Sie die Aussage mit der höheren Zahl an. Achten Sie bitte darauf, dass Sie in jeder Gruppe nicht mehr als eine Aussage ankreuzen, das gilt auch für Gruppe 16 (Veränderungen der Schlafgewohnheiten) oder Gruppe 18 (Veränderungen des Appetits).

1.) Traurigkeit
- **0** Ich bin nicht traurig.
- **1** Ich bin oft traurig.
- **2** Ich bin ständig traurig.
- **3** Ich bin so traurig oder unglücklich, dass ich es nicht aushalte.

2.) Pessimismus
- **0** Ich sehe nicht mutlos in die Zukunft.
- **1** Ich sehe mutloser in die Zukunft als sonst.
- **2** Ich bin mutlos und erwarte nicht, dass meine Situation besser wird.
- **3** Ich glaube, dass meine Zukunft hoffnungslos ist und nur noch schlechter wird.

3.) Versagensgefühle
- **0** Ich fühle mich nicht als Versager.
- **1** Ich habe häufiger Versagensgefühle.
- **2** Wenn ich zurückblicke, sehe ich eine Menge Fehlschläge.
- **3** Ich habe das Gefühl, als Mensch ein völliger Versager zu sein.

4.) Verlust von Freude
- **0** Ich kann die Dinge genauso gut genießen wie früher.
- **1** Ich kann die Dinge nicht mehr so genießen wie früher.
- **2** Dinge, die mir früher Freude gemacht haben, kann ich kaum mehr genießen.
- **3** Dinge, die mir früher Freude gemacht haben, kann ich überhaupt nicht mehr genießen.

5.) Schuldgefühle
- **0** Ich habe keine besonderen Schuldgefühle.
- **1** Ich habe oft Schuldgefühle wegen Dingen, die ich getan habe oder hätte tun sollen.
- **2** Ich habe die meiste Zeit Schuldgefühle.
- **3** Ich habe ständig Schuldgefühle.

6.) Bestrafungsgefühle
- **0** Ich habe nicht das Gefühl, für etwas bestraft zu sein.
- **1** Ich habe das Gefühl, vielleicht bestraft zu werden.
- **2** Ich erwarte, bestraft zu werden.
- **3** Ich habe das Gefühl, bestraft zu sein.

7.) Selbstablehnung
- **0** Ich halte von mir genauso viel wie immer.
- **1** Ich habe Vertrauen in mich verloren.
- **2** Ich bin von mir enttäuscht.
- **3** Ich lehne mich völlig ab.

8.) Selbstvorwürfe
- **0** Ich kritisiere oder tadle mich nicht mehr als sonst.
- **1** Ich bin mir gegenüber kritischer als sonst.
- **2** Ich kritisiere mich für all meine Mängel.
- **3** Ich gebe mir die Schuld für alles Schlimme, was passiert.

9.) Selbstmordgedanken
- **0** Ich denke nicht daran, mir etwas anzutun.
- **1** Ich denke manchmal an Selbstmord, aber ich würde es nicht tun.
- **2** Ich möchte mich am liebsten umbringen.
- **3** Ich würde mich umbringen, wenn ich die Gelegenheit dazu hätte.

10.) Weinen
- **0** Ich weine nicht öfter als früher.
- **1** Ich weine jetzt mehr als früher.
- **2** Ich weine beim geringsten Anlass.
- **3** Ich möchte gern weinen, aber ich kann nicht.

PEARSON PsychCorp

© 2010 Pearson Assessment & Information GmbH, Frankfurt/M.

Summe Seite 1:

Bitte wenden

⇒ Pre-Post BDI Score Reduktion

Beispiel | Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapie bei Depression

```
fname = file.path(getwd(), "11_Konfidenzintervalle.csv")
D     = read.table(fname, sep = ",", header = T)
```

i	BDI.Reduktion
1	-1
2	3
3	-2
4	9
5	3
6	-2
7	4
8	5
9	5
10	1
11	9
12	4

Anwendungsbeispiel

Beispiel | Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapie bei Depression

Für die Pre-Post BDI Score Reduktion υ_i der $i$ten von n Patient:innen legen wir das Modell

$$\upsilon_i = \mu + \varepsilon_i \text{ mit } \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \text{ u.i.v. für } i = 1, ..., n \tag{14}$$

zugrunde. Dabei wird die Pre-Post BDI Reduktion υ_i der $i$ten Patient:in also mithilfe einer über die Gruppe von Patient:innen identischen Pre-Post BDI Score Reduktion $\mu \in \mathbb{R}$ und einer Patient:innen-spezifischen normalverteilten Pre-Post BDI Score Reduktionsabweichung ε_i erklärt

Wie gezeigt ist dieses Modell äquivalent zum Normalverteilungsmodell

$$\upsilon_1, ..., \upsilon_n \sim N(\mu, \sigma^2). \tag{15}$$

Die Standardprobleme der Frequentistischen Inferenz führen in diesem Szenario auf folgende Fragen:

(1) Was sind sinnvolle Tipps für die wahren, aber unbekannten, Parameterwerte μ und σ^2?
(2) Wie hoch ist im Frequentistischen Sinn die mit diesen Tipps assoziierte Unsicherheit?
(3) Entscheiden wir uns sinnvollerweise für die Hypothese, dass gilt $\mu \neq 0$?

Anwendungsbeispiel

Beispiel | Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapie bei Depression

```r
# Einlesen und Auswahl der Daten
fname = file.path(getwd(), "11_Konfidenzintervalle.csv")
D     = read.table(fname, sep = ",", header = T)
y     = D$BDI.Reduktion
```

Wir haben in (10) Parameterschätzung gesehen, dass unverzerrte Schätzer für den Erwartungswertparameter μ und den Varianzparameter σ^2 durch das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz gegeben sind.

```r
mu_hat     = mean(y)     # Stichprobenmittel als Erwartungswertparameterschätzer
sigsqr_hat = var(y)      # Stichprobenvarianz als Varianzparameterschätzer
```

Es sind also $\hat{\mu} = 3.17$ und $\hat{\sigma}^2 = 13.8$ sinnvolle Tipps für μ und σ^2 basierend auf den vorliegenden 12 Datenpunkten.

Um die mit diesen Tipps assoziierte Unsicherheit zu quantifizieren, geht die Frequentistische Inferenz zur Intervallschätzung mithilfe von δ-Konfidenzintervallen über, für die die assoziierte Unsicherheit dann ein ein prädefiniertes Level von 1 - δ hat. Im langfristigen Mittel überdeckt ein angegebenes δ-Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten Parameterwert in (nur) $1 - \delta \cdot$ 100 von 100 Fällen nicht. Für ein großes δ wie $\delta = 0.95$ ist die mit dieser Intervallschätzung assoziierte Unsicherheit also mit $1 - 0.95 = 0.05$ also eher gering.

Anwendungsbeispiel

Beispiel | Evidenzbasierte Evaluation von Psychotherapie bei Depression

```
# Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter
delta     = 0.95                                  # Konfidenzlevel
n         = length(y)                             # Anzahl Datenpunkte
t_delta   = qt((1+delta)/2,n-1)                   # \psi^-1((\delta + 1)/2, n-1)
y_bar     = mean(y)                               # Stichprobenmittel
s         = sd(y)                                 # Stichprobenstandardabweichung
mu_hat    = y_bar                                 # Erwartungswertparameterschätzer
mu_hat_u  = y_bar - (s/sqrt(n))*t_delta           # untere KI Grenze
mu_hat_o  = y_bar + (s/sqrt(n))*t_delta           # obere  KI Grenze
```

Das 0.95-Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter ist $[0.80, 5.52]$. Im langfristigen Mittel überdeckt so berechnetes Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten, Erwartungswertparameter in 95 von 100 Fällen.

```
# Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter
delta        = 0.95                               # Konfidenzlevel
n           = length(y)                           # Anzahl Datenpunkte
xi_1        = qchisq((1-delta)/2, n - 1)          # \Xi^2((1-\delta)/2; n - 1)
xi_2        = qchisq((1+delta)/2, n - 1)          # \Xi^2((1+\delta)/2; n - 1)
s2          = var(y)                              # Stichprobenstandardabweichung
sigsqr_hat  = s2                                  # Varianzparameterschätzer
sigsqr_hat_u = (n-1)*s2/xi_2                      # untere KI Grenze
sigsqr_hat_o = (n-1)*s2/xi_1                      # obere KI Grenze
```

Das 0.95-Konfidenzintervall für den Varianzparameter ist $[6.91, 39.74]$. Im langfristigen Mittel überdeckt ein so berechnetes Konfidenzintervall den wahren, aber unbekannten, Varianzparameter in 95 von 100 Fällen.

Definition

Konfidenzintervall für den Erwartungswertparameter der Normalverteilung

Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung

Anwendungsbeispiel

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Definieren Sie den Begriff des δ-Konfidenzintervalls.
2. Geben Sie zwei Interpretationen eines δ-Konfidenzintervalls.
3. Erläutern Sie die typischen Schritte zur Konstruktion eines δ-Konfidenzintervalls.
4. Definieren Sie die T-Konfidenzintervallstatistik und geben Sie ihre Verteilung an.
5. Geben Sie das δ-Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Normalverteilung an.
6. Definieren Sie die U-Konfidenzintervallstatistik und geben Sie ihre Verteilung an.
7. Geben Sie das δ-Konfidenzintervall für den Varianzparameter der Normalverteilung an.

References

Casella, G, and R Berger. 2012. *Statistical Inference*. Duxbury.