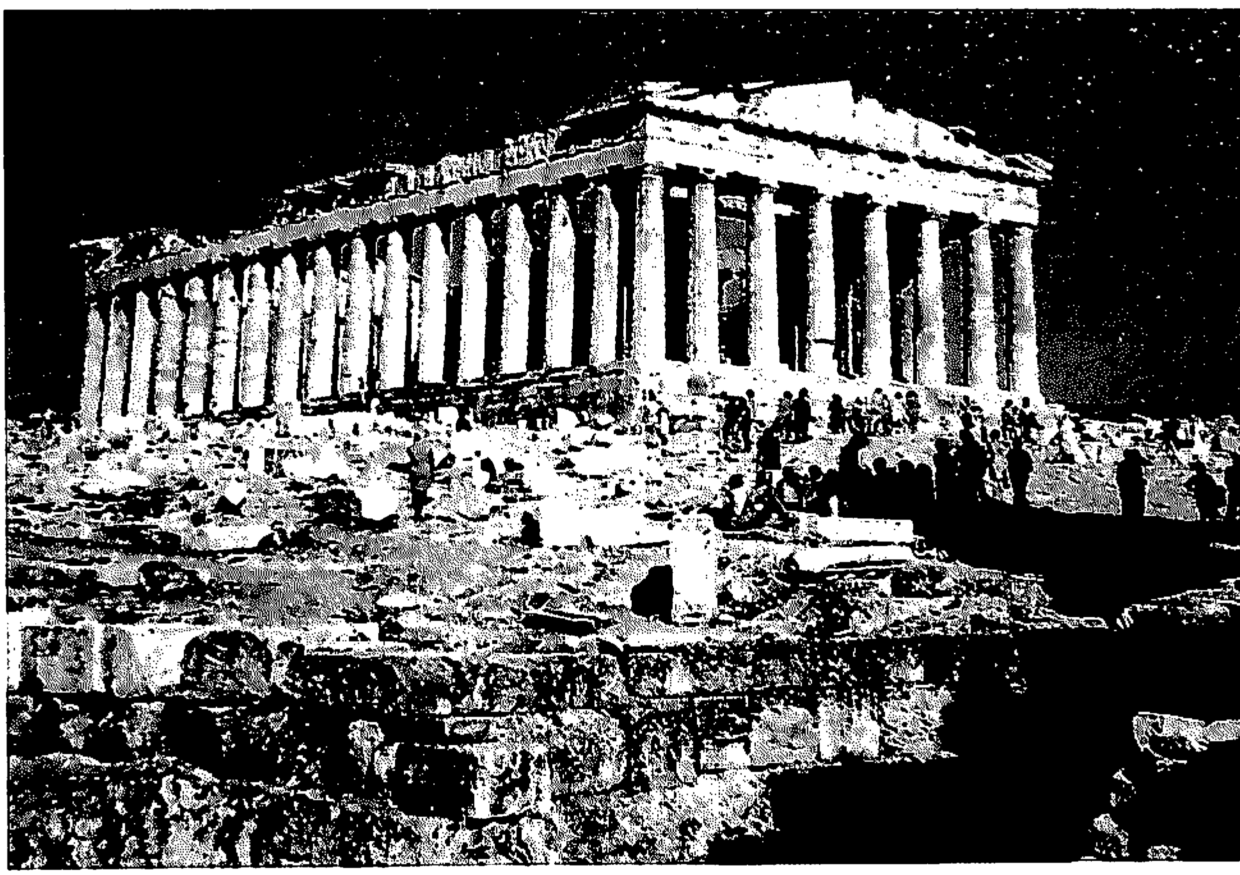
Cuaderno de Ejercicios de

Coordinación de Matemáticas
Departamento de Álgebra
Agosto 2011

algebra

(PRIMERA PARTE)



Francisco Barrera García
J. Erik Castañeda de Isla Puga

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

BARRERA GARCÍA, Francisco y E. Castañeda de I. P.
Cuaderno de ejercicios de álgebra. Primera parte.
México, UNAM, Facultad de Ingeniería, 2006, 175 p.

Cuaderno de ejercicios de álgebra. Primera parte

Ciudad Universitaria, México, D. F.
ISBN 970-32-2532-2

Primera edición, junio de 1994.
Quinta reimpresión, junio de 2006.

Impreso en México.

FACULTAD DE INGENIERÍA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

CUADERNO DE EJERCICIOS DE

Á L G E B R A

(PRIMERA PARTE)

Coordinación de Matemáticas
Departamento de Álgebra
Agosto del 2011

FRANCISCO BARRERA GARCÍA
J. ERIK CASTAÑEDA DE ISLA PUGA

BARRERA GARCÍA, Francisco y E. Castañeda de I. P.
Cuaderno de ejercicios de álgebra. Primera parte.
México, UNAM, Facultad de Ingeniería, 2006, 175 p.

Cuaderno de ejercicios de álgebra. Primera parte

Ciudad Universitaria, México, D. F.
ISBN 970-32-2532-2

Primera edición, junio de 1994.
Quinta reimpresión, junio de 2006.

Impreso en México.

PRESENTACION

El aprendizaje de las matemáticas se logra con mayor efiencia cuando se tiene un equilibrio entre la teória básica y la práctica, alcanzada ésta con un número razonable de ejercicios de diversos grados de dificultad. Con esta idea se pretendió presentar a la comunidad de la Facultad de Ingeniería un cuaderno de ejercicios de la extinta asignatura *Álgebra y Geometría Analítica*; para ello se trabajó en colaboración con la Unidad de Apoyo Editorial de la misma Facultad, situación que condujo a que el trabajo alcanzado tuviera una valiosa revisión por parte de las licenciadas Irma Hinojosa, María Cuairán y Amelia Fiel, a quienes se les agradece enormemente su paciencia y sapiencia.

Como todo en la vida debe ser dinámico, los planes de estudio evolucionaron y dicha asignatura desapareció para convertirse en *Álgebra* por un lado y *Geometría Analítica* por otro.

Ahora se ha pensado en retomar la parte de Álgebra; completar el trabajo de los temas que faltan y tener finalmente el cuaderno deseado. La obra que aquí se presenta contiene solo los primeros tres temas, con el objetivo de dar servicio a estudiantes y profesores que actualmente aprenden o imparten la asignatura, pero se continuará con el trabajo para que en un futuro se cuente con la totalidad de la obra. Para que este cuaderno sea de mayor utilidad, es deseable que se haga saber a los autores, por escrito, los errores que los amables lectores encuentren y/o las correcciones que juzguen enriquezcan la obra.

Francisco Barrera García
Erik Castañeda De Isla Puga
abril de 1994

CAPITULO I NUMEROS REALES

A través de la historia, pocos conceptos han sido tan utilizados desde épocas tan remotas como el concepto de número. No obstante su antigüedad y su continuo y variado empleo, su definición y su formalización no se pudieron establecer de manera satisfactoria hasta fechas relativamente recientes. Aún en nuestros días es común confundir este concepto, puramente abstracto, con su representación escrita llamada *numeral*.

Es hasta el siglo pasado cuando las ideas de Weierstrass, Boole, Cantor, Dedekind y Peano, entre otros, cristalizaron en la concepción formal de la estructura algebraica llamada *campo de los números reales*. Esto no quiere decir que se haya llegado a colmar este *casillero* del conocimiento matemático. Actualmente, en muchas partes del mundo, son varios los científicos preocupados en profundizar más en esta apasionante rama del saber. Pero para el lector, estudioso de la ingeniería, que utilizará las matemáticas como una herramienta en su vida dentro de las aulas y, posteriormente, en sus actividades profesionales, el objetivo en este capítulo será la determinación precisa y rigurosa de las estructuras numéricas de mayor relevancia, hasta concluir con el campo de los *números reales*; también se pretende propiciar el adecuado manejo de los elementos numéricos que conforman estas estructuras algebraicas.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sean los conjuntos:

$A = \{ 6,7,8,9, \ldots \}$

$B = \{ \ldots, -1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 \}$

$C = \{ 3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18 \}$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas:

a) $(B \cap C) \subseteq A$

b) $(A \cap B) \subseteq C$

c) $9 \subseteq B$

d) $A \subseteq B$

e) $C \in (A \cup B)$

f) $3 \in C$

SOLUCION:

a) Falso

$(B \cap C) = \{ 3,4,5,6,7,8,9,10,11 \} \nsubseteq A$, pues existen elementos de $(B \cap C)$ que no pertenecen a A , ejemplo:

$4 \notin A$.

b) Verdadero

$(A \cap B) = \{ 6,7,8,9,10,11 \} \subseteq C$

c) Falso

9 es elemento de B , pero no subconjunto de él.

d) Falso

Existen muchos elementos de A que no pertenecen a B ; ejemplo: $12 \in A$; $12 \notin B$

e) Falso

El conjunto C está contenido en la unión de los conjuntos A y B ; es decir, C es subconjunto de $(A \cup B)$, pero un conjunto no pertenece a otro, a menos que este último sea un conjunto de conjuntos y no es el caso.

f) Verdadero

3 sí es elemento de C .

2. Sean los conjuntos:

$A = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\} \}$

$B = \{ 1,2,3,4,5 \}$

$C = \{ \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\} \}$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.

a) $A = B$

b) $A \cap C = \{1\}$

c) $A \cap B = \phi$

d) $1 \in C$

e) $(A \cup B) - C = \phi$

SOLUCION:

a) Falso

A es un conjunto de conjuntos y B es un conjunto de números. Por lo tanto no pueden ser iguales, pues sus elementos no son de la misma naturaleza.

b) Verdadero

Tanto A como C son conjuntos de conjuntos y el conjunto $\{1\}$ es el único que es elemento común de A y de C.

c) Verdadero

No existe ningún elemento común a A y a B.

d) Falso

El número 1 no pertenece al conjunto C , mientras que el conjunto $\{1\}$ sí.

e) Falso

$(A \cup B) - C = \{\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, 1,2,3,4,5\}$

3. Dada la siguiente tabla, contestar en cada cuadro con un sí, si cumple la propiedad y un no en caso contrario.

PROPIEDAD / CONJUNTO	CERRADURA ADICION	CERRADURA MULTIPLICACION	EXISTENCIA INVERSO ADITIVO	EXISTENCIA INVERSO MULTIPLICATIVO PARA $z \neq 0$	DENSIDAD
NATURALES					
ENTEROS					
RACIONALES					
IRRACIONALES					
REALES					

SOLUCION:

N	SI	SI	NO	NO	NO
Z	SI	SI	SI	NO	NO
Q	SI	SI	SI	SI	SI
Q'	NO	NO	NO	NO	NO
IR	SI	SI	SI	SI	SI

4. Sean los conjuntos de números N, Z, Q, Q' y IR. Considerando al conjunto IR como el conjunto universo, determinar el resultado de:

$$\left[(\mathbb{R}-Q) \cup (Q'-Z)\right] \cup \left[(Q\cap Q') \cup \mathbb{R} \cup N\right] - \left[(\mathbb{R}\cap Q) \cap (Z\cup N)\right]$$

SOLUCION:

El primer paréntesis rectangular se resuelve de la siguiente manera:

$$\left[(\mathbb{R}-Q) \cup (Q'-Z)\right] = \left[Q' \cup Q'\right]$$

$$= Q'$$

El segundo paréntesis vale:

$$\left[(Q \cap Q') \cup \mathbb{R} \cup N\right] = \left[\phi \cup \mathbb{R} \cup N\right]$$
$$= \left[\mathbb{R} \cup N\right]$$
$$= \mathbb{R}$$

y el tercero:

$$\left[(\mathbb{R} \cap Q) \cap (Z \cup N)\right] = \left[Q \cap Z\right]$$
$$= Z$$

sustituyendo:

$$\underbrace{Q' \cup \mathbb{R}} - Z =$$
$$= \mathbb{R} - Z$$
$$= Z'$$

5. En las siguientes proposiciones indicar mediante una V si dichas propuestas son ciertas o con una F en caso de ser falsas.

a) $Q \cup Q' \subseteq \mathbb{R}$ ( )

b) $A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$ ( )

c) $\sqrt{2} \in Q$ ( )

d) $Q \cap Q' = \phi$ ( )

e) $\bar{z} = z \Leftrightarrow Z \in N$ ( )

SOLUCION:

a) (V) El conjunto unión de los racionales y de los irracionales, sí es un subconjunto de los reales.

b) (V) Se trata de una de las leyes de De Morgan.

c) (F) Es un número irracional.

d) (V) La intersección de un conjunto con su complemento siempre es el conjunto vacio. Además, no es posible encontrar un número que sea a la vez racional e irracional.

e) (F) La proposición verdadera sería:

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} .$$

6. Para cada una de las siguientes afirmaciones, escribir en el paréntesis correspondiente una F o una V según sea falsa o verdadera.

 a) El número 1 es un número racional ( )

 b) $\sqrt{25}$ es un número irracional ( )

 c) 6 y $\frac{18}{3}$ indican (representan) números diferentes ( )

 d) Cualquier número irracional es también un número trascendente, como el número π ( )

e) La suma algebraica de dos números irracionales es otro irracional. ( )

SOLUCION:

a) (V) El número 1 se puede escribir $\frac{1}{1}$ y cumple con la definición de número racional.

b) (F) $\sqrt{25} = 5$ ya que $5 \cdot 5 = 25$ y, por lo tanto es racional.

c) (F) 6 es la mínima expresión del número racional $\frac{18}{3}$

d) (F) El número $\sqrt{2}$ es irracional, pero no es trascendente.

e) (F) $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$ y el número cero no es irracional.

7. Demostrar, por medio de inducción matemática, que:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2; \ \forall n \in N \qquad \ldots(1)$$

SOLUCION:

El miembro derecho de esta expresión es el cuadrado de la suma de los primeros "n" números naturales. Así que, también por inducción matemática, primero se demostrará que:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}; \quad \forall n \in N \qquad \ldots(2)$$

La expresión debe satisfacerse para $n = 1$:

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$$

$1 \equiv 1 \therefore$ sí se cumple para $n = 1$.

Ahora, se supone válida para $n = k$:

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k + 1)}{2} \qquad \ldots(3) \text{ Hipótesis}$$

Si (3) es cierta por hipótesis, la expresión (2) también debe cumplirse para $n = k + 1$:

$$1 + 2 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \qquad \ldots (4) \text{ Tesis}$$

sustituyendo (3) en (4):

$$\frac{k(k + 1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

tomando como factor común $(k + 1)$ en el miembro izquierdo:

$$(k + 1)\left[\frac{k}{2} + 1\right] = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

$$(k + 1)\left[\frac{k + 2}{2}\right] = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

finalmente:

$$\frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}, \qquad \forall\, k \in N$$

y está demostrada la expresión (2).

Ahora, como ya se tiene la certeza de que la expresión (2) es válida para todos los números naturales, ésta será sustituida en (1):

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad ; \quad \forall n \in N \qquad \ldots(5)$$

Para demostrar la expresión (5), se procede a verificar su validez para $n = 1$:

$$1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$$

$1 \equiv 1 \quad \therefore$ sí se cumple para $n = 1$

Se supone que la expresión es válida para $n = k$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 \quad ; \quad \forall\, k \in N$$

...(6) Hipótesis

Tomando como cierta la hipótesis de inducción numerada con (6), se tendrá que demostrar que (5) se cumple para $n = k + 1$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2 \quad ;$$

$\forall\, k \in N$ ... (7) Tesis

Dado que el miembro izquierdo de la expresión (7) es el mismo que el de la expresión (6), se sumará en ambos lados de (6) el término $(k + 1)^3$ y sólo quedará demostrar que los miembros derechos también son iguales:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

o sea:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{2^2} + (k + 1)^3$$

Tomando como factor común $(k + 1)^2$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 = (k + 1)^2 \left[\frac{k^2}{4} + k + 1\right]$$

entonces:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 = (k + 1)^2 \left[\frac{k + 4k + 4}{4}\right]$$

finalmente:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 = \left[\frac{(k + 1)(k + 2)}{2}\right]^2 ; \forall k \in N$$

que es la misma expresión (7).

Q.E.D.

8. Demostrar que $x^n - y^n$ tiene como factor $x - y$ para cualquier n natural.

SOLUCION:

Por inducción matemática:

Para $n = 1$:

$x' - y'$ sí tiene como factor a $x - y$.

Suponiendo válida la proposición para $n = k$:

$x^k - y^k$ tiene como factor a $x - y$ ... Hipótesis

Ahora, para $n = k + 1$:

$x^{k+1} - y^{k+1}$ es divisible entre $x - y$ ... tesis

En la tesis puede sumarse y restarse el término $x^k y$ y no se altera:

$$x^{k+1} - x^k y + x^k y - y^{k+1} = x^k(x-y) + y(x^k - y^k)$$

El primer sumando es divisible entre $x - y$, pues lo contiene como factor, y el segundo también lo es por hipótesis.

Q.E.D.

9. Sean $m,n,p \in N$, demostrar que:

$$m + (n + p) = (m + n) + p$$

tomando en cuenta la definición:

i) $n + 1 = n^*$ para toda $n \in N$.

ii) $n + m^* = (n + m)^*$, siempre que $n + m$ esté definida.

Por inducción matemática:

para $p = 1$:

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1$$

$$m + n^* = (m + n)^*$$

por la primera parte de la definición de adición en N.

Esta expresión es cierta por la segunda parte de la definición de adición en N .

Se supone válida para $p = k$:

$$m + (n + k) = (m + n) + k \qquad \text{... Hipótesis}$$

Si la hipótesis es cierta, la proposición debe serlo también para $p = k + 1$, es decir para $p = k^*$:

$$m + (n + k^*) = (m + n) + k^* \qquad \text{... Tesis}$$

$m + (n + k^*) = \left[(m + n) + k\right]^*$ por la definición de adición en N .

$m + (n + k^*) = \left[m + (n + k)\right]^*$ por la hipótesis de inducción.

$m + (n + k^*) = m + (n + k)^*$ por la definición de adición en N .

$m + (n + k^*) = m + (n + k^*)$ por la definición de adición.

Q.E.D.

10. Demostrar por inducción matemática que $7 \cdot 16^{n-1} + 3$ es divisible entre 5 , para todo $n \in N$.

SOLUCION:

Para $n = 1$:

$$7 \cdot 16^{1-1} + 3 = 7 \cdot 16^{0} + 3$$
$$= 7 \cdot 1 + 3$$
$$= 7 + 3$$
$$= 10$$

Como 10 sí es divisible entre 5 , la proposición sí se cumple para $n = 1$.

Ahora, se supone válida para $n = k$:

$7 \cdot 16^{k-1} + 3$ es divisible entre 5 por hipótesis de inducción ... (1)

Tomando como cierta la hipótesis, se demostrará a continuación, que la expresión resultante para $n = k + 1$ también es divisible entre 5 :

$7 \cdot 16^{k+1-1} + 3$ debe ser divisible entre 5. Tesis

$$7 \cdot 16^{k+1-1} + 3 = 7 \cdot 16^{k} + 3 \qquad \text{... (2)}$$

Sumando y restando el término $7 \cdot 16^{k-1}$ en la expresión (2) :

$$7 \cdot 16^{k} + 3 + 7 \cdot 16^{k-1} - 7 \cdot 16^{k-1}$$

Agrupando términos:

$$7 \cdot 16^{k-1} + 3 + 7 \cdot 16^{k} - 7 \cdot 16^{k-1}$$

Tomando como factor común en los dos último términos de esta expresión a 16^{k-1} :

$$7 \cdot 16^{k-1} + 3 + 16^{k-1}(7 \cdot 16 - 7)$$

finalmente:

$$7 \cdot \underbrace{16^{k-1} + 3} + \underbrace{16^{k-1}(105)}$$

La suma de los primeros términos, agrupados en la primera llave, es divisible entre 5 por la hipótesis de inducción y el último también lo es, pues está multiplicado por 105 que es divisible entre 5 .

Q.E.D.

11. Demostrar que:

$$\text{sen}\left[\theta + (2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{n-1}\cos\theta \;; \qquad \forall\, n \in N$$

SOLUCION:

La demostración se efectuará por medio de inducción matemática:

Para $n = 1$:

$$\text{sen}\left[\theta + \frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{0}\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$$

es cierta, pues se trata de una identidad trigonométrica.

Ahora, se supondrá válida la expresión para $n = k$:

$$\operatorname{sen}\left[\theta + (2k - 1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{k-1}\cos\theta \qquad \text{... Hipótesis}$$

Si la hipótesis de inducción es cierta, la expresión original debe cumplirse para $n = k + 1$:

$$\operatorname{sen}\left[\theta + (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{k}\cos\theta \qquad \text{... Tesis}$$

Si se multiplica por -1 ambos miembros de la hipótesis, la expresión resultante seguirá siendo válida y su miembro derecho será igual al de la tesis. Por ello, sólo se tendrá que demostrar que sus miembros izquierdos también lo son.

$$-\operatorname{sen}\left[\theta + (2k - 1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{k-1}(-1)\cos\theta$$

por las leyes de los exponentes:

$$-\operatorname{sen}\left[\theta + (2k - 1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^{k}\cos\theta$$

tomando en cuenta que:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \pi) = -\operatorname{sen}\alpha\ .$$

$$\operatorname{sen}\left[\theta + (2k - 1)\frac{\pi}{2} + \pi\right] = (-1)^{k}\cos\theta$$

desarrollando:

$$\operatorname{sen}\left[\theta + \frac{2k\,\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \pi\right] = (-1)^{k}\cos\theta$$

$$\text{sen}\left[\theta + \frac{2\,k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = (-1)^k \cos\,\theta$$

finalmente:

$$\text{sen}\left[\theta + (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^k \cos\,\theta$$

Q.E.D.

12. Demostrar la validez de la siguiente proposición haciendo uso del método de inducción matemática.

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16})\ldots(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n + 1}{2n} \quad \forall\, n \geq 2.$$

SOLUCION:

1) Para $n = 2$:

$$(1 - \frac{1}{4}) = \frac{2 + 1}{2\,(2)}$$

$\frac{3}{4} \equiv \frac{3}{4}$ $\therefore$ sí se cumple.

2) Suponiendo válida la expresión para $n = k$:

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16})\ldots(1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{k + 1}{2k}$$

... Hipótesis de inducción.

Si la hipótesis es cierta, la expresión debe cumplirse para $n = k + 1$:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ \ldots\ \left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}\ \ldots\text{Tesis}$$

Dado que el miembro izquierdo de la hipótesis es igual al de la tesis, excepto por el factor $\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$, si se multiplica la hipótesis en ambos lados seguirá siendo válida y sólo quedará comprobar que los dos miembros derechos son también iguales:

$$\left(\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\right)\ldots\left(\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\right)=\frac{k+1}{2k}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$=\frac{k+1}{2k}\left(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right)$$

$$=\frac{k+1}{2k}\left(\frac{k^2+2k+1-1}{(k+1)^2}\right)$$

$$=\frac{(k+1)(k^2+2k)}{2k\ (k+1)^2}$$

$$=\frac{k+2}{2\ (k+1)}\ .$$

Q.E.D.

13. Demostrar, por inducción matemática, que:

$$n! > n^2 \quad \forall\, n \geq 4\ , \quad n \in N$$

si se tiene que:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n\ ; \qquad 0! = 1$$

SOLUCION:

1) Para $n = 4$:

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$4^2 = 16$

$\therefore$ $24 > 16$ sí se cumple.

2) La hipótesis de inducción, la cual se supondrá válida, se tiene para $n = k$:

$$k! > k^2 , \quad k \geq 4 \qquad \text{... Hipótesis}$$

Se demostrará la validez de la preposición para $n = k + 1$, tomando como válida la hipótesis:

$$(k + 1)! > (k + 1)^2 \qquad \text{... Tesis}$$

Utilizando la definición de factorial, se tiene:

$$(k + 1)! = (k + 1) \times k!$$

Si se multiplica en la hipótesis por $(k + 1)$ en ambos lados de la desigualdad, como $k \geq 4$, el sentido no se altera:

$$(k + 1)k! > (k + 1)k^2$$

$$(k + 1)! > (k + 1)k^2 \qquad \text{... (A)}$$

Esta desigualdad proviene de la hipótesis que se tomó como válida, así que debe seguir siendo cierta y observando las expresiones de la tesis y la (A):

$$(k + 1)! > (k + 1)k^2 \qquad \ldots (A)$$

$$(k + 1)! > (k + 1)^2 \qquad \ldots \text{Tesis}$$

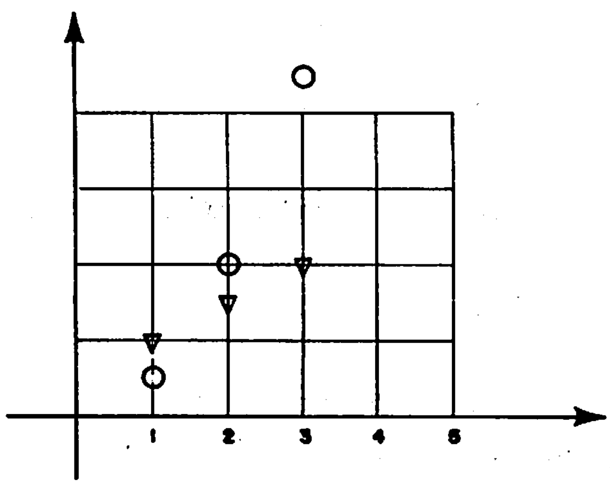
es fácil demostrar que:

$$(k + 1)k^2 > (k + 1)^2$$

dividiendo entre $(k + 1)$:

$$k^2 > k + 1$$

gráficamente:



la gráfica de $y = k^2$, corresponde a la de una parábola discontinua y la de $y = k + 1$ a la de una recta discontinua con pendiente 1 y esta desigualdad se cumple para $k > 2$.

Por lo tanto:

si $\quad (k + 1)! > (k + 1)k^2 \quad$ por hipótesis

y $\quad (k + 1)k^2 > (k + 1)^2$

entonces $\quad (k + 1)! > (k + 1)^2 \quad$ por transitividad.

Q.E.D.

14. Demostrar que en un polígono de n lados, la suma de los ángulos interiores es igual a:

$$S = (n - 2)\cdot 180°$$

SOLUCION:

Dado que no existen polígonos de uno o de dos lados, la expresión podría ser cierta para $n \geq 3$.

1) Para $n = 3$:

$$S_3 = (3 - 2)\cdot 180° = 180°$$

lo cual es cierto, tomando en cuenta un teorema de geometría elemental.

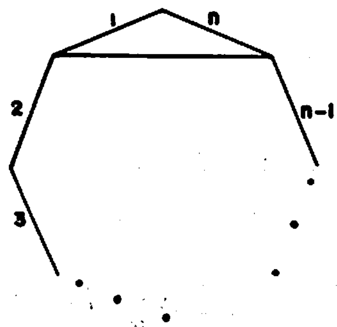
2) Se supone válida la expresión para $n = k$:

$S_k = (k - 2)\cdot 180° \;; \quad k \geq 3 \quad$ ... Hipótesis de inducción

Tomando como base la validez de la hipótesis, debe demostrar se que la expresión es cierta para $n = k + 1$:

$$S_{k+1} = (k - 1) \cdot 180° \qquad \text{... Tesis}$$

Sea un polígono de n lados:



si se unen con un segmento el punto origen del lado "n" con el punto extremo del lado 1 , considerando este segmento y desechando los lados n y 1 , se forma un polígono de $n - 1$ lados. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° , entonces la suma de los ángulos interiores de un polígono de $(n - 1)$ lados y la suma de un polígonos de n lados tienen una diferencia de 180°.

De acuerdo con este razonamiento, si en la hipótesis de inducción se tomó como cierto que la suma de los ángulos internos de un polígono de k lados es $S_k = (k - 2) \cdot 180°$, si le agregamos un lado al polígono, se tendrá

$$S_{k+1} = S_k + 180°$$

$$= (k - 2) \cdot 180° + 180°$$

$$= k \cdot 180° - 2 \cdot 180° + 180°$$

$$= k \cdot 180° - 180°$$

$$= (k - 1) \cdot 180°$$

Q.E.D.

15. Demostrar, por medio de inducción matemática, que:

$$2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n > 2^n - 1 \qquad \forall\, n \in N$$

SOLUCION:

Para $n = 1$:

$$2^1 > 2^1 - 1$$

evidentemente:

$2 > 1$ sí se cumple.

Ahora se supone válido para $n = k$:

$$2 + 4 + 8 + \ldots + 2^k > 2^k - 1 \quad \ldots \text{Hipótesis}$$

Tomando como cierta la hipótesis, la expresión debe cumplirse para $n = k + 1$:

$$2 + 4 + 8 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} > 2^{k+1} - 1 \qquad \ldots \text{Tesis}$$

Si en la hipótesis se le suma el término 2^{k+1} en ambos lados, la desigualdad sigue siendo válida:

$$2 + 4 + 8 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} > 2^k - 1 + 2^{k+1}$$

evidentemente $2^{k+1} - 1 + 2^k > 2^{k+1} - 1$ y entonces por transitividad se cumple la tesis.

Q.E.D.

16. Demostrar la validez de:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi - \pi}{2}\right) = (-1)^{n+1} \quad , \qquad \forall\ n \in N$$

SOLUCION:

Por inducción matemática:

para $n = 1$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi - \pi}{2}\right) = (-1)^{1+1}$$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ lo cual es cierto.

Ahora, para $n = k$, se supone válida:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi - \pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} \qquad \ldots \text{ Hipótesis}$$

para $n = k + 1$ debe verificarse si la hipótesis es válida:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2(k+1)\pi - \pi}{2}\right) = (-1)^{k+2}$$

es decir:

$$\text{sen}\left(\frac{2k\pi + \pi}{2}\right) = (-1)^{k+2} \qquad \text{... Tesis}$$

Con el objeto de hacer iguales los miembros derechos de la hipótesis y de la tesis, se multiplica la hipótesis en ambos lados por (-1) :

$$-\text{sen}\left(\frac{2k\pi - \pi}{2}\right) = (-1)^{k+1}\ (-1)$$

$$-\text{sen}\left(\frac{2k\pi - \pi}{2}\right) = (-1)^{k+2}$$

Tomando en cuenta la identidad:

$$-\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ (\alpha + \pi)$$

en la expresión anterior:

$$-\text{sen}\left(\frac{2k\pi - \pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{2k\pi - \pi}{2} + \pi\right)$$

sustituyendo:

$$\text{sen}\left(\frac{2k\pi - \pi}{2} + \pi\right) = (-1)^{k+2}$$

$$\text{sen}\left(\frac{2k\pi - \pi + 2\pi}{2}\right) = (-1)^{k+2}$$

finalmente:

$$\text{sen}\left(\frac{2k\pi + \pi}{2}\right) = (-1)^{k+2}$$

Q.E.D.

17. Sea la expresión decimal $2.29838383\ldots = 2.29\overline{83}$ determinar un par de valores $a,b \in Z$, tales que:

$$\frac{a}{b} = 2.29838383\ldots = 2.29\overline{83}$$

SOLUCION:

Multiplicando en primer término ambos miembros de la ecuación anterior por 10^2, para que los dos dígitos anteriores al período pasen a la parte entera:

$$\frac{a}{b}\ 10^2 = 10^2\ (2.29838383\ldots)$$

$$\frac{a}{b}\ 10^2 = 229.838383\ldots \qquad \ldots (1)$$

Como el período consta de dos dígitos, se multiplicará la expresión (1) por 10^2.

$$\frac{a}{b}\ 10^4 = 22\ 983.8383\ldots \qquad \ldots (2)$$

Restando miembro a miembro la ecuación (1) de la (2), se tiene:

$$\frac{a}{b}\ 10^4 - \frac{a}{b}\ 10^2 = 22\ 754$$

Factorizando:

$$\frac{a}{b}\ (10^4 - 10^2) = 22\ 754$$

de donde:

$$\frac{a}{b} = \frac{22\ 754}{10^4-10^2} = \frac{22\ 754}{9\ 900} = \frac{11\ 377}{4\ 950}$$

$$\therefore \qquad \frac{a}{b} = \frac{11\ 377}{4\ 950} = 2.29\overline{83}$$

18. Determinar el conjunto de valores de x, $x \in \mathbb{R}$, para los cuales se satisface la siguiente desigualdad.

$$\frac{1}{2} + 3x < -\ 4x + \frac{1}{3}$$

SOLUCION:

Sumando $-\frac{1}{2}$ en ambos lados de la desigualdad, se tiene:

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 3x < -\ 4x + \frac{1}{3} + (-\frac{1}{2})$$

$$3x < -\ 4x - \frac{1}{6}$$

sumando $4x$ en ambos lados:

$$4x + 3x < -\ 4x - \frac{1}{6} + 4x$$

$$7x < -\frac{1}{6}$$

multiplicando en ambos lados por $\frac{1}{7}$, se tiene:

$$\frac{1}{7}\ (7x) < (-\frac{1}{6})\ \frac{1}{7}$$

$$x < -\frac{1}{42}$$

por lo tanto, el conjunto de valores de x que satisfacen a la desigualdad planteada es:

$$\left\{ x/x \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad x < -\frac{1}{42} \right\}$$

19. Obtener el conjunto de valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfacen la siguiente desigualdad.

$$\frac{2x - 1}{x + 2} < 5$$

SOLUCION:

Dado que $x + 2$ tiene que ser diferente de cero para evitar la indeterminación, entonces se considerará los siguientes dos casos:

CASO 1: $x + 2 > 0$

CASO 2: $x + 2 < 0$

Resolviendo cada uno de los casos:

CASO 1: si $x + 2 > 0 \implies x > -2$

multiplicando ambos lados de la desigualdad original por $x + 2$. Como se está considerando que $x + 2$ es positivo, entonces el sentido de la desigualdad no cambia.

$$(x + 2)\,\frac{2x - 1}{x + 2} < 5\,(x + 2)$$

$$2x - 1 < 5x + 10$$

sumando $(-2x)$ en ambos lados, se tiene:

$$(-2x) + 2x - 1 < 5x + 10 + (-2x)$$

$$-1 < 3x + 10$$

sumando -10 se tiene:

$$-10 - 1 < 3x + 10 + (-10)$$

$$-11 < 3x$$

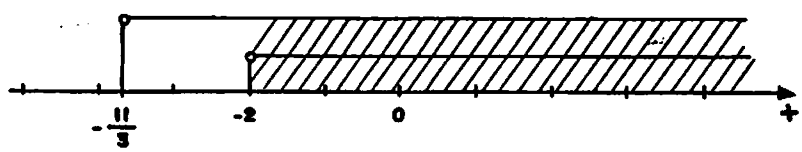
multiplicando por $\frac{1}{3}$ en ambos lados:

$$\frac{1}{3}(-11) < (3x)\frac{1}{3}$$

$$-\frac{11}{3} < x \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{11}{3}$$

La solución del CASO 1 se obtiene con la intersección de los conjuntos que definen las condiciones $x > -2$ y $x > -\frac{11}{3}$.

GRAFICAMENTE:



por lo que, la solución al CASO 1 es:

$$-2 < x < \infty$$

CASO 2: si $x + 2 < 0 \implies x < -2$

multiplicando la desigualdad original por $x + 2$, el sentido de la misma cambia, dado que para este caso $x + 2$ se está considerando negativo.

$$(x + 2)\,\frac{2x - 1}{x + 2} > 5(x + 2)$$

$$2x - 1 > 5x + 10$$

sumando $(-2x)$ y (-10) en ambos lados de la desigualdad, se tiene:

$$(-2x) + 2x - 1 + (-10) > (-2x) + 5x + 10 + (-10)$$

$$-11 > 3x$$

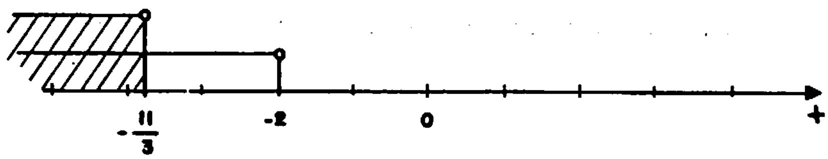
multiplicando por $\frac{1}{3}$, se tiene:

$$\frac{1}{3}\,(-11) > (3x)\,\frac{1}{3}$$

$$-\frac{11}{3} > x \qquad \implies \qquad x < -\frac{11}{3}$$

la solución al CASO 2 queda definida por las condiciones $x < -2$ y $x < -\frac{11}{3}$.

GRAFICAMENTE:



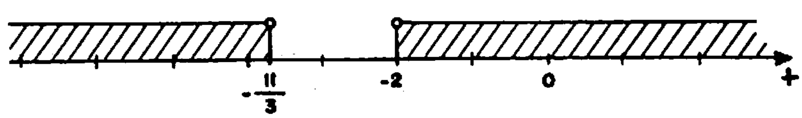
por lo que, la solución al CASO 2 es:

$$-\infty < x < -\frac{11}{3}$$

Finalmente, la solución a la desigualdad planteada estará dada por la unión de los conjuntos solución de los dos casos considerados, esto es:

$$\left\{ x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; -2 < x < \infty \right\} \cup \left\{ x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; -\infty < x < -\frac{11}{3} \right\}$$

o bien gráficamente:



20. Resolver la siguiente desigualdad:

$$x^2 - x - 2 > 0$$

SOLUCION:

Expresando al polinomio de segundo grado en forma factorizada, se tiene:

$$(x + 1)(x - 2) > 0$$

dado que el producto de factores debe ser positivo, se deben considerar los dos siguientes casos:

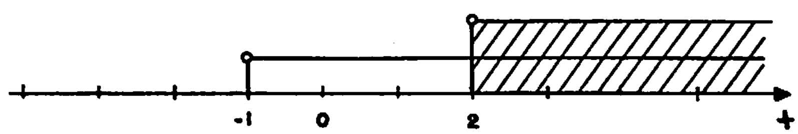
CASO 1: $x + 1 > 0$ y $x - 2 > 0$

de donde se tiene que:

$$x > -1 \quad y \quad x > 2$$

por consiguiente, la solución al CASO 1 será la intersección de ambas condiciones.

GRAFICAMENTE:



por lo tanto, la solución al CASO 1 es:

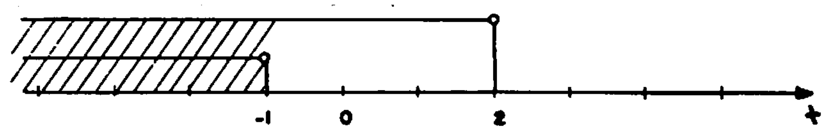
$$2 < x < \infty$$

CASO 2: $x + 1 < 0$ y $x - 2 < 0$

de donde:

$$x < -1 \qquad y \qquad x < 2$$

Definiendo la intersección de ambas condiciones, se tiene gráficamente:



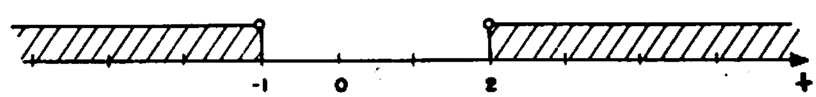
por lo que, la solución al CASO 2 es:

$$-\infty < x < -1$$

En consecuencia, la solución a la desigualdad planteada estará dada por la unión de las soluciones a los dos casos, esto es:

$$\{x/x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ 2 < x < \infty\} \cup \{x/x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ -\infty < x < -1\}$$

o bien gráficamente:



21. Resolver la siguiente desigualdad.

$$(3x + 2)^2 < x(x - 6)$$

SOLUCION:

Desarrollando en primera instancia el binomio y el producto indicado, se tiene:

$$9x^2 + 12x + 4 < x^2 - 6x$$

sumando en ambos lados $-x^2$ y $6x$, se obtiene:

$$9x^2 + 12x + 4 - x^2 + 6x < 0$$

$$8x^2 + 18x + 4 < 0$$

multiplicando por $\frac{1}{2}$:

$$4x^2 + 9x + 2 < 0$$

factorizando:

$$(4x + 1)(x + 2) < 0$$

Dado que el producto de factores debe ser negativo, ahora se considerarán los siguientes casos:

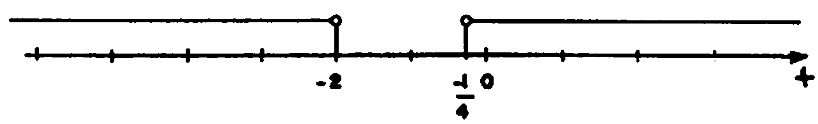
CASO 1: $4x + 1 > 0$ y $x + 2 < 0$

De donde:

$$x > -\frac{1}{4} \quad y \quad x < -2$$

Dado que no se define intersección con las dos condiciones, entonces se tiene:

GRAFICAMENTE:



por lo tanto, la solución al CASO 1 es el conjunto vacio.

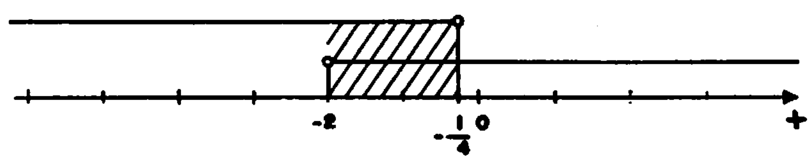
$$\{ \phi \}$$

CASO 2: $4x + 1 < 0$ y $x + 2 > 0$.

Entonces:

$$x < -\frac{1}{4} \quad y \quad x > -2$$

por lo que:



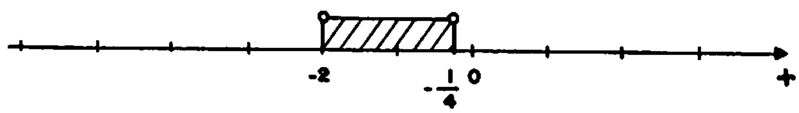
en consecuencia la solución al CASO 2 es:

$$-2 < x < -\frac{1}{4}$$

Finalmente, la solución a la desigualdad planteada será:

$$\{\phi\} \cup \left\{x/x \in \mathbb{R} \quad y \quad -2 < x < -\frac{1}{4}\right\}$$

o bien gráficamente:



22. Determinar el o los valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfacen la siguiente igualdad.

$$|x - 2| = |3 - 2x|$$

SOLUCION:

Se consideran los siguientes CASOS:

$$\text{CASO 1:} \quad x - 2 = 3 - 2x$$

$$\text{CASO 2:} \quad x - 2 = -(3 - 2x)$$

$$\text{CASO 3:} \quad -(x - 2) = 3 - 2x$$

CASO 4: $-(x - 2) = -(3 - 2x)$

Como se puede observar, la ecuación del CASO 1 es equivalente a la del CASO 4, al igual que la ecuación del CASO 2 con la del CASO 3, por lo consiguiente, de los cuatro casos, sólo se considerarán dos de ellos (CASO 1 y CASO 2).

CASO 1: $x - 2 = 3 - 2x$

sumando 2 en ambos lados:

$$x = 5 - 2x$$

de donde:

$$3x = 5$$

multiplicando por $\frac{1}{3}$:

$$x = \frac{5}{3}$$

CASO 2: $x - 2 = -(3 - 2x)$

simplificando el paréntesis:

$$x - 2 = -3 + 2x$$

agrupando términos, se tiene:

$$3 - 2 = 2x - x$$

$$\Rightarrow \quad x = 1$$

por lo que, los valores de x que satisfacen a la igualdad planteada son:

$$x = \frac{5}{3} \quad y \quad x = 1$$

23. Obtener el conjunto de valores de x, $x \in \mathbb{R}$, para los cuales se cumple la siguiente desigualdad:

$$|x^2 - 16| > 0$$

SOLUCION:

Como se puede observar, esta desigualdad se cumple para todo número real, excepto para 4 y -4, con los cuales el valor absoluto se hace cero. Para llegar a esta solución analíticamente se considerarán los siguientes dos casos:

$$\text{CASO 1:} \quad x^2 - 16 > 0$$

$$\text{CASO 2:} \quad x^2 - 16 < 0$$

CASO 1: $x^2 - 16 > 0$

Descomponiendo la diferencia de cuadrados como un producto de binomios conjugados, se tiene:

$$(x + 4)(x - 4) > 0$$

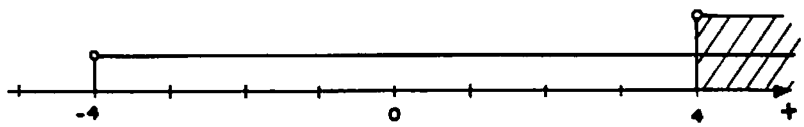
Resolviendo esta desigualdad en forma análoga a la planteada en el ejercicio resuelto número 20, se tiene:

a) Si $x + 4 > 0$ y $x - 4 > 0$

entonces:

$$x > -4 \quad y \quad x > 4$$

de donde la solución a este inciso, será:



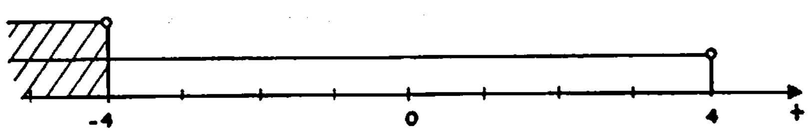
$$4 < x < \infty$$

b) Si $x + 4 < 0$ y $x - 4 < 0$

entonces:

$$x < -4 \quad y \quad x < 4$$

de donde la solución a este inciso será:



$$-\infty < x < -4$$

por lo tanto, la solución al CASO 1 , vendrá dada por la unión de las soluciones a los incisos a y b , esto es:

$$\{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; 4 < x < \infty\} \cup \{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; -\infty < x < -4\}$$

CASO 2: $x^2 - 16 < 0$

Lo cual se puede expresar como:

$$(x + 4)(x - 4) < 0$$

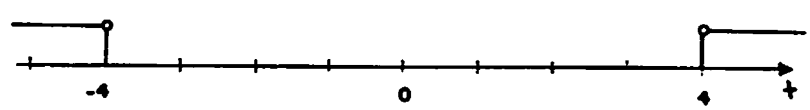
de donde se tiene:

c) Si $x + 4 < 0$ y $x - 4 > 0$

entonces:

$$x < -4 \quad y \quad x > 4$$

por lo que, la solución a este inciso será el conjunto vacio, como puede observarse en la siguiente gráfica:



como no existe intersección la solución será:

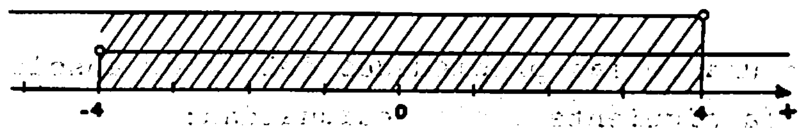
$$\{ \phi \}$$

d) Si $x + 4 > 0$ y $x - 4 < 0$

entonces:

$$x > -4 \quad y \quad x < 4$$

por lo que, la solución a este inciso será:



$$-4 < x < 4$$

de donde la solución al CASO 2 , vendrá dada por la unión de las soluciones a los incisos c y d , esto es:

$$\{\phi\} \cup \{x/x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ -4 < x < 4\}$$

Finalmente, la solución a la desigualdad planteada viene dada por la unión de las soluciones de los CASOS 1 y 2 , esto es:

$$\{x/x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ 4 < x < \infty\} \cup \{x/x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ -\infty < x < -4 \ \cup \{x/x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ -4 < x < 4\}$$

lo cual se puede expresar como:

$$\{x/x \in \mathbb{R} \ \text{ con } \ x \neq 4 \ \text{ y } \ x \neq -4\}$$

24. Determinar el conjunto de valores de x, $x \in \mathbb{R}$, para los cuales se cumple la desigualdad:

$$-|3x - 2| > -2$$

SOLUCION:

Multiplicando en ambos lados de la desigualdad por (-1) , se tiene:

$$|3x - 2| < 2$$

empleando una de las propiedades del valor absoluto se puede plantear la siguiente doble desigualdad:

$$-2 < 3x - 2 < 2$$

Resolviendo la primera de ellas, se tiene:

$$-2 < 3x - 2$$

de donde:

$$0 < 3x$$

y por lo tanto:

$$x > 0$$

Resolviendo la segunda desigualdad, se tiene:

$$3x - 2 < 2$$

de donde:

$$3x < 4$$

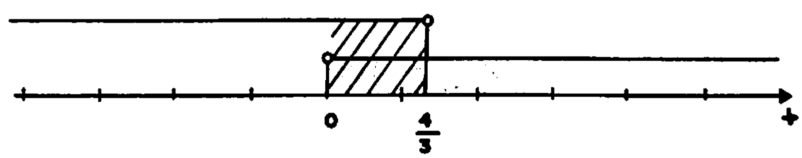
y por lo tanto:

$$x < \frac{4}{3}$$

Finalmente, la solución a la desigualdad planteada estará dada por la intersección de los conjuntos solución de la primera y segunda desigualdad, esto es:

$$\{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; 0 < x < \infty\} \cap \left\{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; -\infty < x < \frac{4}{3}\right\}$$

o bien gráficamente:



por lo tanto, el conjunto solución será:

$$\left\{x/x \in \mathbb{R} \;\; y \;\; 0 < x < \frac{4}{3}\right\}$$

25. Resolver la siguiente desigualdad:

$$\left|\frac{x}{2} - 1\right| \geq 5x + 1$$

SOLUCION:

Haciendo uso de una de las propiedades del valor absoluto, la desigualdad se puede plantear de la siguiente forma:

$$\frac{x}{2} - 1 \leq -(5x + 1) \quad ó \quad \frac{x}{2} - 1 \geq 5x + 1$$

Resolviendo la primera de estas desigualdades, se tiene:

$$\frac{x}{2} - 1 \leq - 5x - 1$$

sumando uno en ambos lados:

$$\frac{x}{2} \leq - 5x$$

multiplicando por dos, se tendrá:

$$x \leq - 10x$$

de donde:

$$11x \leq 0$$

y por lo tanto:

$$x \leq 0$$

Resolviendo la segunda desigualdad, se tiene:

$$\frac{x}{2} - 1 \geq 5x + 1$$

sumando uno en ambos lados:

$$\frac{x}{2} \geq 5x + 2$$

multiplicando por dos, se tiene:

$$x \geq 10x + 4$$

sumando $(-x)$ y (-4) en ambos lados, se obtiene:

$$-4 \geq 9x$$

o bien:

$$9x \leq -4$$

de donde:

$$x \leq -\frac{4}{9}$$

Finalmente, la solución a la desigualdad planteada, vendrá dada por la unión de los conjuntos solución de las dos desigualdades resueltas, esto es:

$$\{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } -\infty \leq x < 0\} \cup \left\{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } -\infty \leq x < -\frac{4}{9}\right\}$$

26. Obtener el conjunto de valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que satisfacen la siguiente desigualdad:

$$|4x - 1| < |2 - x|$$

SOLUCION:

Resolviendo esta desigualdad por dos procedimientos distintos, se tiene:

PRIMER PROCEDIMIENTO:

Multiplicando en ambos lados de la desigualdad por el recíproco de $|2 - x|$, se tendrá:

$$\frac{1}{|2 - x|}\,|4x - 1| < |2 - x|\,\frac{1}{|2 - x|}$$

simplificando:

$$\frac{|4x - 1|}{|2 - x|} < 1$$

por propiedades del valor absoluto, se puede escribir:

$$\left|\frac{4x - 1}{2 - x}\right| < 1$$

de donde se puede plantear la siguiente doble desigualdad:

$$-1 < \frac{4x - 1}{2 - x} < 1$$

1ª Desigualdad 2ª Desigualdad

resolviendo la primera desigualdad, se tiene:

PRIMERA DESIGUALDAD:

$$-1 < \frac{4x - 1}{2 - x}$$

Como se trata de un cociente donde aparece la variable en el denominador, se considerarán dos casos.

CASO 1: Sí $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$

Multiplicando en ambos lados de la desigualdad por $(2 - x)$, se tendrá:

$$(2 - x)(-1) < \frac{4x - 1}{2 - x}(2 - x)$$

simplificando:

$$x - 2 < 4x - 1$$

de donde se obtiene:

$$3x > -1$$

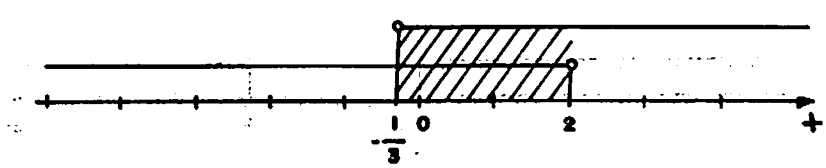
por lo tanto:

$$x > -\frac{1}{3}$$

en consecuencia, la solución al CASO 1 estará dada por:

$$\{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } x < 2\} \cap \left\{x/x \in \mathbb{R} \text{ y } x > -\frac{1}{3}\right\}$$

o bien gráficamente:



por lo que, la solución al CASO 1 es:

$$-\frac{1}{3} < x < 2$$

CASO 2: Si $2 - x < 0 \Rightarrow x > 2$

Multiplicando en ambos lados de la desigualdad por $(2 - x)$, se tendrá:

$$(2 - x)(-1) > \frac{4x - 1}{2 - x}(2 - x)$$

simplificando:

$$x - 2 > 4x - 1$$

de donde se obtiene:

$$3x < -1$$

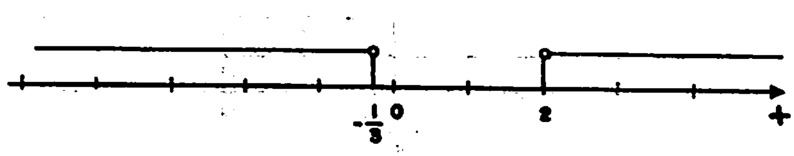
por lo tanto:

$$x < -\frac{1}{3}$$

En consecuencia, la solución al CASO 2 estará dada por:

$$\{x/x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ x > 2\} \cap \left\{x/x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ x < -\frac{1}{3}\right\}$$

o bien gráficamente:



por lo que, la solución al CASO 2 será el conjunto vacio:

$$\{\phi\}$$

Dado que la solución a la primera desigualdad se obtiene con la unión de las soluciones al CASO 1 y al CASO 2, entonces se tiene:

SOLUCION A LA 1ª DESIGUALDAD:

$$-\frac{1}{3} < x < 2$$

SEGUNDA DESIGUALDAD: $\frac{4x - 1}{2 - x} < 1$

Al igual que para la primera desigualdad, se considerarán los siguientes dos casos:

CASO 1: Si $2 - x > 0 \implies x < 2$

Multiplicando en ambos lados de la desigualdad por $(2 - x)$, se tendrá:

$$(2 - x)\,\frac{4x - 1}{2 - x} < 1\,(2 - x)$$

simplificando:

$$4x - 1 < 2 - x$$

de donde se obtiene:

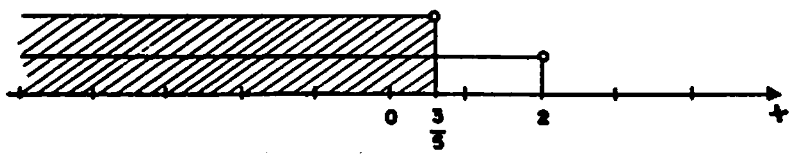
$$5x < 3$$

por lo tanto: $x < \frac{3}{5}$

En consecuencia, la solución al CASO 1 de la segunda desigualdad será:

$$\{x/x \in \mathbb{R} \quad y \quad x < 2\} \cap \{x/x \in \mathbb{R} \quad y \quad x < \tfrac{3}{5}\}$$

o bien gráficamente:



por lo que, la solución al CASO 1 es:

$$-\infty < x < \frac{3}{5}$$

CASO 2: Si $2 - x < 0 \implies x > 2$

Multiplicando en ambos lados de la desigualdad por $(2 - x)$, se tendrá:

$$(2 - x)\,\frac{4x - 1}{2 - x} > 1(2 - x)$$

simplificando:

$$4x - 1 > 2 - x$$

de donde se obtiene:

$$5x > 3$$

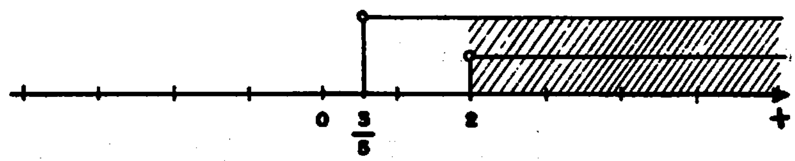
por lo tanto:

$$x > \frac{3}{5}$$

En consecuencia la solución al CASO 2 de la segunda desigualdad estará dada por:

$$\{x/x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ x > 2\} \cap \{x/x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ x > \tfrac{3}{5}\}$$

o bien gráficamente:



por lo que, la solución al CASO 2 es:

$$2 < x < \infty$$

Dado que la solución a la segunda desigualdad está dada por la unión de las soluciones al CASO 1 y al CASO 2, entonces se tiene:

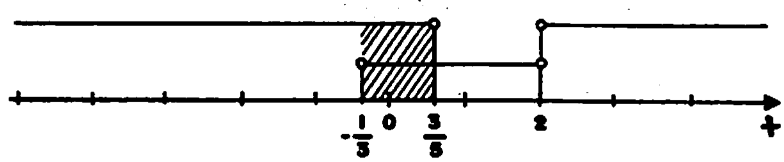
SOLUCION A LA $2^{\underline{a}}$ DESIGUALDAD

$$\left(-\infty < x < \frac{3}{5}\right) \cup \left(2 < x < \infty\right)$$

Finalmente, se tiene que la solución a la desigualdad originalmente planteada, estará dada por la intersección de los conjuntos solución de la $1^{\underline{a}}$ y $2^{\underline{a}}$ desigualdad, esto es:

$$\left[\left(-\frac{1}{3} < x < 2\right)\right] \cap \left[\left(-\infty < x < \frac{3}{5}\right) \cup \left(2 < x < \infty\right)\right]$$

o bien gráficamente:



por lo tanto, la solución será:

$$\left\{ x/x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ -\frac{1}{3} < x < \frac{3}{5} \right\}$$

SEGUNDO PROCEDIMIENTO:

Se tiene que la desigualdad a resolver es:

$$|4x - 1| < |2 - x|$$

Elevando al cuadrado en ambos lados de la desigualdad el sentido de la misma no cambia, por lo que se tiene:

$$|4x - 1|^2 < |2 - x|^2$$

por propiedades del valor absoluto se puede escribir:

$$|(4x - 1)^2| < |(2 - x)^2|$$

dado que en ambos lados de la desigualdad se tienen términos cuadráticos, éstos siempre serán positivos, por lo que los valores absolutos se pueden omitir, esto es:

$$(4x - 1)^2 < (2 - x)^2$$

desarrollando los binomios, se tiene:

$$16x^2 - 8x + 1 < x^2 - 4x + 4$$

de donde se obtiene:

$$15x^2 - 4x - 3 < 0$$

obteniendo las raíces:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 180}}{30} = \frac{4 \pm 14}{30} = \begin{cases} x_1 = \frac{3}{5} \\ \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

por lo que se puede escribir la desigualdad anterior en forma factorizada de la siguiente forma:

$$(x - \frac{3}{5})(x + \frac{1}{3}) < 0$$

para la solución de esta desigualdad se considerarán los siguientes dos casos:

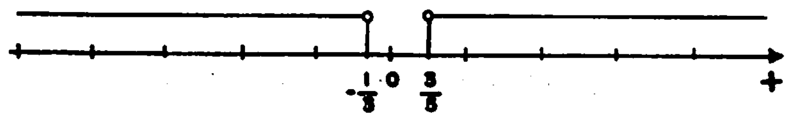
CASO 1: $\quad x - \frac{3}{5} > 0 \quad$ y $\quad x + \frac{1}{3} < 0$

Entonces:

$$x > \frac{3}{5} \quad \text{y} \quad x < -\frac{1}{3}$$

de donde la solución al CASO 1 estará dada por la intersección de ambas condiciones:

GRAFICAMENTE:



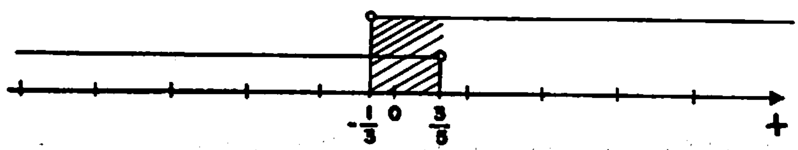
$$\therefore \quad \{\phi\}$$

CASO 2: $x - \frac{3}{5} < 0 \quad y \quad x + \frac{1}{3} > 0$

Entonces:

$$x < \frac{3}{5} \quad y \quad x > -\frac{1}{3}$$

definiendo gráficamente la intersección de ambas condiciones, se tiene:



por lo que, la solución al CASO 2 es:

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{3}{5}$$

En consecuencia, la solución a la desigualdad originalmente planteada, estará dada por la unión de las soluciones a los dos casos, esto es:

$$\{\phi\} \cup \left\{x/x \in \mathbb{R} \quad y \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{3}{5}\right\}$$

o bien:

$$x/x \in \mathbb{R} \quad y \quad -\frac{1}{3} < x < \frac{3}{5}$$

Resultado que coincide con el del primer procedimiento.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sean los conjuntos:

$A = \{ -17,-16,-15,-14,-13,-12,-11,-10,-9,-8,-7,-6,-5 \}$

$B = \{ -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13 \}$

$C = \{ \ldots -17,-16,-15,-14,-13,-12,-11,-10,-9,-8,-7,-6 \}$

$D = \{ -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13, \ldots \}$

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.

a) $A \cap B = B \cap C$

b) $A \cup D = (A \cap C) \cup B$

c) $(A - c) \cup (C \cup D) = A \cup B$

d) $A \cup C = (B \cup D)'$

2. Con los siguientes conjuntos:

$A = \{ 1,3,5,7,9 \}$

$B = \{ 1,2,3,4,5 \}$

$C = \{ x/x \text{ es una vocal} \}$

$U = A \cup B \cup C$

Obtener:

a) $(A \cup C)' \cap B$

b) $(A \cap C) \cup B$

y, dar la respuesta empleando diagramas de Venn.

3. Dados los siguientes conjuntos:

$A = \{ 3,4,5,6,7,8,9 \}$

$B = \{ \{3\}, \{4\}, \{5\} \}$

$C = \{ \{3,4,5,6,7,8,9\} \}$

$D = \{ p$ tal que p es un entero positivo mayor que 2 y menor que 10

Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar las respuestas.

a) $A \in C$

b) $\{ 3 \} \in A$

c) B   D

d) $C = D$

e) A   D

f) $A = D$

g) $D \not\subseteq C$

h) $\{3,4\} \subseteq D$

i) $A \subseteq C$

j) $A \cap B = \phi$

4. Sean los conjuntos de números N, Z, Q, Q' y $\mathbb{R}$. Considerando el conjunto $\mathbb{R}$ como el conjunto universo, determinar el resultado de:

a) $\left[(\mathbb{R}-Q') \cap (Z-N)\right] \cup \left[(\mathbb{R} \cap Z) - (Q'-N)\right] \cup \left[(Q' \cup Q) - (Z \cap N)\right]$

b) $\left[(Q-N) \cap (Q'-N)'\right] \cap \left[(\mathbb{R}-Z') \cap (Q \cup N)\right] \cap \left[(N \cap Z) \cup (N \cap Q)\right]$

5. Indicar con una V si la afirmación es verdadera o con una F si es falsa.

a) Si $a \in Z$, entonces $a \in Q$ . . . . ( )

b) $N \in \mathbb{R}$ . . . . ( )

c) $\{0\} = \phi$ . . . . ( )

d) $Z \subseteq Q$ . . . . ( )

e) $Q \cap Q' \not\subseteq \mathbb{R}$ . . . . ( )

6. En las siguientes proposiciones indicar mediante una V si dichas propuestas son ciertas o con una F en caso de ser falsas.

a) $\mathbb{R} - Q' = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b},\ a,\ b \in Z,\ b \neq 0 \right\}$ ( )

b) $Q \cap Q' = \mathbb{R}$ ( )

c) $Q \subseteq Z$ ( )

d) $\overline{Z} = Z \Leftrightarrow z \in Q$ ( )

e) $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$ ( )

f) $|x| = x \Leftrightarrow x < 0$ ( )

g) $(A \cap B)' = (A - B)' \cup (A - C)'$ ( )

h) $\pi \notin Q$ ( )

i) $Q \cup \phi = \phi$ ( )

j) $(A')' = A$ ( )

7. El origen del juego de ajedrez es muy incierto. La hipótesis más difundida es de que fue en la India donde se inventó. Aunada a esta teoría existe una leyenda en cuanto a un premio que el rey hindú Sheram o Shirham, insistió que el inventor recibiese por su genial creación. La recompensa solicitada consistía en una cierta cantidad de granos de trigo calculada de la siguiente manera: un grano de trigo en el primer cuadro, dos en el segundo, cuatro en el tercero, ocho en el cuarto, y así sucesivamente hasta completar los sesenta y cuatro cuadros. La leyenda habla del desaliento del monarca al escuchar semejante petición que, por *modesta*, era indigna de su generosidad. No obstante su disgusto, ordenó a sus matemáticos el cálculo de la cantidad demandada para proceder a su pago. La leyenda termina con la narración del tiempo extraordinario que utilizaron los sabios para dicho cálculo y de

la sorpresa del soberano al no poder pagar su deuda. Mucho se ha hablado de la cantidad fabulosa de trigo que se necesitaría para cubrir tal petición; para no repetir lo que se ha escrito, solamente se indicará que el número de granos era de:

$2^{64} - 1$, es decir 18 446 744 073 709 551 615 granos.

Si se considera que un metro cúbico de trigo tiene en promedio quince millones de granos y que la producción promedio anual de México es de 2 650 000 Ton. (Agenda Estadística 1979, SPP), nuestro país necesitaría de aproximadamente 464 años de producción para pagar.

Pero, dejando a un lado la leyenda y enfocando la atención en lo matemático, seguramente si los sabios de aquella época hubieran conocido el método de inducción matemática y hubieran observado el comportamiento de la suma de los granos en los primeros cuadros, hubieran podido establecer y demostrar la expresión siguiente, que les pudo dar el resultado para $n = 64$ ó aun para todo número natural.

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Como ejercicio, se pide demostrar la validez de esta expresión.

8. Utilizando el método de inducción matemática, demostrar:

a) $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \dfrac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}, \ \forall\, n \in N$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ para $n > 2$; $n \in N$

c) $\cos n\pi = (-1)^n$

d) $(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(r-1)!} a^{n-r+1}x^{r-1} +$

$+ \ldots + x^n \quad \forall n \in N$

e) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \ldots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1) \cdot 3^{n+1} + 3}{4} \quad ; \quad \forall n \in N$

f) $2a + 4a + 6a + \ldots + 2na = n(n + 1)a \; ; \quad \forall n \in N \quad a \in \mathbb{R}$

g) $3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + 3n(n + 1) = n(n + 1)(n + 2) \; ;$

$\forall n \in N$

h) $1 - 4 + 9 - 16 + \ldots + (-1)^{n+1} n^2 = (-1)^{n+1}(1 + 2 + 3 +$

$+ \ldots + n) \; ; \quad \forall n \in N$

i) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \frac{1}{3} n(n + 1)(n + 2) \; ;$

$\forall n \in N$

j) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n - 1)(2n + 1) = \frac{1}{3} n \; (4n^2 + 6n - 1) ;$

$\forall n \in N$

k) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n - 1)(3n + 2)} = \frac{n}{6n + 4} \; ; \; \forall n \in N$

l) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \; ; \quad \forall n \in N$

m) $1 \cdot 5 + 5 \cdot 9 + 9 \cdot 13 + \ldots + (4n - 3)(4n + 1) = \frac{1}{3} n(16n^2 + 12n -$

$- 13) ; \quad \forall n \in N$

n) $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + n \cdot 2^n = 1 + (n - 1) \cdot 2^n \; ;$

$\forall n \geq 2, \quad n \in N$

o) $(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2}$;

$\forall\ n \in N$

p) $a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + \left[a + (n-1)d\right] = \dfrac{n\left[2a + (n-1)d\right]}{2}$;

$\forall\ n \in N \quad a,\ d,\ \in \mathbb{R}$

9. Demostrar por inducción matemática que $10^{n+1} + 3\cdot 10^n + 5$ es divisible entre 9 para todo $n \in N$.

10. Demostrar, por inducción matemática, que un polígono de n lados tiene exactamente un número de diagonales igual a:

$$D = \frac{1}{2}\, n(n-3)$$

11. Demostrar la validez de la siguiente proposición haciendo uso del método de inducción matemática.

Si $a \neq 1$ entonces $1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} = \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$

12. Demostrar la validez de la siguiente proposición haciendo uso del método de inducción matemática.

$$\frac{1}{(1)(2)(3)} + \frac{1}{(2)(3)(4)} + \frac{1}{(3)(4)(5)} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

13. Demostrar por inducción matemática que:

$(n)(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ es divisible entre 12.

14. Demostrar, utilizando el método de inducción matemática que:

Si $n \in N$, entonces $\frac{2}{3}(2n^3 + 3n^2 + n) \in N$

15. Demostrar, por inducción matemática, que para todo $n \in N$, $a^n < b^n$ si $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $o < a < b$.

16. Demostrar, utilizando inducción matemática, que:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \ldots \cos 2^{n-1}x = \frac{\operatorname{sen} 2^n x}{2^n \operatorname{sen} x}$$

17. Demostrar la siguiente desigualdad, llamada la *Desigualdad de Bernoulli*, utilizando inducción matemática:

$$(1 + \ell)^n > 1 + n\ell$$

donde:

$$n \geqslant 2, \quad n \in N$$

$$\ell > 1, \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

18. Para cada uno de los siguientes incisos, obtener un par de valores $a, b \in Z$, tales que:

a) $\frac{a}{b} = 2.272727 \ldots = 2.\overline{27}$

b) $\frac{a}{b} = 3.936936 \ldots = 3.\overline{936}$

c) $\frac{a}{b} = 35.88533 \ldots = 35.885\overline{33}$

19. Para cada una de las siguientes desigualdades, obtener el conjunto de valores de x, $x \in \mathbb{R}$, que las satisfacen.

a) $\dfrac{1}{x+4} > 0$

b) $\dfrac{4-x}{x} + 6 > 14$

c) $\dfrac{4}{x-3} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{3-x}$

d) $\dfrac{3}{x+2} < \dfrac{2}{x-3}$

e) $\dfrac{x}{8} < \dfrac{2}{x}$

f) $0 > x^2 + 4x$

g) $(3x-1)(2x+4) > (3x-1)(x+5)$

h) $|x+9| = |6-2x|$

i) $|2x-3| = 4 - x$

j) $|\sqrt{2x}| < 4$

k) $\left|\dfrac{20}{x}\right| - 5 < 0$

l) $|x+2| \leq 4$

m) $\dfrac{2}{|x-1|} \leq 1$

n) $\left|\dfrac{2}{1+x}\right| \geq 1$

ñ) $\left|\dfrac{1}{x} - 3\right| < 6$

o) $|x + 1| < x$

p) $|3 - 2x| < |2 + x|$

q) $|5 - 3x| > |1 + x|$

r) $\dfrac{1}{+\sqrt{3 - x}} > 2$

s) $\dfrac{1}{+\sqrt{x}} > 0$

20. En una fábrica el tiempo que se requiere para armar una mesa es de 20 minutos y para una silla es de 30 minutos. La fábrica dispone de un mínimo de 126 horas o un máximo de 140 horas de trabajo al día. Si se producen 4 sillas por una mesa, obtenga:

a) Número máximo y mínimo de sillas que se pueden fabricar.

b) Número máximo y mínimo de mesas que se pueden fabricar.

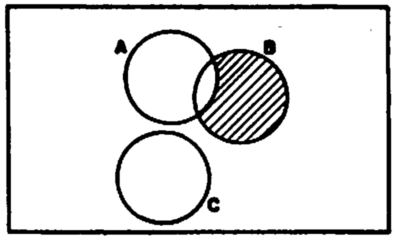
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

1. a) V

   b) F

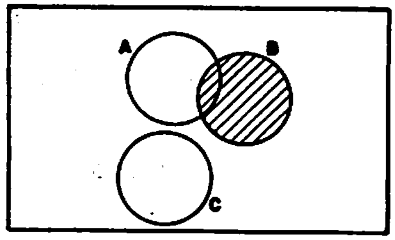
   c) F

   d) V



2. a) $(A \cup C)' \cap B = \{2, 4\}$

   b) $(A \cap C) \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} = B$



3. a) V

   b) F

   c) F

   d) F

   e) V

   f) V

   g) F

   h) V

i) F

j) V

4. a) IR

b) N

5. a) V

b) F

c) F

d) V

e) V

6. a) V

b) F

c) F

d) F

e) F

f) F

g) F

h) V

i) F

j) V

18. a) $\frac{75}{33}$

b) $\frac{437}{111}$

c) $\frac{13\ 457}{375}$

19. a) $x > -4$

b) $0 < x < \frac{4}{9}$

c) $(-\infty < x < 3) \cup (5 < x < \infty)$

d) $(-\infty < x < -2) \cup (3 < x < 13)$

e) $(-\infty < x < -4) \cup (0 < x < 4)$

f) $-4 < x < 0$

g) $(-\infty < x < \frac{1}{3}) \cup (1 < x < \infty)$

h) $x = -1$ ó $x = 15$

i) $x = -1$ ó $x = \frac{7}{3}$

j) $0 \leq x < 8$

k) $(-\infty < x < -4) \cup (4 < x < \infty)$

l) $-6 \leq x \leq 2$

m) $(-\infty < x \leq -1) \cup (3 \leq x < \infty)$

n) $-3 \leq x \leq -1$

ñ) $(-\infty < x < -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{9} < x < \infty)$

o) $\{ \phi \}$

p) $\frac{1}{3} \leq x \leq 5$

q) $3 < x < 1$

r) $\frac{11}{4} < x < 3$

s) $0 < x < \infty$

20. a) N° de sillas:

máx = 240
mín = 216

b) N° de mesas:

máx = 60
mín = 54

CAPITULO II NUMEROS COMPLEJOS

El primer asomo de la raíz cuadrada de un número negativo se localiza en la *Stereometría de Herón de Alejandría* (año 50), y más tarde en la *Aritmética de Diofanto* (año 275).

La historia de los números complejos ha ocasionado reacciones muy encontradas en quienes, a través de los tiempos, han tenido contacto con ellos.

Así se encuentra la negación de su existencia en Mahavira (año 850) y Bhaskara (año 1150), ante la imposibilidad de tener un número real que al elevarse al cuadrado diera como resultado un número negativo.

Pero ante la necesidad de crear unos números que respondieran a la verificación de ecuaciones cuadráticas del tipo

$x^2 + c = 0$, muchos estudiosos de la ciencia de las formas y de los números se dedicaron a este problema. Entre ellos están Gerolamo Cardano (1501-1576), Raphael Bombelli (1572), Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y William Rowan Hamilton (1805-1865).

Al hablar de *términos y símbolos*, Cardano habló de soluciones de la forma $5 + \sqrt{-15}$ como *cantidades sofisticadas*; Bombelli llamó a los números $+\sqrt{-n}$ y $-\sqrt{-n}$ como *piu di meno* y *meno di meno*; y fue Descartes (1637) quien contribuyó con los términos *real* e *imaginario*. Muchos de los escritores de los siglos XVII y XVIII hablaron de expresiones $a+b\sqrt{-1}$ como *cantidades imaginarias*. A Gauss se debe el nombre de *números complejos*, y el uso de "i" para $\sqrt{-1}$ se le reconoce a Euler en 1748. Cauchy sugirió los términos *conjugados* para $a + bi$ y $a - bi$ y *módulo* para $\sqrt{a^2 + b^2}$. Weierstrass utilizó el término *valor absoluto* y lo representó con $|a + bi|$, y Gauss bautizó a $\sqrt{a^2 + b^2}$ como *norma*.

Debe haber sido asombroso constatar que el número i , no era natural, tampoco positivo, negativo, fraccionario, algebraico, trascendente. En una palabra, no era real. Se sabía que todos los números reales podían ser representados por puntos situados sobre una recta, pero el número i no figuraba ahí. La representación gráfica de estos *números complejos* se debe a Wallis, Kuhn, Wessel, Truel, Buée, J.R. Argand, Gauss, Francais y Warren.

La fórmula, $e^{i\pi} = -1$ atribuida a De Moivre (1667-1757) y a Euler (1707-1783), asombro del mundo matemático pues relaciona la unidad de los números imaginarios, i , con la unidad de los reales, 1 , y los números trascendentes cargados de historia e y π . Esta expresión está grabada sobre una puerta del museo "*El Palacio del Descubrimiento*" en París.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Sean los números complejos:

$z_1 = 1 - i, \quad z_2 = -1 + i; \quad z_3 = -i, \quad z_4 = 1; \quad z_5 = 2 - i$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{z_3^2 - z_4}{z_1 z_2 - z_5}$

b) $\dfrac{z_3 z_4 - z_2}{(z_1 z_5 - z_3)^2}$

c) $\dfrac{z_1}{z_2} - (z_3 - z_4 + z_5)$

SOLUCION:

a) Sustituyendo valores:

$$\frac{z_3^2 - z_4}{z_1 z_2 - z_5} = \frac{(-i)^2 - 1}{(1-i)(-1+i) - (2-i)}$$

como $(-i)^2 = -1$ y $(1-i)(-1+i) = 2i$, entonces se tiene:

$$\frac{-1 - 1}{2i - (2-i)} = \frac{-2}{-2 + 3i}$$

para efectuar la división se multiplicará numerador y denominador por el conjugado del denominador, entonces:

$$\frac{-2}{-2 + 3i} \cdot \frac{-2 - 3i}{-2 - 3i} = \frac{4 + 6i}{4 + 6i - 6i - 9i^2} = \frac{4 + 6i}{4 + 9} = \frac{4}{13} + \frac{6}{13}\, i$$

por lo tanto:

$$\frac{z_3^2 - z_4}{z_1 z_2 - z_5} = \frac{4}{13} + \frac{6}{13} i$$

b) Sustituyendo valores y desarrollando se tiene:

$$\frac{z_3 z_4 - z_2}{(z_1 z_5 - z_3)^2} = \frac{(-i)(1) - (-1+i)}{\left[(1-i)(2-i) - (-i)\right]^2} = \frac{-i + 1 - i}{(2-i-2i+i^2+i)^2}$$

como $i^2 = -1$, entonces:

$$\frac{z_3 z_4 - z_2}{(z_1 z_5 - z_3)^2} = \frac{1 - 2i}{(1 - 2i)^2} = \frac{1 - 2i}{(1 - 2i)(1 - 2i)} = \frac{1}{1 - 2i}$$

multiplicando por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_3 z_4 - z_2}{(z_1 z_5 - z_3)^2} = \frac{1}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{1 + 2i}{1 - 4i^2} = \frac{1 + 2i}{5}$$

por lo tanto:

$$\frac{z_3 z_4 - z_2}{(z_1 z_5 - z_3)^2} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} i$$

c) $$\frac{z_1}{z_2} - (z_3 - z_4 + z_5) = \frac{1 - i}{-1 + i} - (-i - 1 + 2 - i) =$$

$$= \frac{1 - i}{-1 + i} - (1 - 2i)$$

Desarrollando el cociente se tiene:

$$\frac{z_1}{z_2} - (z_3 - z_4 + z_5) = \frac{1 - i}{-1 + i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - i} - (1 - 2i) =$$

$$= \frac{-1 - i + i + i^2}{1 - i^2} - (1 - 2i)$$

$$\frac{z_1}{z_2} - (z_3 - z_4 + z_5) = \frac{-2}{2} - (1 - 2i) = -1 - 1 + 2i = -2 + 2i$$

por lo tanto:

$$\frac{z_1}{z_2} - (z_3 - z_4 + z_5) = -2 + 2i$$

2. Transformar el número $z = 2 + 4i$ a la forma polar.

SOLUCION:

$r = \sqrt{2^2 + 4^2}$

$= \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$

$\theta = \text{ang tan } \frac{4}{2} = \text{ang tan } 2$

$= 63.4349°$

es decir:

$(63.4349 - 63) \times 60 = 26.0969'$

finalmente:

$(26.0969 - 26) \times 60 = 5.82''$

entonces:

$\theta = 63°26'5.82''$

$z = \sqrt{20}$ cis $63°26'5.82''$

3. Transformar el número $z = 3 + 4i$ a la forma trigonométrica.

SOLUCION:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} =$$

$$= \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{4}{3} =$$

$$\theta = 53.13°$$

$$\theta = 53°07'48''$$

finalmente:

$z = 5$ cis $53°07'48''$

4. Transformar el número $z = -3 + 4i$ a la forma polar o trigonométrica.

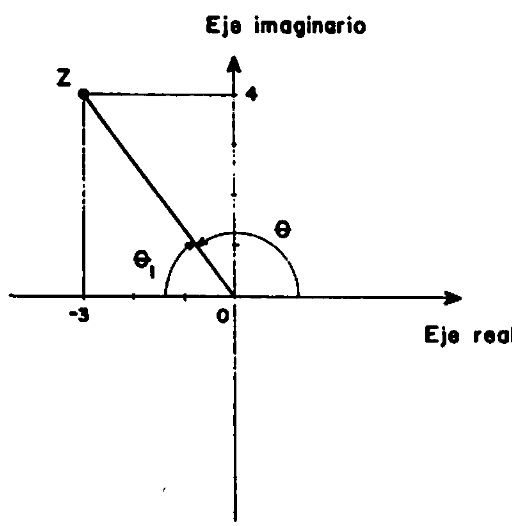
SOLUCION:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$$

$r = \sqrt{9 + 16}$

$r = 5$

Para calcular el argumento de este número, es necesario observar que su representación en el diagrama de Argand se localiza en el segundo cuadrante:



si se intenta calcular este argumento con una máquina calculadora, se tiene:

$$\theta_1 = \text{ang tan } \frac{4}{-3} = -53.13°$$

Esto se debe a que las calculadoras sólo dan el resultado de esta función con variaciones entre -90° y 90°. Entonces, el resultado dado por la calculadora es el ángulo θ_1 mostrado en la figura y el argumento principal es:

$$\theta = 180° - 53.13°$$

$$= 126.87°$$

es decir:

$$\theta = 126°52'12"$$

$$\therefore \quad z = 5 \text{ cis } 126°52'12"$$

5. Transformar el número $z = -3 - 4i$ a la forma polar.

SOLUCION:

$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$

$r = 5$

$\theta_1 = \text{ang tan } \frac{-4}{-3} = 53.13°$

Sin embargo, el número complejo z tiene abscisa y ordenada negativas, lo cual significa que su representación en el diagrama de Argand se localiza en el tercer cuadrante; entonces:

$$\theta = 180° + 53.13°$$

$$= 233.13°$$

$$\theta = 233°07'48"$$

$$\therefore \; z = 5 \text{ cis } 233°07'48"$$

6. Transformar el número $z = 3 - 4i$ a la forma polar.

SOLUCION:

$r = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$

$\quad = \sqrt{9 + 16}$

$r = 5$

$\theta_1 = \text{ang tan } \frac{-4}{3} = -53.13°$

Este resultado se obtuvo con calculadora, pero el número z se localiza en el cuarto cuadrante del diagrama de Argand, por tener abscisa positiva y ordenada negativa, así que el valor del argumento principal es:

$$\theta = 360° - 53.13°$$

$$\theta = 306.87°$$

es decir:

$$\underline{\theta = 306°52'12''}$$

entonces:

$$z = 5 \text{ cis } 306°52'12''$$

7. Transformar el número $z = 2 \text{ cis } 60°$ a la forma binómica o algebraica.

SOLUCION:

$a = 2 \cos 60° = 1$

$b = 2 \text{ sen } 60° = \sqrt{3}$

entonces:

$$z = 1 + \sqrt{3}\, i$$

8. Transformar el número $z = \sqrt[3]{2} \text{ cis } 202.5°$ a la forma binó mica.

SOLUCION:

$a = \sqrt[3]{2} \cos 202.5° = -1.16$

$b = \sqrt[3]{2} \text{ sen } 202.5° = -0.48$

finalmente:

$$z = -1.16 - 0.48i$$

Como puede observarse, el argumento principal de este número es $202.5°$; es decir, su representación geométrica se localiza en el tercer cuadrante, lo cual se comprueba al obtener los valores de a y b negativos.

9. Transformar el número $z = 4 \text{ cis } 720°$ a la forma algebraica.

SOLUCION:

$a = 4 \cos 720° = 4$

$b = 4 \text{ sen } 720° = 0$

$\therefore \quad z = 4$

Obsérvese que el argumento $720°$ no es el principal de este número. Al restarle 2×360 al argumento, da como resultado $0°$ como argumento principal, esto indica que su representación geométrica está sobre el eje real y se trata de un número real.

10. Efectuar las siguientes operaciones y expresar el resultado en la forma trigonométrica:

$$\frac{4\bar{z}_1 \cdot z_2^2}{z_3 + z_4}$$

si $\quad z_1 = i \qquad\qquad z_3 = \sqrt{8}\ \text{cis}\ 45°$

$\quad z_2 = 3 + i \qquad\qquad z_4 = 5\ \text{cis}\ 0°$

SOLUCION:

Para obtener el numerador de la fracción pedida se tiene:

$$\overline{z}_1 = -i$$

$$z_2^2 = (3 + i)\cdot(3 + i) = 9 + 6i + i^2$$

$$= 8 + 6i \quad \text{dado que} \quad i^2 = -1$$

es decir:

$$4\overline{z}_1 \cdot z_2^2 = (-4i)\cdot(8 + 6i)$$

$$= -32i - 24i^2$$

$$= 24 - 32i$$

Por otra parte, dado que en el denominador se pide una suma, se procede a convertir los números a la forma binómica:

Para z_3 : $\quad a = \sqrt{8}\cos 45° = \sqrt{8}\,\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}}$

$$a = 2$$

$$b = \sqrt{8}\ \text{sen}\ 45°$$

$$b = 2$$

$$\therefore \; z_3 = 2 + 2i$$

Para z_4 : $z_4 = 5$, pues el argumento es cero y ello indica que se trata de un número real.

Entonces:

$$z_3 + z_4 = 2 + 2i + 5 = 7 + 2i$$

finalmente:

$$\frac{4\bar{z}_1 \cdot z_2^2}{z_3 + z_4} = \frac{24 - 32i}{7 + 2i}$$

$$= \frac{24 - 32i}{7 + 2i} \cdot \frac{7 - 2i}{7 - 2i} =$$

$$= \frac{168 - 224i - 48i + 64i^2}{49 - 4i^2}$$

$$R = \frac{104 - 272i}{53}$$

Para expresar el resultado en la forma polar:

$$r = \sqrt{\left(\frac{104}{53}\right)^2 + \left(\frac{-272}{53}\right)^2} = 5.47$$

$$\theta = 360° - \text{ang tan} \frac{\frac{272}{53}}{\frac{104}{53}} = 290.92°$$

$$\therefore \quad R = 5.47 \text{ cis } 290.92°$$

11. Sea la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$, determinar y demostrar una fórmula que permita elevar esta unidad a cualquier exponente par.

SOLUCION:

Si se eleva i al cuadrado:

$$i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$$

ahora, al elevarlo a la cuarta potencia:

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

a la sexta potencia:

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (1) \cdot (-1) = -1$$

Como la tendencia al parecer, es la alternación de signos, se puede suponer que la expresión buscada es:

$$i^{2n} = (-1)^n \quad ; \quad \forall\, n \in N$$

Para efectuar su demostración, se utilizará inducción matemática:

Verificación para $n = 1$:

$$i^{2(1)} = (-1)^1$$

$$i^2 = -1 \quad \therefore \quad \text{sí se cumple.}$$

Se supone válida la expresión para $n = k$:

$$i^{2k} = (-1)^k \quad \text{... Hipótesis de inducción .}$$

Debe cumplirse para $n = k + 1$:

$$i^{2(k+1)} = (-1)^{k+1} \quad \text{... Tesis.}$$

Si en la hipótesis, supuestamente válida, se multiplica en ambos miembros por i^2 , seguirá siendo válida:

$$i^{2k} \cdot i^2 = (-1)^k \cdot i^2$$

Por leyes de los exponentes:

$$i^{2k+2} = (-1)^k \cdot i^2$$

$$i^{2(k+1)} = (-1)^k \cdot i^2$$

pero $i^2 = -1$ como se comprobó:

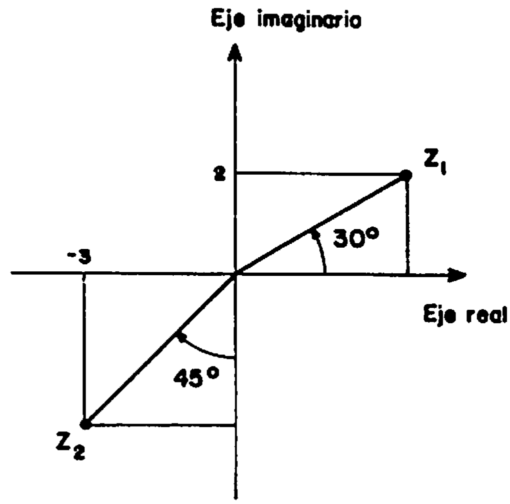
$$i^{2(k+1)} = (-1)^k \cdot (-1)$$

por leyes de los exponentes:

$$i^{2(k+1)} = (-1)^{k+1}$$

Q.E.D.

12. Obtener en forma trigonométrica el resultado de $z_1 \cdot z_2$, donde z_1 y z_2 son los números complejos que se muestran en la figura:



SOLUCION:

De la figura se observa:

Para z_1 :

$$\theta_1 = 30°$$

$$r_1 = \frac{2}{\text{sen } 30°} = 4$$

$$\therefore \quad z_1 = 4 \text{ cis } 30°$$

para z_2 : $\theta_2 = 270° - 45° = 225°$

$$r_2 = \frac{3}{\text{sen } 45°} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad z_2 = 3\sqrt{2} \text{ cis } 225°$$

entonces:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \text{ cis } (\theta_1 + \theta_2)$$

$$= (4)(3\sqrt{2}) \text{ cis } (30° + 225°)$$

$$= 12\sqrt{2} \text{ cis } 255°$$

13. Determinar un número complejo z , tal que multiplicado con $\sqrt{2}$ cis $315°$ sea igual a uno.

SOLUCION:

Si se hace $z = x + yi$ y como $\sqrt{2}$ cis $315° = 1 - i$, entonces se plantea la siguiente ecuación:

$$(1 - i)(x + yi) = 1 + 0i$$

efectuando el producto:

$$x + yi - ix - yi^2 = 1 + 0i$$

agrupando:

$$(x + y) + (-x + y)i = 1 + 0i$$

por igualdad de complejos se tiene:

$$x + y = 1 \quad \ldots \quad (1)$$

$$-x + y = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

resolviendo el sistema por sumas y restas:

$$\begin{array}{r} x + y = 1 \\ -x + y = 0 \\ \hline 2y = 1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{2}$$

sustituyendo $y = \frac{1}{2}$ en la ecuación (1) :

$$x + \frac{1}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

por lo que el número buscado es:

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i$$

14. Representar en el plano de Argand las soluciones de la ecuación:

$$z^{1/5} = (2 - 2i)^{1/3}$$

SOLUCION:

Para despejar z se elevará a la quinta potencia en ambos lados de la ecuación:

$$\left(z^{1/5}\right)^5 = \left[(2 - 2i)^{1/3}\right]^5$$

$$z = (2 - 2i)^{5/3} = \sqrt[3]{(2 - 2i)^5}$$

transformando $(2 - 2i)$ a su forma polar por facilidad de manejo, se tiene:

$$2 - 2i = \sqrt{8} \text{ cis } 315°$$

entonces:

$$z = \sqrt[3]{(\sqrt{8} \text{ cis } 315°)^5} = \sqrt[3]{(\sqrt{8})^5 \text{ cis } 5(315°)}$$

$$z = \sqrt[3]{(\sqrt{8})^5 \text{ cis } 1575}$$

considerando el argumento principal se tendrá:

$$z = \sqrt[3]{(\sqrt{8})^5 \text{ cis } 135°}$$

obteniendo la raíz cúbica:

$$z = \sqrt[3]{(\sqrt{8})^5} \text{ cis } \frac{135° + k(360°)}{3} = 4\sqrt{2} \text{ cis } \frac{135° + k(360°)}{3}$$

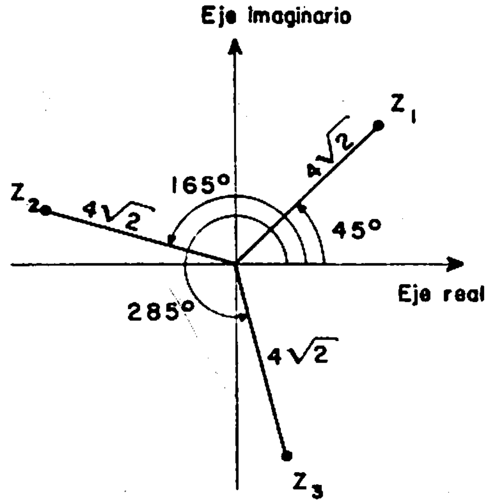
de donde los valores buscados son:

para $k = 0$: $z_1 = 4\sqrt{2} \text{ cis } \frac{135°}{3} = 4\sqrt{2} \text{ cis } 45°$

para $k = 1$: $z_2 = 4\sqrt{2} \text{ cis } \frac{135° + 360°}{3} = 4\sqrt{2} \text{ cis } 165°$

para $k = 2$: $z_3 = 4\sqrt{2} \text{ cis } \frac{135° + 720°}{3} = 4\sqrt{2} \text{ cis } 285°$

Representado en el plano de Argand, los números complejos obtenidos:



15. Resolver la siguiente ecuación en $\mathbb{C}$ y expresar el resultado en forma binómica, polar y exponencial.

$$\frac{(3 - 5i) + \sqrt{2}\, e^{\pi i/4}}{z^{1/4}} = 2 \text{ cis } 180°$$

SOLUCION:

Despejando a $z^{1/4}$ de la ecuación, se tendrá:

$$z^{1/4} = \frac{(3 - 5i) + \sqrt{2}\, e^{\pi i/4}}{2 \text{ cis } 180°}$$

transformando el número complejo $\sqrt{2}\, e^{\pi i/4}$ a su forma binómica para poder efectuar la suma del numerador, se tiene:

$$z^{1/4} = \frac{(3 - 5i) + (1 + i)}{2 \text{ cis } 180°} = \frac{4 - 4i}{2 \text{ cis } 180°}$$

como $2 \text{ cis } 180° = -2$, entonces:

$$z^{1/4} = \frac{4 - 4i}{-2} = -2 + 2i = \sqrt{8} \text{ cis } 135°$$

elevando a la cuarta potencia en ambos lados de la ecuación:

$$(z^{1/4})^4 = (\sqrt{8} \text{ cis } 135°)^4$$

$$z = (\sqrt{8})^4 \text{ cis } 4(135°) = 64 \text{ cis } 540°$$

considerando el argumento principal:

$$z = 64 \text{ cis } 180°$$

por lo tanto, el resultado pedido en sus tres formas de expresión será:

$$z = -64$$

$$z = 64 \text{ cis } 180°$$

$$z = 64\, e^{\pi i}$$

16. Obtener los valores de z , $z \in C$ para los cuales se satisface la siguiente ecuación:

$$iz^2 - 1 + z^2 \text{ cis } \frac{\pi}{2} = (1 \text{ cis } 180°) + \frac{1}{i} (e^{2\pi i})^4$$

SOLUCION:

Transformando los números complejos que intervienen en la ecuación a su forma binómica se tiene:

$$\text{cis}\ \frac{\pi}{2} = i$$

$$1\ \text{cis}\ 180° = -1$$

$$e^{2\pi i} = 1\ \text{cis}\ 360° = 1$$

sustituyendo en la ecuación se tendrá:

$$iz^2 - 1 + z^2(i) = -1 + \frac{1}{i}(1)^4$$

sumando uno en ambos lados de la ecuación y factorizando z^2, se obtiene:

$$z^2(i + i) = \frac{1}{i}(1)^4$$

de donde:

$$(2i)z^2 = \frac{1}{i}$$

por lo que:

$$z^2 = \frac{1}{2i^3}$$

como $i^3 = -i$ entonces:

$$z^2 = \frac{1}{-i}$$

multiplicando por el conjugado del denominador para efectuar el cociente se tiene:

$$z^2 = \frac{1}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-i^2} = \frac{i}{1} = i$$

por lo que:

$$z^2 = 1 \text{ cis } 90°$$

entonces:

$$z = \sqrt{1 \text{ cis } 90°} = 1 \text{ cis } \frac{90° + k(360°)}{2}$$

de donde los valores buscados son:

para $k = 0$: $z_1 = 1 \text{ cis } 45°$

para $k = 1$: $z_2 = 1 \text{ cis } 225°$

17. Resolver la siguiente ecuación y expresar el resultado en la forma polar:

$$(3 - 3i)\, x^2 - (1 + i)\, x + (-2 - 2i) = 0$$

SOLUCION:

De la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{1 + i \pm \sqrt{(1 + i)^2 - 4(3 - 3i)(-2 -2i)}}{2(3 - 3i)}$$

Se obtiene primero el resultado del radicando:

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2$$

$$= 2i$$

$$4(3 - 3i)(-2 - 2i) = 4(-6 - 6i + 6i + 6i^2)$$

$$= 4(-12)$$

$$= -48$$

entonces:

$$(1 + i)^2 - 4(3 - 3i)(-2 -2i) = 2i - (-48)$$

$$= 48 + 2i$$

Para extraer raíz cuadrada, se convierte este radicando a la forma trigonométrica:

$$r = \sqrt{(48)^2 + (2)^2} = 48.04$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{2}{48} = 2.39°$$

ahora:

$$(48.04 \text{ cis } 2.39°)^{1/2} = (48.04)^{1/2} \text{ cis } \frac{2.39° + 360k}{2}$$

$$k = 0, 1$$

para $k = 0$: $(48.04 \text{ cis } 2.39°)^{1/2} = 6.93 \text{ cis } 1.195°$

para $k = 1$: $(48.04 \text{ cis } 87.61°)^{1/2} = 6.93 \text{ cis } 181.195°$

En la fórmula, el utilizar el signo positivo es equivalente a considerar la raíz para $k = 0$, y el signo negativo equivale a la raíz para $k = 1$

Entonces:

$$x_1 = \frac{(1 + i) + (6.93 \text{ cis } 1.195°)}{6 - 6i}$$

convirtiendo a la forma binómica el segundo término del numerador:

$$x_1 = \frac{(1 + i) + (6.93 + 0.15i)}{6 - 6i}$$

$$= \frac{7.93 + 1.15i}{6 - 6i}$$

para efectuar el cociente, se transforman los dos números a la forma trigonométrica:

$$x_1 = \frac{8.01 \text{ cis } 8.25°}{8.49 \text{ cis } 315°}$$

$$= \frac{8.01}{8.49} \text{ cis } (8.25° - 315°)$$

$$= 0.94 \text{ cis } (-306.75°)$$

transformando a su argumento principal:

$$x_1 = 0.94 \text{ cis } 53.25°$$

por otra parte:

$$x_2 = \frac{(1 + i) + (6.93 \text{ cis } 181.195°)}{6 - 6i}$$

$$x_2 = \frac{(1 + i) + (-6.93 - 0.24i)}{6 - 6i}$$

$$= \frac{-5.93 + 0.76i}{6 - 6i}$$

$$= \frac{5.98 \text{ cis } 172.7°}{8.49 \text{ cis } 315°}$$

$$= 0.70 \text{ cis } (-142.3°)$$

$$x_2 = 0.70 \text{ cis } 217.7°$$

18. Determinar los valores de β_0 y β_1 que cumplen con:

$$(1 + i)^k = \beta_0 + (1 + i)\beta_1$$

donde k es una constante; $k \in N$.

SOLUCION:

Dado que con la fórmula de De Moivre es posible elevar un número complejo a una potencia natural cualquiera, se procede a convertir el número $1 + i$ a la forma trigonométrica:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{2}$$

$$\theta = \text{ang tan } \frac{1}{1}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

sustituyendo:

$$(\sqrt{2} \text{ cis } \frac{\pi}{4})^k = \beta_0 + (1 + i)\beta_1$$

$$2^{k/2} \text{ cis } \frac{\pi}{4} k = \beta_0 + \beta_1 + \beta_1 i$$

es decir:

$$2^{k/2}(\cos \frac{\pi}{4} k + i \text{ sen } \frac{\pi}{4} k) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_1 i$$

$$2^{k/2} \cos \frac{\pi}{4} k + (2^{k/2} \text{ sen } \frac{\pi}{4} k)i = (\beta_0 + \beta_1) + \beta_1 i$$

por igualdad de nũmeros complejos:

$$\beta_0 + \beta_1 = 2^{k/2} \cos \frac{\pi}{4} k \qquad \ldots (1)$$

$$\beta_1 = 2^{k/2} \text{ sen } \frac{\pi}{4} k \qquad \ldots (2)$$

sustituyendo (2) en (1) :

$$\beta_0 + 2^{k/2} \text{ sen } \frac{\pi}{4} k = 2^{k/2} \cos \frac{\pi}{4} k$$

despejando β_0 :

$$\beta_0 = 2^{k/2} \cos \frac{\pi}{4} k - 2^{k/2} \text{ sen } \frac{\pi}{4} k$$

finalmente:

$$\beta_0 = 2^{k/2} (\cos \frac{\pi}{4} k - \text{ sen } \frac{\pi}{4} k)$$

$$\beta_1 = 2^{k/2} \text{ sen } \frac{\pi}{4} k$$

19. Determinar los valores de β_0 y β_1 que cumplan:

$$e^{(2+3i)t} = \beta_0 + (2 + 3i)\beta_1$$

donde t es una constante, $t \in \mathbb{R}$.

SOLUCION:

El miembro izquierdo de la ecuación puede escribirse:

$e^{(2+3i)t} = e^{2t}\, e^{3ti}$ por leyes de los exponentes.

convirtiendo el número e^{3ti} a la forma polar:

$$e^{2t}\, e^{3ti} = e^{2t}\left[\cos 3t + i \text{ sen } 3t\right]$$

llevando este valor a la expresión original:

$$e^{2t}\left[\cos 3t + i \text{ sen } 3t\right] = \beta_0 + (2 + 3i)\,\beta_1$$

desarrollando:

$$e^{2t}\cos 3t + (e^{2t} \text{ sen } 3t)i = (\beta_0 + 2\beta_1) + (3\beta_1)i$$

por igualdad entre números complejos:

$$e^{2t}\cos 3t = \beta_0 + 2\beta_1 \qquad \ldots (1)$$

$$e^{2t} \text{ sen } 3t = 3\beta_1 \qquad \ldots (2)$$

de la ecuación (2) :

$$\beta_1 = \frac{e^{2t} \text{ sen } 3t}{3}$$

sustituyendo este valor en la ecuación (1) :

$$\beta_0 + \frac{2}{3}\,(e^{2t} \text{ sen } 3t) = e^{2t} \cos 3t$$

despejando:

$$\beta_0 = e^{2t} \cos 3t - \frac{2}{3}\, e^{2t} \text{ sen } 3t$$

finalmente:

$$\beta_0 = e^{2t}\,(\cos 3t - \frac{2}{3} \text{ sen } 3t)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{3}\, e^{2t} \text{ sen } 3t$$

20. Obtener los valores de r y θ que satisfacen la ecuación:

$$(r \text{ cis } \theta)^2 = \overline{z}_1\,(z_2 - z_3)$$

donde:

$$z_1 = \sqrt{8} \text{ cis } 315°$$

$$z_2 = 2\, e^{5\pi i/2}$$

$$z_3 = 25 + 27i$$

$$z_3 = 25 + 27i$$

SOLUCION:

Primeramente se trabajará con el miembro derecho:

Para:

$$z_1 = \sqrt{8} \text{ cis } 315°$$

$$a_1 = \sqrt{8} \cos 315°$$

$$a_1 = 2$$

$$b_1 = \sqrt{8} \text{ sen } 315°$$

$$b_1 = -2$$

$$\therefore \; z_1 = 2 - 2i \quad \Longrightarrow \quad \overline{z}_1 = 2 + 2i$$

Para:

$$z_2 = 2\, e^{5\pi i/2} = 2\, e^{\pi i/2}$$

$$a_2 = 2 \cos \frac{\pi}{2}$$

$$a_2 = 0$$

$$b_2 = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{2}$$

$$b_2 = 2$$

$\therefore\ z_2 = 2i$

sustituyendo:

$$(r \text{ cis } \theta)^2 = (2 + 2i)\left[2i - (25 + 27i)\right]$$

$$= (2 + 2i)(-25 - 25i)$$

$$= (-50 - 50i - 50i - 50i^2)$$

$$(r \text{ cis } \theta)^2 = -100i$$

si se convierte el segundo miembro a la forma trigonométrica:

$$(r \text{ cis } \theta)^2 = 100 \text{ cis } \frac{3}{2}\pi$$

elevando al cuadrado el primer miembro:

$$r^2 \text{ cis } 2\theta = 100 \text{ cis } \frac{3}{2}\pi$$

finalmente:

$$r = 10$$

$$\theta = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi \ ; \qquad n = 0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2\ , \ldots$$

si $n = 0$ se trata del argumento principal.

21. Demostrar que:

$$\text{sen } \theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}$$

SOLUCION:

El número complejo expresado en la forma de Euler $e^{\theta i}$, tiene como módulo $r = 1$ y argumento θ.

entonces:

$$e^{\theta i} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \qquad \ldots (1)$$

De la misma manera, el número $e^{-\theta i}$ puede expresarse:

$$e^{-\theta i} = \cos (-\theta) + i \operatorname{sen} (-\theta) \qquad \ldots (2)$$

pero:

$$\cos (-\theta) = \cos \theta \qquad \ldots (3)$$

por ser una función par.

Además:

$$\operatorname{sen} (-\theta) = -\operatorname{sen} \theta \qquad \ldots (4)$$

por ser una función impar.

Sustituyendo (3) y (4) en (2) :

$$e^{-\theta i} = \cos \theta - i \operatorname{sen} \theta \qquad \ldots (5)$$

restando la expresión (5) a la expresión (1) :

$$e^{\theta i} - e^{-\theta i} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta - (\cos \theta - i \operatorname{sen} \theta)$$

$$e^{\theta i} - e^{-\theta i} = \cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta - \cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta$$

reduciendo términos semejantes:

$$e^{\theta i} - e^{-\theta i} = 2i\ \text{sen}\ \theta$$

finalmente:

$$\text{sen}\ \theta = \frac{e^{\theta i} - e^{-\theta i}}{2i}$$

Q.E.D.

22. Obtener los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ para los cuales se cumple la siguiente igualdad:

$$(x + yi)^2 = (x - yi)^2$$

SOLUCION:

Desarrollando los cuadrados, se tiene:

$$x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x^2 - 2xyi + y^2i^2$$

agrupando partes reales y partes imaginarias:

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = (x^2 - y^2) - 2xy_i$$

por igualdad de complejos puede plantearse el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^2 - y^2 = x^2 - y^2 \qquad \ldots (1)$$

$$2xy = -2xy \qquad \ldots (2)$$

una de las soluciones al sistema será:

multiplicando la ecuación (2) por $\frac{1}{2y}$ se tiene:

$$\frac{1}{2y}(2xy) = \frac{1}{2y}(-2xy) \; ; \quad \text{con} \quad y \neq 0$$

$$x = -x$$

$$2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 0$$

sustituyendo $x = 0$ en la ecuación (1) :

$$-y^2 = -y^2$$

de donde: $y = y$

por lo tanto, esta igualdad se cumple para todo valor de $y \in \mathbb{R}$

Finalmente los valores buscados son:

$$x = 0$$

$$y \in \mathbb{R}$$

23. Obtenga los valores de x, y que satisfacen la siguiente ecuación, considerando el argumento principal.

$$e^{x+yi} - \frac{2 \text{ cis } 210° + \sqrt{3}}{e^{-3\pi i/2}} = 0$$

SOLUCION:

Como $2 \text{ cis } 210° = -\sqrt{3} - i$ y $e^{-3\pi i/2} = 1 \text{ cis } 90° = i$ entonces:

$$e^{x+yi} - \frac{(-\sqrt{3} - i) + \sqrt{3}}{i} = 0$$

simplificando:

$$e^{x+yi} - \frac{-i}{i} = 0$$

$$e^{x+yi} + 1 = 0$$

de donde:

$$e^{x+yi} = -1$$

$$e^{x+yi} = 1 \text{ cis } 180°$$

$$e^{x+yi} = 1e^{\pi i}$$

por igualdad de números complejos se tiene que:

$$x + yi = \pi i$$

por lo que:

$$x = 0$$

$$y = \pi$$

24. Determinar los valores de $x, y \in \mathbb{R}$, para los cuales se satisface la siguiente igualdad:

$$(x - 2i)\text{cis } 180° + (2 + yi)e^{\pi i/4} = 4e^{\pi i/2}$$

SOLUCION:

Transformando los números complejos que intervienen en la ecuación a su forma binómica, se tiene:

$$\text{cis } 180° = -1$$

$$e^{\pi i/4} = 1 \text{ cis } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i$$

$$4e^{\pi i/2} = 4 \text{ cis } 90° = 4i$$

sustituyendo en la ecuación:

$$(x - 2i)(-1) + (2 + yi)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\right) = 4i$$

desarrollando los productos:

$$-x + 2i + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\, i + \frac{y}{\sqrt{2}}\, i + \frac{y}{\sqrt{2}}\, i^2 = 4i$$

agrupando:

$$\left(-x + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right) + \left(2 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right) i = 4i$$

por igualdad de números complejos se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-x + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$2 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 4 \qquad \ldots (2)$$

de la ecuación (2) se obtiene:

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = 4 - 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}}$$

de donde:

$$y = 2\sqrt{2} - 2$$

por lo que, sustituyendo el valor de "y" en la ecuación (1), se obtiene:

$$-x + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2} - 2) = 0$$

$$-x + \frac{2}{\sqrt{2}} - 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$$

de donde:

$$x = \frac{4}{\sqrt{2}} - 2$$

por lo tanto, los valores pedidos son:

$$x = \frac{4}{\sqrt{2}} - 2$$

$$y = 2\sqrt{2} - 2$$

25. Obtener los valores de z, $z \varepsilon C$ que satisfacen la siguiente ecuación:

$$4z(2 + e^{\pi i}) = \frac{8i\ z + e^{\pi i/2}\ (1 - \sqrt{3}\ i)}{-2 \text{ cis } 270° - 0.5e^{3\pi i}\ z}$$

SOLUCION:

Transformando los números complejos que intervienen en la ecuación a su forma binómica, se tiene:

$$e^{\pi i/2} = i$$

$$e^{\pi i} = -1$$

$$e^{3\pi i} = -1$$

$$\text{cis } 270° = -i$$

sustituyendo en la ecuación:

$$4z(2 - 1) = \frac{8i\ z + i(1 - \sqrt{3}\ i)}{-2(-i) - 0.5(-1)z}$$

simplificando:

$$4z = \frac{8i\ z + i - \sqrt{3}\ i^2}{2i + 0.5z} = \frac{8i\ z + i + \sqrt{3}}{2i + 0.5z}$$

de donde se obtiene que:

$$4z(2i + 0.5z) = 8i\ z + i + \sqrt{3}$$

$$8i\ z + 2z^2 = 8i\ z + \sqrt{3} + i$$

restando $8iz$ en ambos lados de la ecuación:

$$2z^2 = \sqrt{3} + i$$

entonces:

$$z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ i$$

como $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ i = 1 \text{ cis } 30°$ entonces:

$$z^2 = 1 \text{ cis } 30°$$

de donde:

$$z = \sqrt{1 \text{ cis } 30°} = 1 \text{ cis } \frac{30° + k(360°)}{2}$$

por lo que, los valores pedidos son:

para $k = 0$: $z_1 = 1 \text{ cis } 15°$

para $k = 1$: $z_2 = 1 \text{ cis } 195°$

26. Calcular el o los valores de $z,\ z \in C$ que satisfacen

la siguiente ecuación:

$$z^{3/2}\, e^{\pi i/2} - (1 + i)(-1 - i) = -\,(4 + 3i)z^{3/2}$$

SOLUCION:

En primera instancia, se procede a despejar z de la ecuación:

$$z^{3/2}\, e^{\pi i/2} + (4 + 3i)z^{3/2} = (1 + i)(-1 - i)$$

factorizando $z^{3/2}$, se tiene:

$$z^{3/2}\left[e^{\pi i/2} + (4 + 3i)\right] = (1 + i)(-1 - i)$$

de donde:

$$z^{3/2} = \frac{(1 + i)(-1 - i)}{e^{\pi i/2} + (4 + 3i)}$$

transformando y efectuando operaciones:

$$z^{3/2} = \frac{-1 - i - i - i^2}{i + (4 + 3i)} = \frac{-\,2i}{4 + 4i}$$

como:

$$-2i = 2 \text{ cis } 270°$$

y

$$4 + 4i = \sqrt{32} \text{ cis } 45°,$$

entonces:

$$z^{3/2} = \frac{2 \text{ cis } 270°}{\sqrt{32} \text{ cis } 45°} = \frac{2}{\sqrt{32}} \text{ cis } (270° - 45°)$$

$$z^{3/2} = \frac{1}{\sqrt{8}} \text{ cis } 225°$$

elevando a la $\frac{2}{3}$ en ambos lados de la ecuación:

$$\left(z^{3/2}\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}} \text{ cis } 225°\right)^{2/3}$$

de donde:

$$z = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{\sqrt{8}} \text{ cis } 225°\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \text{ cis } 450°}$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{8} \text{ cis } 90°}$$

obteniendo la raíz cúbica se tiene:

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \text{ cis } \frac{90° + k(360°)}{3} = \frac{1}{2} \text{ cis } \frac{90° + k(360°)}{3}$$

para $k = 0$: $z_1 = \frac{1}{2} \text{ cis } \frac{90°}{3} = \frac{1}{2} \text{ cis } 30°$

para $k = 1$: $z_2 = \frac{1}{2} \text{ cis } \frac{90° + 360°}{3} = \frac{1}{2} \text{ cis } \frac{450°}{3} = \frac{1}{2} \text{ cis } 150°$

para $k = 2$: $z_3 = \frac{1}{2} \text{ cis } \frac{90° + 720°}{3} = \frac{1}{2} \text{ cis } \frac{810°}{3} = \frac{1}{2} \text{ cis } 270°$

por lo tanto, los valores pedidos son:

$$z_1 = \frac{1}{2} \text{ cis } 30°$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \text{ cis } 150°$$

$$z_3 = \frac{1}{2} \text{ cis } 270°$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Determinar y demostrar una fórmula que permita elevar a la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ a un exponente impar cualquiera.

2. Transformar los siguientes números a la forma trigonométrica o polar:

   a) $1 + i$

   b) i

   c) $1 - \sqrt{3}\, i$

   d) $-2 + 2\sqrt{3}\, i$

   e) $-3 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}\, i$

3. Transformar los siguientes números a la forma binómica o algebraica:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ cis 210°

   b) 16 cis 270°

   c) 1 cis 1845°

   d) 3 cis - 45°

   e) $\sqrt{3}$ cis 248.37°

4. Determinar:

$$z = \sqrt[3]{\frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_3}}$$

donde:

$$z_1 = 2 - 2i$$

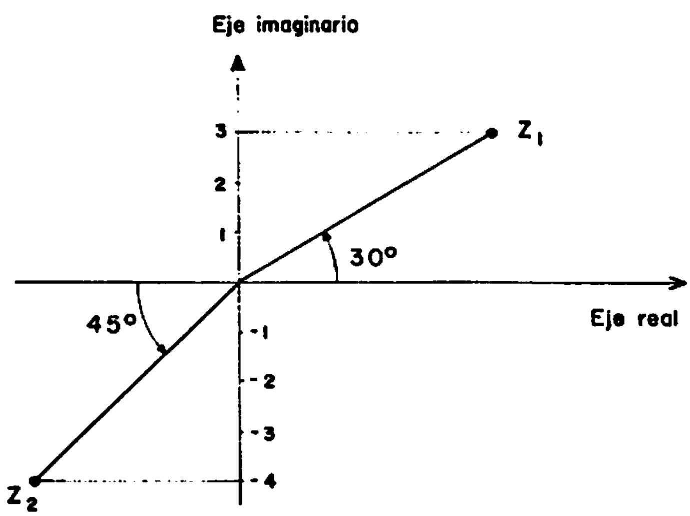
$$z_2 = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = 2e^{\pi i/4}$$

5. Resolver la ecuación:

$$(2 + i)x^2 - (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$$

6. Obtener en la forma de Euler el resultado de $z_1 \cdot z_2$, donde z_1 y z_2 son los números complejos que se muestran en la siguiente figura:



7. Obtener los valores de x , y que satisfacen la ecuación:

$$e^{x+iy} - \frac{2 \text{ cis } 300° + \sqrt{3}\, i}{e^{5\pi i/2}} = 0$$

8. Demostrar que:

$$\cos \theta = \frac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}$$

9. Determinar los valores de β_0 y β_1 que cumplen con

$$(1 + \sqrt{3}\, i)^k = \beta_0 + (1 + \sqrt{3}\, i)\beta_1$$

donde k es una constante que pertenece a los naturales

10. Determinar los valores de β_0 y β_1 que cumplen con

$$e^{(-3+4i)t} = \beta_0 + (-3 + 4i)\beta_1$$

donde t es una constante, $t \varepsilon R$

11. Dados los números complejos

$z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 2 - 2i$; $z_3 = -1$; $z_4 = 2 - 3i$

$$z_5 = i$$

efectuar las siguientes operaciones:

a) $(z_5)^{100}$

b) $\left[\dfrac{(z_1 - z_2)z_3z_2}{z_4 + z_5}\right]^2$

c) $\dfrac{z_1 - z_2 + z_3 - z_4 + z_5}{z_1\ z_2\ z_3\ z_4\ z_5}$

12. Obtener el o los valores de z, $z \in C$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt[3]{16z} = \dfrac{(\sqrt{8}\ e^{-5\pi i/4})(6 \text{ cis } 90°)(0 - i)}{\sqrt{8}\ e^{5\pi i/12}}$

b) $(\sqrt{3} + i) - e^{\pi i/6} = \dfrac{(1 \text{ cis } 30°)(16 \text{ cis } 30°)}{z^{3/2}}$

c) $z^{4/3}\ z_1 + z^{4/3}\ z_2 - z_3z_4 = 0$

Donde:

$z_1 = -2 + 4\sqrt{3}\ i$ $\qquad z_3 = 2 \text{ cis } 90°$

$z_2 = 6e^{2\pi i}$ $\qquad z_4 = 4e^{-3\pi i/2}$

d) $z^2 - iz + e^{\pi i} = 0$

e) $\dfrac{(4 + 4i)(8e^{\pi i/2})}{\sqrt{2} \text{ cis } 270°+5\sqrt{2}i} = z^2(\sqrt{2} + \sqrt{2}\ i)$

f) $z^{3/2}(2 \text{ cis } 270°)(e^{\pi i}) = \dfrac{4e^{-\pi i/2}}{2 \text{ cis } 270°} + z^{3/2}(-2 + 4 \text{ cis } 90°)$

g) $z^{3/2}\ z_1 - z^{3/2}\ z_2 + z_3z_2 - z_3z_1 = z_4$

donde:

$$z_1 = -4 + 3i \qquad z_3 = 4 + 4i$$

$$z_2 = -3 + 2i \qquad z_4 = 8e^{\pi i/2}$$

h) $$\frac{-\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right) \text{cis } 45°}{z^{3/4}\left[\text{cis } 60° + e^{\pi i/3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\right)\right]} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$$

i) $$(-0.5 \text{ cis } 540°)z - 2e^{3\pi i/2} = \frac{\text{cis } 90°(1 - \sqrt{3}\, i) + 8i\, z}{4z(\text{cis } 180° + 2)}$$

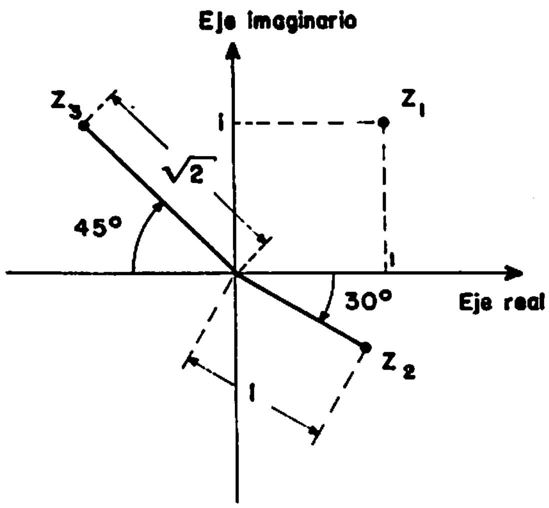
13. Obtener los valores de m y n que satisfacen la siguiente igualdad:

$$(3 \text{ cis } 60°)m - 2n\, e^{5\pi i/2} = 2 - 3i$$

14. Dados $z_1 = 4 \text{ cis } \theta_1$ y $z_2 = \gamma_2 \text{ cis}(-45°)$ obtener θ_1 y γ_2 si se tiene que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1.5\sqrt{2}} + \frac{2 + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\, i$$

15. Con los números complejos que se ilustran en el siguiente diagrama de Argand,



calcular el valor de z, $z \in C$ que satisface la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{(\bar{z}_2)^6}{z_2} + z_1\right] z_2 z_3 = z_1 z_2 z_3 - z z_3$$

16. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(1 + i)z_1 - z_2 = 0$$

$$iz_1 + z_2 = 3 - i$$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS:

1. $i^{(2n-1)} = (-1)^{n-1}\, i \quad ; \qquad \forall\, n \in N$.

2. a) $\sqrt{2}$ cis 45°

   b) cis 90°

   c) 2 cis 300°

   d) 4 cis 120°

   e) 3.67 cis 215.26°

3. a) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\, i$

   b) $-16i$

   c) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i$

   d) $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\, i$

   e) $-0.639 - 1.61\, i$

4. $z = \sqrt{2}$ cis 40°

   $z = \sqrt{2}$ cis 160°

   $z = \sqrt{2}$ cis 280°

5. $x_1 = 1 - i$

$x_2 = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}\, i$

6. $z_1 \cdot z_2 = 24\sqrt{2}\; e^{12\pi i/17}$

7. $x = 0$

$y = \frac{3}{2}\pi \pm 2n\pi \; ; \quad n = 0, \;\; \pm 1 \;, \;\; \pm 2 \;, \;\; \pm 3 \;, \; \ldots$

9. $\beta_0 = \frac{2^k}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{3} k - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} k \right)$

$\beta_1 = \frac{2^k}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} k$

10. $\beta_0 = \frac{e^{-3t} \cos 4t + 3e^{-3t} \operatorname{sen} 4t}{4}$

$\beta_1 = \frac{e^{-3t} \operatorname{sen} 4t}{4}$

11. a) $(z_5)^{100} = 1$

b) $-1 - 4i$

c) $\frac{386}{2197} - \frac{20}{2197}\, i$

12. a) $z = 13.5 \text{ cis } 180°$

b) $z_1 = \sqrt[3]{256} \text{ cis } 20°$

$z_2 = \sqrt[3]{256} \text{ cis } 140°$

$z_3 = \sqrt[3]{256} \text{ cis } 260°$

c) $z_1 = i$

$z_2 = -1$

$z_3 = -i$

$z_4 = 1$

d) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

$z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

e) $z_1 = 2 \text{ cis } 0°$

$z_2 = 2 \text{ cis } 180°$

f) $z_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ cis } 30°$

$z_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ cis } 150°$

$z_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ cis } 270°$

g) $z_1 = 4 \text{ cis } 0°$

$z_2 = 4 \text{ cis } 120°$

$z_3 = 4 \text{ cis } 240°$

h) $z_1 = 1 \text{ cis } 0°$

$z_2 = 1 \text{ cis } 120°$

$z_3 = 1 \text{ cis } 240°$

i) $z_1 = 1 \text{ cis } 15°$

$z_2 = 1 \text{ cis } 195°$

13. $m = \frac{4}{3}$

$n = \sqrt{3} + \frac{3}{2}$

14. $\theta_1 = 60°$

$r_2 = 2.16$

15. $z = 1$

16. $z_1 = \frac{1}{5} - \frac{7}{5} i$

$z_2 = \frac{8}{5} - \frac{6}{5} i$

CAPITULO III POLINOMIOS

La palabra polinomio está compuesta por los vocablos poli (del griego polys que significa mucho, pluralidad) y nomio (del griego nómos que significa división). Es decir una expresión, en este caso algebraica, que consta de más de un término.

En la hierática egipcia del Papiro de Ahmes en el año 1550 a.C., ya se habla de una cantidad desconocida o incógnita, cuyo valor debe encontrarse para poder resolver una ecuación de primer grado.

En el año 275 de esta era, Diofanto de Alejandría fue el primero en desarrollar un método de simbolismos para las potencias de expresiones algebraicas. En sus trabajos propuso la ecuación con dos miembros y el signo igual.

A partir de este método griego se basaron los árabes y persas para desarrollar los suyos; asimismo los chinos e hindúes tuvieron métodos para escribir ecuaciones.

Por otra parte, Bhaskara en el año 1150 encontró una representación para una ecuación de segundo grado.

En manuscritos de la Edad Media ya se reconocen letras para representar cantidades algebraicas en el estudio de las ecuaciones. Entre los científicos que trabajaron en el desarrollo de simbolismos para ecuaciones, desde finales del siglo XV hasta finales del siglo XVII, se pueden citar a Pacioli en 1494, Vander Hoecke en 1514, Ghaligai en 1521, Rudolff en 1525, Cardano en 1545, Sheubel en 1551, Tartaglia en 1556, Buteo en 1559, Stevin en 1585, Ranus y Schoner en 1586, Viète en 1590, Clavius en 1608, Girard en 1629, Oughtred en 1631, Herigone en 1534, Descartes en 1637 y Wallis en 1693.

Posiblemente el primero en igualar a cero el segundo miembro de una ecuación polinomial fue el matemático escocés Napier, y el primero en clasificar las ecuaciones de acuerdo con su grado fue Khayyam en el siglo XII.

Si se habla de ecuaciones cuadráticas o de segundo grado, se puede citar a los griegos, quienes fueron capaces de resolver algunos casos, mediante métodos geométricos. Euclides cita en sus obras problemas que involucran este tipo de ecuaciones.

En la India quienes estudiaron con mayor éxito las ecuaciones cuadráticas fueron Ayabhata, Brahmagupta, Mahauira y Sridhara en los siglos VI, VII, IX y XI, respectivamente.

Asimismo, el matemático persa Al-Khowarizm en el siglo IX utilizó métodos generales para resolver la ecuación cuadrática

$x^2 + px = q$, expresión en la que también trabajó Khayyam siglos más tarde.

El primer tratamiento importante para la solución de ecuaciones cuadráticas y de otros tipos utilizando la factorización, se encuentra en el Artis Analyticae Praxis, del matemático inglés Harriot y que se publicó en 1631.

La expresión utilizada hoy en día para resolver una ecuación cuadrática se basa en un método que usa determinantes y que se atribuye a Euler y Bezout.

La más antigua ecuación cúbica o de tercer grado se debe posiblemente a Menaechmus, contemporáneo de Platón y discipulo de Eudoxo. Otras referencias antiguas de ecuaciones cúbicas se tienen en algunos problemas del griego Arquímedes y del persa Khayyman.

En la Edad Media quienes más estudiaron el caso de la ecuación cúbica fueron los italianos Fibonacci, Pacioli, Cardano, Tartaglia y Petri, el alemán Rodolff y el francés Viète.

El primer intento infructuoso de resolver una ecuación de cuarto grado lo efectuaron los árabes. Siglos más tarde, Ferrari en Italia propuso un método de solución que Cardano publicó en su Ars Magna y que fue utilizado por Petri. Viète y Descartes también trabajaron en la solución de una ecuación de cuarto grado.

Euler y posteriormente Lagrange intentaron resolver una ecuación de quinto grado, reduciéndola a una de cuarto grado; sin embargo fracasaron. En 1803, el físico italiano Ruffini fue el primero en demostrar que una ecuación de quinto grado no se puede resolver por métodos algebraicos.

Actualmente la teoría de ecuaciones se sitúa a partir de los matemáticos Abel (noruego) y Galois (francés), quienes demostraron que las raíces de una ecuación de quinto grado o mayor no pueden ser expresadas en términos de los coeficientes de la ecuación por medio de radicales.

La ley de los signos, que asocia los tipos de raíces para una ecuación, con los cambios de signo para sus coeficientes, fue conocida por Cardano, pero su justificación plena se le atribuye a Harriot y, ciertamente, también a Descartes.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Dadas las siguientes expresiones, indicar si son o no polinomios; en caso negativo decir por qué; en caso afirmativo determinar su grado.

a) $p(x) = 7x^7 - 5x^6 - 2x^5 + 8x^4 + 3x^3 - 10x^2 + x - 4$

b) $f(\cos\theta) = 1.71\cos^3\theta - 3.14\cos^2\theta + 8.25\,\text{sen}^2\,\theta - 4.84\cos\theta$

c) $h(x) = x^3 - 2x^{-2} + 4x - 7$

d) $f(y) = 5y^6 - 7y^5 - 3y^4 + 2y^3$

e) $3x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$

f) $m^2 = 4x^5 - 8x^3 - 7x^2 + 6x + 5$

g) $q(x) = \dfrac{2x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x + 4}$

h) $g(x) = 3x^0 + 8x - 7x^2$

i) $\alpha(x) = -4 + 6x^5 + 2x^3 - 5x + 8x^2 + 6x^4$

SOLUCION:

a) Sí es un polinomio $gr(p) = 7$

b) Sí es un polinomio con variable independiente $\cos\theta$, ya que puede escribirse:

$$f(\cos\theta) = 1.71\cos^3\theta - 3.14\cos^2\theta + 8.25(1 - \cos^2\theta) - 4.84\cos\theta$$

$$= 1.71\cos^3\theta - 3.14\cos^2\theta + 8.25 - 8.25\cos^2\theta - 4.84\cos\theta$$

finalmente:

$$f(\cos\theta) = 1.71\cos^3\theta - 11.39\cos^2\theta - 4.84\cos\theta + 8.25$$

$$gr(f) = 3$$

c) No es un polinomio por tener un término con exponente negativo.

d) Sí es un polinomio $gr(f) = 6$

e) No es un polinomio por no ser una función.

f) No es un polinomio por no ser una función.

g) No es un polinomio, es un cociente de polinomios y $x + 4$ no es factor del dividendo.

h) Sí es un polinomio $gr(g) = 2$

i) Sí es polinomio, aunque sus términos están desordenados; ordenando:

$$\alpha(x) = 6x^5 + 6x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 5x - 4$$

$$gr(\alpha) = 5$$

2. Determinar los valores de A, B y C para que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ sean iguales:

$$p(x) = 4x^2 + 14x + 8$$

$$q(x) = A(3x^2 + 2x + 1) + B(x^2 + 1) + C(-x^2 + 4x + 1)$$

SOLUCION:

$$4x^2 + 14x + 8 = A(3x^2 + 2x + 1) + B(x^2 + 1) + C(-x^2 + 4x + 1)$$

Para que dos polinomios sean iguales, sus coeficientes correspondientes deben ser iguales, desarrollando:

$$4x^2 + 14x + 8 = 3Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + B - Cx^2 + 4Cx + C$$

agrupando términos semejantes:

$$4x^2 + 14x + 8 = (3A + B - C)x^2 + (2A + 4C)x + (A + B + C)$$

entonces:

$$3A + B - C = 4 \qquad \ldots (1)$$

$$2A + 4C = 14 \qquad \ldots (2)$$

$$A + B + C = 8 \qquad \ldots (3)$$

Para resolver el sistema, tomando en cuenta que en la ecuación (2) no interviene B, se eliminará B de las ecuaciones (1) y (3); así que, restando (3) a (1):

$$\begin{array}{r} 3A + B - C = 4 \\ -(A + B + C) = -8 \\ \hline 2A - 2C = -4 \end{array} \qquad \ldots(4)$$

despejando 2A de (4) y sustituyendo en (2) :

$$2C - 4 + 4C = 14$$

reduciendo términos semejantes:

$$6C = 18$$

entonces:

$$C = 3$$

sustituyendo este valor en (4) :

$$2A = 2(3) - 4$$

$$\therefore \quad A = 1$$

Sustituyendo los valores de A y C en (3) :

$$1 + B + 3 = 8$$

despejando:

$$B = 4$$

finalmente:

$$A = 1$$

$$B = 4$$

$$C = 3$$

3. Determinar los valores de A, B, C, D y E , de tal manera que se cumpla la igualdad:

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 3}{(x + 1)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + x + 1)^2}$$

SOLUCION:

Obsérvese que este ejercicio es parte del método de descomposición en fracciones parciales, comúnmente empleado en integración.

Multiplicando ambos miembros por $(x + 1)(x^2 + x + 1)^2$:

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 3 = A(x^2 + x + 1)^2 + (Bx + C)(x + 1)(x^2 + x + 1) +$$

$$+ (Dx + E)(x + 1) \qquad \ldots \quad (1)$$

si se da a x el valor -1 :

$$-1 + 4 - 5 + 3 = A(1 - 1 + 1)^2 \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

desarrollando ahora la ecuación (1) :

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 3 = A(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1) +$$

$$+ (Bx + C)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) + Dx^2 + Dx + Ex + E$$

agrupando términos y tomando en cuenta que $A = 1$:

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 3 = (1 + B)x^4 + (2 + 2B + C)x^3 +$$

$$+ (3 + 2B + 2C + D)x^2 + (2 + B + 2C + D + E)x + (1 + C + E)$$

por igualdad de polinomios:

$$0 = 1 + B \qquad \ldots \quad (2)$$

$$1 = 2 + 2B + C \qquad \ldots \quad (3)$$

$$4 = 3 + 2B + 2C + D \qquad \ldots \quad (4)$$

$$5 = 2 + B + 2C + D + E \qquad \ldots \quad (5)$$

$$3 = 1 + C + E \qquad \ldots \quad (6)$$

de (2) :

$$B = -1$$

tomando en cuenta este valor en (3) :

$$C = 1$$

sustituyendo en (6) y despejando:

$$E = 1$$

finalmente de (5) :

$$D = 1$$

4 Demostrar que el polinomio $p(x) = x^2 + (a + bi)x + c + di$ tiene una raíz real cuando $abd = d^2 + b^2c$. ¿En qué caso el polinomio tiene dos raíces reales?

SOLUCION:

Sea $x_1 \in R$ una raíz del polinomio, entonces:

$$x_1^2 + (a + bi)\, x_1 + c + di = 0$$

desarrollando:

$$x_1^2 + ax_1 + bx_1 i + c + di = 0$$

factorizando:

$$(x_1^2 + ax_1 + c) + (bx_1 + d)i = 0$$

Por igualdad de números complejos:

$$x_1^2 + ax_1 + c = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$bx_1 + d = 0 \qquad \ldots \quad (2)$$

de la ecuación (2) :

$$x_1 = -\frac{d}{b}$$

llevando este valor a (1) :

$$-\left(\frac{d}{b}\right)^2 + a \ -\left(\frac{d}{b}\right) + c = 0$$

desarrollando:

$$\frac{d^2}{b^2} - \frac{ad}{b} + c = 0$$

multiplicando por b^2 toda la expresión:

$$d^2 - abd + b^2c = 0$$

finalmente:

$$abd = d^2 + b^2c$$

Q.E.D.

Por otra parte, para que el polinomio tenga dos raíces reales, se debe cumplir que $b = d = 0$ para que el polinomio quede:

$$x^2 + ax + c = 0$$

Pero también se deberá cumplir que el discriminante no sea negativo, es decir:

$$a^2 - 4c \geq 0 \ .$$

Obsérvese que en el enunciado se habla de una raíz real y no de dos. Esto es posible ya que existe un teorema que señala la existencia de raíces complejas conjugadas, pero solamente en el caso de que los coeficientes del polinomio sean reales y no es el caso.

5. Determinar los números reales a y b de manera que $z = 1 + i$ sea raíz del polinomio

$$p(x) = x^5 + ax^3 + b$$

SOLUCION:

Dado que $z = 1 + i$ es raíz del polinomio, $(x - 1 - i)$ es factor del polinomio, entonces:

$1+i$	1	0	a	0	0	b
		$1+i$	$2i$	$(a-2)+(a+2)i$	$-4+2ai$	$-(4+2a)+(2a-4)i$
	1	$1+i$	$a+2i$	$(a-2)+(a+2)i$	$-4+2ai$	$(b-4-2a)+(2a-4)i$

Como $1 + i$ es raíz, entonces el residuo vale cero, es decir:

$$(b - 4 - 2a) + (2a - 4)i = 0 + 0i$$

Por igualdad de números complejos:

$$b - 4 - 2a = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$2a - 4 = 0 \qquad \ldots \quad (2)$$

de (2):

$$a = 2$$

sustituyendo este valor en (1) :

$$b - 4 - 2(2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 8$$

6. ¿Cuál es la relación que debe existir entre a y b para que el polinomio $p(x) = x^3 + ax + b$ sea divisible entre $(x - c)^2$?

   Calcular el valor de c por medio de a y b suponiendo satisfecha la condición determinada.

SOLUCION:

Efectuando la división:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + 2c \\
\hline
x^2 - 2cx + c^2 & x^3 + 0x^2 + ax + b \\
 & \quad 2cx^2 + (a-c^2)x + b \\
 & \quad\quad (a+3c^2)x + b - 2c^3
\end{array}
$$

Como debe ser divisible, el residuo es nulo:

$$a + 3c^2 = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$b - 2c^3 = 0 \qquad \ldots (2)$$

despejando c de (1):

$$c^2 = -\frac{a}{3} \quad ; \qquad c = \pm\sqrt{-\frac{a}{3}}$$

entonces, c^3 vale $c^3 = \pm\ -\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}$

llevando este valor a (2) y despejando b :

$$b = \pm\ 2\ \ -\frac{a}{3}^{\ 3/2}$$

Por otra parte, multiplicando por 2c la ecuación (1) y por 3 la (2) y sumando:

$$
\begin{array}{l}
2ac + 6c^3 = 0 \qquad \ldots (1') \\
3b - 6c^3 = 0 \qquad \ldots (2') \\
\hline
2ac + 3b = 0
\end{array}
$$

finalmente, despejando c :

$$c = \frac{-3b}{2a}$$

7. Verificar que $P(x) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (bc+ac+ab)x - abc$ es divisible entre $(x - a)(x - b)$. ¿Cuál es el cociente?

SOLUCION:

Si el polinomio $p(x)$ es divisible entre $(x - a)(x - b)$, por el teorema del factor, también es divisible entre $x - a$. Así que, empleando división sintética primero con ese factor:

$$\begin{array}{r|cccc}
 & 1 & -(a+b+c) & bc+ac+ab & -abc \\
a & & a & -ab-ac & abc \\
\hline
 & 1 & -b-c & bc & \boxed{0}
\end{array}$$

de manera que se comprueba que $x - a$ es factor de $p(x)$. Además, el polinomio reducido es:

$$p_1(x) = x^2 - (b + c)x + bc$$

Ahora, con el factor $x - b$:

$$\begin{array}{r|ccc}
 & 1 & -(b+c) & bc \\
b & & b & -bc \\
\hline
 & 1 & -c & \boxed{0}
\end{array}$$

Por lo tanto sí es factor de $p(x)$ y el cociente es $q(x) = x - c$

8. Determinar el valor de θ, en radianes, de tal manera que $h = 0$:

$$h = \operatorname{sen}^3 \theta - \cos^2 \theta + \operatorname{sen} \theta - 2\operatorname{sen}^2 \theta$$

SOLUCIÓN:

Dado que $\cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$:

$$h = \operatorname{sen}^3 \theta - (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) + \operatorname{sen} \theta - 2\operatorname{sen}^2 \theta$$

reduciendo términos semejantes:

$$h = \operatorname{sen}^3 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta - 1$$

se trata de un polinomio en $\operatorname{sen} \theta$ y lo que se hará es determinar sus raíces.

haciendo $x = \operatorname{sen} \theta$:

$$h = x^3 - x^2 + x - 1$$

de acuerdo con la regla de los signos de Descartes:

$$h = x^3 - x^2 + x - 1 \qquad ; \quad 3 \text{ variaciones.}$$

si se sustituye x por $-x$:

$$h(-x) = -x^3 - x^2 - x - 1 \qquad ; \quad \text{No hay variaciones.}$$

entonces:

	1a.	2a.
Raíces reales positivas	3	1
Raíces reales negativas	0	0
Raíces complejas	0	2
Total	3	3

Para las posibles raíces racionales, se determinan los

posibles numeradores : ± 1

posibles denominadores : ± 1

posibles raíces racionales : ± 1

dado que no hay raíces reales negativas, se intentará con $x = 1$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Esto significa que $x = 1$ es una raíz, el polinomio reducido queda:

$$x^2 + 1 = 0 \implies x = \pm i$$

entonces, la única raíz real es $x = 1$ y como $x = \text{sen}\ \theta$, se tiene:

$$\operatorname{sen}\theta = 1$$

finalmente:

$$\theta = \text{ang sen } (1)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

donde:

$$n = 0\ ,\quad \pm 1\ ,\quad \pm 2\ ,\ \ldots$$

9. Determinar a y b de tal manera que $x^4 + 4$ sea divisible entre $x^2 + ax + b$.

SOLUCION:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - ax + a^2 - b \\
\hline
x^2+ax+b & x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 4 \\
 & \underline{-(x^4 + ax^3 + bx^2)} \\
 & \quad - ax^3 - bx^2 \\
 & \quad \underline{-(- ax^3 - a^2x^2 - abx)} \\
 & \qquad (a^2 - b)x^2 + abx \\
 & \qquad \underline{-[(a^2 - b)x^2 + (a^3 - ab)x + a^2b - b^2]} \\
 & \qquad\qquad (- a^3 + 2ab)x + (4 - a^2b + b^2)
\end{array}
$$

dado que el residuo debe ser cero:

$$-a^3 + 2ab = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$4 - a^2b + b^2 = 0 \qquad \ldots \quad (2)$$

analizando las dos ecuaciones se observa que a tiene que ser diferente de cero pues de la ecuación (2) , b tendría que ser complejo. Entonces, de (1) :

$$-a^2 + 2b = 0 \; ; \qquad a \neq 0$$

por lo tanto:

$$a^2 = 2b$$

sustituyendo en (2) :

$$4 - (2b)b + b^2 = 0$$

$$4 - 2b^2 + b^2 = 0$$

$$4 - b^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 2$$

b no puede tomar el signo negativo de la extracción de raíz, ya que $a^2 = 2b$ y entonces a tendría que ser complejo.

Sustituyendo el valor de b :

$$a^2 = 2(2)$$

$$a = \pm \sqrt{4}$$

$$a = \pm 2$$

finalmente:

$$a = \pm 2 \, , \qquad b = 2$$

10. Demostrar que el polinomio $p(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ es divisible entre $(x - 1)^2$, $n \in N$. Calcular el cociente.

SOLUCION:

Este ejercicio puede resolverse por medio de inducción matemática, aquí se efectuará por medio de división sintética.

Dado que el polinomio debe ser divisible entre $(x - 1)^2$, esto significa que $x = 1$ es raíz del polinomio con multiplicidad 2 .

Entonces:

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
\multicolumn{9}{c}{(n+2) \text{ términos}} \\
 & n & -(n+1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
1 & & n & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
\hline
 & n & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Obsérvese que por ser un polinomio de grado $n + 1$, se tienen $n + 2$ términos en el primer renglón de la división sintética. Por otra parte, como el residuo es cero, sí es divisible $p(x)$ entre $x - 1$.

Ahora se trabajará con el polinomio reducido, el cuál tiene $n + 1$ términos por ser su grado una unidad menor que el del original.

11. Sea el polinomio $p(x) = x^4 - ax^2 + a + 3$. ¿Para qué valores de a, $a \in R$, las cuatro raíces de $p(x)$ son reales?

Para obtener las raíces, se utilizará la fórmula de la ecuación de segundo grado:

entonces:

(n+1) términos

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & n & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\
1 & & n & -1+n & -2+n & & -(n-2)+n & -(n-1)+n \\
\hline
 & n & -1+n & -2+n & -3+n & \cdots & 1 & \boxed{0}
\end{array}$$

Q.E.D.

El cociente es, entonces:

$$c(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \ldots + 2x + 1$$

11. Sea el polinomio $p(x) = x^4 - ax^2 + a + 3$. ¿Para qué valores de a, $a \in R$, las cuatro raíces de $p(x)$ son reales?

SOLUCION:

Si se hace un cambio de variable:

si $y = x^2 \implies p'(y) = y^2 - ay + a + 3$

Para encontrar las raíces, se utilizará la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4(a+3)}}{2}$$

$$y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a - 12}}{2}$$

$$y = \frac{a \pm \sqrt{(a-6)(a+2)}}{2}$$

como $y = x^2$:

$$x^2 = \frac{a \pm \sqrt{(a-6)(a+2)}}{2}$$

entonces:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a \pm \sqrt{(a-6)(a+2)}}{2}}$$

Primeramente, $(a - 6)(a + 2)$ debe ser positivo o nulo para que al extraerle raíz cuadrada el resultado sea real.

Entonces:

$$(a - 6)(a + 2) \geq 0$$

Ambos factores deben ser positivos o ambos negativos, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} a \geq 6 \\ \\ a \geq -2 \end{array}\right. \Longrightarrow a \geq 6$$

$$\left.\begin{array}{l} a \leq 6 \\ \\ a \leq -2 \end{array}\right. \Longrightarrow a \leq -2$$

Para este primer radical, el conjunto solución es:

$$(-\infty < a \leq -2) \cup (6 \leq a < +\infty)$$

Analizando ahora el segundo radical, el cociente

$$\frac{a \pm\sqrt{(a-6)(a+2)}}{2} \geq 0$$

dado que el denominador es una constante positiva, el numerador debe ser positivo o nulo tanto con el signo (+) del radical que con el (-).

De inmediato se desecha el intervalo $-\infty < a < -2$, pues con el signo negativo del radical se tendría el numerador negativo y, por lo tanto el cociente también negativo.

De manera que el conjunto solución es:

$$a \geq 6$$

12. Para cada uno de los siguientes polinomios:

    1. $p(x) = 6x^5 - 5x^4 - 41x^3 + 71x^2 - 37x + 6$

    2. $q(x) = 8x^7 - 4x^5 + 3x^4 - 2x^2$

    Determinar:

    a) Las posibles raíces racionales.

    b) El número máximo y mínimo de raíces reales positivas, negativas y complejas, usando la regla de los signos de Descartes.

SOLUCION:

1. Para el polinomio $p(x) = 6x^5 - 5x^4 - 41x^3 + 71x^2 - 37x + 6$, se tiene:

   a) Las posibles raíces racionales de $p(x)$ tienen como numerador a los factores, positivos y negativos, del término independiente del polinomio y como denominador a los factores del coeficiente de la variable de mayor exponente en el mismo. De esta forma se tendrá:

   posibles numeradores:

   $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

   posibles denominadores:

   $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

   posibles raíces racionales:

   $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 6$

   b) Se tiene que el número de raíces reales positivas en $p(x)$, es igual al número de cambios de signo en el polinomio, o menor que éste en un número par.

   Por otro lado, el número de raíces reales negativas en $p(x)$, es igual al número de cambios de signos en $p(-x)$, o menor que éste en un número par.

Los cambios de signo en los polinomios $p(x)$ y $p(-x)$ son:

$p(x) = 6x^5-5x^4-41x^3+71x^2-37x+6$ cuatro cambios de signo

$p(-x) = 6(-x)^5-5(-x)^4-41(-x)^3+71(-x)^2-37(-x)+6$

$p(-x) =-6x^5-5x^4+41x^3+71x^2+37x+6$ un cambio de signo.

De acuerdo con lo anterior, dado que $p(x)$ presentó cuatro cambios de signo, entonces dicho polinomio tendrá cuatro, dos o cero raíces reales positivas y sólo una raíz real negativa; puesto que en $p(-x)$ hubo solamente un cambio de signo.

Esta información se puede resumir en una tabla, donde se consideran además, las posibles raíces complejas del polinomio obtenidas mediante la diferencia del total de raíces de $p(x)$, menos el número de raíces positivas y negativas del mismo.

De esta forma, para el polinomio $p(x)$ la tabla será:

R. Positivas	4	2	0
R. Negativas	1	1	1
R. Complejas	0	2	4
Total de raíces	5	5	5

Si se obtuvieran las raíces del polinomio $p(x)$, éstas serían: (se sugiere verificarlas por división sintética).

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_4 = \frac{1}{3}$$

$$x_5 = -3$$

Como se puede observar cuatro raíces son positivas y una negativa, lo cual coincide con la primera posibilidad de la información resumida en la tabla anterior.

2. Para el polinomio $q(x) = 8x^7 - 4x^5 + 3x^4 - 2x^2$, se tiene:

a) Dado que $q(x)$ no tiene término independiente y el exponente menor del polinomio es dos, esto implica que dicho polinomio tiene dos raíces nulas, por consiguiente el análisis pedido se hará al polinomio reducido que resulta de factorizar x^2 en $q(x)$.

$$q(x) = x^2(8x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2)$$

posibles numeradores: ± 1 , ± 2

posibles denominadores: ± 1 , ± 2 , ± 4 , ± 8

posibles raíces racionales : ± 1 , $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{4}$; $\pm \frac{1}{8}$, ± 2

b) $q(x) = x^2(8x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 2)$ tres cambios de signo.

$q(-x) = x^2(-8x^5 + 4x^3 + 3x^2 - 2)$ dos cambios de signo.

De donde, las cinco raíces del polinomio reducido deberán coincidir con alguna de las siguientes posibilidades:

R. Positivas	3	1	1	3
R. Negativas	2	2	0	0
R. Complejas	0	2	4	2
Total de raíces	5	5	5	5

13. Determinar las raíces del polinomio:

$$p(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 19x - 6$$

SOLUCION:

Primeramente, se recabará toda la información posible sobre las raíces del polinomio $p(x)$, empleando la regla de los signos de *Descartes*, entonces:

$p(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 19x - 6$ tres cambios de signo

$p(-x) = x^4 + 9x^3 + 25x^2 + 19x - 6$ un cambio de signo.

por lo que las raíces pueden ser:

R. Positivas	3	1
R. Negativas	1	1
R. Complejas	0	2
Total de raíces	4	4

Las posibles raíces racionales de $p(x)$ serán:

posibles numeradores: ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6

posibles denominadores: ± 1

posibles raíces racionales: ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6

De acuerdo con la tabla, el polinomio $p(x)$ tiene una raíz negativa y al menos una positiva, por lo que se probarán por división sintética las posibles raíces positivas.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -9 & 25 & -19 & -6 \\
2 & & 2 & -14 & 22 & 6 \\
\hline
 & 1 & -7 & 11 & 3 & \boxed{0}
\end{array} \qquad x_1 = 2$$

probando con el siguiente valor:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -7 & 11 & 3 \\
3 & & 3 & -12 & -3 \\
\hline
 & 1 & -4 & -1 & \boxed{0}
\end{array} \qquad x_2 = 3$$

de donde el polinomio reducido es:

$$q(x) = x^2 - 4x - 1$$

aplicando la ecuación de segundo grado para obtener las dos raíces restantes se tiene:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5} \quad \therefore \quad x_3 = 2 + \sqrt{5}$$

$$x_4 = 2 - \sqrt{5}$$

por lo tanto, las raíces de $p(x)$ serán:

$$x_1 = 2 \ ; \quad x_2 = 3 \ ; \quad x_3 = 2 + \sqrt{5} \ ; \quad x_4 = 2 - \sqrt{5}$$

14. Obtener las raíces del polinomio

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 ,$$

tomando en cuenta que $f(1) = 0$.

SOLUCION:

De acuerdo con el enunciado, $x_1 = 1$ es raíz de $f(x)$, por lo que el polinomio reducido será:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -5 & 10 & -10 & 5 & -1 \\ 1 & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$q_1(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$$

aplicando la regla de los signos de Descartes, se tiene:

$q\ (x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ cuatro cambios de signo

$$q\ (-x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

Como se puede observar en $q_1(-x)$ no se presentaron cambios de signo, lo cual implica que $q_1(x)$ no tiene raíces negativas.

R. Positivas	4	2	0
R. Negativas	0	0	0
R. Complejas	0	2	4
Total de raíces	4	4	4

Las posibles raíces de $q_1(x)$ serán:

posibles numeradores: ± 1

posibles denominadores: ± 1

posibles raíces racionales: ± 1

probando la única posible raíz positiva:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & & 1 & -3 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_2 = 1$$

de donde el polinomio reducido es:

$$q_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

dado que para $q_2(x)$ sus posibles raíces son ± 1 y considerando que $q_1(x)$ sólo tiene raíces positivas, de nuevo se probará

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_3 = 1$$

$$q_3(x) = x^2 - 2x + 1$$

factorizando:

$$q_3(x) = (x - 1)^2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} x_4 = 1 \\ x_5 = 1 \end{array}$$

por lo que, las raíces de $f(x)$ son:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$$

15. El polinomio $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 10$ tiene dos raíces irracionales. Situar cada una de estas raíces entre dos números enteros consecutivos.

SOLUCION:

Obteniendo las posibles raíces racionales de $f(x)$, se tiene:

posibles numeradores: ± 1 , ± 2 , ± 5 , ± 10

posibles denominadores: ± 1

posibles raíces racionales: ± 1 , ± 2 , ± 5 , ± 10

para determinar entre qué números enteros se encuentran las raíces irracionales de $f(x)$, se buscarán los cambios de signo en el residuo de la división sintética, al probar las posibles raíces de dicho polinomio.

De esta forma se tendrá:

	1	4	3	-8	-10
1		1	5	8	0
	1	5	8	0	$\boxed{-10}$

	1	4	3	-8	-10
2		2	12	30	44
	1	6	15	22	$\boxed{34}$

Dado que para $x = 1$ y $x = 2$ se presentó un cambio de signo en el residuo, esto implica que entre 1 y 2 existe una raíz irracional, esto es:

$$1 < r_1 < 2$$

Como se puede observar, en el tercer renglón de la segunda división sintética no existen números negativos, lo cual implica que el número dos es cota superior de las posibles raíces del polinomio $f(x)$, por consiguiente, se buscará la segunda raíz irracional con valores negativos.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 3 & -8 & -10 \\ -1 & & -1 & -3 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & -8 & \boxed{-2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 3 & -8 & -10 \\ -2 & & -2 & -4 & 2 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -6 & \boxed{2} \end{array}$$

puesto que para $x = -1$ y $x = -2$ también se presentó un cambio de signo en el residuo, entonces entre -1 y -2 se encuentra la segunda raíz irracional de $f(x)$, esto es:

$$-2 < r_2 < -1$$

16. Determinar las raíces del polinomio

$$p(x) = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 19x - 6$$

SOLUCION:

Obteniendo las posibles raíces racionales:

posibles numeradores: ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6

posibles denominadores: ± 1

posibles raíces racionales: ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 6

empleando la división sintética se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -9 & 25 & -19 & -6 \\ 2 & & 2 & -14 & 22 & 6 \\ \hline & 1 & -7 & 11 & 3 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_1 = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 11 & 3 \\ 3 & & 3 & -12 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_2 = 3$$

del polinomio reducido se puede plantear la ecuación:

$$x^2 - 4x - 1 = 0$$

de donde:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

por lo tanto, las raíces de $p(x)$ son:

$$x_1 = 2 \; ; \quad x_2 = 3 \; ; \quad x_3 = 2 + \sqrt{5} \; ; \quad x_4 = 2 - \sqrt{5}$$

Obsérvese que las raíces irracionales que se presentarón (x_3 y x_4) son de la forma $a + \sqrt{b}$ y $a - \sqrt{b}$. En general, si un polinomio de coeficientes racionales admite una raíz irracional de la forma $a + \sqrt{b}$, donde $a, b \in Q$, entonces, $a - \sqrt{b}$ es otra de sus raíces.

17. Dada la función $f(t)$ definida por:

$$f(t) = 256t^4 - 128t^3 - 96t^2 + 8t + 5$$

si $x = 4t$ obtener:

a) El polinomio $f(x)$

b) Los valores de t para los cuales $f(t) = 0$.

SOLUCION:

a) Como $x = 4t$ entonces $t = \frac{x}{4}$, por consiguiente $f(x)$ será:

$$f(x) = 256\left(\frac{x}{4}\right)^4 - 128\left(\frac{x}{4}\right)^3 - 96\left(\frac{x}{4}\right)^2 + 8\left(\frac{x}{4}\right) + 5$$

simplificando:

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 2x + 5$$

b) Para obtener las raíces del polinomio $f(t)$, se determinarán las raíces del polinomio $f(x)$ y posteriormente se regresará a la variable original, obteniendo con ello las raíces buscadas.

Posibles raíces racionales de $f(x)$: ± 1 , ± 5

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -6 & 2 & 5 \\ -1 & & -1 & 3 & 3 & -5 \\ \hline & 1 & -3 & -3 & 5 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_1 = -1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -3 & 5 \\ 1 & & 1 & -2 & -5 \\ \hline & 1 & -2 & -5 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_2 = 1$$

de donde se obtiene:

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

con lo cual las dos raíces restantes serán:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 1 \pm \sqrt{6}$$

$$x_3 = 1 + \sqrt{6} \qquad y \qquad x_4 = 1 - \sqrt{6}$$

regresando a la variable original, se tiene:

como $t = \frac{x}{4}$ entonces:

$t_1 = \frac{x_1}{4}$ $\qquad t_1 = \frac{-1}{4} \qquad \therefore \quad t_1 = -\frac{1}{4}$

$t_2 = \frac{x_2}{4}$ $\qquad t_2 = \frac{1}{4} \qquad \therefore \quad t_2 = \frac{1}{4}$

$t_3 = \frac{x_3}{4}$ $\qquad t_3 = \frac{1+\sqrt{6}}{4} \qquad \therefore \quad t_3 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$

$t_4 = \frac{x_4}{4}$ $\qquad t_4 = \frac{1-\sqrt{6}}{4} \qquad \therefore \quad t_4 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$

Comprobar que los valores de t_1, t_2, t_3 y t_4 son las raíces del polinomio $f(t)$.

18. Obtener las raíces del polinomio

$$p(x) = x^6 + 4x^4 - x^2 - 4$$

SOLUCION:

Para obtener las raíces del polinomio $p(x)$, se efectuará el siguiente cambio de variable:

si $x^2 = w$ entonces:

$$p(w) = w^3 + 4w^2 - w - 4$$

Obteniendo las raíces del polinomio $p(w)$, se tiene:

posibles raíces racionales de $p(w)$: ± 1, ± 2, ± 4

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & -1 & -4 \\ 1 & & 1 & 5 & 4 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & \boxed{0} \end{array} \qquad w_1 = 1$$

de donde se obtiene:

$$w^2 + 5w + 4 = 0$$

factorizando:

$$(w + 1)(w + 4) = 0$$

entonces:

$$w_2 = -1 \quad \text{y} \quad w_3 = -4$$

regresando a la variable original:

para $w_1 = 1$, entonces $x^2 = 1$; $x = \pm\sqrt{1} \Longrightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$

para $w_2 = -1$, entonces $x^2 = -1$; $x = \pm\sqrt{-1} \Longrightarrow \begin{matrix} x_3 = i \\ x_4 = -i \end{matrix}$

para $w_3 = -4$, entonces $x^2 = -4$; $x = \pm\sqrt{-4} \Longrightarrow \begin{matrix} x_5 = 2i \\ x_6 = -2i \end{matrix}$

19. Calcular el valor de k y las raíces del polinomio:

$$f(x) = 2x^6 + 3x^5 + kx^4 + 15x^3 - 32x^2 + 12x$$

si $x - 1$ es uno de sus factores.

SOLUCION:

Factorizando el polinomio $f(x)$:

$$f(x) = x\underbrace{(2x^5 + 3x^4 + kx^3 + 15x^2 - 32x + 12)}_{Q(x)} = x\,Q(x)$$

dado que $(x - 1)$ es factor del polinomio $Q(x)$, entonces se debe cumplir que $Q(1) = 0$

$$Q(1) = 2(1)^5 + 3(1)^4 + k(1)^3 + 15(1)^2 - 32(1) + 12 = 0$$

simplificando:

$$2 + 3 + k + 15 - 32 + 12 = 0$$

$$k + 32 - 32 = 0$$

$$\therefore\ k = 0$$

por lo que, el polinomio $Q(x)$ será:

$$Q(x) = 2x^5 + 3x^4 + 15x^2 - 32x + 12$$

Obteniendo las raíces por medio de división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 2 & 3 & 0 & 15 & -32 & 12 \\
1 & & 2 & 5 & 5 & 20 & -12 \\
\hline
 & 2 & 5 & 5 & 20 & -12 & \boxed{0}
\end{array} \qquad x_1 = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 5 & 5 & 10 & -12 \\
-3 & & -6 & 3 & -24 & 12 \\
\hline
 & 2 & -1 & 8 & -4 & \boxed{0}
\end{array} \qquad x_2 = -3$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 8 & -4 \\ \frac{1}{2} & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 2 & 0 & 8 & \boxed{0} \end{array} \qquad x_3 = \frac{1}{2}$$

de donde:

$$2x^2 + 8 = 0$$

$$x^2 = -4 \qquad x = \pm\sqrt{-4} \qquad \therefore \qquad \begin{array}{l} x_4 = 2i \\ x_5 = -2i \end{array}$$

Finalmente, las raíces del polinomio $f(x)$ son:

$x_1 = 1$; $x_2 = -3$; $x_3 = \frac{1}{2}$; $x_4 = 2i$; $x_5 = -2i$; $x_6 = 0$

20. Para el polinomio $p(x) = 2x^4 + Ax^3 + Bx^2 - 6x + 4$ determinar:

a) Los valores de A y B para que el polinomio $p(x)$ sea divisible entre $(2x - 4)$ y $(x - 1)$.

b) Las raíces de $p(x)$.

SOLUCION:

a) Dado que $p(x)$ es divisible entre $(2x - 4)$ y $(x - 1)$, entonces al dividir $p(x)$ entre dichos factores el residuo de la división debe ser igual a cero, de donde se tiene:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & A & B & -6 & 4 \\
2 & & 4 & 2A+8 & 4A+2B+16 & 8A+4B+20 \\
\hline
 & 2 & A+4 & 2A+B+8 & 4A+2B+10 & 8A+4B+24 = 0
\end{array} \qquad \ldots \quad (1)$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & A & B & -6 & 4 \\
1 & & 2 & A+2 & A+B+2 & A+B-4 \\
\hline
 & 2 & A+2 & A+B+2 & A+B-4 & A+B = 0
\end{array} \qquad \ldots \quad (2)$$

De acuerdo con lo anterior, se han generado dos ecuaciones con dos incógnitas, las que resolviendo simultáneamente darán los valores de A y B buscados.

$$8A + 4B = -24 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$A + B = 0 \qquad \ldots \quad (2)$$

simplificando la ecuación (1) :

$$2A + B = -6 \qquad \ldots \quad (1)$$

$$A + B = 0 \qquad \ldots \quad (2)$$

de donde se obtiene que:

$$A = -6 \qquad \text{y} \qquad B = 6$$

por lo tanto, el polinomio $p(x)$ será:

$$p(x) = 2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 6x + 4$$

b) Obteniendo las raíces de $p(x)$ por división sintética, se tiene:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 2 & -6 & 6 & -6 & 4 \\
2 & & 4 & -4 & 4 & -4 \\
\hline
 & 2 & -2 & 2 & -2 & \boxed{0}
\end{array} \qquad x_1 = 2$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -2 & 2 & -2 \\
1 & & 2 & 0 & 2 \\
\hline
 & 2 & 0 & 2 & \boxed{0}
\end{array} \qquad x_2 = 1$$

de donde:

$$2x^2 + 2 = 0 \; ; \quad x = \pm\sqrt{-1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} x_3 = i \\ x_4 = -i \end{array}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dadas las siguientes expresiones, indicar si son o no polinomios; en caso afirmativo determinar su grado y en caso negativo decir porqué.

a) $g(x) = \frac{1}{4}x^8 - \frac{2}{5}x^6 + \frac{4}{9}x^5 + \frac{7}{15}x^4 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{5}{7}x^2 - \frac{6}{5}x - \frac{1}{9}$

b) $v(s) = \dfrac{s^4 - 5s^3 + 14s^2 - 9s - 14}{s - 2}$; $s \neq 2$

c) $p(y) = (y^2 + 2y - 8)(y^3 - 3y^2 - 7y + 5)$

d) $h(x) = \dfrac{x^5 - 7x^4 - 8x^3 + 2x^2 + x - 7}{x + 5}$

e) $1^2 = \dfrac{(x - 3)(x - 2)(x + 1)}{4}$

f) $f(x) = 4x^{2/3} - 7x^{1/2} + 8x$

g) $4x^3 - 2x^2 - 5x + 8 = 0$

h) $m = 12 \tan^3 \theta - 7 \tan^2 \theta + 5 \tan \theta - 10 - 8 \sec^2 \theta$

i) $p(x) = h(x) + g(x)\ f(x)$

donde: $h(x) = 5x^4 + 12x^3 - 8x^2 - 7x + 8$

$g(x) = 7x^3 + 6x^2 + 2x - 6$

$f(x) = -3x^7 - 2x^6 + 5x^4 + 7x^3 - 14x^2 - 8x + 4$

j) $f(x) = 3x^{-2} + 2x^{-4} + 7$

2. Demostrar que $x + a$ es factor de $p(x) = x^{2n} - a^{2n}$ donde $n \in N$.

3. Demostrar que $h(x) = x^{15} - 1$ es divisible entre $x^3 - 1$

4. Demostrar que $f(x) = x^3 - 3abx + a^3 + b^3$ es divisible entre $x + a + b$.

5. Determinar los valores de p y q de tal manera que una de las raíces de $h(x)$ sea el cuadrado de otra. Demostrar que la tercera raíz es la suma de las anteriores:

$$h(x) = x^3 + px + q \; .$$

6. Sea el polinomio $p(x) = x^{2n} - 2$, donde $n \in N$. Determinar la naturaleza de sus raíces utilizando la regla de los signos de Descartes.

7. Sea el polinomio $h(x) = x^{2n-1} - 2$, donde $n \in N$. Determinar la naturaleza de sus raíces utilizando la regla de los signos de Descartes.

8. Determinar los valores de A y B de tal manera que se cumpla la igualdad:

$$f(x) = h(x)$$

donde:

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 32$$

$$h(x) = A(x^3 + 2x^2 - 4x - 7) + B(x^4 + x^2 - 3x + 6)$$

9. Determinar los valores de A, B, C, D y E de tal manera que se cumple la igualdad:

$$\frac{3x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 20x + 9}{(x + 2)(x^2 + 3)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 3)^2}$$

10. Demostrar que para el polinomio $p(x) = x^3 + 7x - 6i$, $x_1 = i$ es una raíz de $p(x)$ pero $x_2 = -i$ no lo es. Explicar porqué no, aunque los dos números son complejos conjugados.

11. Determinar p y q para que $x^4 + a^2$ sea divisible entre $x^2 + px + q$; $a \in R$.

12. Determinar el o los valores de θ , de tal manera que t sea nulo:

$$t = 3\tan^3 \theta + 2\sec^2 \theta - 4\tan^2 \theta + 4\tan \theta - 7$$

13. Calcular el o los valores de x para que f valga 5

$$f = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 3$$

14. Dado el polinomio $p(x) = (a - 2)x^4 - 2ax^2 + a - 1$, determinar el intervalo de valores de a , $a \in R$, de tal manera que las cuatro raíces de $p(x)$ sean reales.

15. Determinar los valores de a , $a \in R$, para los cuáles el polinomio $p(x) = (a + 5)x^4 + (2a + 3)x^2 + a + 3$ tiene sus cuatro raíces reales.

16. Para cada uno de los siguientes polinomios, obtener sus raíces, incluyendo en su desarrollo la utilización de la

regla de los signos de *Descartes*.

a) $p(x) = 2x^5 + 4x^4 + 22x^3 + 44x^2 + 36x + 72$

b) $f(x) = 2x^5 + 10x^4 + 11x^3 - 4x^2 - x + 6$

c) $q(x) = 2x^6 - x^5 + x^4 - x^2$

d) $h(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 6x - 6$

e) $g(x) = 2x^5 + 12x^4 + 26x^3 + 28x^2 + 24x + 16$

f) $R(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 4x^3 - 14x^2 + 16x + 24$

17. Obtener el valor de "a" en el polinomio

$$f(x) = x^3 + ax + 16 ,$$

de tal forma que $f(x)$ admita dos raíces iguales.

18. Determinar los valores de los coeficientes a, b y c, de tal forma que sean además raíces del polinomio

$$p(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$$

19. Obtener las raíces del polinomio $f(x)$, si se sabe que:

$$f(x) = p(x) \cdot q(x)$$

donde:

$$p(x) = x^2 + 1 \quad \text{y}$$
$$q(x) = x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 20x^3$$

20. Expresar mediante factores lineales al polinomio $p(x) = x^6 - 5x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 32x^2 + 24x$, si se sabe que $\alpha = 1 - i$ es una de sus raíces y además que $f(3) = 0$.

21. Obtener las raíces del polinomio:

$$f(x) = x^5 + (1 - i)x^4 + (2 - i)x^3 + (4 - 2i)x^2 +$$

$$+ (-8 - 4i)x + 8i$$

si se sabe que $x = i$ es una de sus raíces.

22. Obtener las raíces del polinomio:

$$p(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 + 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x$$

si se sabe que tres de ellas son:

$$\alpha_1 = 1 - i \; ; \quad \alpha_2 = \sqrt{2} \quad y \quad \alpha_3 = -\sqrt{2}$$

23. Si $\alpha = 3 + i$ es una raíz del polinomio

$$f(x) = x^5 - 8x^4 + ax^3 - 20x^2 ,$$

determinar:

a) El valor de la constante "a" .

b) Las raíces del polinomio $f(x)$.

24. Obtener las raíces del polinomio

$$f(x) = x^7 + x^6 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 2x ,$$

si se sabe que $\sqrt{-1}$ es una de sus raíces.

25. Para el polinomio $f(x) = Ax^3 + 2x^2 - Bx + 2$ determinar:

a) Los valores de A y B, si se sabe que $f(1) = 6$ y $f(2) = 20$.

b) Las raíces de $f(x)$.

26. Obtener las raíces de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = 2x^9 - 2x^7 + 2x^5 - 2x^3$

b) $f(x) = x^9 + x^6 + x^3 + 1$

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

1. a) Si . $gr(g) = 8$

   b) Sí . $gr(v) = 3$

   c) Sí . $gr(p) = 5$

   d) No .

   e) No

   f) No

   g) No

   h) Sí . $gr(m) = 3$

   i) Sí . $gr(p) = 10$

   j) No .

5. $$\left.\begin{aligned} p &= -(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \\ q &= \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta \end{aligned}\right\} \quad \text{donde } \alpha, \beta \text{ son raíces de } h(x) \text{ y } \beta = \alpha^2$$

6. Una raíz real positiva, una negativa y $2n - 2$ complejas.

7. Una raíz real positiva, ninguna negativa y $2n$ complejas.

8. $A = -2$

   $B = 3$

9. $A = 1$

$B = 2$

$C = 0$

$D = 4$

$E = 0$

11. $p = \pm \sqrt{2a}$

$q = a$

12. $\theta = \frac{\pi}{4} \pm n\pi \;; \quad n \in N$

13. $x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = -1$

$x_3 = \text{cis } 270°$

$x_4 = \text{cis } 90°$

14. $a > 2$

15. $-3 \leq a \leq -\frac{51}{20}$

16. a) $x_1 = -2 \;;\quad x_2 = \sqrt{2}\, i \;;\quad x_3 = -\sqrt{2}\, i \;;\quad x_4 = 3i \;;$
$x_5 = -3i$

b) $x_1 = -1 \;;\quad x_2 = -2 \;;\quad x_3 = -3 \;;\quad x_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \;;$
$x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$

c) $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = -\frac{1}{2}$; $x_5 = i$; $x_6 = -i$

d) $x_1 = 1$; $x_2 = \sqrt{2}$; $x_3 = -\sqrt{2}$; $x_4 = \sqrt{3}$; $x_5 = -\sqrt{3}$

e) $x_1 = x_2 = x_3 = -2$; $x_4 = i$; $x_5 = -i$

f) $x_1 = -1$; $x_2 = 3$; $x_3 = \sqrt{2}$; $x_4 = -\sqrt{2}$; $x_5 = 2i$;
$x_6 = -2i$

17. $a = -12$ las raíces son: $x_1 = x_2 = 2$; $x_3 = -4$

18. $a = -1$; $b = -1$ y $c = 1$

19. $x_1 = i$; $x_2 = -i$; $x_3 = x_4 = x_5 = 0$; $x_6 = 4$;
$x_7 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}$; $x_8 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}$

20. $p(x) = x(x - 3)(x - 1 + i)(x - 1 - i)(x + 2)(x - 2)$

21. $x_1 = i$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = 2i$; $x_5 = -2i$

22. $\alpha_1 = 1 - i$; $\alpha_2 = \sqrt{2}$; $\alpha_3 = -\sqrt{2}$; $\alpha_4 = 1 + i$;
$\alpha_5 = 0$; $x_6 = i$; $x_7 = -i$

23. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; $\alpha_3 = 3 + i$; $\alpha_4 = 3 - i$; $\alpha_5 = 2$

24. $x_1 = x_2 = i$; $x_3 = x_4 = -i$; $x_5 = 0$; $x_6 = 1$;
$x_7 = -2$

25. a) $A = 1$

$B = -1$

b) $x_1 = -2$; $x_2 = i$; $x_3 = -i$

26. a) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $x_4 = 1$; $x_5 = -1$; $x_6 = 1 \text{ cis } 45°$;

$x_7 = 1 \text{ cis } 135°$; $x_8 = 1 \text{ cis } 225°$; $x_9 = 1 \text{ cis } 315°$

b) $x_1 = 1 \text{ cis } 60°$; $x_2 = 1 \text{ cis } 180°$; $x_3 = 1 \text{ cis } 300°$

$x_4 = 1 \text{ cis } 30°$; $x_5 = 1 \text{ cis } 150°$; $x_6 = 1 \text{ cis } 270°$

$x_7 = 1 \text{ cis } 90°$; $x_8 = 1 \text{ cis } 210°$; $x_9 = 1 \text{ cis } 330°$

Esta obra se terminó de imprimir
en enero de 2006
en el taller de imprenta del
Departamento de Publicaciones
de la Facultad de Ingeniería,
Ciudad Universitaria, México, D.F.
C.P. 04510

Secretaría de Servicios Académicos

El tiraje consta de 750 ejemplares