CORRECTION BACC A 2005

Exercice 1

1. Déterminer la primitive U de la fonction numérique u qui s'annule en 0.

Posons $f(x) = x^2 + x + 1$. Alors $f'(x) = 2x + 1$. Ainsi $u(x)$ est sous la forme $\frac{u\prime x}{u(x)}$.

Donc les primitives de u sont les fonctions U définie par $U(x) = \ln|x^2 + x + 1| + k, k \in \mathbb{R}$.

$U(0) = 0 \Leftrightarrow \ln(1) + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$.

Donc la primitive cherchée est : $U(x) = \ln|x^2 + x + 1|$

2. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2e^{2x} - 7(e^x) + 6 = 0$.

On a : $2e^{2x} - 7(e^x) + 6 = 0 \Leftrightarrow 2(e^x)^2 - 7(e^x) + 6 = 0$.

Posons $X = e^x$ avec $X > 0$. L'équation devient $2X^2 - 7X + 6 = 0$.

On a : $\Delta = (-7)^2 - 4(2)(6) = 49 - 48 = 1;\ soit\ \sqrt{\Delta} = 1$.

$x_1 = \frac{-(-7)-1}{2\times2} = \frac{7-1}{4} = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{-(-7)+1}{2\times2} = \frac{8}{4} = 2$.

Revenons au changement de variables.

$X = \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{3}{2}$. $X = 2 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$. Donc $S = \left\{\ln 2\,; \ln\frac{3}{2}\right\}$

3. Résolvons dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le système (S) : $\begin{cases} e^{x\ln 3} - e^{y\ln 27} = 0 \\ \ln x - 2\ln y = 1 \end{cases}$

Contraintes : (S) a un sens $\Leftrightarrow x > 0$ et $y > 0$.

Pour $x > 0$ et $y > 0$, $\begin{cases} e^{x\ln 3} - e^{y\ln 3^3} = 0 \\ \ln x - \ln y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ln 3 = y\ln 3^3 \\ \ln\left(\frac{x}{y^2}\right) = \ln e^1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ln 3 = 3y\ln 3 \\ \frac{x}{y^2} = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y\ (E_1) \\ x = ey^2\ (E_2) \end{cases}$$

Remplaçons x par $3y$ dans (E_2).

On a : $3y = ey^2 \Leftrightarrow 3 = ey$ car $y > 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{e}$. Ainsi $x = 3y = 3 \times \frac{3}{e} = \frac{9}{e}$.

Donc $S = \left\{\left(\frac{9}{e}; \frac{3}{e}\right)\right\}$

Exercice 2

1. Dressons le tableau de variation de f avec le signe de sa dérivée.

x	-3		3		7
$f'(x)$		-	0	+	
f(x)	3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	7

2. Déterminons $f(0)$; $f(5)$ et $f(-1)$.

Il suffit de déterminer les ordonnées des points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec les droites d'équation $x = 0$, $x = 5$ et $x = -1$ respectivement.

Par lecture graphique, $f(0) = 0$; $f(5) = -2$ et $f(-1) = 2$.

3. Résolution des équations : $f(x) = 0$; $f(x) = 3$.

Il suffit de déterminer les abscisses des points d'intersections de $(\mathcal{C}_f)$ avec les droites d'équations $y = 0$ et $y = 3$ respectivement.

Par lecture graphique $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$. D'où $S = \{0; 6\}$

$f(x) = 3 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = \alpha$ avec $\alpha \in]6; 7[$. D'où $S = \{-3; \alpha\}$

4. Résolvons l'inéquation $f(x) > 0$.

Il suffit de déterminer les intervalles où $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite d'équation $y = 0$.

Ainsi par lecture graphique, on a : $S = [-3; 0[\cup]6; 7[$.

5. Trouvons l'ensemble image de chacun des intervalles :

Par lecture graphique nous avons :

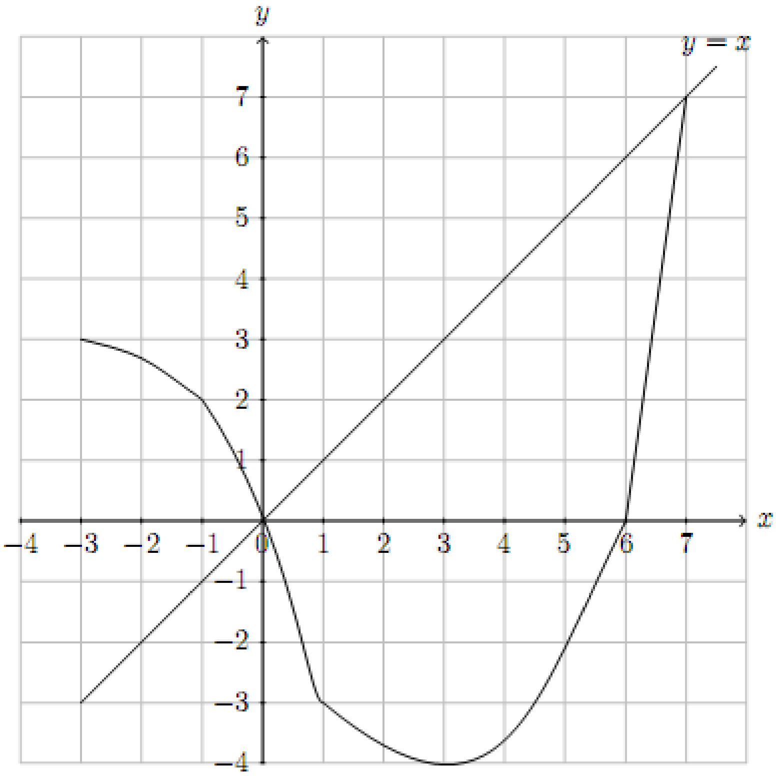
$f([-1; 1]) = [-3; 2]$; $f([0; 5]) = [-4; 0]$ et $f(]1; 7[) =]-4; 0[$.

6. Nombre dérivée de f en 3.

La courbe admet en son point d'abscisse 3, une tangente horizontale. Donc $f'(3) = 0$.

7.

(a) Traçons $(\mathcal{C}_f)$et la droite d'équation : $y = x$.



(b) Résolvons alors l'inéquation $f(x) \leq x$.

Il suffit de déterminer graphiquement les intervalles où $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de la droite d'équation $y = x$.

Par lecture graphique, on a : $\boxed{S =]0;7[}$

Exercice 3

1. y représente le nombre d'hommes ne pratiquant aucun sport.

2. Détermination des valeurs de x, y et z vérifiant : $\begin{cases} x + y + z = 45 \ \ (E_1) \\ x - 2y + 2z = 30 \ \ (E_2) \\ 2x + y - z = 35 \ \ (E_3) \end{cases}$

Nous allons procéder par la méthode de pivot de Gauss :

$(E_1) - 2(E_2)$ et $(E_1) - 2(E_3)$ nous donnent : $\begin{cases} x + y + z = 45 \ \ (E_1) \\ -y + 3z = -55 \ \ (E'_2) \\ 5y - 5z = -25 \ \ (E'_3) \end{cases}$

En faisant $5(E'_2) + (E'_3)$, nous avons $\begin{cases} x + y + z = 45 \ (E_1) \\ -y + 3z = -55 \ \ (E'_2) \\ 20z = -300 \ \ (E''_3) \end{cases}$

De $(E''_3) : z = \frac{-300}{-20} = 15$ (*)

(*) dans (E'_2) donne : $-y - 3 \times 15 = -55 \ \Leftrightarrow -45 + 55 = y \Leftrightarrow y = 10$.

Ainsi $2x + 10 - 15 = 35 \Leftrightarrow 2x = 35 + 5 \Leftrightarrow x = \frac{40}{2} = 20$.

Donc $\boxed{S = \{(20; 10; 15)\}}$

3. Montrons que $t = 5$.

L'association comportant 50 membres, on a $x + y + z + t = 50$, soit $20 + 10 + 15 + t = 50$ et $t = 50 - 45 = 5$. Donc $t = 5$.

4. $Card\ \Omega = C_{50}^{1} = 50$.

Déterminons la probabilité de chacun des événements A, B, C ci-dessous définis :

(a) A : « Une femme qui pratique au moins un sport ». Comme on a $t = 5$ femmes qui pratiquent au moins un sport, alors $Card\ A = C_5^1 = 5$.

Ainsi $P(A) = \frac{Card\ A}{Card\ \Omega} = \frac{5}{50} \Longrightarrow P(A) = \frac{1}{10}$

(b) B : « Une femme ».

Nous avons au total $t + z = 20$ femmes. Par suite $Card\ B = C_{20}^{1} = 20$.

D'où $P(B) = \frac{Card\ B}{Card\ \Omega} = \frac{20}{50} \Longrightarrow P(B) = \frac{2}{5}$

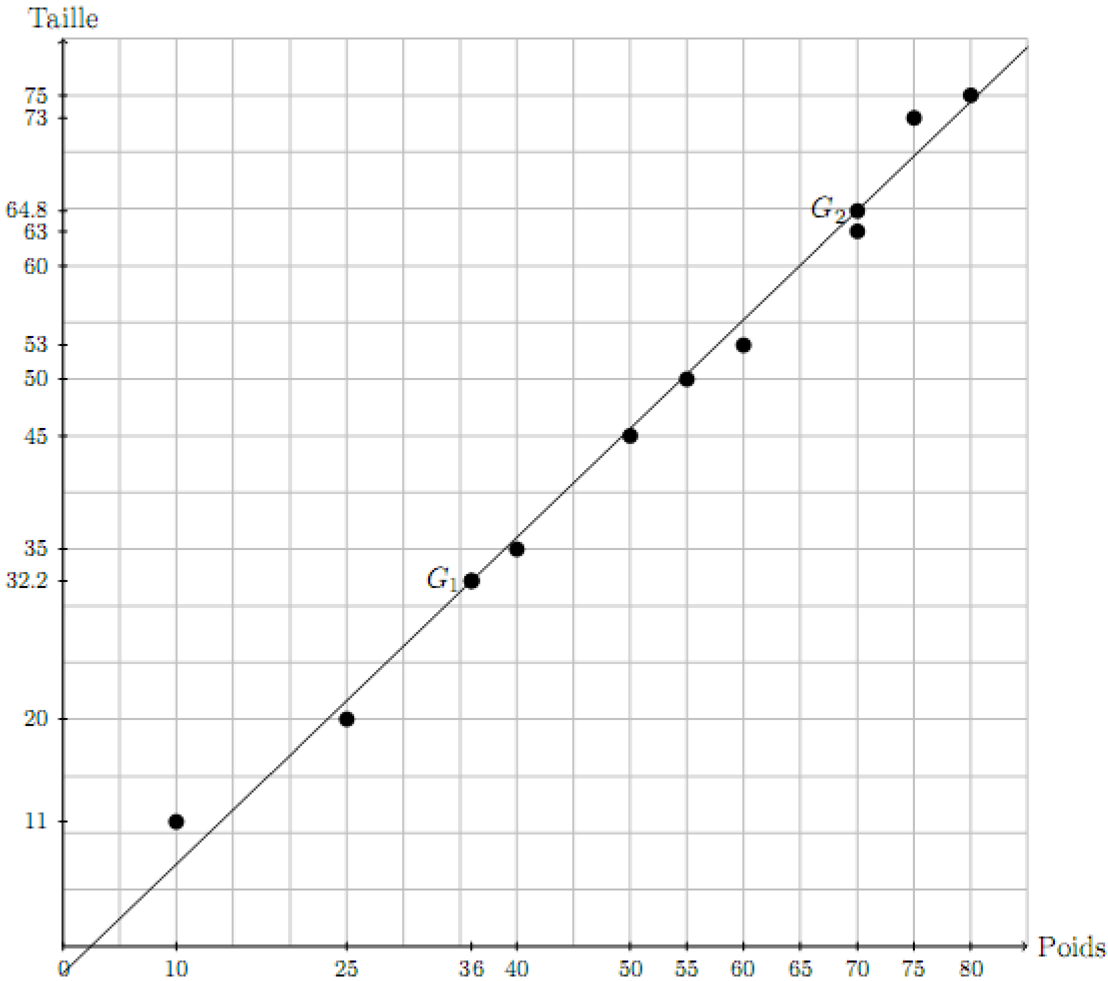
(c) C : « Une personne qui pratique au moins un sport ».

On a au total $x + t = 25$ personnes. Alors $Card\ C = C_{25}^{1} = 25$.

Donc $P(C) = \frac{Card\ C}{Card\ \Omega} = \frac{25}{50} \Longrightarrow P(B) = \frac{1}{2}$

Exercice 4

1. Représentons le nuage de points :



2. Déterminons le point G de ce nuage.

Posons $G(\bar{x};\bar{y})$

On a : $\bar{x} = \frac{10+25+40+50+55+60+65+70+75+80}{10} = \frac{530}{10} = 53$

$\bar{y} = \frac{11+20+35+45+50+53+60+63+73+75}{10} = \frac{485}{10} = 48{,}5$

D'où $G(53; 48{,}5)$.

3.

(a) Calculons les coordonnées de G_1et G_2.

On a :

$\bar{x}_1 = \frac{10+25+40+50+55}{5} = \frac{180}{5} = 36$ et $\bar{y}_1 = \frac{11+20+35+45+50}{5} = \frac{161}{5} = 32{,}2$.

$\bar{x}_2 = \frac{60+65+70+75+80}{5} = \frac{350}{5} = 70$ et $\bar{y}_2 = \frac{53+60+63+73+75}{5} = \frac{324}{5} = 64{,}8$.

Donc $G_1(36; 32{,}2)$ et $G_2(70; 64{,}8)$.

(b) Voir la figure pour G_1, G_2 et la droite (G_1G_2).

La droite (G_1G_2) représente la droite de Mayer.

(c) Déterminons une équation cartésienne de la droite (G_1G_2).

Soit $M(x,y)$ un point de (G_1G_2). On a :

$$\frac{y-y_{G_1}}{x-x_{G_1}}=\frac{y_{G_2}-y_{G_1}}{x_{G_2}-x_{G_1}}\Leftrightarrow\frac{y-32{,}2}{x-36}=\frac{64{,}8-32{,}2}{70-36}\Leftrightarrow\frac{y-32{,}2}{x-36}=\frac{32{,}6}{34}=0{,}96$$

$$\Leftrightarrow y-32{,}2=0{,}96(x-36)$$

$$\Leftrightarrow y=32{,}2+0{,}96-36\times 0{,}96$$

$$\Leftrightarrow y=0{,}96x-2{,}31.$$

D'où $(G_1G_2){:}\, y=0{,}96x-2{,}31$

4.

(a) Estimons la taille d'une personne ayant un poids de 97 grammes.

On a : $y=0{,}96\times 97-2{,}31=90{,}81$. La taille cherchée est de $90{,}81\ cm$.

(b) Estimons le poids d'une personne de taille 151 cm.

$y=151$ on a : $151=0{,}96x-2{,}31\Leftrightarrow 151+2{,}31=0{,}96x$

$$\Leftrightarrow x=\frac{151{,}31}{0{,}96}$$

$$\Leftrightarrow x=159{,}697$$

Le poids cherché est de $159{,}697g$.