Variables Aleatorias Continuas

Clase 6

Alvarez - Arceo - Aurucis - Casparian - Castro - Chan - Howlin - Maulhardt - Spano - Stein - Calvo

Organización

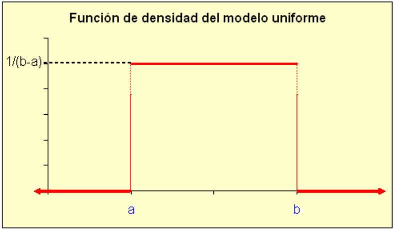
Distribución Uniforme

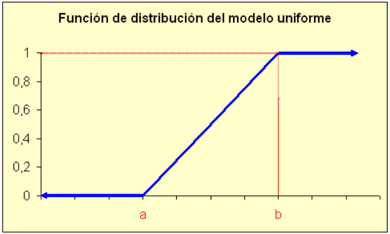
Una variable aleatoria X tiene distribución Uniforme

en el intervalo $[a, b]$ si su función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 0 & si \quad no \end{cases} \tag{1}$$

Si X tiene distribución Uniforme lo notaremos como $X \sim U(a, b)$





Distribución Uniforme

Si $X \sim U(a, b)$, ¿cuál es su función de distribución acumulada?

Si $a \leq x \leq b \Rightarrow$

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}$$

. Por lo tanto queda que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases} \tag{2}$$

Distribución Uniforme

Si $X \sim U(a, b)$, ¿cuál es su esperanza y su varianza?.

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left. \frac{x^2}{2(b-a)} \right|_a^b = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \left. \frac{x^3}{3(b-a)} \right|_a^b = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Por lo tanto,

$$V(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribución Uniforme

Ejemplo

Sea X la duración de los exámenes de cierta cátedra de la facultad, se sabe que $X \sim U(a, b)$ y que $E(X) = 4$ y que $P(X \leq 3) = 0.25$, ¿cuáles son los valores mínimo y máximo de duración del examen?

Se tiene entonces que:

$$4 = E(X) = \frac{a+b}{2}$$

y

$$0.25 = F_X(3) = \frac{3-a}{b-a}$$

Despejando de la primera ecuación queda que $b = 8 - a$ y reemplazando en la segunda ecuación se obtiene que $a = 2$ y $b = 6$

Organización

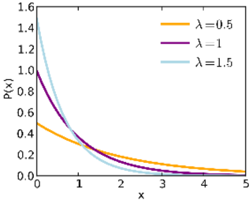
Distribución Exponencial

La densidad de una variable aleatoria Exponencial con parámetro λ es:

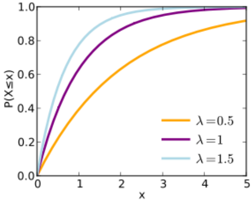
:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad no \end{cases} \tag{3}$$

Donde $\lambda > 0$. Si X tiene distribución exponencial lo notaremos como $X \sim \varepsilon(\lambda)$.



densidad



distribución

Distribución Exponencial

Si $X \sim \varepsilon(\lambda)$, ¿cuál es la función de distribución acumulada de X?

Si $x > 0$ se tiene:

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

Luego la función de distribución a izquierda y a derecha son respectivamente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad no \end{cases} \tag{4}$$

$$G_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 1 & si \quad no \end{cases} \tag{5}$$

Distribución Exponencial

Si $X \sim \varepsilon(\lambda)$ ¿cuál es su esperanza y su varianza?

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -xe^{-\lambda x} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{2xe^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = \frac{2e^{-\lambda x}}{-\lambda^2}\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Luego,

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Distribución Exponencial

Ejemplo

La variable aleatoria X modela el tiempo de respuesta de una computadora en línea. Se sabe que $X \sim \varepsilon(\lambda)$ y que el tiempo de respuesta esperado es 5 segundos: a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de respuesta sea a lo sumo 10 segundos? b) Qué tiempo no es superado por la mitad de las esperas?

$$a)E(X) = 5 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 0.2$$

Luego $P(X \leq 10) = F_X(10) = 1 - e^{-0.2*10} = 0.865$

$$b)F_X(\tilde{\mu}) = 0.5 \Rightarrow 1 - e^{-0.2*\tilde{\mu}} = 0.5 \Rightarrow \tilde{\mu} = 3.46$$

Distribución Exponencial

¿Qué modela la distribución Exponencial?

Entre las múltiples aplicaciones de la distribución exponencial podemos mencionar:

- Teoría de Colas y tiempos de espera.
- Duración de procesos sin desgaste.
- Supongamos una máquina que produce hilo de alambre, la cantidad de metros de alambre hasta encontrar una falla en el alambre se podría modelar como una exponencial.
- En fiabilidad de sistemas, un dispositivo con tasa de fallo constante sigue una distribución exponencial.

Organización

Relación entre la distribución Exponencial y la Poisson

Si $X \sim Po(\alpha t) \Rightarrow Y \sim \varepsilon(\alpha)$

Sea X la variable que cuenta la cantidad de ocurrencias de cierto evento en un intervalo de tiempo de duración t, y que lo hace siguiendo una distribución de Poisson con intensidad α por unidad de continuo (tiempo, longitud, superficie, volumnes, etc)..
Sea Y la variable que mide el tiempo entre las ocurrencias de dos eventos sucesivos o bien mide el tiempo hasta la ocurrencia del primer evento. Interesa saber ¿Cuál es la distribución de la variable Y?

$$P(Y > t) = P(X = 0 \text{ en tiempo t}) = \frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^0}{0!} = e^{-\alpha t}$$

Entonces:

$$P(Y \leq t) = 1 - e^{-\alpha t} \Rightarrow Y \sim \varepsilon(\alpha)$$

Organización

1. Distribución Uniforme
2. Distribución Exponencial
3. Relación Exponencial-Poisson
4. Propiedad de Falta de Memoria
5. Distribución Normal
6. Distribución Gamma

Propiedad de Falta de Memoria

Propiedad:

Una variable, X, se dice que tiene la propiedad de falta de memoria si:

$$P(X \geq t + s | X \geq s) = P(X \geq t).$$

Si $X \sim \varepsilon(\lambda)$ entonces X cumple la propiedad de falta de memoria.
Demostración:

$$P(X \geq t + s | X \geq s) = \frac{P(X \geq t + s)}{P(X \geq s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X \geq t)$$

Organización

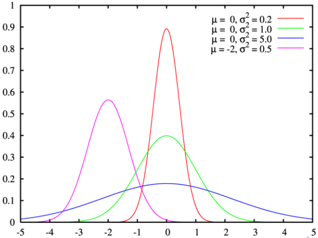
Distribución Normal

La función de densidad de una variable aleatoria X con distribución Normal con parámetros μ y σ es:

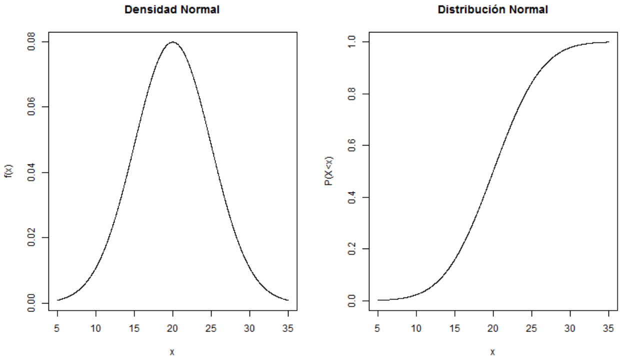
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde $x \in \mathbb{R}$, $\quad \mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.

Notación Si X tiene distribución Normal lo notaremos con $X \sim N(\mu, \sigma^2)$



Distribución Normal



Distribución Normal Standard

Es un caso particular de la distribución Normal

Cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ la variable se denota con Z, es decir, la notación es $Z \sim N(0, 1)$ y la función de densidad de probabilidad es:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad z \in \mathbb{R}$$

Propiedades Gráficas

1. La función de densidad es asintótica respecto del eje de abscisas.
2. La función de densidad es simétrica respecto del eje de ordenadas.
3. La función de densidad presenta un máximo en $(0, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}})$
4. La función de densidad presenta dos puntos de inflexión en $z = 1$ y en $z = -1$.

Distribución Normal Standard: Propiedades

Si $Z \sim N(0,1)$ entonces $E(Z) = 0$ y $V(Z) = 1$

Propiedades: Demostración

$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 0$, pues es la integral de una función impar en un intervalo simétrico respecto de 0.

$$E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz =$$

$$\lim_{M\to+\infty} \left. \frac{z}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right|_{-M}^{M} + \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 0 + 1 = 1$$

$V(Z) = 1 - 0^2 = 1$

Relación entre la Normal y la Normal Standard

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq z) = P(X \leq \mu + z\sigma) = F_X(\mu + z\sigma)$$

Derivando el primer y último miembros:

$$f_Z(z) = f_X(\mu + z\sigma)\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu + z\sigma - \mu}{\sigma}\right)^2} \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

entonces $Z \sim N(0,1)$

Como $E(Z) = 0$ y $V(Z) = 1$

Demostración: usando propiedades de esperanza y varianza:

$E(X) = E(\mu + Z\sigma) = \mu$

y

$V(X) = V(\mu + Z\sigma) = \sigma^2$

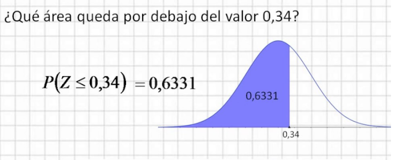
Distribución Normal

Uso de Tablas

Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces se tiene que:

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Donde $\phi(z)$ es el área bajo la curva de la función de densidad de la normal estándar desde $-\infty$ hasta z.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772

Distribución Normal

Ejemplo

La distribución de las alturas de los jugadores de basquet de un equipo de la NBA es normal con media $\mu = 1.95$ m y desvío $\sigma = 0.05$ m.

I) Hallar la probabilidad de que un jugador elegido al azar mida más de 2.05 m.

II) Calcular la altura superada por el 20% de los jugadores.

Distribución Normal

Respuestas

Sea X ='altura, en metros, de un jugador de la NBA elegido al azar', entonces $X \sim N(1.95, 0.05^2)$

1. $P(X > 2.05) = P\left(\frac{X-1.95}{0.05} > \frac{2.05-1.95}{0.05}\right) = P(Z > 2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.977 = 0.023$

2. $F_X(x_{0.8}) = 0.8$

$$0.8 = P(X \leq x_{0.8}) = P\left(Z \leq \frac{x_{0.8} - 1.95}{0.05}\right)$$

Además se tiene que $\phi(0.842) = 0.8$ por lo tanto

$$0.842 = \frac{x_{0.8} - 1.95}{0.05} \Rightarrow x_{0.8} = 1.99m$$

Organización

Distribución Gamma: Densidad y Momentos

La distribución gamma depende de dos parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ reales cuya función de densidad para valores $x > 0$ es

$$f(x) = \beta e^{-\beta x} \frac{(\beta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

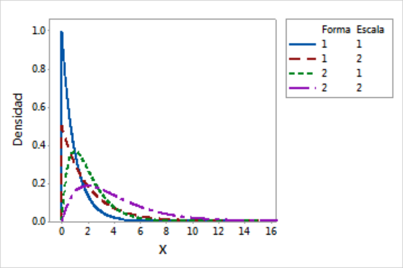
Siendo Γ es la función gamma. Para valores $k \in \mathbb{N}$ si $\Gamma(k) = (k-1)!$

$$E[X] = \alpha/\beta = \alpha\lambda$$
$$V[X] = \alpha/\beta^2 = \alpha\lambda^2$$

Distribución Gamma: Densidad

Cuándo se utiliza esta distribución?

La distribución *Gamma* puede derivarse de la suma de k variables aleatorias exponenciales independientes. Y como la exponencial modela el tiempo entre eventos Poisson, la Gamma modela el tiempo hasta k ocurrencias de un evento Poisson.



Distribución Gamma: ejemplo

Enunciado

En una ciudad se observa que el consumo diario de energía (en millones de kilowatt-hora) es una variable aleatoria que sigue una distribución gamma con parámetros $\alpha = 3$ y $\beta = 2$. Si la planta de energía que suministra a la ciudad tiene una capacidad diaria de generar un máximo de 5, ¿cuál es la probabilidad de que haya un día donde no se pueda satisfacer la demanda?

$$P(X > 5) = 1 - F(5) = 0.0027$$

MUCHAS GRACIAS!!..Y Ahora...A practicar los ejercicios!!