Méthodes d'optimisation Multi-Objectif

l'approche non Pareto : Agrégation pondérée

IBNERRADI Said   ELAAOUAM Mohamed   MOUHTAT Ahlam
HALOUANE Awatif   BELLA abdelouhab

Université Sultan Moulay Slimane
Ecole Nationale des Sciences Appliquées Khouribga

February 27, 2025

Plan

1. Introduction sur les problèmes d'optimisation
2. Les problèmes d'optimisation mono-objectifs
   - Variables de décision
   - Espace décisionnel et espace objectif
3. Problèmes d'optimisation multiobjectifs
   - Définition du Problème
   - Vecteur Solution
   - Vecteur Fonction Objectif
4. Approches de résolution multiobjectif
   - Introduction
   - Approches Non Pareto
   - Les approches non scalaires non Pareto (posteriori)
   - Approches Pareto
5. Méthode de résolution: Agrégation pondérée

Introduction sur les problèmes d'optimisation

Définition d'un Problème d'Optimisation

- **Espace de recherche (de décision) :** ensemble de solutions constitué des différentes valeurs prises par les variables de décision.
- **Une ou plusieurs Fonctions objectifs :** À optimiser (minimiser ou maximiser) , elle représente le but à atteindre pour le décideur.
- **Ensemble de contraintes :** sont des contraintes d'inégalité ou d'égalité qui permettent en général de limiter l'espace de recherche.
- **Résolution Optimale :** Trouver le point ou ensemble de points qui satisfait au mieux la fonction objectif.
  - Résultat : valeur optimale ou optimum.

Caractéristiques du Problème d'Optimisation

Domaine des variables de décision :

- Continu (problème continu)
- Discret (problème combinatoire)

Nature de la fonction objectif :

- Linéaire (problème linéaire)
- Non linéaire (problème non linéaire)

Nombre de fonctions objectif :

- Fonction scalaire (problème mono-objectif)
- Fonction vectorielle (problème multiobjectif)

Présence des contraintes :

- Sans contrainte
- Avec contrainte

Taille :

- Petite
- Grande

Environnement : Problème dynamique (la fonction objectif change dans le temps).

Les problèmes d'optimisation mono-objectifs

Les problèmes d'optimisation mono-objectifs

Dans les problèmes d'optimisation mono-objectifs, un seul critère est à optimiser. La solution optimale est celle qui minimise ou maximise ce critère.
Formellement, chaque instance de ce problème est définie par un ensemble Ω de solutions potentielles et une fonction objectif $f : \Omega \to \Xi$ associant une valeur à chaque solution admissible $s \in \Omega$.
Résoudre ce problème revient à trouver la solution optimale $s^* \in \Omega$ qui optimise cette fonction objectif.

Variables de décision

- Les variables de décision sont des quantités numériques pour lesquelles des valeurs sont à choisir.
- Cet ensemble de n variables est appelé vecteur de décision : $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
- Les différentes valeurs possibles prises par les variables de décision x_i constituent l'ensemble des solutions potentielles.

Espace décisionnel et espace objectif

Deux espaces Euclidiens sont considérés en optimisation :

- **Espace Décisionnel (ou de Recherche):**
  C'est l'espace dans lequel les solutions possibles à un problème d'optimisation sont représentées. Il est défini par les valeurs pouvant être prises par les variables de décision.
- **Espace Objectif (ou de Coût):**
  C'est l'espace dans lequel les valeurs des fonctions objectif sont évaluées. La fonction objectif $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est généralement définie comme suit :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + 2x_2 + \ldots + x_n^2$$

Problèmes d'Optimisation Multiobjectifs

Définition du Problème

Un problème d'optimisation multiobjectifs consiste à trouver le meilleur compromis entre plusieurs objectifs concurrents. Il peut être représenté par le programme suivant :

$$\begin{cases} \text{optimiser } F(S) = (f_1(S), f_2(S), \ldots, f_p(S)) \\ \text{sous contraintes } S \in \Omega \text{ et } p > 2 \end{cases} \tag{1}$$

Vecteur Solution

Le vecteur solution S est représenté par $(x_1, \dots, x_n)$ dans un espace Ω de dimension n. Chaque x_i représente une variable de décision. L'ensemble Ω représente les solutions réalisables respectant un ensemble de contraintes C d'égalité, d'inégalité et des bornes explicites.

Vecteur Fonction Objectif

Le vecteur fonction objectif $F(S)$ à optimiser est composé de p fonctions $f_i(S)$, chacune représentant un objectif à minimiser ou maximiser.

L'ensemble des solutions réalisables dans l'espace objectif est représenté par $Y = F(\Omega)$, où chaque point y_i est obtenu en évaluant les fonctions $f_i(S)$ pour une solution donnée S.

Approches de Résolution Multiobjectif

Introduction

La résolution de problèmes multiobjectifs relève de deux disciplines assez différentes:

1. La recherche des solutions de meilleur compromis : C'est la phase d'optimisation multiobjectif.
2. Le choix de la solution à retenir : C'est la tâche du décideur qui, parmi l'ensemble des solutions de compromis, doit extraire celle(s) qu'il utilisera. On parle alors ici de décision multiobjectif et cela fait appel à la théorie de la décision.

Classification :point de vue décideur :

- **Les approches a priori** : Le décideur définit une fonction d'agrégation des objectifs après optimisation, en supposant connaître les poids de chaque objectif. Cela transforme le problème en un problème mono-objectif, mais il est souvent difficile de le faire à cause des objectifs incommensurables.).

Introduction

- **Les approches a posteriori** : Elles offrent au décideur un ensemble de bonnes solutions parmi lesquelles choisir, sans modéliser ses préférences. Cela évite de définir ses préférences, mais nécessite de générer un ensemble de solutions bien réparties, ce qui peut être difficile et exigeant en temps de calcul.

Classification : Point de Vue Concepteur :

- **Les approches non Pareto** ne traitent pas le problème comme un véritable problème multiobjectif. Elles cherchent à ramener le problème initial à un ou plusieurs problèmes mono-objectifs.
- **Les approches Pareto** ne transforment pas les objectifs du problème, ceux-ci sont traités sans aucune distinction pendant la résolution.

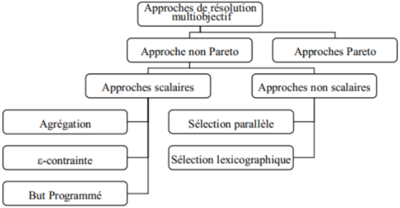

Figure: classification point de vue concepteur

Approches Non Pareto

- **Approche d'agrégation**: C'est l'une des premières approches utilisée pour résoudre les problèmes multiobjectifs. Elle consiste à transformer un problème multiobjectif en un problème monoobjectif, en définissant une fonction objectif unique F comme étant la somme pondérée des différentes fonctions objectifs du problème initial.

Approches Non Pareto

En affectant à chaque objectif un coefficient de poids qui représente l'importance relative que le décideur attribue à l'objectif:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(s)$$

où les poids $\lambda_i \in [0, 1]$ avec $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.
Cette approche a l'avantage de pouvoir réutiliser tous les algorithmes classiques dédiés aux problèmes d'optimisation à un seul objectif.

- **But programmé** : Dans les approches de ce type, le décideur doit définir des buts T_i ou références qu'il désire atteindre pour chaque objectif f_i. Ces valeurs sont introduites dans la formulation du problème, le transformant en un problème mono-objectif. La nouvelle fonction objectif est modifiée de façon à minimiser les écarts entre les résultats et les buts à atteindre :

$$\min_{s \in \Omega} \sum_{i=1}^{p} |f_i(s) - T_i(s)|$$

Les approches non scalaires non Pareto (posteriori)

Ces approches ne transforment pas le problème multiobjectif en un problème mono-objectif, mais utilisent des opérateurs qui traitent séparément les différents objectifs, elles n'utilisent pas non plus la notion de dominance Pareto : sélection parallèle, sélection lexicographique

Les approches non scalaires non Pareto (posteriori)

- **Sélection parallèle** : L'algorithme VEGA [Schaffer, 1984] sélectionne indépendamment les meilleurs individus pour chaque objectif, formant k sous-populations qui sont ensuite mélangées. Les opérateurs génétiques sont appliqués pour créer une nouvelle population.

Les approches non scalaires non Pareto (posteriori)

- **Sélection lexicographique** : Proposée par Fourman [1985], cette approche optimise les objectifs selon un ordre d'importance défini par le décideur. Chaque objectif est optimisé successivement, en utilisant les valeurs obtenues comme contraintes pour les suivants. Le risque est que l'importance du premier objectif restreigne la recherche à une zone limitée.

Approches Pareto

- **Approches Pareto** : Dans un PMO, il existe un équilibre tel que l'on ne peut pas améliorer un critère sans détériorer au moins un des autres critères [Vilfredo Pareto, 1896]. Cet équilibre a été appelé Optimum de Pareto, ou bien un point non dominé.

Approches Pareto

- **Notion de dominance** : La notion de dominance consiste à attribuer un rang à chaque individu en favorisant la sélection des individus de rang le plus élevé pour rechercher une meilleure solution. Lorsqu'on résout un problème d'optimisation multi-objectif, on obtient une multitude de solutions. Seul un nombre restreint de ces solutions va nous intéresser. Pour qu'une solution soit intéressante, il faut qu'il existe une relation de dominance entre la solution considérée et les autres solutions, dans le sens suivant :

Approches Pareto

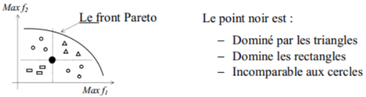

Figure: Relation de dominance (Cas de deux objectifs à maximiser)

Approches Pareto

La dominance au sens Pareto est définie comme suit : Soient deux vecteurs d'objectifs Y_1 et Y_2 dans un ensemble Ψ, où $Y_1 = F(S_1)$ et $Y_2 = F(S_2)$. On dit que la solution S_1 domine S_2 (ou que Y_1 domine Y_2) si $Y_1 \geq Y_2$ et $Y_1 \neq Y_2$, c'est-à-dire que $y_{1k} \geq y_{2k}$ pour tout $k = 1, \ldots, p$, et $y_{1k} > y_{2k}$ pour au moins un k. On note alors $S_1 \succ S_2$. Si S_1 est meilleur que S_2 sur tous les objectifs (c'est-à-dire que $y_{1k} \geq y_{2k}$ pour tout $k = 1, \ldots, p$), alors on dit que S_1 domine fortement S_2, et on note $S_1 \gg S_2$. Si ni $S_1 \succ S_2$ ni $S_2 \succ S_1$, alors on dit qu'elles sont incomparables ou Pareto équivalentes, notées $S_1 \sim S_2$. La relation de dominance est une relation d'ordre partiel stricte, transitive, non réflexive et non antisymétrique [**?**].

Approches Pareto

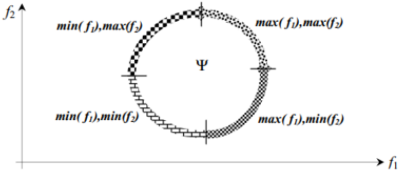

Figure: allure de la frontière Pareto selon l'optimisation

Approches Pareto

- **La représentation de la surface de compromis** :La surface de compromis idéale doit avoir des points solutions uniformément répartis. Si ce n'est pas le cas, l'ensemble de solutions sera moins utile pour l'utilisateur. .

Approches Pareto

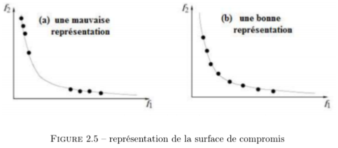

Figure: Représentation de la surface de compromi

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

C'est l'une des premières approches utilisées pour résoudre les problèmes multiobjectif (PMO). Elle consiste à transformer un problème multiobjectif en un problème mono-objectif. Les coefficients sont généralement choisis en fonction de l'importance relative des objectifs. Soit le problème mono-objectif linèaire suivant:

$$\begin{cases} \min Z_\lambda(x) = \min \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c_i x \\ \text{s.c. } x \in S \\ \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, ..., k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

Cette approche a l'avantage de pouvoir réutiliser tous les algorithmes classiques dédiés aux problèmes d'optimisation à un seul objectif tels que la méthode du simplexe. Certains résultats théoriques clarifiant le rapport entre la solution optimale du problème (2) et les solutions Pareto-optimales du problème (1) sont montrer dans les deux théorèmes suivant:

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

Théorème 1

Si tous les poids λ_i sont positifs ($\lambda_i \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, k$), alors la solution optimale du problème (P_λ) est une solution Pareto-optimale du problème linéaire multi-objectif (1).

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

Preuve

Soit $x^* \in S$ une solution optimale de (P_λ) avec $\lambda_i \geq 0$. Supposons que x^* n'est pas Pareto-optimale pour (1), ce qui équivaut à dire qu'il existe une solution $x \in S$ telle que $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $f_j(x) < f_j(x^*)$ pour au moins un $j \in \{1, \ldots, k\}$. Puisque $\lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \ldots, k$, nous avons :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) < \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x^*)$$

Ceci contredit le fait que x^* est une solution optimale de (P_λ) donc x est Pareto optimale.

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

Théorème 2

L'unique solution optimale du problème (P_λ) est Pareto optimale pour le problème (1).

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

Preuve

Soit $x^* \in S$ l'unique solution optimale de (P_λ). Supposons que x^* n'est pas Pareto-optimale pour le problème linéaire multi-objectif (1). Dans ce cas, il existe une solution $x \in S$ telle que $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ $\forall i = 1, \ldots, k$ et $f_j(x) < f_j(x^*)$ pour au moins un $j \in \{1, \ldots, k\}$.
Comme $\lambda_i \geq 0$, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x^*) \quad (1)$$

D'un autre côté, l'unicité de x^* signifie que

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x^*) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in S \quad (2)$$

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

Preuve

Les inégalités (1) et (2) sont contradictoires donc x^* est Pareto optimale pour (1).

La figure suivant illustre le fonctionnement de la méthode d'agrégation. Fixer un vecteur poids revient à trouver un hyperplan dans l'espace objectif (une droite pour un problème bicritères) avec une orientation fixée. La solution Pareto optimale est le point où l'hyperplan possède une tangente commune avec l'espace réalisable (le point X dans la figure).

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

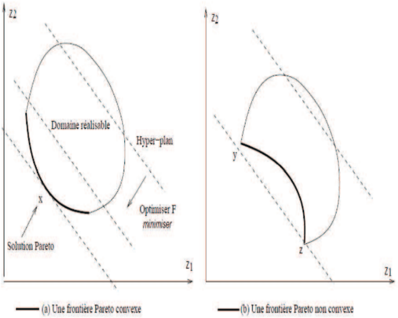

Figure: La méthode d'agrégation

Les résultats obtenus dans la résolution du problème d'agrégation pondérée (2) dépendent fortement des paramètres choisis pour le vecteur de poids λ.

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

Les poids λ_i doivent aussi être choisis en fonction des préférences associées aux objectifs, ce qui est une tâche délicate. Ainsi, une approche g´en´eralement utilis´ee est de réesoudre le problème (2) avec différentes valeurs de λ.

Difficultés de cette méthode:
Cette méthode est simple à mettre en œuvre et elle est d'une grande efficacité, mais les difficultés essentielles de cette approche sont :

- Comment le décideur détermine-t-il les poids de chaque critère ?
- Comment exprimer l'interaction entre les différents critères ?

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

Choix des poids des objectifs:
Une solution est d'utiliser une combinaison linéaire des objectifs et de faire varier les poids de façon à constater l'influence de tel ou tel objectif sur le résultat. Cette approche est facile é implémenter mais tous les résultats obtenus appartiennent à des zones convexes de l'espace des objectifs réalisables (figure précédente). Les solutions potentielles situées dans des portions concaves sont oubliées.

Comme le problème (1) est linéaire donc il est convexe d'où le théorème suivant:

Méthode de résolution: Agrégation pondérée

Théorème 3 (Geoffrion, 1968)

$x_0 \in S$ est une solution optimale pour le problème paramétrique (2) si et seulement si x_0 est une solution efficace pour le problème multiobjectif (PLMO) (1).

Exemple

Considérons l'exemple de Binh, qui est un problème multiobjectif non linéaire (MONLP):

$$\begin{cases} \min & f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 \\ \min & f_2(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \\ \text{s.c.} & -5 \leq x_1 \leq 10 \\ & -5 \leq x_2 \leq 10 \end{cases}$$

On peut voir facilement que l'exemple de Binh est un problème quadratique convexe car les deux fonctions objectif f_1 et f_2 sont des équations de cercles qui peuvent s'écrire sous forme quadratique strictement convexe et l'ensemble de décision S qui est un quadrant.

Exemple

Utilisons un script qu'on peut écrire dans MATLAB pour tracer l'allure de domaine réalisable dans l'espace des critères :

f$_1 = []$;
f$_2 = []$;
for i = -5 : 0.2 : 10
for j = -5 : 0.2 : 10
f$_1 = [f_1; i^2 + j^2]$;
f$_2 = [f_2; (i-5)^2 + (j-5)^2]$;
end
end
plot(f$_1, f_2, '*'$);
La fonction objectif du problème paramétrique (P_λ) peut s'écrire comme suit:

Exemple

$$\min \varphi = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \lambda_1(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_2((x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2)$$

Avec λ_1,$\lambda_2 \geq 0$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Si on pose $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$, d'où $0 \leq \lambda_1 \leq 1$, alors la fonction objectif φ devient:

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 - 10\lambda_2(x_1 + x_2) + 50\lambda_2$$

On cherche maintenant l'optimum de cette nouvelle fonction objectif φ: Le gradient de la fonction φ est le vecteur

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) = (2x_1 - 10\lambda_2, 2x_2 - 10\lambda_2)$$

Le Hessien de la fonction φ est la matrice

$$\nabla^2\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

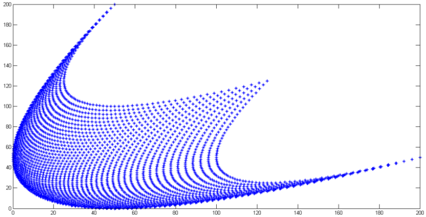

Figure: Espace de critère de l'exemple Binh

Exemle

Comme on peut le vérifier facilement, le Hessien φ est une matrice définie positive, alors le minimum de la fonction φ est donné par la résolution du système:

$$\begin{cases} 2x_1 - 10\lambda_2 = 0 \\ 2x_2 - 10\lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 5\lambda_2 \\ x_2^* = 5\lambda_2 \end{cases}$$

Cependant, toutes les solutions efficaces du problème multiobjectif peuvent s'écrire $x = 5\lambda_2(1, 1)$ avec $0 \leq \lambda_2 \leq 1$.