

SUPERFICI RIEMANNIANE COME TEORIA ELEMENTARE PER LA RISOLVIBILITÀ DI EQUAZIONI ANALITICHE.

MARCO BELLÌ

SOMMARIO. Introduciamo una teoria di superfici Riemanniane sviluppata in modo naturale da classici esempi e problemi che si incontrano nell’analisi complessa, con enfasi piazzata sulla costruibilità di tali superfici attraverso il prodotto fibrato.

Il tema motivante è la risolvibilità di equazioni analitiche mediante specifiche classi di funzioni, in primis le d -esime potenze. Questo studio incomincia col rendere preciso cosa si intende con una formula per gli zeri di una collezione di polinomi e culmina con il teorema sulla risolvibilità del gruppo di monodromia di una tale formula, dal quale concludiamo una versione topologica del teorema di Abel-Ruffini.

Un secondo fine di queste note è mostrare come le idee discusse aprono la via a campi della matematica moderna come la topologia, la geometria differenziale e la geometria algebrica.

ABSTRACT. We introduce a theory of Riemann surfaces, developed in a natural way from classical examples and problems arising in complex analysis, with emphasis placed upon the constructability of such surfaces through the fibered product.

The guiding theme is the solvability of analytic equations by means of certain classes of functions, among which the d -th powers will play the principal role. This study begins by making precise what is meant by a formula for the zeros of a collection of polynomials and culminates in the theorem on the solvability of the monodromy group of such a formula, from which we deduce a topological version of the Abel-Ruffini theorem.

A second purpose of these notes is to illustrate how the ideas discussed open the way to fields of modern mathematics such as topology, differential geometry and algebraic geometry.

INDICE

1. Funzioni multivaluate	2
2. Superfici Riemanniane	10
3. Il gruppo di monodromia	18
4. Risolvibilità	37
5. Superfici Riemanniane, e poi ?	46
6. Teoria di Galois	48
7. Appendice: analisi complessa	50
Riferimenti bibliografici	54

L’idea per queste note è nata da *Abel’s Theorem in Problems and Solutions* di V.B. Alexeev, si veda [2], nel quale vengono delineate le idee di funzioni multivaluate e il loro gruppo di monodromia, nonché il teorema sulla risolvibilità di funzioni costruite estraendo d -esime radici. È la speranza dell’autore che queste note complementino il libro di Alexeev, tanto ricco di intuizione geometrica ed esercizi, con una teoria di superfici Riemanniane che soddisfi i criteri moderni di rigorosità, ma che resti accessibile ad uno studente con una familiarità basilare dell’analisi complessa e in cerca di un’introduzione alla topologia e alla geometria differenziale.

1. FUNZIONI MULTIVALUATE

Esempio prototipico 1.1. Consideriamo la seconda potenza $f : w \in \mathbb{C} \mapsto w^2 \in \mathbb{C}$. È una funzione analitica suriettiva, e diventa iniettiva quando ristretta ai settori aperti del piano

$$\mathcal{U}_1 = \mathbb{R}_{>0} \times i\mathbb{R}, \quad \mathcal{U}_2 = \mathbb{R}_{<0} \times i\mathbb{R}, \quad \mathcal{U}_3 = \mathbb{R} \times i\mathbb{R}_{>0}, \quad \mathcal{U}_4 = \mathbb{R} \times i\mathbb{R}_{<0},$$

e quindi si restringe a biiezioni

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_1 & & \mathcal{U}_3 \\ \searrow \sim & & \searrow \sim \\ \mathcal{U}_2 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \\ & & \mathcal{U}_4 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0} \end{array}$$

Definite sopra ognuno dei due sottoinsiemi $\mathcal{U}_{1,2} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$, $\mathcal{U}_{3,4} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$ che coprono \mathbb{C}^* , ci sono due funzioni inverse di f :

$$\sqrt[2]{\mathcal{U}_1}, \sqrt[2]{\mathcal{U}_2} : \mathcal{U}_{1,2} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \sqrt[2]{\mathcal{U}_3}, \sqrt[2]{\mathcal{U}_4} : \mathcal{U}_{3,4} \rightarrow \mathbb{C}^*, \quad \sqrt[2]{i}_{\mathcal{U}_1} = \frac{1+i}{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[2]{i}_{\mathcal{U}_3}, \quad \sqrt[2]{i}_{\mathcal{U}_2} = \frac{-1-i}{\sqrt[2]{2}} = \sqrt[2]{i}_{\mathcal{U}_4}.$$

Si può verificare che esse sono analitiche calcolandone esplicitamente la derivata. Le due inverse $\sqrt[2]{\mathcal{U}_1}$ e $\sqrt[2]{\mathcal{U}_3}$ coincidono sulla componente connessa $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{R} \times i\mathbb{R}_{\neq 0} = \mathcal{U}_{1,2} \cap \mathcal{U}_{3,4}$, e sono una l'opposta dell'altra sulla seconda componente $\mathbb{R} \times i\mathbb{R}_{<0}$.

In ogni vicinato di 0 invece non esiste neanche un'inversa analitica definita solo localmente, perché altrimenti la derivata f' dovrebbe essere non evanescente in quel vicinato.

La seconda potenza non ammette una funzione inversa globale semplicemente perché non è iniettiva, ma per di più è risaputo che non esiste neanche una inversa meramente da destra, ovvero una funzione analitica (anzi, neanche meramente continua) $\sqrt[2]{\cdot} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ tale che $f \circ \sqrt[2]{\cdot} = id_{\mathbb{C}^*}$. Tutto quello che abbiamo è una sorta di 'funzione multivaluata'

$$\sqrt[2]{\cdot} : \mathbb{C}^* \dashrightarrow \mathbb{C}^*, \quad \begin{cases} z \in \mathcal{U}_{1,2} \mapsto \{\sqrt[2]{z}_{\mathcal{U}_1}, \sqrt[2]{z}_{\mathcal{U}_2}\} \subseteq \mathbb{C}^* \\ z \in \mathcal{U}_{3,4} \mapsto \{\sqrt[2]{z}_{\mathcal{U}_3}, \sqrt[2]{z}_{\mathcal{U}_4}\} \subseteq \mathbb{C}^* \end{cases}.$$

La situazione appena vista è simile per tutte le funzioni analitiche non costanti, in quanto il sottoinsieme di zeri $Z(f')$ della loro derivata è discreto e, come stiamo per vedere, sono localmente invertibili fuori da questo sottoinsieme; nell'appendice 7 rammentiamo le fondamenta dell'analisi complessa necessarie per queste note.

Sia per il resto della sezione $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica su un aperto $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$.

Teorema 1.2 (Teorema della funzione inversa). Per ogni $w_0 \in \mathcal{S}$ con $f'(w_0) \neq 0$, esistono vicinati aperti $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ di w_0 e $U \subseteq \mathbb{C}$ di $f(w_0)$ tali che f si restringe a una biiezione analitica $f|_{\mathcal{U}}^U : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} U$ con inversa analitica, ovvero un *omeomorfismo analitico*.¹

Dimostrazione. Considerando \mathbb{C} come il piano euclideo \mathbb{R}^2 , la condizione $f'(w_0) \neq 0$ implica che la funzione $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ha matrice Jacobiana invertibile in w_0 . Il classico teorema della funzione inversa nell'analisi multidimensionale (che non dimostriamo qui) garantisce che f può essere ristretta a una biiezione $\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} U$ con inversa differenziabile tra vicinati aperti

¹Il teorema 1.2 è spesso presentato nella 'forma integrale' che abbiamo riportato nell'appendice 7.11, che è spesso considerata più elegante. C'è però da notare che ricavare l'inversa in questo modo richiede sapere che $f'(w_0) \neq 0$ implica che f è iniettiva in un vicinato aperto di w_0 , fatto del quale la dimostrazione più basilare è, secondo l'autore, la stessa usata per il teorema della funzione inversa in \mathbb{R}^2 .

in \mathbb{R}^2 ; da notare che questo non è caratteristico delle funzioni analitiche, ma vale per ogni funzione differenziabile. Allora, $f'(w)$ non svanisce neanche per ogni $w \in \mathcal{U}$ e l'inversa f^{-1} è analitica in ogni $z \in U$ perché la sua derivata complessa

$$(f^{-1})'(z) = \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{f^{-1}(\zeta) - f^{-1}(z)}{\zeta - z} = \lim_{\omega \rightarrow f^{-1}(z)} \frac{f^{-1}(f(\omega)) - f^{-1}(z)}{f(\omega) - z} = \lim_{\omega \rightarrow f^{-1}(z)} \frac{\omega - f^{-1}(z)}{f(\omega) - z} = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$$

converge al quoziante di quella di f . \square

Per le considerazioni che faremo nel resto dell'articolo è utile parafrasare il teorema della funzione inversa nel seguente modo.

Definizione 1.3. Chiamiamo una *branca di f sopra U* , per un sottoinsieme aperto $U \subseteq \mathbb{C}$, una funzione analitica $\beta : U \rightarrow \mathcal{S}$ con $f \circ \beta = id_U$, ovvero una inversa da destra di f .²

Lemma 1.4 (Esistenza e univocità delle branche). Per ogni $w_0 \in \mathcal{S}$ con $f'(w_0) \neq 0$, esiste una branca $\beta : U \rightarrow \mathcal{S}$ di f sopra un vicinato aperto di $f(w_0)$ con $\beta(f(w_0)) = w_0$ e $\beta(U) \subseteq \mathcal{S}$ aperto. Inoltre, ogni altra branca $\beta' : U' \rightarrow \mathcal{S}$ di f sopra un vicinato aperto di $f(w_0)$ con $\beta'(f(w_0)) = w_0$ è localmente uguale a β , ovvero esiste un vicinato aperto $V \subseteq U \cap U'$ tale che $\beta|_V = \beta'|_V$.

Dimostrazione. La funzione inversa $f^{-1} : V \rightarrow \mathcal{V}$ data dal Teorema 1.2 è la branca desiderata. Per l'univocità, siano β, β' due tali branche e $\mathcal{U} = \beta(U), \mathcal{U}' = \beta'(U')$. Allora $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$ è un vicinato aperto di w_0 , e quindi $V = \beta^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') \cap \beta'^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}')$ è un vicinato aperto di $f(w_0)$. Le branche si restringono a funzioni la cui composizione con f è l'identità su V :

$$V \xrightarrow[\beta']{\beta} \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \xrightarrow{f} V .$$

Visto che f è iniettiva su $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$, otteniamo $\beta|_V = \beta'|_V$. \square

Nota 1.5. Nel contesto del Lemma 1.4, e come visto nell'Esempio prototipico, se β e β' coincidono su V , allora coincidono anche sull'intera componente连通的 di V in $U \cap U'$. Questo segue dal fatto che $U \cap U'$ è partizionato in due sottoinsiemi aperti disgiunti

$$U \cap U' = \{z \in U \cap U' \mid \beta(z) = \beta'(z)\} \sqcup \{z \in U \cap U' \mid \beta(z) \neq \beta'(z)\}, \quad \emptyset \neq V \subseteq \{z \in U \cap U' \mid \beta(z) = \beta'(z)\},$$

e quindi la componente连通的 che contiene V deve essere contenuta nel primo di essi.

Se per di più β e β' coincidono sull'intero dominio comune $U \cap U'$, allora possiamo considerare estensione di β e β'

$$\tilde{\beta} : z \in U \cup U' \mapsto \begin{cases} \beta(z) & \text{se } z \in U \\ \beta'(z) & \text{se } z \in U' \end{cases} \in \mathcal{S},$$

che resta una funzione analitica con $f \circ \tilde{\beta} = id_{U \cup U'}$, ovvero una branca di f . Purtroppo, questo di solito non accade nelle situazioni interessanti; anzi, le situazioni interessanti sono proprio quelle dove questo non accade. In altre parole, due branchie locali non si incollano necessariamente a una branca globale. Infatti, una funzione analitica con derivata non evanescente è invertibile localmente (Teorema 1.2) ma non necessariamente globalmente.

²Quella che noi chiamiamo branca di f viene spesso chiamata invece branca della 'funzione multivaluata' inversa, ma dal contesto dovrebbe essere chiaro quale è intesa. Ad esempio, le $\sqrt[n]{u_k}$ nell'Esempio 1.1 vengono anche chiamate branchie della radice quadrata.

I due grandi nemici dell'invertibilità sono la mancanza di iniettività e di suriettività. Si da il caso che la maggior parte delle funzioni analitiche di interesse sono suriettive ma non iniettive. Questa ostruzione non ha dato per vinto Bernhard Riemann e i suoi contemporanei quando provavano comunque a dare un senso alla 'funzione inversa'. La loro terminologia era 'funzione multivaluata'³, una sorta di relazione $U \dashrightarrow \mathcal{U}$ che associa ad ogni punto z nel dominio l'insieme di (potenzialmente molteplici) valori nel codominio $\{w_k\}_k$ che vengono mappati a z dalla funzione originale. Per risolvere il problema dell'iniettività ci sono due opzioni:

- restringere il codominio cosicché ogni z mappa a una sola *branca* dell'immagine,
- rendere l'idea di 'funzione multivaluata' rigorosa espandendo il concetto di dominio, cosicché ogni branca w_k dei valori è mappata da una sola z_k .

La prima è descritta nel Lemma 1.4. Riemann approccia la seconda descrivendo nella sua dissertazione inaugurale [1, Sez. 5] il concetto di una "superficie estesa sopra il piano, con la possibilità che si ripieghi più volte su di esso, ma sempre con l'intesa che ogni sua sezione non intersechi alcuna delle altre giacenti sopra lo stesso vicinato del piano"⁴.

Permettendo che il dominio di una funzione sia una 'superficie Riemanniana', ovvero un qualche spazio giacente sopra il piano tale che sopra dei vicini $z \in U \subseteq \mathbb{C}$ questo è composto da sezioni di superfici $\{\mathcal{U}_k\}_k$ che non si intersecano, una 'funzione multivaluata' $g : U \dashrightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \{w_k\}_k$ può essere interpretata come una funzione nel senso ordinario $\tilde{g} : \bigsqcup_k \mathcal{U}_k \rightarrow \mathbb{C}, z_k \mapsto w_k$ per distinzione di casi.

Tornando all'esempio della seconda potenza $f : w \in \mathbb{C}^* \mapsto w^2 \in \mathbb{C}^*$, ci sono due branchi \mathcal{U}_k sopra ognuno dei due sottoinsiemi aperti $U_{1,2}$ e $U_{3,4}$ che coprono il codominio \mathbb{C}^* , ed f si restrinse ad una biiezine su ognuna di esse.

Con un poco di 'chirurgia geometrica' sul dominio di f , come illustrato nella Figura 2, otteniamo una 'superficie' composta da due punti sopra ogni punto del dominio \mathbb{C}^* . L'intesa che le sezioni della superficie ottenuta sopra vicinati del punto -1 non si intersecano è rispettata se immaginiamo di incollare lungo i tagli i mezzi dischi A, B e C, D *in modo formale*, ovvero in modo tale che l'intersezione vista nella figura è solo apparente. Questa 'superficie' è immaginata situata sopra il piano \mathbb{C} , in modo tale che, per ogni $z \in \mathbb{C}^*$, i punti giacenti verticalmente sopra z sono esattamente le due radici distinte $\{\sqrt[2]{z}, -\sqrt[2]{z}\}$. La proiezione verticale allora non è altro che la funzione stessa, in quanto manda ogni radice $\sqrt[2]{z}$ a z .

Nota 1.6. Localmente, la struttura di una 'superficie Riemanniana' \mathcal{S} è semplice: sopra palle $B_\epsilon(z)$ abbastanza piccole, \mathcal{S} è una unione di sezioni simili a $B_\epsilon(z)$ che non si intersecano,

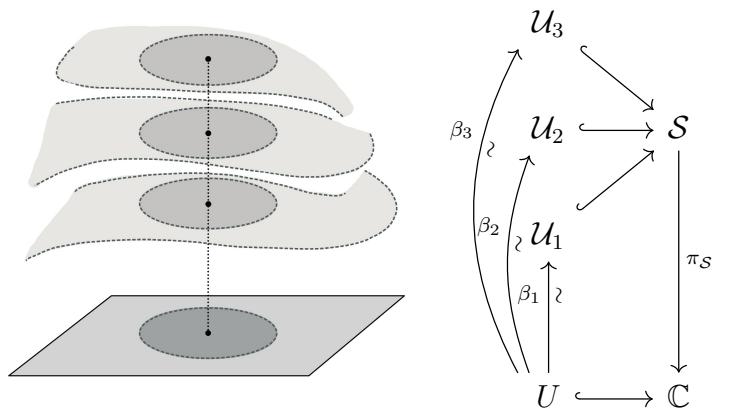


FIGURA 1. Le branchi \mathcal{U}_k di una 'superficie Riemanniana' \mathcal{S} sopra un aperto di $U \subseteq \mathbb{C}$.

³Qui e nel seguito useremo le virgolette singole per indicare termini che non abbiamo definito rigorosamente.

⁴Traduzione dell'autore, con un poco di licenza poetica.

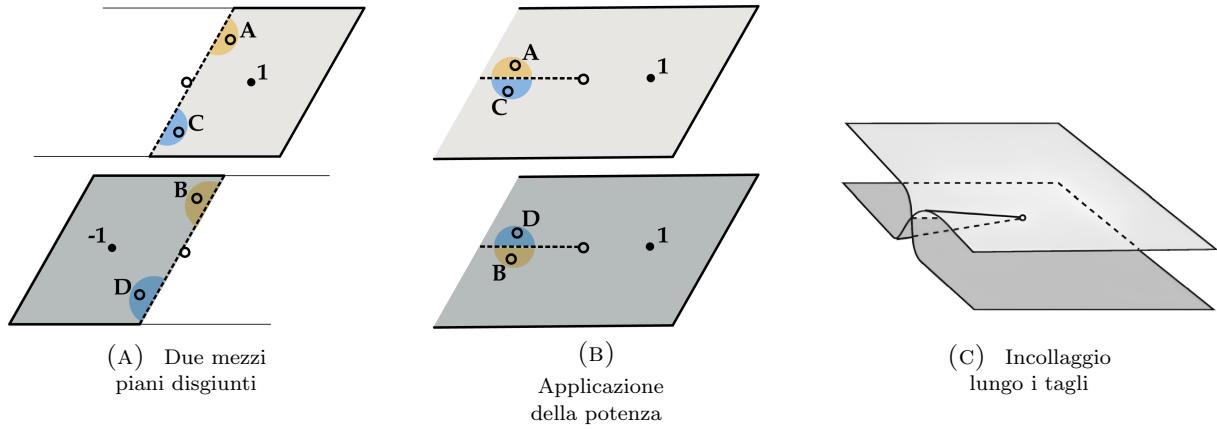


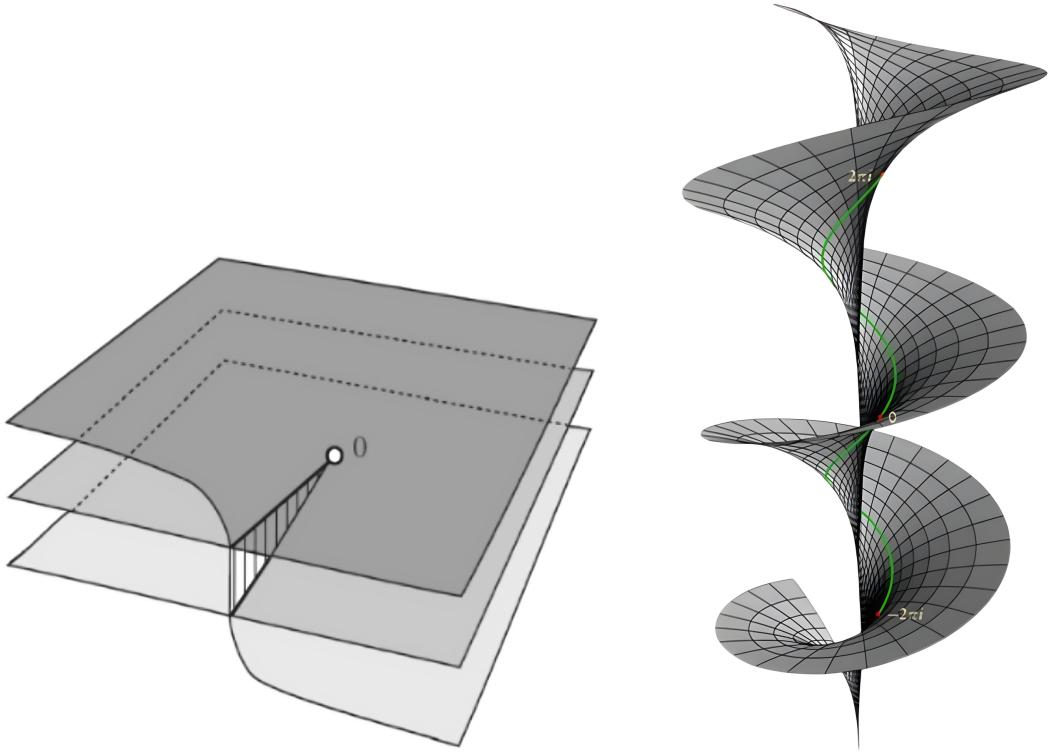
FIGURA 2. 'Superficie Riemanniana' della radice quadrata $\sqrt[2]{\cdot}$

come in Figura 1. Per sviluppare un'intuizione sulla struttura globale, un classico metodo è immaginarsi di vivere sul piano \mathbb{C} sottostante e incominciare a vagare pensierosamente sulla regione di punti adombrata da \mathcal{S} . Da qui si possono ammirare i valori della funzione multivaluata nel codominio, e per di più come cambiano con il proprio movimento. Ci si concentra su un particolare valore e lo si segue lungo il cammino. Se mai torniamo al punto di partenza, compariamo il valore inseguito con quello iniziale, che può ben essere diverso; in tal caso, abbiamo camminato intorno a un *punto di ramificazione*, ovvero attorno al quale la superficie si avvolge e le sue sezioni si permutano. Più i cammini diversi che si esplorano, più sarà chiaro come ogni sezione della superficie si trasmuta in ogni altra attorno ai punti di ramificazione.

Per la 'funzione multivaluata' $\sqrt[2]{\cdot} : \mathbb{C}^* \dashrightarrow \mathbb{C}^*$, partendo da $1 \in \mathbb{C}$ e ammirando inizialmente il valore $\sqrt[2]{1} = 1$, dopo una passeggiata attorno all'origine, se abbiamo seguito fedelmente come cambia il valore nel suo codominio, torniamo nel punto 1 osservando il valore -1 . Un secondo giro ci riporta al valore iniziale 1. Infatti, si vede nella Figura 2 che le sezioni della superficie sopra un vicinato di 1 si scambiano ogni volta che un punto fa una rivoluzione attorno all'origine (il punto di ramificazione).

- Esempi 1.7.** (1) Sia $1 \leq d \in \mathbb{N}$. La d -esima potenza $f : w \in \mathbb{C} \mapsto w^d \in \mathbb{C}$ è analitica con derivata $d \cdot w^{d-1}$ non evanescente su \mathbb{C}^* . Ogni $z = re^{2\pi i\theta} \in \mathbb{C}^*$ ha d radici distinte $f^{-1}\{z\} = \{\sqrt[d]{r}e^{2\pi i(\frac{\theta+k}{d})}\}_{0 \leq k < d}$, per ognuna delle quali esiste una branca $\beta_k : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ di f sopra il vicinato $U = \mathbb{C} \setminus \{\epsilon \cdot z \mid \epsilon \in \mathbb{R}_{\leq 0}\} \subseteq \mathbb{C}^*$ con $\beta_k(z) = \sqrt[d]{r}e^{2\pi i(\frac{\theta+k}{d})}$. Queste inverse da destra della d -esima potenza vengono anche denotate suggestivamente $\sqrt[d]{\cdot}$, anche se dipendono strettamente da quale delle d radici hanno nella loro immagine.
(2) La funzione esponenziale $\exp : w \in \mathbb{C} \mapsto e^w \in \mathbb{C}^*$ è analitica con se stessa come derivata non evanescente. Ogni $z = re^{2\pi i\theta} \in \mathbb{C}^*$ ha un insieme di logaritmi $\exp^{-1}\{z\} = \{\log(r) + 2\pi i\theta + 2\pi ik\}_{k \in \mathbb{Z}}$ indicato da \mathbb{Z} , per ognuno dei quali esiste una branca $\beta_k : U \rightarrow \mathbb{C}$ su $U = \mathbb{C} \setminus \{\epsilon \cdot z \mid \epsilon \in \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ con $\beta_k(z) = \log(r) + 2\pi i\theta + 2\pi ik$.

Esempio 1.8. Sia $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica con derivata non evanescente. Il Lemma 1.4 garantisce che per ogni $w \in \mathcal{S}$ esiste una branca $\beta : U \rightarrow \mathcal{S}$ di f sopra un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ con $\beta(f(w)) = w$ e $\beta(U) \subseteq \mathcal{S}$ aperto. Di conseguenza, \mathcal{S} può essere coperto da un insieme di



(A) Superficie della radice cubica

(B) Superficie
del logaritmo

branche $\{\beta_b\}_{b \in \mathcal{B}}$ le cui immagini aperte coprono $\mathcal{S} = \bigcup_b \beta_b(U_b)$ e che sono localmente uguali intorno ai punti dove coincidono, ovvero, per ogni due branchi $\beta_b, \beta_{b'}$ e un punto $z_0 \in U_b \cap U_{b'}$ nel dominio di entrambe, vale

$$\beta_b(z_0) = \beta_{b'}(z_0) \iff \exists V \subseteq U_b \cap U_{b'} \text{ aperto, } z_0 \in V : \beta_{b|V} = \beta_{b'|V}.$$

La 'superficie Riemanniana' per un'inversa di f è quindi non altro che il sottoinsieme aperto $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$, ma con un drastico cambio di prospettiva: \mathcal{S} è visto come giacere sopra \mathbb{C} , dove i punti 'sopra' un $z \in f(\mathcal{S})$ nell'immagine sono esattamente la preimmagine $f^{-1}\{z\}$. In casi semplici questa prospettiva può essere realizzata attraverso operazioni di 'chirurgia geometrica' come visto precedentemente.

La 'funzione multivaluata' inversa $f(\mathcal{S}) \dashrightarrow \mathcal{S}$ può essere interpretata come una funzione analitica ordinaria ' f^{-1} ' con \mathcal{S} come dominio, cosicché per ogni $z \in f(\mathcal{S})$ e \tilde{z} sopra z vale $f('f^{-1}'(\tilde{z})) = z = f(\tilde{z})$. In altre parole, $f \circ 'f^{-1}' = f$, quindi $id_{\mathcal{S}}$ è una tale funzione; tanti sofismi per arrivare a una tautologia.

Può apparire che allora il concetto di 'superficie Riemanniana' non sia altro che un modo diverso di vedere sottoinsiemi aperti di \mathbb{C} , ma ciò è perché fino ad ora abbiamo solo cercato di descrivere la funzione inversa. Nel prossimo esempio esploriamo una superficie più interessante.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{S} & & \\
 \downarrow f & \searrow id_{\mathcal{S}} = 'f^{-1}', & \\
 f(\mathcal{S}) & \xleftarrow[f]{\dashrightarrow} & \mathcal{S}
 \end{array}$$

Esempio 1.9. Cerchiamo ora di dare un senso alla 'funzione multivaluata' $\sqrt[2]{z(z-1)}$: $U \dashrightarrow \mathbb{C}$, su un dominio U ancora da determinare. Il nostro approccio è descrivere una 'superficie Riemanniana' \mathcal{S} giacente sopra U e una funzione analitica ' $\sqrt[2]{z(z-1)}$ ' : $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che, per ogni $z \in U$ e ogni $\tilde{z} \in \mathcal{S}$ sopra z , vale $p(\tilde{z})^2 = z(z-1)$. In altre parole, vogliamo un diagramma commutativo di funzioni analitiche

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\sqrt[2]{z(z-1)}} & \mathbb{C} \\ \downarrow \pi_{\mathcal{S}} & \nearrow z(z-1) & \downarrow w^2 \\ U & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \end{array}$$

dove $\pi_{\mathcal{S}}$ è la proiezione verticale dalla superficie al piano \mathbb{C} . Per ogni branca locale $\sqrt[2]{\mathcal{V}}$ della seconda potenza (rammenta l'Esempio prototipico 1.1), possiamo considerare la composizione $\beta_{\mathcal{V}} := \sqrt[2]{\mathcal{V}} \circ z(z-1)$, che sarebbe ben definita su tutti punti $z \in \mathbb{C}$ con $z(z-1) \in V$. Visto che le branche locali della seconda potenza coprono l'intero \mathbb{C}^* (ma non 0, dove non è localmente invertibile), otteniamo con questo approccio funzioni analitiche $\beta_{\mathcal{V}}$ con domini $\{z | z(z-1) \in V\}$ che coprono tutto $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ e che rendono commutativo il seguente diagramma.

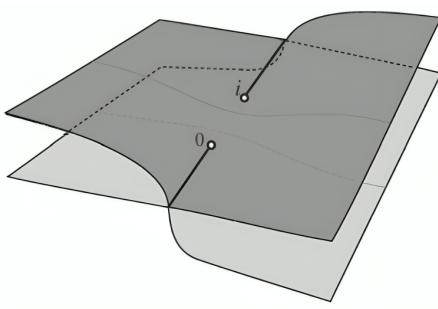
$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\sqrt[2]{z(z-1)}} & \mathbb{C}^* & & \\ \downarrow \pi_{\mathcal{S}} & \nearrow z(z-1) & \downarrow w^2 & & \\ \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} & \xrightarrow{\beta_{\mathcal{V}}} & \mathcal{V} & \xrightarrow{\sqrt[2]{\mathcal{V}}} & \mathbb{C}^* \\ \{z | z(z-1) \in V\} & \xrightarrow{z(z-1)} & V & \xrightarrow{w^2} & \end{array}$$

Denotiamo $U := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $f : z \in U \mapsto z(z-1) \in \mathbb{C}^*$ e $g : w \in \mathbb{C}^* \mapsto w^2 \in \mathbb{C}^*$. Allora \mathbb{C}^* è coperto da aperti $\{V_b\}_b$, ognuno con due branche $\sqrt[2]{\mathcal{V}_{b,1}}, \sqrt[2]{\mathcal{V}_{b,2}}$ di g , U è coperto dagli aperti $\{f^{-1}(V_b)\}_b$, ognuno con due funzioni analitiche $\beta_{\mathcal{V}_{b,1}} = \sqrt[2]{\mathcal{V}_b} \circ f, \beta_{\mathcal{V}_{b,2}} = \sqrt[2]{\mathcal{V}_{b,2}} \circ f$ tali che $g \circ \beta_{\mathcal{V}_{b,k}} = f|_{f^{-1}(V_b)}$. La 'superficie Riemanniana' \mathcal{S} con la funzione $p : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}^*$ desiderata devono avere la proprietà che sopra ogni punto $z \in f^{-1}(V_b)$ ci sono esattamente due elementi $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in \mathcal{S}$ mappati a $p(\tilde{z}_k) = \beta_{\mathcal{V}_{b,k}}(z), k = 1, 2$.

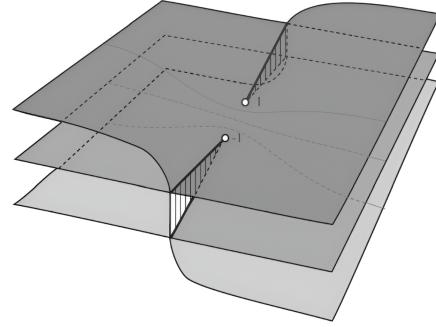
Nessuno ci impedisce di definire semplicemente (in maniera un poco tautologica)

$$\mathcal{C}_b := \bigsqcup_{z \in f^{-1}(V_b)} \{(z, \beta_{\mathcal{V}_{b,1}}(z)), (z, \beta_{\mathcal{V}_{b,2}}(z))\}, \quad p((z, y)) := y \quad \forall (z, y) \in \mathcal{C}_b,$$

come il sottoinsieme $\mathcal{C}_b \subseteq \mathcal{S}$ dei punti giacenti sopra $f^{-1}(V_b)$. Visto che sopra due $z, z' \in U$ differenti è possibile che i due numeri complessi $\beta_{\mathcal{V}_{b,k}}(z), \beta_{\mathcal{V}_{b,k}}(z')$ siano uguali, diciamo y_k , è cruciale distinguere in qualche modo il punto di y_k giacente sopra z e quello di y_k giacente sopra z' . Questo è assicurato prendendo come elemento di \mathcal{S} non il valore y_k di z, z' da solo, ma sempre accoppiato: $(z, y_k) \neq (z', y_k) \in \mathcal{S}$.



Superficie Riemanniana di
 $\sqrt[2]{z(z - i)}$



Superficie Riemanniana di
 $\sqrt[3]{(z + 1)(z - 1)}$

Analogamente all’Esempio 1.9 possiamo considerare la ’funzione multivaluata’ $\sqrt[2]{f}$ di una qualsiasi funzione analitica $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, sempre dopo aver eliminato dal dominio $f^{-1}\{0\}$. Più generalmente, nel senso spiegato nell’Esempio 1.8, ogni funzione analitica $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ con derivata non evanescente ha una ’funzione multivaluata’ inversa, che si può comporre con f per ottenere la ’funzione multivaluata’ $g^{-1} \circ f$. Questa verrà rappresentata da una funzione analitica con dominio una ’superficie’ \mathcal{S} sopra U .

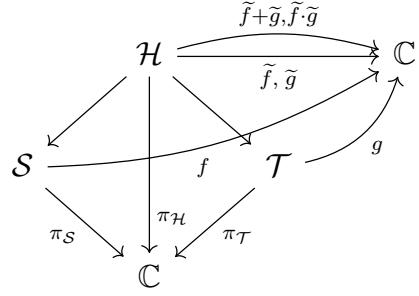
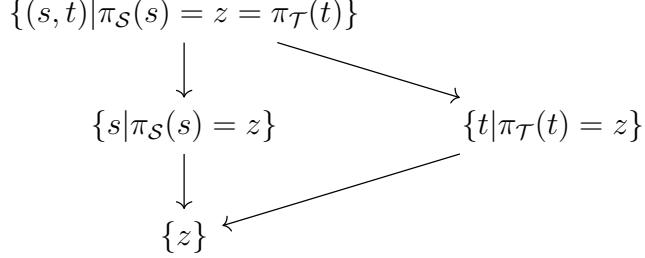
C’è ovviamente il desiderio di iterare questa procedura per rappresentare funzioni composte più complicate come $\sqrt[3]{1 + \sqrt[2]{z}}$, $\sqrt[3]{\exp(\sqrt[3]{1 + \sqrt[2]{z}})}$ o anche $\sqrt[3]{\log(\sqrt[2]{\sin(z)})}$. Supponiamo di avere un’altra funzione analitica $h : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$, allora la ’funzione multivaluata’ $h \circ g^{-1} \circ f$ può essere rappresentata sulla stessa ’superficie’ \mathcal{S} . Se $q : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{C}$ è un’altra funzione analitica con derivata non evanescente, allora $q^{-1} \circ h \circ g^{-1} \circ f$ sarà rappresentata su una ’superficie’ $\tilde{\mathcal{S}}$ sopra \mathcal{S} .

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\quad 'q^{-1} \circ h \circ g^{-1} \circ f' \quad} & \mathcal{Q} \\
 \downarrow \pi_{\tilde{\mathcal{S}}} & \nearrow 'g^{-1} \circ f' & \downarrow q \\
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\quad \quad \quad \quad \quad} & \mathcal{T} & \xrightarrow{\quad h \quad} & \mathbb{C} \\
 \downarrow \pi_{\mathcal{S}} & \nearrow f & \downarrow g & & \\
 U & \xrightarrow{\quad \quad \quad \quad \quad} & \mathbb{C} & &
 \end{array}$$

Ci sono altre operazioni tra funzioni analitiche oltre alla composizione; quelle che ci interessano sono quelle algebriche: $+, -, \cdot, \div$. Ad esempio, come rappresentare la ’funzione multivaluata’ $\sqrt[2]{z} + \sqrt[2]{z - 1}$? Per ogni argomento $z \neq 0, \neq 1$ i due termini hanno entrambi due valori, quindi quattro differenti somme. Allora costruiremo la ’superficie’ che sopra ogni $z \in \mathbb{C}$ ha quattro branch, una per ogni coppia di branch tra $\sqrt[2]{z}$ e $\sqrt[2]{z - 1}$, e su questa saranno disponibili rappresentazioni \tilde{f}, \tilde{g} di entrambe le funzioni multivalutate, e quindi anche la rappresentazione $\tilde{f} + \tilde{g}$ della loro somma.

Più generalmente, per ogni due ’superfici Riemanniane’ \mathcal{S}, \mathcal{T} ne troveremo una terza \mathcal{H} che sta sopra entrambe, sulla quale sono rappresentabili tutte le combinazioni binarie di funzioni rappresentabili su \mathcal{S} e \mathcal{T} . È in questo senso che interpreteremo ogni operazione algebrica tra

'funzioni multivaluate', ad esempio $\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{z}$, $\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{z-1}}$ e $\sqrt[5]{z + \frac{\sqrt[3]{z} \log(z)}{\sqrt[3]{z+\log(z)}}}$.



L'obiettivo della prossima sezione è rendere tutto quello discusso finora rigoroso, fissando una definizione di 'superficie Riemanniana' che rispecchi il modo in cui ne abbiamo fatto uso euristicamente. D'altro canto, il concetto di 'funzione multivaluta' non è altro che un modo di pensare alla proiezione da una superficie Riemanniana in modo inverso, ovvero come funzione dal piano alla superficie; ma questo punto di vista è molto ambiguo e non sembra fruttuoso cercare di formalizzarlo ulteriormente.

Nonostante l'ambiguità, il fenomeno descritto nella Nota 1.6, sulla trasformazione dei valori di una 'funzione multivaluta' indotta da una cammino attorno a un 'punto di ramificazione', gioca il ruolo più importante nello studio della 'superficie'. Verrà formalizzato per mezzo del 'gruppo di monodromia', un oggetto algebrico che racchiude tutte le informazioni su come le curve chiuse nella base trasformano le branche della 'superficie'.

Dopo aver gettato le fondamenta per una teoria delle 'superficie Riemanniane', nella Sezione 4 formalizzeremo questioni riguardanti la risolvibilità di equazioni analitiche. Il fatto che tali equazioni hanno in generale più soluzioni, vuol dire che una 'formula' che le risolve deve essere interpretata come una 'funzione multivaluta', che nel nostro linguaggio si traduce in interpretare il dominio dell'equazione come una 'superficie Riemanniana'. La domanda sulla esprimibilità di una 'formula' in termini di una classe di funzioni di interesse si traduce allora nella costruibilità della 'superficie' attraverso le procedure descritte sopra applicate alle funzioni nella classe.

2. SUPERFICI RIEMANNIANE

Motivati dagli esempi precedenti, siamo quindi spinti a dare una definizione rigorosa di cosa vuol dire, per un arbitrario insieme di elementi, avere la struttura di una 'superficie Riemanniana'. Un tale insieme \mathcal{S} è immaginato trovarsi sopra il piano \mathbb{C} , in modo che a ogni elemento $s \in \mathcal{S}$ sottostà precisamente un numero complesso $\pi_{\mathcal{S}}(s) \in \mathbb{C}$; qui π sta per *proiezione*, ma la chiameremo anche *carta* di \mathcal{S} perché da un modo di leggere il valore di ogni elemento in \mathcal{S} .

Definizione 2.1. Una *superficie Riemanniana* è un insieme \mathcal{S} con una funzione $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, chiamata *carta*, e una copertura consistente di branche $\{\beta_b\}_{b \in \mathcal{B}}$. Con questo intendiamo:

- (1) le *branche* $\beta_b : U_b \rightarrow \mathcal{S}$ sono funzioni da un aperto $U_b \subseteq \mathbb{C}$ con $\pi_{\mathcal{S}} \circ \beta_b = id_{U_b}$,
- (2) le immagini $\beta_b(U_b)$, che chiameremo anche *branche di \mathcal{S}* , coprono $\mathcal{S} = \bigcup_b \beta_b(U_b)$,
- (3) le branche sono localmente uguali intorno ai punti dove coincidono, ovvero, per ogni due branche $\beta_b, \beta_{b'}$ e un punto $z_0 \in U_b \cap U_{b'}$ nel dominio di entrambe, vale

$$\beta_b(z_0) = \beta_{b'}(z_0) \iff \exists V \subseteq U_b \cap U_{b'} \text{ aperto}, z_0 \in V : \beta_{b|V} = \beta_{b'|V}.$$

Spesso indichiamo superfici Riemanniane meramente dal loro insieme sottostante \mathcal{S} o con la loro carta $(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})$, omettendo i dati $\{\beta_b\}_{b \in \mathcal{B}}$ quando non sono rilevanti alla discussione.

Nota 2.2. Come visto nell'Esempio 1.8, una funzione analitica $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ con derivata non evanescente su un aperto \mathcal{S} induce una naturale struttura di superficie Riemanniana sull'insieme \mathcal{S} con f come carta; questa struttura la denoteremo semplicemente (\mathcal{S}, f) . Se la derivata di f svanisce in alcuni punti di \mathcal{S} , parliamo della superficie indotta $(\mathcal{S} \setminus Z(f'), f)$ coi punti di non invertibilità rimossi.

Nota 2.3. Ritracciamo i nostri passi. Un insieme \mathcal{S} di per se non porta alcuna struttura, contiene solo elementi anonimi. I dati aggiunti di una carta con un insieme di branche come descritto nella Definizione 2.1 danno a ogni elemento $s \in \mathcal{S}$ un nome, ovvero $\pi_{\mathcal{S}}(s)$, e un nome a una collezione di elementi a lui vicini, ovvero una branca \mathcal{U} . Inoltre, la collezione \mathcal{U} è data una interpretazione geometrica attraverso la biiezione $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{U})$, che permette di identificare gli elementi s nell'insieme \mathcal{U} come numeri complessi, e ci da diritto di iniziare a chiamarli 'punti' in una 'superficie'.

Avendo ogni 'punto' $s \in \mathcal{S}$ un 'vicinato' $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ simile ad un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$, possiamo cercare di interpretare cosa vuol dire per una funzione $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ essere analitica, e più generalmente una funzione $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ tra due superfici Riemanniane.

Le branche $\{\beta_b\}_{b \in \mathcal{B}}$ sono sufficienti per definire una struttura di superficie Riemanniana, nel senso che sono sufficienti per dare un nome a tutti gli elementi $s \in \mathcal{S}$, ma non c'è motivo di fermarsi qui. Possiamo considerare ogni altra funzione β che soddisfa le stesse proprietà.

Definizione 2.4. Sia $(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}, \{\beta_b\}_{b \in \mathcal{B}})$ una superficie Riemanniana. Chiamiamo il sottoinsieme aperto $\pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) = \bigcup_i U_i \subseteq \mathbb{C}$ la *base* della superficie.

Oltre alle branche β_b che definiscono la superficie, per ogni $U \subseteq \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$ aperto, chiamiamo *branche di $\pi_{\mathcal{S}}$ sopra U* anche tutte le funzioni $\beta : U \rightarrow \mathcal{S}$ tali che $\pi_{\mathcal{S}} \circ \beta = id_U$ e che sono localmente uguali a tutte le branche $\{\beta_b\}_{b \in \mathcal{B}}$ intorno ai punti dove coincidono, ovvero, se per ogni β_b e ogni punto $z_0 \in U_b \cap U$ nel dominio di entrambe vale

$$\beta_b(z_0) = \beta(z_0) \iff \exists V \subseteq U_b \cap U \text{ aperto}, z_0 \in V : \beta_{b|V} = \beta|_V.$$

L'immagine $\beta(U)$ di una branca β di $\pi_{\mathcal{S}}$ sopra U è chiamata una *branca di \mathcal{S} sopra U* .

Per ogni $z \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$, l'insieme di preimmagini $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z\}$ è chiamato la *fibra sopra* z , e la sua cardinalità è chiamato il *grado di \mathcal{S} sopra* z .

Definizione 2.5. Chiamiamo una funzione $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ tra due superfici Riemanniane *analitica* se per ogni $s \in \mathcal{S}$, esiste una branca $\beta' : V \rightarrow \mathcal{T}$ di $\pi_{\mathcal{T}}$ con $f(s) \in \beta'(V)$ e una branca $\beta : U \rightarrow \mathcal{S}$ di $\pi_{\mathcal{S}}$ con $s \in \beta(U)$ e $f(\beta(U)) \subseteq \beta'(V)$, tali che la funzione $\beta'^{-1} \circ f \circ \beta : U \rightarrow V$ è analitica nel senso ordinario della parola.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{T} & \\
 \swarrow & \downarrow \pi_{\mathcal{S}} & & \searrow & \downarrow \pi_{\mathcal{T}} \\
 \beta(U) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & \beta'(V) \\
 \beta \uparrow \pi_{\mathcal{S}} & & f & & \beta' \uparrow \pi_{\mathcal{T}} \\
 U & \xrightarrow{\beta'^{-1} \circ f \circ \beta} & V & & \mathbb{C}
 \end{array}$$

In tal caso, per ogni $s \in \mathcal{S}$, definiamo l'*ordine* $ord_s(f) := ord_{\pi_{\mathcal{S}}(s)}(\pi_{\mathcal{T}} \circ f \circ \beta)$, per una qualunque branca β che contiene s nell'immagine. Questa definizione è ben fondata perché tutte le branche con s nell'immagine sono localmente uguali e l'ordine di una funzione analitica dipende solo da un qualunque vicinato aperto.

Nota 2.6. La definizione è motivata dalla continuità per funzioni ordinarie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$: per ogni $B_\epsilon(f(z_0))$ esiste una $B_\delta(z_0)$ con $f(B_\delta(z_0)) \subseteq B_\epsilon(f(z_0))$.

Una definizione equivalente a 2.5 sarebbe: per ogni branca $\beta' : V \rightarrow \mathcal{T}$ di $\pi_{\mathcal{T}}$, la preimmagine $f^{-1}(\beta'(V)) \subseteq \mathcal{S}$ può essere coperta da branche $\beta : U \rightarrow \mathcal{S}$ di $\pi_{\mathcal{S}}$ con $\beta(U) \subseteq f^{-1}(\beta'(V))$ e per ognuna di esse la funzione $\beta'^{-1} \circ f \circ \beta$ è analitica nel senso ordinario. Questa corrisponde alla definizione equivalente di continuità per $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$: la preimmagine $f^{-1}(V)$ di ogni aperto $V \subseteq \mathbb{C}$ è anche un sottoinsieme aperto.

Lemma 2.7. Siano $\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{H}$ superfici Riemanniane.

- (1) La carta $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ e ogni branca $U \rightarrow \mathcal{S}$ di $\pi_{\mathcal{S}}$ sono funzioni analitiche.
- (2) Se $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ e $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{H}$ sono analitiche, allora lo è anche $g \circ f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{H}$.
- (3) Se $f, g : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ sono analitiche, allora lo sono anche $g + f, g \cdot f$.

Esempi 2.8. (1) Ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ con l'inclusione $U \hookrightarrow \mathbb{C}$ come carta è una superficie Riemanniana; nel seguito li tratteremo come tali implicitamente. Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è analitica nel senso ordinario se e solo se lo è in veste di funzione tra superfici Riemanniane.

- (2) Per $1 \leq d \in \mathbb{N}$, abbiamo la superficie Riemanniana indotta dalla d -esima potenza (\mathbb{C}^*, w^d) sulla base \mathbb{C}^* ; la chiamiamo *d-esima superficie radicale*.
- (3) Abbiamo la superficie Riemanniana indotta dall'esponenziale (\mathbb{C}, \exp) sulla base \mathbb{C}^* .
- (4) La funzione analitica $\cos : w \in \mathbb{C} \mapsto \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} \in \mathbb{C}$ è suriettiva e ha derivata $-\sin : w \in \mathbb{C} \mapsto -\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \in \mathbb{C}$ con zeri

$$Z(-\sin) = \pi \cdot \mathbb{Z} = 2\pi \cdot \mathbb{Z} \sqcup (2\pi \cdot \mathbb{Z} + \pi) = \cos^{-1}\{1\} \sqcup \cos^{-1}\{-1\}.$$

Quindi, $(\mathbb{C} \setminus 2\pi \cdot \mathbb{Z}, \cos)$ è una superficie Riemanniana sulla base $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Analogamente si possono considerare \sin e le altre funzioni trigonometriche estese.

- Esempi 2.9.**
- (1) Un sottoinsieme $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ di una superficie Riemanniana che è coperto da branche di \mathcal{S} contenute in \mathcal{U} eredita una naturale struttura di superficie Riemanniana con $\pi_{\mathcal{S}|\mathcal{U}}$ come carta e che rende l'inclusione $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{S}$ una funzione analitica. In tal caso, chiamiamo \mathcal{U} una *sottosuperficie* di \mathcal{S} .
 - (2) Ogni sottoinsieme del tipo $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(U) \subseteq \mathcal{S}$ di una superficie Riemanniana \mathcal{S} , per un $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, è una sottosuperficie di \mathcal{S} . I sottoinsiemi di questo tipo li chiamiamo *cilindri aperti* di \mathcal{S} .

Definizione 2.10. Chiamiamo una funzione analitica $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ tra superfici Riemanniane un *isomorfismo sopra* \mathbb{C} se esiste una funzione analitica $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ inversa, ovvero con $g \circ f = id_{\mathcal{S}}$ e $f \circ g = id_{\mathcal{T}}$, tali che entrambe discendono sulle basi, ovvero se ci sono funzioni analitiche $\bar{f} : \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) \rightarrow \pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})$, $\bar{g} : \pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) \rightarrow \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$ che rendono commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightleftharpoons[\sim]{\quad f \quad} & \mathcal{T} \\ \downarrow \pi_{\mathcal{S}} & \quad g \quad & \downarrow \pi_{\mathcal{T}} \\ \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) & \xrightleftharpoons[\sim]{\quad \bar{f} \quad} & \pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) \\ & \quad \bar{g} \quad & \end{array}$$

In tal caso le superfici sono dette *isomorfe sopra* \mathbb{C} , scrivendo $\mathcal{S} \overset{\cong}{\mathbb{C}} \mathcal{T}$.

- Esempi 2.11.**
- (1) Abbiamo $(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) \overset{\cong}{\mathbb{C}} (\mathcal{S}, \tau \circ \pi_{\mathcal{S}})$ per ogni superficie Riemanniana \mathcal{S} e $\tau : \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) \hookrightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica iniettiva. Intuitivamente, questo corrisponde a spostare la base della superficie in un'altra zona del piano \mathbb{C} .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow[\sim]{id_{\mathbb{C}}} & \mathcal{S} \\ \downarrow \pi_{\mathcal{S}} & & \downarrow \tau \circ \pi_{\mathcal{S}} \\ \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) & \xrightarrow[\sim]{\tau} & \tau(\pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})) \end{array}$$

- (2) La superficie triviale $(\mathbb{C}^*, id_{\mathbb{C}^*})$ non è isomorfa sopra \mathbb{C} ad alcuna delle superfici (\mathbb{C}^*, w^d) , per $2 \leq d \in \mathbb{N}$.
- (3) La superficie triviale $(\mathbb{C}, id_{\mathbb{C}})$ non è isomorfa sopra \mathbb{C} a (\mathbb{C}, exp) .

Nota 2.12. La Definizione 2.10 mira a rendere rigoroso un concetto di indistinguibilità tra superfici, fino a dettagli che non hanno alcuno impatto geometrico, come ad esempio traslazione della base nell'Esempio 2.11.(1).

Richiedere che 'l'omeomorfismo analitico' f discende a un omeomorfismo analitico tra le basi è fondamentale, perché a caratterizzare la geometria della superficie non è solo l'insieme sottostante \mathcal{S} ma anche la proiezione. Infatti, nonostante gli insiemi sottostanti di $(\mathbb{C}^*, id_{\mathbb{C}^*})$ e (\mathbb{C}^*, w^d) sono uguali, il modo in cui sono ripiegati sopra il piano come dettato dalla funzione w^d è ben diverso.

Definizione 2.13. Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ una funzione analitica tra superfici Riemanniane. Per ogni branca \mathcal{U} di \mathcal{S} , chiamiamo *branche di p sopra* \mathcal{U} tutte le funzioni analitiche $\beta' : \mathcal{U} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ tali che $p \circ \beta' = id_{\mathcal{U}}$; l'immagine $\beta'(\mathcal{U})$ è chiamata *branca di* $\tilde{\mathcal{S}}$ *sopra* \mathcal{U} , dove la funzione p è lasciata implicita.

Considerando la funzione analitica $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, una funzione $\beta : U \rightarrow \mathcal{S}$ è una branca di $\pi_{\mathcal{S}}$ sopra un $U \subseteq \mathbb{C}$ nel senso originale della Definizione 2.4 se e solo se lo è secondo questa generalizzazione, quindi non c'è ambiguità.

Lemma 2.14. Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ una funzione analitica tra superfici Riemanniane con $\pi_{\mathcal{S}} \circ p = \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}$. Se β è una branca di $\pi_{\mathcal{S}}$ sopra un $U \subseteq \mathbb{C}$ e β' è una branca di p sopra $\beta(U)$, allora $\beta' \circ \beta$ è una branca di $\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}$ sopra U .

Conversamente, per ogni branca β' di $\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}$, $p \circ \beta'$ è una branca di $\pi_{\mathcal{S}}$, e tutte le branchi di questo tipo coprono l'immagine $p(\tilde{\mathcal{S}}) \subseteq \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}}))$. Di conseguenza, $p(\tilde{\mathcal{S}}) \subseteq \mathcal{S}$ è una sottosuperficie Riemanniana.

Definizione 2.15. Siano $(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}), (\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}})$ superfici Riemanniane e $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica. Il *prodotto fibrato* di \mathcal{S} e \mathcal{T} rispetto a f è definito come l'insieme

$$\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}} := \{(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} \mid f(s) = \pi_{\mathcal{T}}(t)\},$$

Ci sono le due proiezioni $p_{\mathcal{S}}, p_{\mathcal{T}}$ che commutano: $f \circ p_{\mathcal{S}} = \pi_{\mathcal{T}} \circ p_{\mathcal{T}}$.

Ora dotiamo il prodotto fibrato di una naturale struttura di superficie Riemanniana con $\pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}$ come carta e con branchi indicate da coppie $\beta' \bullet \beta$ di branchi di $\pi_{\mathcal{S}}$ e di $\pi_{\mathcal{T}}$.

Sia β' una branca di $\pi_{\mathcal{T}}$ sopra un aperto $V \subseteq \pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})$. Visto che f è analitica e V è tecnicamente una branca della superficie \mathbb{C} , dalla Definizione 2.5 segue che $f^{-1}(V)$ può essere coperto da branchi β con $f(\beta(U)) \subseteq V$. Da $\pi_{\mathcal{T}} \circ \beta' = id_V$ segue $\pi_{\mathcal{T}} \circ (\beta' \circ f) \circ \beta = f \circ \beta$, e quindi $\beta' \bullet \beta := (id \times (\beta' \circ f)) \circ \beta : U \rightarrow \mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$ è una funzione ben definita con $(\pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}) \circ (\beta' \bullet \beta) = id_U$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}} & \xrightarrow{p_{\mathcal{T}}} & \mathcal{T} & & \\
\downarrow p_{\mathcal{S}} & & \downarrow \pi_{\mathcal{T}} & & \\
\mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} & & \\
\downarrow \pi_{\mathcal{S}} & & \downarrow & & \\
f^{-1}(V) & \xrightarrow{f} & V & & \\
\downarrow \beta & & \downarrow & & \\
U & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C} & &
\end{array}$$

$\xrightarrow{id \times (\beta' \circ f)}$ $\xrightarrow{\beta'}$ $\xrightarrow{\beta}$

Inoltre, due funzioni di questo tipo, diciamo $\beta'_1 \bullet \beta_1, \beta'_2 \bullet \beta_2$, sono localmente uguali intorno ai punti dove si intersecano: sia $z_0 \in U_1 \cap U_2$ nel dominio di entrambe sul quale le due funzioni coincidono. Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
(\beta_1(z_0), \beta'_1(f(z_0))) &= (\beta'_1 \bullet \beta_1)(z_0) = (\beta'_2 \bullet \beta_2)(z_0) = (\beta_2(z_0), \beta'_2(f(z_0))) \\
\implies \beta_1(z_0) &= \beta_2(z_0), \beta'_1(f(z_0)) = \beta'_2(f(z_0)) \stackrel{\beta_k, \beta'_k \text{ sono branchi}}{\implies} \beta_{1|U} = \beta_{2|U}, \beta'_{1|U} = \beta'_{2|U}
\end{aligned}$$

per dei vicinati aperti $z_0 \in \tilde{U} \subseteq U_1 \cap U_2$ e $f(z_0) \in \tilde{V} \subseteq V_1 \cap V_2$. Visto che $f \circ \beta$ è analitica per la Definizione 2.5, in particolare continua, $\tilde{U} \cap \beta^{-1}(f^{-1}(\tilde{V})) \subseteq U_1 \cap U_2$ è un altro vicinato aperto di z_0 , sul quale per di più $\beta'_1 \bullet \beta_1$ e $\beta'_2 \bullet \beta_2$ coincidono; quindi la condizione di consistenza è verificata.

Riassumendo, l'insieme di branchi $\{\beta' \bullet \beta\}_{\beta: U \rightarrow \mathcal{S}}^{\beta': V \rightarrow \mathcal{T}}$, dove β' sono branchi di $\pi_{\mathcal{T}}$ e β sono branchi di $\pi_{\mathcal{S}}$ con $\beta(U) \subseteq f^{-1}(V)$, forma una copertura consistente dell'insieme $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$ rispetto alla carta $\pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}$, ovvero definisce una superficie Riemanniana.

Esempi 2.16. (1) Per ogni superficie Riemanniana \mathcal{S} e $V \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f^{-1}(V) \subseteq \mathcal{S}$ è una sottosuperficie isomorfa sopra \mathbb{C} al prodotto fibrato

$$(f^{-1}(V), \pi_{\mathcal{S}|f^{-1}(V)}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{S}_f \times V_{\pi_V}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}), s \mapsto (s, f(s)).$$

$$\begin{array}{ccccc} & \mathcal{S}_f \times V_{\pi_V} & \xrightarrow{p_V} & V & \\ \text{---} \nearrow \sim & \downarrow p_{\mathcal{S}} & \nearrow f|_{f^{-1}(V)} & \downarrow \pi_V & \\ f^{-1}(V) & \xrightarrow{\pi_{f^{-1}(V)}} & \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \end{array}$$

La proiezione p_V si può interpretare come la restrizione di f a una funzione analitica con immagine contenuta in V . In particolare, per $f = \pi_{\mathcal{S}}$ otteniamo il cilindro aperto

$$(\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(V), \pi_{\mathcal{S}|\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(V)}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times V_{\pi_V}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}), s \mapsto (s, \pi_{\mathcal{S}}(s)).$$

- (2) Considera una funzione analitica $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ da un sottoinsieme aperto $U \subseteq \mathbb{C}$. Il prodotto fibrato $U_f \times \mathbb{C}_{w^d}^*$ ha grado d sopra $p_U(U_f \times \mathbb{C}_{w^d}^*) \subseteq U$; ma si noti che se f ha zeri, allora questa inclusione è stretta. Per ogni branca $\beta : V \rightarrow U_f \times \mathbb{C}_{w^d}^*$ otteniamo una funzione analitica $V \rightarrow \mathbb{C}^*$ che soddisfa $(p_{\mathbb{C}^*} \circ \beta)^d = f|_V$; ovvero una d -esima radice di f .

$$\begin{array}{ccccc} & U_f \times \mathbb{C}_{w^d}^* & \xrightarrow{p_{\mathbb{C}^*}} & \mathbb{C}^* & \\ \text{---} \nearrow \beta & \downarrow p_U & \nearrow f & \downarrow w^d & \\ V & \xrightarrow{\quad} & U & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C} \end{array}$$

Questa è la costruzione che abbiamo indagato nell'Esempio 1.9, dicendo che la 'funzione multivalutata' $\sqrt[d]{f}$ è rappresentata da $p_{\mathbb{C}^*}$ sulla superficie Riemanniana $U_f \times \mathbb{C}_{w^d}^*$ sopra $p_U(U_f \times \mathbb{C}_{w^d}^*) = U \setminus Z(f)$. Per $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica da una qualsiasi superficie Riemanniana il risultato è analogo.

- (3) Considera le superfici radicali (\mathbb{C}^*, w^2) e (\mathbb{C}^*, w^3) . Allora il prodotto fibrato $\mathbb{C}_{w^2}^* \times \mathbb{C}_{w^3}^*$ è isomorfo sopra \mathbb{C} a (\mathbb{C}^*, w^6) .
(4) Per due superfici Riemanniane \mathcal{S} e \mathcal{T} possiamo considerare il prodotto fibrato *sulla base* $\mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$. Questo ha la proprietà che tutte le funzioni analitiche $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{C}$ si 'estendono' a funzioni analitiche

$${ }^{\mathcal{T}} f := f \circ p_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}} \rightarrow \mathbb{C}, \quad {}^{\mathcal{S}} g := g \circ p_{\mathcal{T}} : \mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}} \rightarrow \mathbb{C}.$$

In particolare, su $\mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$ possiamo considerare le funzioni analitiche ${}^{\mathcal{T}} f + {}^{\mathcal{S}} g$, ${}^{\mathcal{T}} f - {}^{\mathcal{S}} g$, ${}^{\mathcal{S}} f \cdot {}^{\mathcal{T}} g$ e (se g non svanisce) ${}^{\mathcal{T}} f \div {}^{\mathcal{S}} g$.

- (5) Date due funzioni analitiche $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{H}$ tra superfici Riemanniane, possiamo 'estendere' f per ottenere una composizione

$${}^{\mathcal{T}} \tilde{f} := p_{\mathcal{T}} : \mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}} \rightarrow \mathcal{T}, \quad g \circ {}^{\mathcal{T}} \tilde{f} : \mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}} \rightarrow \mathcal{H}.$$

Gli esempi precedenti illustrano come funzioni analitiche con domini superfici Riemanniane a priori differenti si possano 'estendere' a un dominio comune, per essere poi composte ad esempio con operazioni algebriche $+, -, \cdot, \div$ o con altre funzioni analitiche. Ciò rende rigorosa l'idea di combinare 'funzioni multivalutate' come abbiamo visto nella Sezione 1.

Esploriamo ora due situazioni molto concrete: le formule risolutive per le equazioni polinomiali di grado 2 e 3, che esprimiamo come funzioni analitiche da una superficie Riemanniana.

Esempio 2.17. Consideriamo il polinomio quadratico generale $P_{a,b,c}(w) = aw^2 + bw + c$ per $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$. È ben risaputo che $w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{C}$ sono i due (potenzialmente uguali) numeri complessi con $P_{a,b,c}(w_{1,2}) = 0$. Un modo meno ambiguo di esprimere questo fatto è:

$$\text{per ogni } u \in \mathbb{C} \text{ con } u^2 = b^2 - 4ac \text{ vale } P_{a,b,c}\left(\frac{-b+u}{2a}\right) = 0.$$

Visto che $P_{a,b,c}(w) = 0$ se e solo se $P_{a,b}(w) = c$ per il polinomio $P_{a,c}(w) = -aw^2 - bw$ i cui coefficienti non dipendono da c , ricollegandoci ai temi discussi nella Sezione 1 potremmo dire: la 'funzione multivaluata' $z \mapsto \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4az}}{2a}$ soddisfa $P_{a,b} \circ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4az}}{2a} = id_{\mathbb{C}}$. Vediamo come si traduce ciò nel linguaggio delle superfici Riemanniane.

Possiamo rappresentare ' $z \mapsto \sqrt{b^2 - 4az}$ ' dalla proiezione $p_{\mathbb{C}^*}$ con dominio la superficie

$$(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) = (\mathbb{C}_{b^2-4az} \times \mathbb{C}_{w^2}^*, p_{\mathbb{C}}), \quad \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{b^2}{4a} \right\}.$$

Componendo con la funzione analitica $\frac{-b+w}{2a}$ con dominio la superficie (\mathbb{C}^*, w^2) otteniamo una rappresentazione $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$ della 'funzione multivaluata' $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4az}}{2a}$. Il fatto che, per ogni z , ogni valore di questa funzione è una soluzione a $P_{a,b,z}$, trova un'interpretazione naturale nella commutatività del seguente diagramma, ovvero che $P_{a,b} \circ \mathcal{F} = \pi_{\mathcal{S}}$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \nearrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4az}}{2a}, & & \\ & & \mathcal{F} = \frac{-b + p_{\mathbb{C}^*}}{2a} & & \\ \mathcal{S} & \xrightarrow[p_{\mathbb{C}^*}]{'\sqrt{b^2 - 4az}'} & \mathbb{C}^* & \xrightarrow[\sim]{\frac{-b+w}{2a}} & \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{b}{2a} \right\} \\ \downarrow \pi_{\mathcal{S}} & & \downarrow w^2 & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[\sim]{b^2 - 4az} & \mathbb{C} & & \mathbb{C} \\ & & \searrow P_{a,b} = -aw^2 - bw & & \end{array}$$

Per questo chiamiamo la funzione analitica \mathcal{F} con dominio \mathcal{S} una *formula per gli zeri dei polinomi* $\{P_{a,b,c}\}_{c \in U}$ in termini del coefficiente c , dove $U = \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{b^2}{4a} \right\}$.

Analogamente si può considerare la formula per il coefficiente b . Abbiamo $P_{a,b,c}(w) = 0$ se e solo se $P_{a,c}(w) = b$ per la funzione analitica $P_{a,c}(w) = \frac{-aw^2 - c}{w}$ che non dipende da b ; in questo caso la funzione analitica è solo definita su \mathbb{C}^* .

Possiamo rappresentare ' $z \mapsto \sqrt{z^2 - 4ac}$ ' dalla proiezione $p_{\mathbb{C}^*}$ con dominio la superficie

$$(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) = (\mathbb{C}_{z^2-4ac} \times \mathbb{C}_{w^2}^*, p_{\mathbb{C}}), \quad \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) = \mathbb{C} \setminus \{\pm \sqrt{4ac}\}.$$

Su \mathcal{S} abbiamo le due funzioni analitiche $\pi_{\mathcal{S}}$ e $p_{\mathbb{C}^*}$, che possiamo sommare per ottenere la funzione analitica $\mathcal{F} = \frac{-\pi_{\mathcal{S}} + p_{\mathbb{C}^*}}{2a} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, rappresentante ' $z \mapsto \frac{-z \pm \sqrt{z^2 - 4ac}}{2a}$ '.

Visto che $P_{a,c}$ non è definito in 0, per comporre \mathcal{F} con $P_{a,c}$ dobbiamo restringere \mathcal{F} al sottoinsieme aperto $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \setminus \mathcal{F}^{-1}\{0\}$ rimuovendo un sottoinsieme finito di punti; i punti che abbiamo eliminato hanno un'espressione complicata in termini di a e c , ma non proveremo a descriverla.

Il fatto che, per ogni z , il valore di $\frac{-z \pm \sqrt{z^2 - 4ac}}{2a}$ è una soluzione a $P_{a,z,c}$, trova un'interpretazione nella commutatività del seguente diagramma, ovvero che $P_{a,c} \circ \mathcal{F}_{|\tilde{\mathcal{S}}} = \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}$.

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{F}_{|\tilde{\mathcal{S}}} = \frac{-\pi_{\mathcal{S}}|\tilde{\mathcal{S}} + p_{\mathbb{C}^*}|\tilde{\mathcal{S}}}{2a} & \\
\tilde{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\quad, \frac{-z \pm \sqrt{z^2 - 4ac}}{2a}, \quad} & \mathbb{C}^* \\
\downarrow & & \downarrow id_{\mathbb{C}^*} \\
\mathcal{S} & \xrightarrow{\quad, \frac{\sqrt{z^2 - 4ac}}{p_{\mathbb{C}^*}}, \quad} & \mathbb{C} \\
\downarrow \pi_{\mathcal{S}} & \downarrow w^2 & \\
\mathbb{C} & \xrightarrow{\quad, \frac{b^2 - 4az}{w^2}, \quad} & \mathbb{C}^* \\
& P_{a,c} = \frac{-aw^2 - c}{w} &
\end{array}$$

Per questo chiamiamo $\mathcal{F}_{|\tilde{\mathcal{S}}}$ con dominio $\tilde{\mathcal{S}}$ una *formula per gli zeri dei polinomi* $\{P_{a,b,c}\}_{c \in U}$ in termini del coefficiente b , dove $U = \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}})$ è un sottoinsieme con complemento $\mathbb{C} \setminus U$ finito.

Analogamente possiamo dare un senso a una formula in termini del coefficiente a .

Esempio 2.18. Consideriamo il polinomio cubico depresso generale $P_{p,q}(w) = w^3 + pw + q$ per $p, q \in \mathbb{C}$; ogni polinomio cubico può essere portato in forma depresso attraverso una trasformazione affine del piano.

La formula di Cardano⁵, generalizzata ai numeri complessi, ci dice che

$$w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \text{ soddisfa } P_{p,q}(w) = 0 .$$

Un modo meno ambiguo di esprimere questo fatto è:⁶

per ogni $u, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ con $u^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, $v_1^3 = -\frac{q}{2} + u$, $v_1 v_2 = -\frac{p}{3}$, vale $P_{p,q}(v_1 + v_2) = 0$.

Visto che $P_{p,q}(w) = 0$ se e solo se $P_p(w) = q$ per il polinomio $P_p(w) = -w^3 - pw$ che non dipende da q , potremmo dire: la 'funzione multivaluata' in termini di radicali scritta sopra, come funzione di q , è una inversa da destra di P_p .

Definiamo la superficie Riemanniana

$$\Delta : z \in \mathbb{C} \mapsto \frac{z^2}{4} + \frac{p^3}{27} \in \mathbb{C}, \quad (\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) = (\mathbb{C}_{\Delta} \times \mathbb{C}_{w^2}^*, p_{\mathbb{C}}), \quad \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) = \mathbb{C} \setminus \{\pm \sqrt{-\frac{4p^3}{27}}\},$$

dove la proiezione $p_{\mathbb{C}^*}$, che chiameremo u , rappresenta $\sqrt{\frac{z^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Su \mathcal{S} abbiamo le due funzioni analitiche $\pi_{\mathcal{S}}$ e u , che possiamo sommare per ottenere la funzione analitica $-\frac{\pi_{\mathcal{S}}}{2} + u$.

Allora definiamo la superficie

$$(\mathcal{H}, \pi_{\mathcal{H}}) = (\mathcal{S}_{-\frac{\pi_{\mathcal{S}}}{2} + u} \times \mathbb{C}_{w^3}^*, p_{\mathbb{C}}), \quad \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) = \mathbb{C} \setminus \{\dots\},$$

⁵Cardano ha espresso la formula solo per le radici reali, nel caso in cui la radice cubica $\sqrt[3]{\cdot}$ è ben definita e univoca. Questo caso accade quando $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$.

⁶Le ambiguità sono dovute al fatto che le radici non sono univoche, quindi bisognerebbe stare a specificare quali prendere, cosa vuol dire \pm, \mp , etc. Questa è anche la ragione per la condizione $v_1 v_2 = -\frac{p}{3}$; vedi Wikipedia. Da notare come l'espressione è resa inequivocabile quando passiamo da descrivere la formula 'dal basso in alto', come funzioni multivaluate, a descriverela 'dall'alto in basso', come proiezioni da una superficie Riemanniana.

dove la proiezione $p_{\mathbb{C}^*}$, che chiameremo v , rappresenta $\sqrt[3]{-\frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. Su \mathcal{H} abbiamo anche la funzione analitica $-\frac{p}{3v}$, e quindi anche $\mathcal{F} = v - \frac{p}{3v}$.

Il fatto che, per ogni $z \in \pi_{\mathcal{H}}(\mathcal{H})$ e $\tilde{z} \in \mathcal{H}$ sopra z , il valore $\mathcal{F}(\tilde{z})$ è del tipo prescritto dalla formula di Cardano, ovvero è una soluzione a $P_{p,z}$, trova un'interpretazione nella commutatività del seguente diagramma, ovvero che $P_p \circ \mathcal{F} = \pi_{\mathcal{H}}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{H} & \xrightarrow{v} & \mathbb{C}^* & \xrightarrow{\mathcal{F}=v-\frac{p}{3v}} & \mathbb{C} \\
 \downarrow \pi_{\mathcal{H}} & & \downarrow w^3 & & \downarrow id_{\mathbb{C}} \\
 \mathcal{S} & \xrightarrow{u} & \mathbb{C}^* & \xrightarrow{-\frac{\pi_S}{2}+u} & \mathbb{C} \\
 \downarrow \pi_{\mathcal{S}} & & \downarrow w^2 & & \downarrow \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow[\sim]{\Delta} & \mathbb{C} & & \mathbb{C}
 \end{array}$$

$P_p = -w^3 - pw$

Per questo chiamiamo \mathcal{F} con dominio \mathcal{H} una *formula per gli zeri dei polinomi* $\{P_{p,q}\}_{q \in U}$ in termini del coefficiente q , dove $U = \pi_{\mathcal{H}}(\mathcal{H})$ è un sottoinsieme con complemento $\mathbb{C} \setminus U$ finito.

3. IL GRUPPO DI MONODROMIA

In questa sezione formalizziamo il fenomeno descritto nella Nota 1.6: il valore di una 'funzione multivaluata' si trasforma lungo cammini sulla base attorno a punti di ramificazione. Nel linguaggio delle superfici Riemanniane, questa è l'osservazione che curve continue sulla superficie possono partire e terminare in punti diversi, nonostante la loro ombra sulla base attraverso la proiezione è una curva chiusa; in questo caso diremo che il punto di partenza si trasforma nel punto di arrivo attraverso l'azione di monodromia della curva chiusa.

Si da il caso che il gruppo di tutte queste azioni di monodromia è una invariante algebrica molto potente per decidere quando esistono particolari funzioni analitiche tra superfici Riemanniane. Ad esempio, nella Sezione 4 vedremo che i gruppi di monodromia di superfici costruibili da operazioni algebriche ed estrazione di radici sono, come si dice, 'risolvibili', fatto che useremo per escludere la possibilità che certi polinomi, dei quali la superficie Riemanniana ha gruppi non 'risolvibili', ammettano una formula risolutiva in termini dei loro coefficienti.

Prima dobbiamo occuparci di una ostruzione che può impedire di eseguire l'esperimento mentale della Nota 1.6 su una qualsiasi superficie Riemanniana.

Esempio 3.1. Consideriamo la funzione analitica $f : w \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} \mapsto \frac{w}{w^2 - 1} \in \mathbb{C}$. Questa induce la superficie Riemanniana (\mathcal{S}, f) coi punti di non invertibilità rimossi

$$\mathcal{S} = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1, \pm i\} \quad f'(w) = -\frac{w^2 + 1}{(w^2 - 1)^2}$$

sulla base $U = f(\mathcal{S}) = \mathbb{C} \setminus \{\pm \frac{i}{2}\}$. La fibra $f^{-1}\{z\}$ sopra ogni $z \in U \setminus \{0\}$ ha 2 elementi, ovvero le distinte soluzioni dell'equazione $w = (w^2 - 1)z$, mentre la fibra $f^{-1}\{0\} = \{0\}$ ha un solo elemento. Ciò vuol dire che la superficie non è 'uniforme' sopra vicinati di 0, nel senso che esistono branche di \mathcal{S} sopra $B_r(0) \subseteq U$ per $r > 0$ abbastanza piccolo, ma queste non coprono tutto il cilindro aperto $f^{-1}(B_r(0))$.

Se $\{z_k\}_k \subseteq U$ è una sequenza di punti che tende a 0, allora ci sono sequenze $\{w_{k,1}\}_k, \{w_{k,2}\}_k \subseteq \mathcal{S}$ con $f(w_{k,1}) = f(w_{k,2}) = z_k$, per ogni k , tali che $\{w_{k,1}\}_k$ tende a 0 mentre $\{w_{k,2}\}_k$ tende a ∞ . Il punto mancante nel cilindro aperto $f^{-1}(B)$ per renderlo 'uniforme' sopra un vicinato $B \subseteq U$ di 0 è quindi il punto ad infinito. Quindi, possiamo inseguire solo i valori $\{w_{k,1}\}_k$ della 'funzione multivaluata' $f^{-1} : U \dashrightarrow \mathcal{S}$ lungo un cammino attraverso i punti $\{z_k\}_k$ e 0, ma non i valori $\{w_{k,2}\}_k$, in quanto non convergono ad alcun limite in \mathcal{S} .

Nell'esempio appena visto, certi punti nella base non hanno vicinati aperti sopra i quali le branche coprono l'intero cilindro aperto. Questo impedisce di 'sollevare' cammini γ nella base attraverso il punto a cammini $\tilde{\gamma}$ sulla superficie. Se invece la superficie è uniforme, nel senso della prossima definizione, allora ogni curva γ contenuta nella base sarà la proiezione di tante curve $\tilde{\gamma}$ sulla superficie quanti sono i punti sopra il punto di partenza $\gamma(0)$. Le superfici che ci interessano hanno tutte questa 'proprietà di sollevamento', si veda il Lemma 3.12, che sarà un ingrediente fondamentale per definire l'azione di monodromia.

Definizione 3.2. Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ una funzione analitica tra due superfici Riemanniane. Una branca \mathcal{U} di \mathcal{S} è chiamata *uniformemente rivestita da p* se le branche di p sopra \mathcal{U} coprono l'intera preimmagine $p^{-1}(\mathcal{U})$. Se l'intera \mathcal{S} può essere coperta da branche uniformemente rivestite da p , allora p è detta *uniforme*.

Chiamiamo la superficie \mathcal{S} *uniforme* se lo è la funzione analitica ristretta $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \twoheadrightarrow \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$.

Nota 3.3. La mancanza di uniformità può essere una questione puramente formale, non avente a che fare con un comportamento anomalo della funzione analitica; esempi sono 3.4.(1) e 3.5.

- Esempi 3.4.**
- (1) Per un sottoinsieme aperto stretto $U \subset \mathbb{C}$, l'inclusione $U \hookrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione analitica non uniforme perché il dominio è stato ristretto artificialmente; solo estendendo al suo dominio naturale \mathbb{C} , oppure restringendo il suo codominio a U , diventa uniforme. Ciò non è da confondere col fatto che la superficie triviale (U, π_U) è uniforme.
 - (2) Un sottoinsieme aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ è uniformemente rivestito dalla carta $\pi_S : S \rightarrow \mathbb{C}$ di una superficie S se e solo se le branche di S sopra U coprono l'intero cilindro aperto $\pi_S^{-1}(U)$; in particolare deve valere $U \subseteq \pi_S(S)$. Se S è uniforme lo sono anche tutti i suoi cilindri aperti.
 - (3) Per ogni polinomio non costante P di grado d , la superficie Riemanniana $(P^{-1}(\mathbb{C} \setminus P(Z(P'))), P)$, ottenuta rimuovendo le fibre delle immagini dei punti $Z(P')$ di non invertibilità, è uniforme di grado d . In particolare, (\mathbb{C}^*, w^d) è uniforme di grado d .
 - (4) (\mathbb{C}, \exp) è uniforme di grado $|\mathbb{Z}|$.
 - (5) $(\mathbb{C} \setminus \pi \cdot \mathbb{Z}, \cos)$ è uniforme di grado $|\mathbb{Z}|$.
 - (6) Se $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione analitica su un aperto $S \subseteq \mathbb{C}$, con derivata non evanescente e con fibre $f^{-1}\{z\}$ finite sopra ogni $z \in f(S)$, allora la superficie Riemanniana indotta (S, f) è uniforme se e solo se la cardinalità delle fibre $|f^{-1}\{z\}|$ è localmente costante su $z \in f(S)$. Ad esempio, per $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio di grado d , $\mathbb{C} \setminus f(Z(f'))$ è l'insieme dei punti sopra i quali f ha il numero massimale d di preimmagini, quindi $(f^{-1}(\mathbb{C} \setminus f(Z(f'))), f)$ è una superficie Riemanniana uniforme.
 - (7) Ogni superficie Riemanniana (S, π_S) contiene un cilindro aperto uniforme massimale, ovvero la cui base contiene tutti i $U \subseteq \pi_S(S)$ uniformemente rivestiti da π_S .

Esempio 3.5. Consideriamo le palle aperte disgiunte $B_{\frac{1}{n+2}}(n) \subseteq \mathbb{C}$ per $n \in \mathbb{N}$ con le traslazioni. Sull'unione disgiunta c'è la funzione composta

$$S = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_{\frac{1}{n+2}}(n), \quad \tau_n : z \in B_{\frac{1}{n+2}}(n) \mapsto z - n \in \mathbb{C}, \quad \tau : z \in S \mapsto \tau_n(z) \in \mathbb{C},$$

dove per ogni z si prende la univoca n con $z \in B_{\frac{1}{n+2}}(n)$. τ è analitica con derivata costante 1. La superficie Riemanniana indotta (S, τ) possiede vicinati uniformemente rivestiti in tutti i punti della base $\tau(S) = B_{1/2}(0)$ tranne che in $\{0\} \sqcup \bigsqcup_{n \geq 1} \partial B_{\frac{1}{n+2}}(0)$. Infatti, per ogni vicinato $0 \in U \subseteq \tau(S)$, gli unici punti della fibra $\tau^{-1}\{0\} = \{n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenuti in una branca di S sopra U sono quelli con $B_{\frac{1}{n+2}}(0) \supset U$, che non può valere per ogni n perché U è aperto.

(S, τ) non è uniforme in 0 non per la mancanza di punti, ma per un'eccessività di essi.

Definizione 3.6. Chiamiamo una funzione analitica $p : \tilde{S} \rightarrow S$ tra superfici Riemanniane

un *rивestimento* se è uniforme e vale $\pi_{\mathcal{S}} \circ p = \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}$.⁷

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{S}} & \xrightarrow{p} & \mathcal{S} \\ & \searrow \pi_{\tilde{\mathcal{S}}} & \swarrow \pi_{\mathcal{S}} \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

- Esempi 3.7.**
- (1) La restrizione della carta $\pi_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$ di una superficie Riemanniana uniforme \mathcal{S} è un rivestimento; chiameremo questo il *rivestimento sottostante*.
 - (2) Per ogni $1 \leq d, \tilde{d} \in \mathbb{N}$ tale che d divide \tilde{d} , $w \in (\mathbb{C}^*, w^{\tilde{d}}) \mapsto w^{\tilde{d}/d} \in (\mathbb{C}^*, w^d)$ è un rivestimento.
 - (3) Per ogni $1 \leq d \in \mathbb{N}$, $w \in (\mathbb{C}^*, \exp) \mapsto \exp(\frac{w}{d}) \in (\mathbb{C}^*, w^d)$ è un rivestimento.

Lemma 3.8. Siano f, g, h funzioni analitiche tra superfici Riemanniane che rendono commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{S}} & \xrightarrow{p} & \mathcal{S} \\ & \searrow r & \swarrow q \\ & \mathcal{H} & \\ & \downarrow \pi_{\mathcal{H}} & \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

Se p e q sono rivestimenti, allora lo è anche r . Se r è un rivestimento e p è suriettiva, allora p e q sono rivestimenti.

Dimostrazione. (1) Per ogni branca $\beta' : \mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ di p e ogni branca $\beta : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$ di q con $\beta(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$, $\beta' \circ \beta$ è una branca di r . Allora, assumendo che p e q sono rivestimenti, ovvero uniformi, ci si convince del fatto che \mathcal{H} può essere coperto da branche uniformemente rivestite da branche di r del tipo $\beta' \circ \beta$. Quindi r è uniforme.

(2) Per ogni branca β'' di r , $p \circ \beta''$ è una branca di q . Quindi, assumendo che p è suriettiva e r è un rivestimento, ovvero uniforme, ci si convince del fatto che \mathcal{H} può essere coperto da branche uniformemente rivestite da branche di q del tipo $p \circ \beta''$. Quindi q è uniforme. Inoltre, per ogni sua branca del tipo $\beta = p \circ \beta'' : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$, $\beta' = \beta'' \circ q|_{\beta''(\mathcal{U})}$ è una branca di p :

$$p \circ \beta' = p|_{\beta''(\mathcal{U})} \circ \beta'' \circ q|_{\beta''(\mathcal{U})} = p|_{\beta''(\mathcal{U})} \circ r^{-1}|_{\beta''(\mathcal{U})} \circ q|_{\beta''(\mathcal{U})} = p|_{\beta''(\mathcal{U})} \circ p^{-1}|_{\beta''(\mathcal{U})} \circ q|_{p(\beta''(\mathcal{U}))} = id_{p(\beta''(\mathcal{U}))}.$$

□

Useremo il Lemma 3.8 nelle seguenti due forme.

- Esempi 3.9.**
- (1) Se $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ una funzione analitica tra superfici Riemanniane con $\pi_{\mathcal{S}} \circ p = \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}$ e $\tilde{\mathcal{S}}$ una superficie uniforme, allora la sottosuperficie $p(\tilde{\mathcal{S}}) \subseteq \mathcal{S}$ è uniforme

⁷La commutatività del triangolo si traduce nella visualizzazione di $\tilde{\mathcal{S}}$ come una superficie giacente sopra \mathcal{S} che giace sopra il piano \mathbb{C} , dove la proiezione è data da p .

e la restrizione $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow p(\tilde{\mathcal{S}})$ è un rivestimento.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{S}} & \xrightarrow{p} & p(\tilde{\mathcal{S}}) \\ \pi_{\tilde{\mathcal{S}}} \searrow & & \swarrow \pi_{\mathcal{S}|p(\tilde{\mathcal{S}})} \\ & \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}}) & \end{array}$$

- (2) Se $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ è un rivestimento tra superfici Riemanniane con \mathcal{S} uniforme, allora anche $\tilde{\mathcal{S}}$ è uniforme, e di conseguenza anche la sottosuperficie $p(\tilde{\mathcal{S}})$, rendendo l'inclusione $p(\tilde{\mathcal{S}}) \hookrightarrow \mathcal{S}$ un rivestimento.

Siamo ora pronti per trattare il fenomeno dell'azione di monodromia.

Definizione 3.10. Sia \mathcal{S} una superficie Riemanniana. Chiamiamo una funzione $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ una *curva continua* se per ogni $t \in [0, 1]$, esiste una branca $\beta : U \rightarrow \mathcal{S}$ di $\pi_{\mathcal{S}}$ con $\gamma(t) \in \beta(U)$ e un sottointervallo aperto $I \subseteq [0, 1]$ con $t \in I$ e $\gamma(I) \subseteq \beta(U)$, tali che la curva $\beta^{-1} \circ \gamma|_I = \pi_{\mathcal{S}} \circ \gamma_I : I \rightarrow U$ sia continua nel senso ordinario della parola.

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{S} \\ \uparrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{S}} \\ I & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{S}} \circ \gamma} & \mathbb{C} \end{array}$$

Si noti che agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$, con sottointervalli aperti si intendono quelli del tipo $[0, \epsilon)$ e $(1 - \epsilon, 1]$.

Nota 3.11. Una definizione equivalente sarebbe: per ogni branca \mathcal{U} di \mathcal{S} , la preimmagine $\gamma^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq [0, 1]$ è un sottoinsieme aperto.

Proposizione 3.12 (Proprietà di sollevamento). Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ un rivestimento tra superfici Riemanniane e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ una curva continua. Per ogni punto nella fibra $\tilde{s} \in p^{-1}\{\gamma(0)\}$, esiste esattamente un *sollevamento di γ lungo p con punto di partenza \tilde{s}* , ovvero una curva continua $\gamma^{\tilde{s}} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ con $p \circ \gamma^{\tilde{s}} = \gamma$ e $\gamma^{\tilde{s}}(0) = \tilde{s}$.

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow \forall \tilde{s} \exists! \gamma^{\tilde{s}} & \tilde{\mathcal{S}} & \xleftarrow{p} & p^{-1}\{\gamma(0)\} \\ & & \downarrow p & & \downarrow \\ [0, 1] & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{S} & \xleftarrow{\quad} & \{\gamma(0)\} \end{array}$$

Dimostrazione. Concentriamoci prima sul caso in cui $\gamma([0, 1])$ è contenuta nell'immagine di una branca $\beta : U \rightarrow \mathcal{S}$ con $\beta(U)$ uniformemente rivestita da p . Allora, ogni \tilde{s} sopra $\gamma(0)$ è contenuto nell'immagine di esattamente una branca β' di p sopra $\beta(U)$, quindi $\gamma^{\tilde{s}} := \beta' \circ \gamma$ è una curva con $p \circ \gamma^{\tilde{s}} = \gamma$ e $\gamma^{\tilde{s}}(0) = \beta'(\gamma(0)) = \tilde{s}$. Per vedere che è continua, basta riconoscere che $\beta' \circ \beta$ è una branca di $\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}$ che contiene $\gamma^{\tilde{s}}([0, 1])$ e che la curva $\pi_{\tilde{\mathcal{S}}} \circ \gamma^{\tilde{s}} = \pi_{\mathcal{S}} \circ \gamma$ è continua perché γ è continua.

Per il caso generale, visto che p è uniforme, $\gamma([0, 1])$ è coperto da branche $\{\mathcal{U}_k\}_k$ di \mathcal{S} che sono uniformemente rivestite da p . La continuità di γ garantisce che i sottoinsiemi $\gamma^{-1}(\mathcal{U}_k) \subseteq [0, 1]$ sono aperti. Essendo $[0, 1]$ compatto, esiste una $\delta > 0$ tale che ogni sottointervallo chiuso $I_{\delta}(t) := \{t' \in [0, 1] \mid |t' - t| \leq \delta\}$, per ogni $t \in [0, 1]$, è contenuto in almeno uno dei $\gamma^{-1}(\mathcal{U}_k)$,

ovvero $\gamma(I_\delta(t)) \subseteq \mathcal{U}_k$ per almeno un k . Si scelga la propria sequenza monotona crescente finita $\{t_j\}_{0 \leq j \leq N} \subseteq [0, 1]$ preferita, fintanto che soddisfi $t_0 = 0, t_N = 1$ e $|t_{j+1} - t_j| < \delta$ per ogni $0 \leq j < N$, cosicchè $[0, 1] = \bigcup_j [t_j, t_{j+1}]$ con sottointervalli chiusi di lunghezza $< \delta$. Ne segue che ogni $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ è contenuta nell'immagine di un \mathcal{U}_k , che è una branca di \mathcal{S} uniformemente rivestita da p . Allora possiamo ridurre il problema al caso trattato in primis usando induzione.

Le restrizioni $\gamma_j = \gamma|_{[t_0, t_j]}$ sono curve continue in \mathcal{S} . La curva γ_1 per di più ha immagine contenuta in un \mathcal{U}_k , quindi può essere sollevata ad esattamente una $\tilde{\gamma}_1^{\tilde{s}}$, per ogni \tilde{s} sopra $\gamma_1(0) = \gamma(0)$. Sia ora $0 < j < N$, e assumiamo che la curva γ_j può essere sollevata ad esattamente una $\tilde{\gamma}_j^{\tilde{s}}$, per ogni \tilde{s} sopra $\gamma(0)$. La restrizione $\theta = \gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ può altrettanto essere sollevata ad esattamente una $\theta^{\bar{s}}$, per ogni \bar{s} sopra $\theta(0) = \gamma(t_j)$. Allora, la curva estesa

$$\tilde{\gamma}_{j+1}^{\tilde{s}} : t \in [0, t_{j+1}] \mapsto \begin{cases} \tilde{\gamma}_j^{\tilde{s}}(t) & t \in [0, t_j] \\ \theta^{\bar{s}}(t) & t \in (t_j, t_{j+1}] \end{cases}$$

è continua se e solo se $\theta^{\bar{s}}(t_j) = \tilde{\gamma}_j^{\tilde{s}}(t_j)$, ovvero ce esattamente un modo di estendere $\tilde{\gamma}_j^{\tilde{s}}$ in modo continuo, per ogni \tilde{s} sopra $\gamma(0)$. \square

Definizione 3.13 (Azione di monodromia). Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ un rivestimento tra superfici Riemanniane e γ una curva continua in \mathcal{S} con $s_0 := \gamma(0), s_1 := \gamma(1)$.

Per ogni $\tilde{s} \in p^{-1}\{s_0\}$, il sollevamento di γ lungo p con punto di partenza \tilde{s} è una curva continua $\tilde{\gamma}^{\tilde{s}}$ che parte in \tilde{s} e termina in un punto della fibra $p^{-1}\{s_1\}$: $\tilde{\gamma}^{\tilde{s}}(1) \in p^{-1}\{s_1\}$. Si rammenti che la Proposizione 3.12 garantisce che il sollevamento è univoco, quindi c'è un univoco modo di associare ad ogni \tilde{s} un punto di arrivo nella fibra, ottenendo una funzione

$$\sigma_\gamma : \tilde{s} \in p^{-1}\{s_0\} \mapsto \tilde{\gamma}^{\tilde{s}}(1) \in p^{-1}\{s_1\},$$

che chiamiamo *l'azione di monodromia* della curva γ tra le fibre $p^{-1}\{s_0\}$ e $p^{-1}\{s_1\}$.

Definizione 3.14. Ogni curva continua γ in \mathcal{S} definisce una curva continua inversa

$$\gamma^{-1} : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(1-t) \in \mathcal{S}.$$

Ogni due curve continue γ, δ con $\delta(1) = \gamma(0)$ definiscono una curva continua composta

$$\gamma \bullet \delta : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} \delta(t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(t) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \in \mathcal{S}.$$

Lemma 3.15. Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ un rivestimento tra superfici Riemanniane e γ, δ due curve continue in \mathcal{S} con $\delta(1) = \gamma(0)$. Allora vale $\sigma_{\gamma \bullet \delta} = \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$ e $\sigma_{\gamma^{-1}} \circ \sigma_\gamma = id_{p^{-1}\{\gamma(0)\}}$. Ovvero, le azioni di monodromia si comportano associativamente rispetto alla composizione di cammini. In particolare, vale $\sigma_{\gamma^{-1} \bullet \gamma} = id_{p^{-1}\{\gamma(0)\}}$, $\sigma_{\gamma^{-1}} = \sigma_\gamma^{-1}$. Ovvero, tutte le azioni di monodromia sono biiezioni tra le rispettive fibre.

Dimostrazione. Siano $s_0 := \delta(0), s_1 = \delta(1) = \gamma(0), s_2 := \gamma(1)$. Per ogni sollevamento $\delta^{\tilde{s}}$ di δ lungo p con punto di partenza $\tilde{s} \in p^{-1}\{s_0\}$, consideriamo la curva composta $\alpha = \gamma^{\delta^{\tilde{s}}(1)} \bullet \delta^{\tilde{s}}$, dove $\gamma^{\delta^{\tilde{s}}(1)}$ è l'univoco sollevamento di γ lungo p con punto di partenza $\delta^{\tilde{s}}(1)$. Allora vale $p \circ \alpha = \gamma \bullet \delta$ e $\alpha(0) = \delta^{\tilde{s}}(0) = \tilde{s}$, ovvero α è l'univoco sollevamento di $\gamma \bullet \delta$ lungo p con punto di partenza \tilde{s} . Riassumendo, vale

$$\sigma_{\gamma \bullet \delta}(\tilde{s}) \stackrel{\text{Def.3.13}}{=} \alpha(1) = \gamma^{\delta^{\tilde{s}}(1)}(1) \stackrel{\text{Def.3.13}}{=} \gamma^{\sigma_\delta(\tilde{s})}(1) \stackrel{\text{Def.3.13}}{=} \sigma_\gamma(\sigma_\delta(\tilde{s})).$$

Visto che \tilde{s} era arbitrario, abbiamo dimostrato $\sigma_{\gamma \bullet \delta} = \sigma_\gamma \circ \sigma_\delta$.

La seconda proprietà è simile. Basta notare che il sollevamento $(\gamma^{-1})^{\tilde{s}}$ della curva inversa γ^{-1} è precisamente la curva inversa $(\gamma^{\tilde{s}})^{-1}$ del sollevamento $\gamma^{\tilde{s}}$, dove si bisognerebbe tener conto di cosa sono \tilde{s} e \bar{s} . \square

Definizione 3.16. Sia \mathcal{S} una superficie Riemanniana con un punto $s_0 \in \mathcal{S}$. Un *ciclo in \mathcal{S} con base s_0* è una curva continua in \mathcal{S} che inizia e termina in s_0 ; ne denotiamo $\Omega_{s_0}\mathcal{S}$ l'insieme.

Sia ora $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ un rivestimento tra superfici Riemanniane. Denotiamo con $S(p^{-1}\{s_0\})$ il gruppo di tutte le permutazioni della fibra, ovvero funzioni biiettive $p^{-1}\{s_0\} \xrightarrow{\sim} p^{-1}\{s_0\}$, con l'operazione di composizione e l'identità come elemento neutro. Chiamiamo il *gruppo di monodromia di $\tilde{\mathcal{S}}$ sopra s_0* il sottogruppo

$$\mathcal{M}on_{s_0}(\tilde{\mathcal{S}}, p) \subseteq S(p^{-1}\{s_0\})$$

delle azioni di monodromia indotte da cicli $\gamma \in \Omega_{s_0}\mathcal{S}$. Questa definizione è ben fondata per via del Lemma 3.15.

Esempio 3.17. Per ogni superficie Riemanniana uniforme \mathcal{S} e $z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$, possiamo considerare il gruppo di monodromia $\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})$ del rivestimento sottostante.

Nota 3.18. Fortunatamente, non sono i cicli in se che ci importano ma la loro azione di monodromia. Nonostante l'insieme $\Omega_{s_0}\mathcal{S}$ sia enormemente grande, la maggior parte delle informazioni che contiene sono ridondanti per lo studio dell'azione sulle fibre nelle nostre superfici. Questo perché essa è indipendente da deformazioni continue dei cicli, le *omotopie*. Localmente questo è chiaro, perché sopra palle $B_\epsilon(s_0)$ abbastanza piccole le branche della superficie sono disgiunte (Figura 1), e perciò il sollevamento di ogni curva in $\Omega_{s_0}B_\epsilon(s_0)$ non cambia mai branca e induce un'azione triviale; questo comportamento si estende alle deformazioni.

Più precisamente, si può dimostrare che se due curve sono omotopiche allora inducono la stessa permutazione sulle fibre, da qui il termine *monodromia*. Ironicamente, sebbene fondamentale, la proprietà che da al gruppo di monodromia il suo nome non è strettamente necessaria per la nostra discussione, in quanto le superfici alle quali saremo interessati hanno abbastanza simmetria da permettere di calcolare l'azione di *ogni* ciclo facilmente.

Il prossimo lemma ci assicura che il gruppo di monodromia è una invariante algebrica rispettivamente al concetto di isomorfia sopra \mathbb{C} . Ovvero, se due superfici sono indistinguibili nella loro natura di superficie Riemanniana come suggerito nella Nota 2.12, allora anche i loro gruppi di monodromia sono indistinguibili. Lasciamo come esercizio la dimostrazione dei due seguenti Lemma.

Lemma 3.19. Sia $f : \mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$ un isomorfismo sopra \mathbb{C} tra superfici Riemanniane uniformi, e $\bar{f} : \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\sim} \pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})$ l'isomorfismo disceso. Per ogni $z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$, f si restringe a una biiezione tra le fibre $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\} \xrightarrow{\sim} \pi_{\mathcal{T}}^{-1}\{\bar{f}(z_0)\}$ e c'è un isomorfismo f_* tra i gruppi di monodromia di \mathcal{S}

e \mathcal{T} che rende commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccc}
S(\pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\}) & \xrightarrow[\sim]{\sigma \mapsto f \circ \sigma \circ f^{-1}} & S(\pi_{\mathcal{T}}^{-1}\{\bar{f}(z_0)\}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) & \xrightarrow[\sim]{f_*} & \mathcal{M}on_{\bar{f}(z_0)}(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\Omega_{z_0}\pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) & \xrightarrow[\sim]{\gamma \mapsto f \circ \gamma} & \Omega_{\bar{f}(z_0)}\pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})
\end{array}$$

Lemma 3.20. Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ un rivestimento tra superfici Riemanniane e α una curva continua in \mathcal{S} con $s_0 := \alpha(0), s_1 := \alpha(1)$. Allora α induce un isomorfismo per coniugazione dei gruppi di monodromia sopra s_0 e sopra s_1 .

$$\begin{array}{ccc}
S(p^{-1}\{s_0\}) & \xrightarrow[\sim]{\sigma_\alpha \circ \sigma \circ \sigma_\alpha^{-1}} & S(p^{-1}\{s_1\}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\mathcal{M}on_{s_0}(\tilde{\mathcal{S}}, p) & \xrightarrow[\sim]{\sigma_\gamma \mapsto \sigma_\alpha \circ \sigma_\gamma \circ \sigma_\alpha^{-1}} & \mathcal{M}on_{s_1}(\tilde{\mathcal{S}}, p) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\Omega_{s_0}\mathcal{S} & \xrightarrow{\gamma \mapsto \alpha \bullet \gamma \bullet \alpha^{-1}} & \Omega_{s_1}\mathcal{S}
\end{array}$$

C'è da notare che questo isomorfismo non è canonico, ovvero dipende dalla scelta della curva che connette s_0 a s_1 .

Proposizione 3.21. Siano \mathcal{S} e una sua sottosuperficie $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ superfici uniformi, cosicché anche il cilindro aperto $\mathcal{C} = \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(\pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{U}))$ è uniforme. Per ogni $z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{U})$, ci sono l'epimorfismo della restrizione $\rho_{\mathcal{U}*}$ e il monomorfismo dell'inclusione $\iota_{\mathcal{C}*}$ che rendono commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccccc}
S(\pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\} \cap \mathcal{U}) & \longleftrightarrow & \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{U}, \pi_{\mathcal{S}|\mathcal{U}}) & \longleftrightarrow & \Omega_{z_0}\pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{U}) \\
& & \uparrow \rho_{\mathcal{U}*} & \swarrow & \downarrow \\
S(\pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\}) & \longleftrightarrow & \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{C}, \pi_{\mathcal{S}|\mathcal{C}}) & & \downarrow \\
& \swarrow & \downarrow \iota_{\mathcal{C}*} & & \\
& & \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) & \longleftrightarrow & \Omega_{z_0}\pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})
\end{array}$$

Inoltre, se il cilindro \mathcal{C} è coperto da sottosuperficie uniformi $\{\mathcal{U}_k\}_k, \mathcal{U}_k \subseteq \mathcal{C}$, allora le restrizioni $\rho_{\mathcal{U}_k*}$ compongono un monomorfismo nel prodotto diretto

$$\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{C}, \pi_{\mathcal{S}|\mathcal{C}}) \xrightarrow{(\rho_{\mathcal{U}_k*})_k} \bigoplus_k \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{U}_k, \pi_{\mathcal{S}|\mathcal{U}_k}).$$

Dimostrazione. La restrizione di un'azione di monodromia σ_γ dall'intera fibra $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\}$ alla fibra nella sottosuperficie $\pi_{\mathcal{S}|\mathcal{U}}^{-1}\{z_0\}$ è precisamente l'azione di monodromia su \mathcal{U} considerata come superficie Riemanniana a se stante, quindi la restrizione $\rho_{\mathcal{U}*}$ è chiara. Similmente, l'azione sulla fibra $\pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\}$ considerata sulla superficie \mathcal{S} è la stessa di quella considerata su

\mathcal{C} a se stante. La composizione $(\rho_{U_k})_k$ è iniettiva perché un'azione su $\pi_S^{-1}\{z_0\}$ è l'identità se e solo se è l'identità su una copertura di $\pi_S^{-1}\{z_0\}$. \square

Esempio 3.22. Sia $1 \leq d \in \mathbb{N}$. Calcoliamo il gruppo di monodromia $\mathcal{M}on_1(\mathbb{C}^*, w^d) \subseteq S(\{\zeta^k\}_{0 \leq k < d})$, dove $\zeta^k = e^{2\pi i \frac{k}{d}}$ sono le radici d -esime di 1.

Consideriamo prima il ciclo più naturale, ovvero $\phi : t \in [0, 1] \mapsto e^{2\pi i t} \in \mathbb{C}^*$. I suoi sollevamenti sono gli archi $\phi^{\zeta^k} : t \in [0, 1] \mapsto e^{2\pi i \frac{t+k}{d}} \in \mathbb{C}^*$, dai quali si legge direttamente l'azione di monodromia: $\sigma_\phi(\zeta^k) = \zeta^{k+1}$ per ogni $0 \leq k < d$, da notare $\zeta^d = \zeta^0$. Ovvero, la permutazione σ_ϕ è ciclica di ordine d , e genera il sottogruppo $\langle \sigma_\phi \rangle \subseteq \mathcal{M}on_1(\mathbb{C}^*, w^d)$.

Sia ora $\gamma \in \Omega_1 \mathbb{C}^*$ un ciclo arbitrario. Si da il caso che, per via della simmetria rotazionale del rivestimento $w^d : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, l'azione di monodromia σ_γ è univocamente determinata da dove mappa un qualsiasi elemento. Consideriamo il sollevamento γ^{ζ^0} di γ lungo w^d con partenza in ζ^0 . Allora, per ogni $0 \leq k < d$, la rotazione $e^{2\pi i \frac{k}{d}} \cdot \gamma^{\zeta^0}$ della curva sollevata è altrettanto un sollevamento di γ :

$$w^d \circ (e^{2\pi i \frac{k}{d}} \cdot \gamma^{\zeta^0}) = (e^{2\pi i \frac{k}{d}})^d \cdot (\gamma^{\zeta^0})^d = 1 \cdot (w^d \circ \gamma^{\zeta^0}) = \gamma,$$

con partenza $e^{2\pi i \frac{k}{d}} \cdot \gamma^{\zeta^0}(0) = e^{2\pi i \frac{k}{d}} \cdot \zeta^0 = \zeta^k$ e arrivo $e^{2\pi i \frac{k}{d}} \cdot \gamma^{\zeta^0}(1) = \zeta^k \cdot \sigma_\gamma(\zeta^0)$. Per definizione ne segue $\sigma_\gamma(\zeta^k) = \zeta^k \cdot \sigma_\gamma(\zeta^0) = \sigma_\phi^{k+j}(\zeta^0) = \sigma_\phi^j(\zeta^k)$, per la $0 \leq j < d$ tale che $\sigma_\phi^j(\zeta^0) = \sigma_\gamma(\zeta^0)$. Visto che ciò vale per ogni k , σ_γ e σ_ϕ^j sono la stessa permutazione.

Abbiamo dimostrato che ogni altra azione di monodromia è in realtà già indotta da una potenza del ciclo ϕ , ovvero $\mathbb{Z}_d \cong \langle \sigma_\phi \rangle = \mathcal{M}on_1(\mathbb{C}^*, w^d)$ è il gruppo ciclico di ordine d .

Inoltre possiamo calcolare la monodromia di ogni cilindro aperto $(B_\epsilon(0) \setminus \{0\}, w^d)$ di (\mathbb{C}^*, w^d) sopra $B_{\epsilon^d}(0) \setminus \{0\}$, prendendo come punto base $\frac{\epsilon^d}{2}$. Abbiamo prima di tutto un'inclusione

$$\mathcal{M}on_{\frac{\epsilon^d}{2}}(B_\epsilon(0) \setminus \{0\}, w^d) \xrightarrow{3.21} \mathcal{M}on_{\frac{\epsilon^d}{2}}(\mathbb{C}^*, w^d) \xrightarrow[\sim]{3.19} \mathcal{M}on_1(\mathbb{C}^*, w^d),$$

ma questa è tutt'alpiù suriettiva perché il ciclo naturale $\frac{\epsilon^d}{2} \cdot \phi \in \Omega_{\frac{\epsilon^d}{2}} B_\epsilon(0) \setminus \{0\}$ viene mappato a $\phi \in \Omega_1 \mathbb{C}^*$ sotto l'isomorfismo sopra \mathbb{C} di superfici Riemanniane $(\mathbb{C}^*, w^d) \xrightarrow[\sim]{w \mapsto w \cdot \epsilon^d} (\mathbb{C}^*, w^d)$.

Esempio 3.23. Calcoliamo il gruppo di monodromia $\mathcal{M}on_1(\mathbb{C}, \exp) \subseteq S(\{\theta_k\}_{k \in \mathbb{Z}})$, dove $\theta_k = 2\pi i k$ sono i logaritmi di 1. Il ciclo più naturale è di nuovo $\phi : t \in [0, 1] \mapsto e^{2\pi i t} \in \mathbb{C}^*$. I suoi sollevamenti sono i segmenti $\phi^{\theta_k} : t \in [0, 1] \mapsto 2\pi i t + 2\pi i k \in \mathbb{C}$, dai quali si legge direttamente l'azione di monodromia: $\sigma_\phi(\theta_k) = \theta_{k+1}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Ovvero, la permutazione σ_ϕ è ciclica di ordine infinito.

Analogamente all'Esempio 3.22, per via della simmetria traslatoria del rivestimento $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$, ogni altra azione di monodromia è in realtà già indotta da una potenza del ciclo ϕ , quindi otteniamo che $\mathbb{Z} \cong \langle \sigma_\phi \rangle = \mathcal{M}on_1(\mathbb{C}, \exp)$ è il gruppo ciclico infinito.

Esempio 3.24. Sia $P(w) = aw^2 + bw + c$ un qualsiasi polinomio di grado 2. Completando il quadrato otteniamo $P(w) = a(w + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$, quindi $Z(P') = \{-\frac{b}{2a}\}$ è l'unico punto di non invertibilità, cosicché $(\mathbb{C} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}, P)$ è una superficie Riemanniana. C'è un isomorfismo

sopra \mathbb{C} di superfici Riemanniane

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{-\frac{b}{2a}\} & \xrightarrow[\sim]{w \mapsto w + \frac{b}{2a}} & \mathbb{C}^* \\ \downarrow P & & \downarrow w^2 \\ \mathbb{C} \setminus \{-\frac{b}{2a}\} & \xrightarrow[\sim]{z \mapsto \frac{1}{a}(z - c + \frac{b^2}{4a})} & \mathbb{C}^* \end{array}$$

che induce via il Lemma 3.19 un isomorfismo $\mathcal{M}on_{1-\frac{b}{2a}}(\mathbb{C} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}, P) \cong \mathcal{M}on_1(\mathbb{C}^*, w^2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Analogamente, ogni polinomio P di grado $d \geq 1$ del quale la derivata P' ha un singolo zero $\xi \in \mathbb{C}$ di molteplicità $d-1$, ovvero $Z(P') = \{\xi\}$, è rappresentabile nella forma $P(w) = a(w - \xi)^d + c$. Di conseguenza P induce una superficie Riemanniana $(\mathbb{C} \setminus \{\xi\}, P)$ isomorfa a (\mathbb{C}^*, w^d) , con gruppo di monodromia \mathbb{Z}_d .

Esempio 3.25. Sia P un qualsiasi polinomio di grado 3. Se la derivata P' ha un singolo zero, P indurrà una superficie Riemanniana isomorfa a (\mathbb{C}^*, w^3) , come spiegato in 3.24. Ci concentriamo allora sul caso $Z(P') = \{\xi_1, \xi_2\}$ con $\xi_1 \neq \xi_2$.

Chiamiamo $\zeta_j = P(\xi_j)$, $j = 1, 2$, e notiamo che deve valere $\zeta_1 \neq \zeta_2$ perché altrimenti sia ξ_1 che ξ_2 sarebbero zeri di molteplicità 2 del polinomio $P - \zeta_1$ di grado 3, cosa che non può accadere. Le fibre $P^{-1}\{\zeta_j\}$ sono composte da ξ_j e un secondo punto $\bar{\xi}_j$ di molteplicità 1, nel senso che $ord_{\xi_j}(P - \zeta_j) = 1$, che equivale a $P'(\bar{\xi}_j) \neq 0$. A conti fatti, ottieniamo la superficie Riemanniana indotta $\mathcal{U} := \mathbb{C} \setminus \{\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2\}$ sopra la base $U := \mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, \zeta_2\}$. Calcoliamone il gruppo di monodromia.

Prendiamo vicinati aperti $\bar{\xi}_1 \in \bar{\mathcal{V}}, \xi_1 \in \mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}$ abbastanza piccoli sui quali la restrizione di P assume la forma locale standard 7.6 con immagine una palla aperta $B_r(\zeta_1)$, quindi con

$$P_{|\bar{\mathcal{V}}} : \bar{\mathcal{V}} \xrightarrow[\sim]{\bar{\phi}} B_r(\bar{\xi}_1) \xrightarrow[\sim]{w \mapsto \zeta_1 + (w - \bar{\xi}_1)} B_r(\zeta_1), \quad P_{|\mathcal{V}} : \mathcal{V} \xrightarrow[\sim]{\phi} B_{r^{1/2}}(\xi_1) \xrightarrow{w \mapsto \zeta_1 + (w - \xi_1)^2} B_r(\zeta_1).$$

Abbiamo trovato un cilindro aperto $\bar{\mathcal{V}} \setminus \{\bar{\xi}_1\} \sqcup \mathcal{V} \setminus \{\xi_1\} = P^{-1}(B_r(\zeta_1) \setminus \{\zeta_1\}) \subseteq U$ della nostra superficie Riemanniana \mathcal{U} che decomponete P in un polinomio lineare e uno quadratico.

Per un qualunque $z_1 \in B_r(\zeta_1) \setminus \{\zeta_1\}$, il ciclo naturale $\gamma \in \Omega_{z_1} B_r(\zeta_1) \setminus \{\zeta_1\}$ già visto nell'Esempio 3.24 ha azione σ_γ che lascia fisso il punto in $\bar{\mathcal{V}} \setminus \{\bar{\xi}_1\}$ e scambia i due punti in $\mathcal{V} \setminus \{\xi_1\}$, ovvero è una transposizione in $S(P^{-1}\{z_1\})$. In particolare, attraverso l'inclusione 3.21, questa è una transposizione di monodromia nel gruppo $\mathcal{M}on_{z_1}(\mathcal{U}, P)$.

Un ragionamento analogo ci da una trasposizione $\sigma_\eta \in \mathcal{M}on_{z_2}(\mathcal{U}, P)$ sopra un punto z_2 vicino all'altro punto di ramificazione ζ_2 . Sapendo $\mathcal{M}on_{z_1}(\mathcal{U}, P) \xrightarrow[\sim]{3.20} \mathcal{M}on_{z_2}(\mathcal{U}, P)$, abbiamo due transposizioni in $\mathcal{M}on_{z_1}(\mathcal{U}, P)$, ovvero σ_γ e quella che corrisponde a σ_η sotto l'isomorfismo. Se sapessimo che queste sono transposizioni differenti, seguirebbe

$$\mathcal{M}on_{z_1}(\mathcal{U}, P) = S(P^{-1}\{z_1\}) \cong S_3,$$

perché una transposizione e una qualsiasi altra permutazione generano S_3 ; ma dimostrarlo è complicato.

Anche se σ_η trasportata in $\mathcal{M}on_{z_1}(\mathcal{U}, P)$ fosse uguale a σ_γ (e non lo è), comunque noi possiamo dedurre che una permutazione $\sigma_\gamma \neq \sigma \in \mathcal{M}on_{z_1}(\mathcal{U}, P)$ esiste. Questo perché \mathcal{U} è connesso, quindi esiste una curva continua $\tilde{\delta} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}$ con $\tilde{\delta}(0) \in \bar{\mathcal{V}}$ e $\tilde{\delta}(1) \in \mathcal{V}$ entrambi

nella fibra $P^{-1}\{z_1\}$, che di conseguenza induce un'azione $\sigma_{P \circ \tilde{\delta}}$ che per definizione scambia il punto in $\bar{\mathcal{V}}$ sopra z_1 con un punto in \mathcal{V} , ovvero $\sigma_\delta \neq \sigma_\gamma$.

In generale non è così semplice dedurre che le azioni di monodromia generano l'intero gruppo di permutazioni perché essi diventano più grandi.

Esercizio 3.26. Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ un rivestimento tra superfici Riemanniane. Dimostra che, se ogni due punti in $\tilde{\mathcal{S}}$ possono essere connessi da una curva continua, allora ogni gruppo di monodromia agisce transitivamente sulla fibra, ovvero per ogni $\tilde{s}, \tilde{s}' \in p^{-1}\{s_0\}$, $s_0 \in \mathcal{S}$ esiste una $\sigma \in \text{Mon}_{s_0}(\tilde{\mathcal{S}}, p)$ con $\sigma(\tilde{s}) = \tilde{s}'$.

Esempio 3.27. Sia $p : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica non costante su un sottoinsieme aperto e connesso $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{C}$, tale che la superficie Riemanniana (\mathcal{S}, p) ottenuta eliminando tutti i punti $Z(p')$ di non invertibilità è uniforme. In questo esempio caratterizziamo le azioni di monodromia in un cilindro aperto attorno a $\xi \in Z(p')$.

Chiamiamo $\zeta = p(\xi) \in p(\mathcal{V})$ e $\{\xi_k\}_k = p^{-1}\{\zeta\}$ tutti i punti sopra ζ , anche quelli con derivata invertibile. Applichiamo il Lemma 7.6 per ottenere vicini $\xi_k \in \mathcal{V}_k \subseteq \mathcal{V}$ omeomorfi a palle aperte, senza perdita di generalità tutti disgiunti, sui quali $p|_{\mathcal{V}_k}$ assume la forma locale standard. Se la fibra è finita $|p^{-1}\{\zeta\}| < \infty$, si pensi ad esempio a un qualsiasi polinomio, allora l'intersezione finita $\bigcap_k p(\mathcal{V}_k) = B_r(\zeta)$ è una palla aperta intorno a ζ ; d'ora in poi operiamo sotto questa assunzione. Dopo aver rimpicciolito i \mathcal{V}_k a $\mathcal{V}_k \cap p^{-1}(B_r(\zeta))$, tutte le restrizioni $p|_{\mathcal{V}_k} : \mathcal{V}_k \rightarrow B_r(\zeta)$ sono in forma locale standard:

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_k \mathcal{V}_k & \xrightarrow[p]{\phi_k \sim} & B_{r^{1/d_k}}(\xi_k) \\ \downarrow p & \searrow p|_{\mathcal{V}_k} & \swarrow \zeta + (w - \xi_k)^{d_k} \\ B_r(\zeta) & & \\ & & d_k = \text{ord}_{\xi_k}(p - \zeta) < \infty \end{array}$$

Questo diagramma può essere ristretto a uno di funzioni con derivate non evanescenze:

$$\begin{array}{ccccc} \bigsqcup_k \mathcal{V}_k \setminus \{\xi_k\} & \xrightarrow[p]{\phi_k \sim} & B_{r^{1/d_k}}(\xi_k) \setminus \{\xi_k\} & \xrightarrow{\sim} & B_1(0) \setminus \{0\} \\ \downarrow p & \searrow p|_{\mathcal{V}_k \setminus \{\xi_k\}} & \swarrow \zeta + (w - \xi_k)^{d_k} & \swarrow w^{d_k} & \\ B_r(\zeta) \setminus \{\zeta\} & & B_r(\zeta) \setminus \{\zeta\} & \xrightarrow[z \mapsto \frac{z-\zeta}{r}]{} & B_1(0) \setminus \{0\} \end{array}$$

Gli omeomorfismi analitici ϕ_k diventano isomorfismi sopra \mathbb{C} di superfici Riemanniane.

$$(\mathcal{V}_k \setminus \{\xi_k\}, p|_{\mathcal{V}_k \setminus \{\xi_k\}}) \xrightarrow[\sim]{\phi_k} (B_{r^{1/d_k}}(\xi_k) \setminus \{\xi_k\}, \zeta + (z - \xi_k)^{d_k}) \xrightarrow{\sim} (B_1(0) \setminus \{0\}, w^{d_k})$$

Sciegliendo un arbitrario $z_0 \in B_r(\zeta) \setminus \{\zeta\}$ otteniamo un diagramma commutativo di omomorfismi

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_k \text{Mon}_{\frac{z_0 - \zeta}{r}}(B_1(0) \setminus \{0\}, w^{d_k}) & \xleftarrow[\sim]{3.22} & \bigoplus_k \mathbb{Z}_{d_k} & & \\ \uparrow 3.19 & & & & \uparrow \\ \bigoplus_k \text{Mon}_{z_0}(\mathcal{V}_k \setminus \{\xi_k\}, p) & & & & \\ \uparrow 3.21 & & & & \uparrow \\ \text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, p) & \xleftarrow{3.21} & \text{Mon}_{z_0}(\bigsqcup_k \mathcal{V}_k \setminus \{\xi_k\}, p) & \xleftarrow[\sim]{} & \mathbb{Z}_{\text{mcm}(\{d_k\}_k)} \end{array}$$

dove $\text{mcm}(\{d_k\}_k)$ è il minimo comune multiplo dei numeri naturali d_k e (\mathcal{S}, p) è la superficie Riemanniana indotta da p che contiene $\bigsqcup_k \mathcal{V}_k \setminus \{\xi_k\}$ come cilindro aperto sopra $B_r(\zeta) \setminus \{\zeta\}$.

Deduciamo che per ogni tale valore $\zeta \in p(\mathcal{V})$, il gruppo di monodromia $\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, p)$ della superficie indotta sopra un $z_0 \in p(\mathcal{S})$ abbastanza vicino a ζ contiene una permutazione che si scomponete in cicli

$$\sigma = (\tilde{z}_{1,1} \cdots \tilde{z}_{1,d_1})(\tilde{z}_{2,1} \cdots \tilde{z}_{2,d_2}) \cdots (\tilde{z}_{K,1} \cdots \tilde{z}_{K,d_K}), \quad \text{ord}(\sigma) = \text{mcm}(\{d_k\}_k)$$

dove $p^{-1}\{z_0\} = \{\tilde{z}_{i,j}\}_{i,j}$, $K = |p^{-1}\{\zeta\}|$ e $d_k = \text{ord}_{\xi_k}(p - \zeta)$. La tuple dei dati (d_1, \dots, d_K) viene chiamata il *profilo di ramificazione* di p sopra z_0 .

Esempio 3.28. Sia $2 \leq d \in \mathbb{N}$ e consideriamo il polinomio $P(w) = w^d - w$. Dei calcoli elementari analoghi a quelli negli esempi precedenti danno

$$\begin{aligned} P(w) &= w^d - w & Z(P) &= \{0\} \sqcup \{\rho_j\}_{0 \leq j < d-1} & \rho_j &:= e^{2\pi i \frac{j}{d-1}} \\ P'(w) &= d(w^{d-1} - \frac{1}{d}) & Z(P') &= \{\xi_j\}_{0 \leq j < d-1} & \xi_j &:= \frac{1}{\sqrt[d]{d}} e^{2\pi i \frac{j}{d-1}} \\ \zeta_j := P(\xi_j) &= -\frac{(d-1)}{d} \xi_j & P^{-1}\{\zeta_j\} &= \{\xi_j\} \sqcup \{\bar{\xi}_{j,k}\}_{1 \leq k < d-1} & \text{per dei } \{\bar{\xi}_{j,k}\}_{j,k} \text{ tutti distinti.} \end{aligned}$$

Ciò vuol dire che, sopra ognuno dei $d-1$ valori critici ζ_j , P ha profilo di ramificazione $(1, \dots, 1, 2, 1, \dots, 1)$ sopra ζ_j :

$$\forall 0 \leq j < d-1, 1 \leq k < d-1 : \text{ord}_{\xi_j}(P - \zeta_j) = 2, \quad \text{ord}_{\bar{\xi}_{j,k}}(P - \zeta_j) = 1.$$

Quindi prendiamo $U := \mathbb{C} \setminus \{\zeta_j\}_j$ e $\mathcal{S} := \mathbb{C} \setminus \{\xi_j, \bar{\xi}_{j,1}, \dots, \bar{\xi}_{j,d-2}\}_j = P^{-1}(U)$, cosicchè (\mathcal{S}, P) è una superficie Riemanniana uniforme di grado d . Dimostreremo che le azioni di monodromia indotte dai cicli intorno a ogni punto di ramificazione ζ_j sono le transposizioni $(0, \rho_j) \in S(Z(P))$, che di conseguenza generano l'intero gruppo

$$\mathcal{M}on_0(\mathcal{S}, P) = S(Z(P)) \cong S_d.$$

Gli argomenti nell'Esempio 3.27 si applicano a ogni nostra ζ_j per ottenere una transposizione sopra una base z_j abbastanza vicina a ζ_j . Dovremo dopo mappare ognuna di esse nel gruppo $\mathcal{M}on_0(\mathcal{S}, P)$ tramite coniugazione 3.20.

Sia allora $r > 0$ tale che, per ogni $0 \leq j < d-1$, $P^{-1}(B_r(\zeta_j))$ si decompone in componenti connesse sulle quali la restrizione di P è esprimibile in forma locale standard. Una scelta naturale per le basi è $z_j := (1 - \frac{1}{2r})\zeta_j$. Adesso incominciano le difficoltà, in quanto non conosciamo (o almeno, l'autore) un modo per determinare esplicitamente i punti sopra z_j , ovvero le d soluzioni dell'equazione polinomiale $w^d - w = z_j$. Bisogna quindi ricorrere al nobile metodo del tentare, sperando che queste soluzioni hanno una qualche struttura.

Mostriamo qualitativamente nella Figura 4 i punti di interesse, che si trovano sulle rette tra 0 e i ξ_j e hanno la simmetria rotazionale espressa da

$$\forall w \in \mathbb{C}, 0 \leq j < d-1 : P(w\xi_j) = -\frac{w^d - dw}{d-1} \zeta_j, \quad z_j = z_0 \rho_j.$$

Visto che P conserva la linea $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, conserva anche le sue rotazioni $\xi_j \cdot \mathbb{R} = \zeta_j \cdot \mathbb{R}$, permettendoci di studiare la funzione ristretta

$$P|_{\xi_j \mathbb{R}} : t\xi_j \in \xi_j \cdot \mathbb{R} \mapsto -\frac{t^d - dt}{d-1} \zeta_j \in \zeta_j \cdot \mathbb{R}.$$

Uno studio di $P_{|\xi_j \cdot \mathbb{R}}$, considerata come funzione reale, ci da un grafico qualitativo che mostriamo nella Figura 3. Gli intervalli $(0, \xi_j)$ e (ξ_j, ρ_j) sono mappati biiettivamente a $(0, \zeta_j)$, nel quale z_j è contenuto; chiamiamo $\tilde{z}_{j,1}, \tilde{z}_{j,2}$ le sue due preimmagini nei due segmenti rispettivamente, che notiamo essere i due punti in \mathcal{S} sopra z_j contenuti nella stessa componente connessa di $P^{-1}(B_r(\zeta_j))$. Segue dall'Esempio 3.27 che il ciclo naturale

$$\gamma_j : t \in [0, 1] \mapsto \zeta_j + (z_j - \zeta_j)e^{2\pi it} \in B_r(\zeta_j) \setminus \{\zeta_j\}$$

induce un'azione di monodromia $\sigma_{\gamma_j} \in \text{Mon}_{z_j}(\mathcal{S}, P)$ che scambia $\tilde{z}_{j,1}$ e $\tilde{z}_{j,2}$, e fissa ogni altro punto sopra z_j .

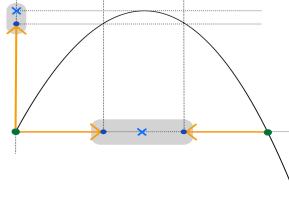


FIGURA 3. Grafico di $t\xi_j \in \xi_j \cdot \mathbb{R}_{\geq 0} \mapsto -\frac{t^d - dt}{d-1}\zeta_j \in \zeta_j \cdot \mathbb{R}$.
 $0, \rho_j \mapsto 0, \quad \tilde{z}_{j,1}, \tilde{z}_{j,2} \mapsto z_j, \quad \xi_j \mapsto \zeta_j, \quad \alpha_j^0, \alpha_j^{\rho_j} \mapsto \alpha_j$

Rimane mappare ogni σ_{γ_j} a $\text{Mon}_0(\mathcal{S}, P)$ per verificare che inducano la transposizione desiderata. La scelta naturale di curve che connettono 0 a z_j è ovviamente $\alpha_j(t) = tz_j$. Dal grafico si vede che il sollevamento di α_j al punto di partenza 0 termina in $\tilde{z}_{j,1}$, mentre quello al punto di partenza ρ_j termina in $\tilde{z}_{j,2}$; un lettore scettico è sempre libero di dimostrarlo. L'azione di monodromia di α_j sugli altri punti di partenza sopra 0 sarà irrilevante.

L'azione di monodromia $\sigma_{\alpha_j}^{-1} \circ \sigma_{\gamma_j} \circ \sigma_{\alpha_j}$ dei cicli coniugati è quindi $(0, \rho_j) \in \text{Mon}_0(\mathcal{S}, P)$.

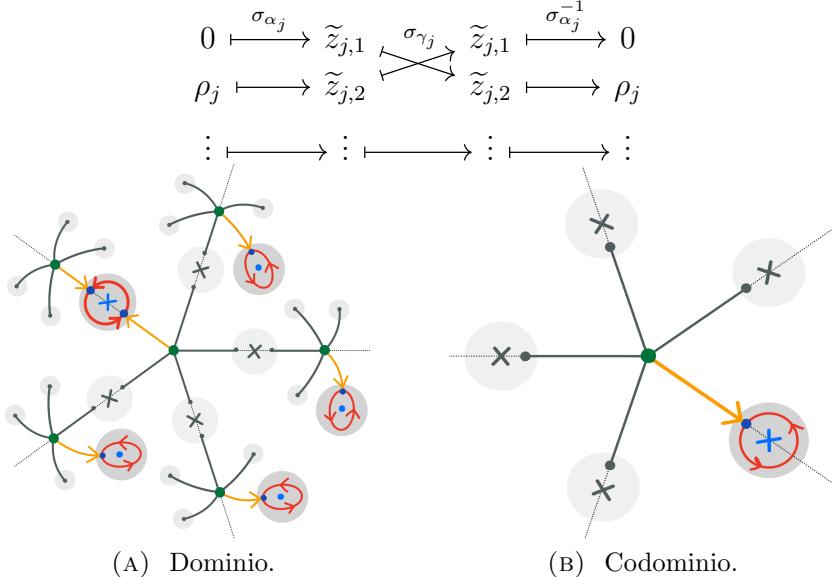


FIGURA 4. Il polinomio $w^6 - 6w$. Nel dominio sono mostrati tutti i sollevamenti di tutte le cose mostrate nel codominio.

$$\{0\} \sqcup \{\rho_j\}_j \mapsto \{0\}, \quad \{\xi_2, \bar{\xi}_{2,1}, \dots, \bar{\xi}_{2,4}\} \mapsto \{\zeta_2\}, \quad \{\tilde{z}_{2,1}, \tilde{z}_{2,2}, \dots\} \mapsto \{z_2\}$$

$$\{\alpha_2^0\} \sqcup \{\alpha_2^{\rho_j}\}_j \mapsto \alpha_2, \quad \{\gamma_2^{\tilde{z}_{2,1}}, \gamma_2^{\tilde{z}_{2,2}}, \dots\} \mapsto \gamma_2$$

Esercizio 3.29. Ispirandoti all'esempio precedente, convinciti che tutti i polinomi $P_{a_1}(w) = w^d + a_1 w$, per ogni $a_1 \in \mathbb{C}^*$, inducono una superficie Riemanniana uniforme (\mathcal{S}, P_{a_1}) ottenuta rimuovendo $d - 1$ punti di ramificazione $P_{a_1}(Z(P'_{a_1})) = \{\zeta_j\}_{0 \leq j < d-1}$, con gruppi di monodromia $\text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, P_{a_1}) \cong S_d$, per $z_0 \in P_{a_1}(\mathcal{S})$.

Esempio 3.30. Sia $2 \leq d \in \mathbb{N}$ e consideriamo la funzione $P : w \in \mathbb{C}^* \mapsto \frac{w^d - 1}{w} \in \mathbb{C}$. Dei calcoli elementari analoghi a quelli negli esempi precedenti danno

$$\begin{aligned} P(w) &= \frac{w^d - 1}{w} & Z(P) &= \{\rho_j\}_{0 \leq j < d} & \rho_j &:= e^{2\pi i \frac{j}{d}} \\ P'(w) &= (d-1) \frac{w^d + \frac{1}{d-1}}{w^2} & Z(P') &= \{\xi_j\}_{0 \leq j < d} & \xi_j &:= \frac{1}{\sqrt[d]{d-1}} e^{i(\frac{\pi}{d} + \frac{2\pi j}{d})} \\ \zeta_j &:= P(\xi_j) = -\frac{d}{d-1} \frac{1}{\xi_j} & P^{-1}\{\zeta_j\} &= \{\xi_j\} \sqcup \{\bar{\xi}_{j,k}\}_{1 \leq k < d-1} & \text{per dei } \{\bar{\xi}_{j,k}\}_{j,k} \text{ tutti distinti.} \end{aligned}$$

Sopra ognuno dei d valori critici ζ_j , P ha profilo di ramificazione $(1, \dots, 2, \dots, 1)$ sopra ζ_j :

$$\forall 0 \leq j < d, 1 \leq k < d-1 : \text{ord}_{\xi_j}(P - \zeta_j) = 2, \quad \text{ord}_{\bar{\xi}_{j,k}}(P - \zeta_j) = 1.$$

Quindi prendiamo $U := \mathbb{C} \setminus \{\zeta_j\}_j$ e $\mathcal{S} := \mathbb{C} \setminus \{0\} \sqcup \{\xi_j, \bar{\xi}_{j,1}, \dots, \bar{\xi}_{j,d-2}\}_j = P^{-1}(U)$, cosicché (\mathcal{S}, P) è una superficie Riemanniana uniforme di grado d . Dimostreremo che le azioni di monodromia indotte dai cicli intorno a ogni punto di ramificazione ζ_j sono le transposizioni $(\rho_j, \rho_{j+1}) \in S(Z(P))$, che di conseguenza generano l'intero gruppo

$$\text{Mon}_0(\mathcal{S}, P) = S(Z(P)) \cong S_d.$$

Sia allora $r > 0$ tale che, per ogni $0 \leq j < d$, $P^{-1}(B_r(\zeta_j))$ si decompone in componenti connesse sulle quali la restrizione di P è esprimibile in forma locale standard, come nell'Esempio 3.27. Una scelta naturale per le basi è $z_j := (1 - \frac{1}{2r})\zeta_j$.

Mostriamo qualitativamente nella Figura 5 i punti di interesse, che si trovano sulle rette tra 0 e i ρ_j, ξ_j e hanno la simmetria rotazionale espressa da

$$\forall w \in \mathbb{C}^*, 0 \leq j < d : P(w\xi_j) = \left(\frac{w^d + (d-1)}{wd} \right) \zeta_j, \quad z_j = z_0 \rho_j.$$

Visto che P conserva la linea $\mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{C}^*$, si restringe a una funzione tra le linee

$$P|_{\xi_j \mathbb{R}_{>0}} : t\xi_j \in \xi_j \cdot \mathbb{R}_{>0} \mapsto \left(\frac{t^d + (d-1)}{td} \right) \zeta_j \in \zeta_j \cdot \mathbb{R}, \quad P(\xi_j \cdot \mathbb{R}_{>0}) = [\zeta_j, \infty \cdot \zeta_j],$$

con punto di minimo globale ξ_j , quando considerata come funzione reale. Allora P si restringe a una funzione $P : \tilde{V} := \mathbb{C} \setminus \bigcup_j \xi_j \cdot \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \bigcup_j [\zeta_j, \infty \cdot \zeta_j] =: \tilde{U}$, dove il dominio \tilde{V} è un'unione di d settori aperti disgiunti del piano, ognuno con esattamente una ρ_j , e \tilde{U} è semplicemente connesso.

Notiamo che i punti $\tilde{z}_{j,1}, \tilde{z}_{j,2}$ in \mathcal{S} sopra z_j contenuti nella stessa componente connessa di $P^{-1}(B_r(\zeta_j))$ sono contenuti uno nel settore di ρ_j e l'altro in quello di ρ_{j+1} .

Segue dall'Esempio 3.27 che il ciclo naturale

$$\gamma_j : t \in [0, 1] \mapsto \zeta_j + (z_j - \zeta_j)e^{2\pi i t} \in B_r(\zeta_j) \setminus \{\zeta_j\}$$

induce un'azione di monodromia $\sigma_{\gamma_j} \in \text{Mon}_{z_j}(\mathcal{S}, P)$ che scambia $\tilde{z}_{j,1}$ e $\tilde{z}_{j,2}$, e fissa ogni altro punto sopra z_j .

Rimane mappare ogni σ_{γ_j} a $\text{Mon}_0(\mathcal{S}, P)$ per verificare che inducano la transposizione desiderata. Sia quindi $\alpha_j(t) = tz_j$ la curva che connette 0 a z_j . Visto che α_j è contenuta in \tilde{U} , il suo sollevamento a ogni punto di partenza ρ_k è limitato al settore di ρ_k in \tilde{V} . Essendo $\tilde{z}_{j,1}, \tilde{z}_{j,2}$ gli unici punti di \mathcal{S} sopra z_j nei settori di ρ_j e ρ_{j+1} rispettivamente, i sollevamenti $\alpha_j^{\rho_j}, \alpha_j^{\rho_{j+1}}$ terminano necessariamente in $\tilde{z}_{j,1}$ e $\tilde{z}_{j,2}$ rispettivamente. L'azione di monodromia di α_j sugli altri punti di partenza sopra 0 sarà irrilevante.

L'azione di monodromia $\sigma_{\alpha_j}^{-1} \circ \sigma_{\gamma_j} \circ \sigma_{\alpha_j}$ dei cicli coniugati è quindi $(\rho_j, \rho_{j+1}) \in \text{Mon}_0(\mathcal{S}, P)$.

$$\begin{array}{ccccc} \rho_j & \xrightarrow{\sigma_{\alpha_j}} & \tilde{z}_{j,1} & \xrightarrow{\sigma_{\gamma_j}} & \tilde{z}_{j,1} \xrightarrow{\sigma_{\alpha_j}^{-1}} \rho_j \\ \rho_{j+1} & \longmapsto & \tilde{z}_{j,2} & \nearrow \times & \tilde{z}_{j,2} \longmapsto \rho_{j+1} \\ \vdots & \longrightarrow & \vdots & \longrightarrow & \vdots \end{array}$$

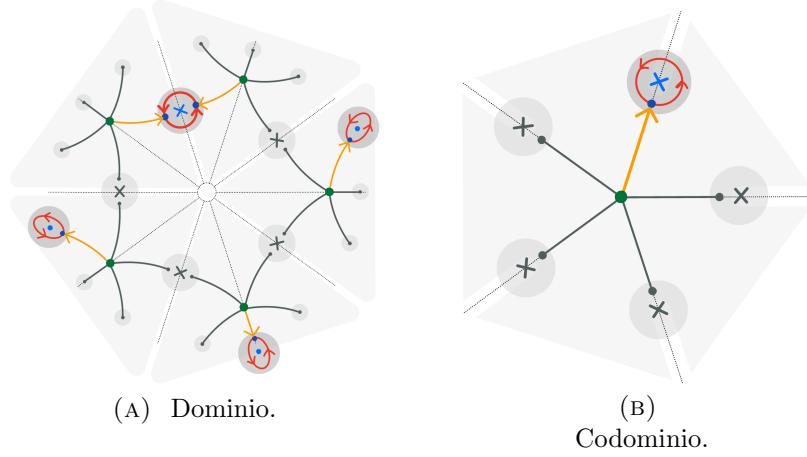


FIGURA 5. La funzione $\frac{w^5 - 1}{w}$. Nel dominio sono mostrati tutti i sollevamenti di tutte le cose mostrate nel codominio.

$$\begin{aligned} \{\rho_j\}_j &\mapsto \{0\}, \quad \{\xi_1, \bar{\xi}_{1,1}, \bar{\xi}_{1,2}, \bar{\xi}_{1,3}\} \mapsto \{\zeta_1\}, \quad \{\tilde{z}_{1,1}, \tilde{z}_{1,2}, \dots\} \mapsto \{z_1\} \\ \{\alpha_1^{\rho_j}\}_j &\mapsto \alpha_1, \quad \{\gamma_1^{\tilde{z}_{1,1}}, \gamma_1^{\tilde{z}_{1,2}}, \dots\} \mapsto \gamma_1 \end{aligned}$$

Esercizio 3.31. Ispirandoti all'esempio precedente, convinciti che tutti le funzioni analitiche $P_{a_0}(w) = \frac{w^d + a_0}{w}$, per ogni $a_0 \in \mathbb{C}^*$, inducono una superficie Riemanniana uniforme (\mathcal{S}, P_{a_0}) ottenuta rimuovendo d punti di ramificazione $P_{a_0}(Z(P'_{a_0})) = \{\zeta_j\}_{0 \leq j < d}$, con gruppi di monodromia $\text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, P_{a_0}) \cong S_d$, per $z_0 \in P_{a_0}(\mathcal{S})$.

Esempio 3.32. Consideriamo la superficie Riemanniana uniforme $(\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}, \cos)$ sulla base $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$. Dei calcoli elementari danno

$$Z(\cos) = \pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2} = \{\rho_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \rho_k := \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$Z(\cos') = \pi\mathbb{Z} = \{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \left\{\xi_k\right\}_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \text{ pari}}} \sqcup \left\{\xi_k\right\}_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \text{ dispari}}} = \cos^{-1}\{1\} \sqcup \cos^{-1}\{-1\}, \quad \xi_k := k\pi,$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, k \text{ pari} : \text{ord}_{\xi_k}(\cos - 1) = 2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, k \text{ dispari} : \text{ord}_{\xi_k}(\cos + 1) = 2,$$

ovvero \cos ha profilo di ramificazione $(2)_{k \in \mathbb{Z}}$ sopra 1 e $(2)_{k \in \mathbb{Z}}$ sopra -1 .

Gli argomenti nell'Esempio 3.27 si applicano a $\zeta = \pm 1$. Prendiamo allora $r > 0$ tale che $\cos^{-1}(B_r(1))$ e $\cos^{-1}(B_r(-1))$ si decompongono in componenti connesse sulle quali la restrizione di \cos è esprimibile in forma locale standard. Siano

$$\alpha : t \in [0, 1] \mapsto (1 - \frac{r}{2})t \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}, \quad \beta : t \in [0, 1] \mapsto (-1 + \frac{r}{2})t \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}.$$

Allora, lasciamo come esercizio verificare che i cicli naturali

$$\gamma : t \in [0, 1] \mapsto 1 - \frac{r}{2}e^{2\pi it}, \quad \delta : t \in [0, 1] \mapsto -1 + \frac{r}{2}e^{2\pi it},$$

in $\Omega_{1-\frac{r}{2}} B_r(1)$ e $\Omega_{-1+\frac{r}{2}} B_r(-1)$ inducono, dopo coniugazione con α e β rispettivamente, le azioni di monodromia

$$\tau := \sigma_{\alpha^{-1} \bullet \gamma \bullet \alpha} = \cdots (\rho_{-3} \rho_{-2})(\rho_{-1} \rho_0)(\rho_1 \rho_2) \cdots, \quad \eta := \sigma_{\beta^{-1} \bullet \delta \bullet \beta} = \cdots (\rho_{-2} \rho_{-1})(\rho_0 \rho_1)(\rho_2 \rho_3) \cdots,$$

che mostriamo nella Figura 6. Esprimiamo qualitativamente le combinazioni di τ e η :

$$\tau^2 = id = \eta^2, \quad \eta \circ \tau = (\cdots \rho_2 \rho_0 \rho_{-2} \cdots)(\cdots \rho_{-1} \rho_1 \rho_3 \cdots) = (\tau \circ \eta)^{-1},$$

$$(\eta \circ \tau)^n = \cdots (\cdots \rho_{2n} \rho_0 \rho_{-2n} \cdots) \cdots (\cdots \rho_{-2n+1} \rho_1 \rho_{2n+1} \cdots) \cdots = (\tau \circ \eta)^{-n}, \quad \forall n \geq 1.$$

Può essere verificato che le permutazioni τ e η non hanno alcuna relazione, se non per la loro nilpotenza, e quindi il sottogruppo che generano è isomorfo al gruppo libero in due elementi

$$\langle g, h \mid g^2 = 0 = h^2 \rangle \xrightarrow{\sim} \langle \tau, \eta \rangle \subseteq \text{Mon}_0(\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}, \cos).$$

Similarmente agli Esempi 3.22 e 3.23, sfruttando le simmetrie della superficie $(\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}, \cos)$

$$\forall z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z} : \cos(z + 2\pi n) = \cos(z), \quad \forall z \in \mathbb{C} : \overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z}),$$

si può dimostrare che l'azione di monodromia σ_λ indotta da un qualsiasi ciclo $\lambda \in \Omega_0 \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ è univocamente determinata da $\sigma_\lambda(\rho_0)$ ed è già una combinazione di τ e η . Di conseguenza abbiamo $\langle \tau, \eta \rangle = \text{Mon}_0(\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}, \cos)$.

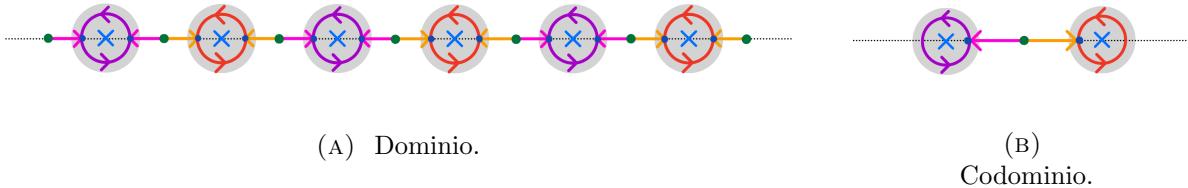


FIGURA 6. La funzione analitica \cos . Nel dominio sono mostrati tutti i sollevamenti di tutte le cose mostrate nel codominio.

$$\begin{aligned} \{\rho_k\}_k &\mapsto \{0\}, \quad \{\xi_k\}_k \mapsto \{1, -1\}, \\ \cos^{-1}\left\{1 - \frac{r}{2}\right\} \sqcup \cos^{-1}\left\{-1 + \frac{r}{2}\right\} &\mapsto \left\{1 - \frac{r}{2}, -1 + \frac{r}{2}\right\} \\ \{\alpha^{\rho_k}\}_k &\mapsto \alpha, \quad \{\gamma^{\tilde{z}}\}_{\tilde{z} \in \cos^{-1}\{1 - \frac{r}{2}\}} \mapsto \gamma, \quad \{\beta^{\rho_k}\}_k \mapsto \beta, \quad \{\delta^{\tilde{z}}\}_{\tilde{z} \in \cos^{-1}\{-1 + \frac{r}{2}\}} \mapsto \delta \end{aligned}$$

Ora che abbiamo visto un paio di esempi concreti di gruppi di monodromia, proseguiamo studiando come esso si trasforma attraverso rivestimenti di superfici Riemanniane, e in particolare attraverso il prodotto fibrato. Queste considerazioni saranno fondamentali nella Sezione 4 per dedurre le proprietà dei gruppi di monodromia di un'intera classe di superfici Riemanniane, conoscendo meramente i gruppi delle superfici usate per costruirle.

Proposizione 3.33. Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ un rivestimento tra superfici Riemanniane, $\tilde{\mathcal{S}}$ uniforme e $z_0 \in \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}})$, $s_0 \in \pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\}$ con $s_0 \in p(\tilde{\mathcal{S}})$. Allora il triangolo $\pi_{\mathcal{S}} \circ p = \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}$ si restringe nel modo

$$\begin{array}{ccccc}
p^{-1}\{s_0\} & \longrightarrow & \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}^{-1}\{s_0\} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{S}} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\
\{s_0\} & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{S} & \xrightarrow{\quad} & \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) \\
& \searrow & \downarrow \pi_{\mathcal{S}} & \nearrow & \\
& \{z_0\} & \xleftarrow{\quad} & \xrightarrow{\quad} & \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}})
\end{array}$$

sulle fibre, c'è una naturale iniezione $\Omega_{s_0}\mathcal{S} \hookrightarrow \Omega_{z_0}\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}})$, $\gamma \mapsto \pi_{\mathcal{S}} \circ \gamma$, e le azioni di monodromia di p sopra s_0 sono in modo naturale anche azioni di monodromia di $\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}$ sopra z_0 , ovvero c'è un'inclusione di gruppi ι_{p,s_0} che rende commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccccc}
S(\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}^{-1}\{z_0\}) & \longleftarrow & \mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}) & \twoheadleftarrow & \Omega_{z_0}\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}}) \\
& & \uparrow \iota_{p,s_0} & & \uparrow \gamma \mapsto \pi_{\mathcal{S}} \circ \gamma \\
S(p^{-1}\{s_0\}) & \longleftarrow & \mathcal{M}on_{s_0}(\tilde{\mathcal{S}}, p) & \twoheadleftarrow & \Omega_{s_0}\mathcal{S}
\end{array}$$

L'immagine di questo monomorfismo è il sottogruppo di azioni di monodromia che preservano la fibra $p^{-1}\{s_0\} \subseteq \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}^{-1}\{z_0\}$:

$$\mathcal{M}on_{s_0}(\tilde{\mathcal{S}}, p) \xrightarrow[\sigma \mapsto \sigma|_{p^{-1}\{s_0\}}]{\sim} \{\sigma \in \mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}) \mid \sigma(p^{-1}\{s_0\}) = p^{-1}\{s_0\}\}$$

Dimostrazione. Come nell'Esempio 3.9, la restrizione $p : \tilde{\mathcal{S}} \twoheadrightarrow p(\tilde{\mathcal{S}})$ è un rivestimento tra superfici uniformi. Il fatto che $\pi_{\mathcal{S}} \circ \gamma$ è un ciclo contenuto in $\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}})$, e non meramente in $\pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$, vale perché lo si può sollevare a $\gamma^{\tilde{s}}$, per una qualunque $\tilde{s} \in p^{-1}\{s_0\} \neq \emptyset$, e osservare

$$\pi_{\mathcal{S}} \circ \gamma = \pi_{\mathcal{S}} \circ p \circ \gamma^{\tilde{s}} = \pi_{\tilde{\mathcal{S}}} \circ \gamma^{\tilde{s}} \in \Omega_{z_0}\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}}).$$

Il monomorfismo desiderato allora manda un'azione $\sigma_{\gamma} \in S(p^{-1}\{s_0\})$ all'azione $\sigma_{\pi_{\mathcal{S}} \circ \gamma} \in S(\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}^{-1}\{z_0\})$; questo è ben definito perché se $\sigma_{\pi_{\mathcal{S}} \circ \gamma} = \sigma_{\pi_{\mathcal{S}} \circ \gamma'}$ per due diverse curve γ, γ' , allora vale per foza anche $\sigma_{\gamma} = \sigma_{\gamma'}$.

Per la caratterizzazione dell'immagine, basta notare che un'azione $\sigma_{\delta} \in \mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}})$, per $\delta \in \Omega_{z_0}\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}})$, preserva la fibra $p^{-1}\{s_0\}$ se e solo se il suo sollevamento lungo $\pi_{\mathcal{S}|p(\tilde{\mathcal{S}})}$ a una curva δ^{s_0} in $p(\tilde{\mathcal{S}})$ è chiusa, ovvero un ciclo in $\Omega_{s_0}\mathcal{S}$, quindi nell'immagine di ι_{p,s_0} . \square

Proposizione 3.34. Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \twoheadrightarrow \mathcal{S}$ un rivestimento suriettivo tra superfici Riemanniane uniformi e $z_0 \in \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}})$. Le azioni di monodromia su $\tilde{\mathcal{S}}$ si restringono ad azioni di monodromia su \mathcal{S} , dando un epimorfismo di gruppi

$$p_* : \sigma_{\gamma} \in \mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}) \mapsto (s \mapsto p(\sigma_{\gamma}(\tilde{s}))) \in \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}),$$

dove per ogni $s \in \pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\}$ si applica σ_{γ} a un qualunque punto nella fibra $\tilde{s} \in p^{-1}\{s\}$.

Il nucleo dell'epimorfismo p_* è dato da

$$ker p_* = \bigcap_{s \in \pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\}} \iota_{p,s}(\mathcal{M}on_s(\tilde{\mathcal{S}}, p)) \subseteq \mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}),$$

dove i monomorfismi $\iota_{p,s}$ sono descritti nella Proposizione 3.33.

$$\begin{array}{ccccc}
S(\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}^{-1}\{z_0\}) & \xleftarrow{\quad} & \text{ker } p_* & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}) \\
\downarrow & & \parallel & & \downarrow p_* \\
\bigoplus_{s \in \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}^{-1}\{z_0\}} S(p^{-1}\{s\}) & \xleftarrow{\quad} & \bigcap_{s \in \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}^{-1}\{z_0\}} \iota_{p,s}(\mathcal{M}on_s(\tilde{\mathcal{S}}, p)) & & \searrow \\
& & S(\pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\}) & \xleftarrow{\quad} & \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})
\end{array}$$

Dimostrazione. Verifichiamo che la funzione p_* sia ben definita. Sia $s \in \pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\}$. Per ogni $\tilde{s} \in p^{-1}\{s\} \neq \emptyset$, $p \circ \gamma^{\tilde{s}}$ è l'univoco sollevamento di γ lungo $\pi_{\mathcal{S}}$ con punto di partenza $p(\gamma^{\tilde{s}}(0)) = p(\tilde{s}) = s$, che quindi non dipende dalla \tilde{s} scelta. L'azione di monodromia che induce (sulla superficie \mathcal{S} !) allora è

$$\sigma_{\gamma}(s) = p \circ \gamma^{\tilde{s}}(1) = p(\gamma^{\tilde{s}}(1)) = p(\sigma_{\gamma}(\tilde{s})) \in \pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\},$$

che è proprio quella descritta nella proposizione.

Ogni azione di monodromia nel nucleo $\text{ker } p_* \subseteq \mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}})$ preserva ogni fibra $p^{-1}\{s\} \subseteq \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}^{-1}\{z_0\}$, quindi è contenuta in ogni immagine $\iota_{p,s}(\mathcal{M}on_s(\tilde{\mathcal{S}}, p))$ come descritto nella Proposizione 3.33. \square

Esercizio 3.35. Consideriamo $(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}) = (\mathbb{C}^*, w^4)$ e $(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) = (\mathbb{C}^*, w^2)$. Convinciti che la funzione analitica $p : w \in \tilde{\mathcal{S}} \mapsto w^2 \in \mathcal{S}$ è un rivestimento che induce i seguenti omomorfismi.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{M}on_1(\tilde{\mathcal{S}}, p) & \xrightarrow[\sim]{\iota_{p,1}} & \text{ker } p_* & \hookrightarrow & \mathcal{M}on_1(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}) & \xrightarrow{p_*} & \mathcal{M}on_1(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) \\
& & \uparrow \wr & & \uparrow \wr 3.22 & & \uparrow \wr 3.22 \\
& & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{1 \mapsto 2} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{1 \mapsto 1} & \mathbb{Z}_2
\end{array}$$

Lemma 3.36. Siano \mathcal{S}, \mathcal{T} superfici Riemanniane uniformi e $U = \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}), V = \pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})$ le loro basi. C'è il seguente diagramma commutativo di superfici Riemanniane uniformi

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}} & & \\
& \swarrow p_{\mathcal{S}} & \downarrow \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}} & \searrow p_{\mathcal{T}} & \\
\mathcal{S} & \xleftarrow{\quad} & U \cap V & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{T} \\
& \searrow \pi_{\mathcal{S}} & \uparrow \pi_{\mathcal{S}} & \swarrow \pi_{\mathcal{T}} & \\
& U & & V &
\end{array}$$

dove $p_{\mathcal{S}}, p_{\mathcal{T}}$ sono rivestimenti. Inoltre, per ogni $z_0 \in U \cap V$, i due epimorfismi indotti da $p_{\mathcal{S}}$ e $p_{\mathcal{T}}$ come descritto nella Proposizione 3.34 compongono un monomorfismo nel prodotto diretto

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}) & \xrightarrow{(p_{\mathcal{S}*}, p_{\mathcal{T}*})} \mathcal{M}on_{z_0}(\pi_{\mathcal{S}}^{-1}(U \cap V), \pi_{\mathcal{S}}) \oplus \mathcal{M}on_{z_0}(\pi_{\mathcal{T}}^{-1}(U \cap V), \pi_{\mathcal{T}}) \\
& \xrightarrow{3.21} \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) \oplus \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}}).
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Il prodotto fibrato sulla base $\mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$ di due superfici uniformi è uniforme, in quanto, per ogni $\tilde{U} \subseteq U$ e $\tilde{V} \subseteq V$ uniformemente rivestiti da $\pi_{\mathcal{S}}$ e $\pi_{\mathcal{T}}$ rispettivamente,

$\tilde{U} \cap \tilde{V}$ è uniformemente rivestito da $\pi_S \circ p_S = \pi_T \circ p_T$. Inoltre, i cilindri aperti di \mathcal{S} e \mathcal{T} sono uniformi, quindi con il Lemma 3.8 p_S e p_T sono rivestimenti.

Verifichiamo che l'omomorfismo composto (p_{S*}, p_{T*}) è iniettivo. Sia quindi $\gamma \in \Omega_{z_0}(U \cap V)$ e $\sigma_\gamma \in \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}_{\pi_S} \times \mathcal{T}_{\pi_T}, \pi_S \circ p_S)$ con $p_{S*}(\sigma_\gamma) = id_{\pi_S^{-1}\{z_0\}}$ e $p_{T*}(\sigma_\gamma) = id_{\pi_T^{-1}\{z_0\}}$. Allora, per ogni $(s, t) \in p_S^{-1}\pi_S^{-1}\{z_0\} = p_T^{-1}\pi_T^{-1}\{z_0\}$, abbiamo

$$p_S(\sigma_\gamma((s, t))) \stackrel{\text{Def. di } p_{S*}}{=} p_{S*}(\sigma_\gamma)(s) = (s), \quad p_T(\sigma_\gamma((s, t))) \stackrel{\text{Def. di } p_{T*}}{=} p_{T*}(\sigma_\gamma)(t) = (t),$$

che implica $\sigma_\gamma((s, t)) = (s, t)$, e visto che (s, t) era arbitrario, vale $\sigma_\gamma = id_{p_S^{-1}\pi_S^{-1}\{z_0\}}$ \square

Esercizio 3.37. Calcola i gruppi di monodromia del prodotto sulla base $\mathcal{S}_{\pi_S} \times \mathcal{T}_{\pi_T}$ tra

- (1) $\mathcal{S} = (\mathbb{C}^*, w^2)$ e $\mathcal{T} = (\mathbb{C} \setminus \{1\}, (w-1)^2)$,
- (2) $\mathcal{S} = (\mathbb{C}^*, w^2)$ e $\mathcal{T} = (\mathbb{C}, \exp(w-1))$,
- (3) $\mathcal{S} = (\mathbb{C}^*, w^2)$ e $\mathcal{T} = (\mathbb{C}, \exp)$.

Proposizione 3.38. Siano \mathcal{S}, \mathcal{T} superfici Riemanniane con \mathcal{T} uniforme e $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica. Allora, la restrizione $p_S : \mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T} \rightarrow p_S(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T})$ è un rivestimento, e se in più \mathcal{S} è uniforme e $f(\mathcal{S}) \subseteq \pi_T(\mathcal{T})$ allora $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T}$ è uniforme. Per ogni $s \in \pi_S^{-1}\{z_0\}$, abbiamo la biiezione

$$p_T : p_S^{-1}\{s\} = \{s\} \times \pi_T^{-1}\{f(s)\} \xrightarrow{\sim} \pi_T^{-1}\{f(s)\}.$$

$$\begin{array}{ccccccc} p_S^{-1}\{s\} & \xlongleftarrow{\hspace{1cm}} & \mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \mathcal{T} & \xleftarrow{\hspace{1cm}} & \pi_T^{-1}\{f(s)\} \\ \downarrow & & \downarrow p_S & & \downarrow \pi_T & & \downarrow \\ \{s\} & \longrightarrow & \pi_S^{-1}\{z_0\} & \longrightarrow & p_S(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T}) & \longrightarrow & \mathcal{S} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xleftarrow{\hspace{1cm}} \{f(s)\} \\ \downarrow & & \downarrow \pi_S & & \downarrow \pi_S & & \downarrow \\ \{z_0\} & \longrightarrow & \pi_S(p_S(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T})) & \longrightarrow & \pi_S(\mathcal{S}) & & \end{array}$$

Inoltre, per ogni $s \in \pi_S^{-1}\{z_0\}$ con $f(s) \in \pi_T(\mathcal{T})$, c'è un monomorfismo di gruppi f_* che rende commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{array}{ccc} S(p_S^{-1}\{s\}) & \xrightarrow[\sim]{\sigma \mapsto p_T \circ \sigma \circ p_T^{-1}} & S(\pi_T^{-1}\{f(s)\}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M}on_s(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T}, p_S) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{M}on_{f(s)}(\mathcal{T}, \pi_T) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Omega_S p_S(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T}) & \xrightarrow{\gamma \mapsto f \circ \gamma} & \Omega_{f(s)} \pi_T(\mathcal{T}) \end{array}$$

Dimostrazione. Se $V \subseteq \pi_T(\mathcal{T})$ è uniformemente rivestito da π_T , allora $f^{-1}(V)$ è uniformemente rivestito da p_S per la Definizione 2.15 di quali sono le branche della superficie Riemanniana $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T}$. Se $f(\mathcal{S}) \subseteq \pi_T(\mathcal{T})$ allora $p_S(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T}) = \mathcal{S}$ e p_S è un rivestimento suriettivo su \mathcal{S} , che se è uniforme, con il Lemma 3.8, segue che anche $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T}$ è uniforme con base $\pi_S(\mathcal{S})$. La biiezione tra le fibre segue della definizione del prodotto fibrato (anche nel caso in cui $f(s) \notin \pi_T(\mathcal{T})$, ovvero $p_S^{-1}\{s\} = \emptyset$).

Vogliamo adesso investigare l'esistenza del monomorfismo f_* . Prima di tutto verifichiamo che il diagramma di gruppi commuta, ovvero che, per un qualsiasi ciclo $\gamma \in \Omega_S p_S(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_T})$,

c'è un uguaglianza $p_{\mathcal{T}} \circ \sigma_{\gamma} \circ p_{\mathcal{T}}^{-1} = \sigma_{f \circ \gamma}$ tra permutazioni in $S(\pi_{\mathcal{T}}^{-1}\{f(s)\})$. A questo fine, sia $t \in \pi_{\mathcal{T}}^{-1}\{f(s)\}$ arbitrario. Per determinare l'immagine $\sigma_{\gamma}(p_{\mathcal{T}}^{-1}(t)) = \sigma_{\gamma}((s, t))$ dobbiamo considerare il sollevamento $\gamma^{(s,t)}$ di γ a una curva continua in $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$ che parte da (s, t) e soddisfa $p_{\mathcal{S}} \circ \gamma^{(s,t)} = \gamma$. Allora vale

$$\pi_{\mathcal{T}} \circ p_{\mathcal{T}} \circ \gamma^{(s,t)} = f \circ p_{\mathcal{S}} \circ \gamma^{(s,t)} = f \circ \gamma,$$

ovvero la curva continua $p_{\mathcal{T}} \circ \gamma^{(s,t)}$ in \mathcal{T} che parte da $p_{\mathcal{T}}(\gamma^{(s,t)}(0)) = t$ è un sollevamento lungo $\pi_{\mathcal{T}}$ del ciclo $f \circ \gamma$. Per definizione di $\sigma_{f \circ \gamma}$ vale

$$\sigma_{f \circ \gamma}(t) = p_{\mathcal{T}}(\gamma^{(s,t)}(1)) = p_{\mathcal{T}}(\sigma_{\gamma}((s, t))) = p_{\mathcal{T}}(\sigma_{\gamma}(p_{\mathcal{T}}^{-1}(t))),$$

che è l'uguaglianza che ci siamo risolti a dimostrare.

Ne segue che l'immagine di $\text{Mon}_s(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, p_{\mathcal{S}})$ in $S(\pi_{\mathcal{T}}^{-1}(f(s)))$ è contenuta nell'immagine di $\text{Mon}_{f(s)}(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}})$, e quindi otteniamo il monomorfismo f_* . \square

Corollario 3.39. Siano \mathcal{S}, \mathcal{T} superfici Riemanniane uniformi, $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica con $f(\mathcal{S}) \subseteq \pi(\mathcal{T})$ e $s_0 \in \mathcal{S}$ con $f(s_0) \in \pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})$, $z_0 := \pi_{\mathcal{S}}(s_0)$. Allora abbiamo il seguente diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi.

$$\begin{array}{ccccc} \ker p_{\mathcal{S}*} & \xhookrightarrow{\quad} & \text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}) & \xrightarrow[p_{\mathcal{S}*}]{}_{3.34} & \text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) \\ \downarrow 3.34 & \nearrow \iota_{p_{\mathcal{S}}, s_0} & \nearrow 3.33 & & \\ \text{Mon}_{s_0}(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, p_{\mathcal{S}}) & \xleftarrow[f_*]{}_{3.38} & & & \text{Mon}_{f(s_0)}(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}}) \end{array}$$

Esempio 3.40. Con $(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) = (\mathbb{C}^*, w^2)$ e $(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}}) = (\mathbb{C}^*, w^2)$ abbiamo $\mathcal{S}_{id_{\mathbb{C}^*}} \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}} \cong (\mathbb{C}^*, w^4)$, ci ricolleghiamo quindi all'Esercizio 3.35 con $(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}) = (\mathbb{C}^*, w^4)$ e $p = p_{\mathcal{S}} : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$. Per $s_0 \in \mathcal{S}$ e $z_0 = s_0^2$, il diagramma nel Corollario 3.39 diventa

$$\begin{array}{ccc} \text{Mon}_{s_0}(\tilde{\mathcal{S}}, p) & \xhookrightarrow{\quad} & \text{Mon}_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}) & \xrightarrow[p_*]{}_{3.34} & \text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) \\ \downarrow 3.38 & \nearrow \iota & \nearrow \iota & \nearrow \iota & \nearrow \iota \\ \text{Mon}_{s_0}(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}}) & & \mathbb{Z}_4 & & \mathbb{Z}_2 \\ \uparrow \iota & & & & \\ \mathbb{Z}_2 & & & & \end{array}$$

4. RISOLVIBILITÀ

4.1. Risolvibilità in termini di radicali. Negli Esempi 2.17 e 2.18 abbiamo visto che i polinomi di grado 2 e 3 ammettono formule per i loro zeri in termini di ogni coefficiente, ma la parte interessante è che queste formule sono tutt'alpiù 'in termini di radicali', ovvero rappresentabili su superfici Riemanniane costruite attraverso il prodotto fibrato con le d -esime superfici radicali; questo è possibile anche in grado 4, ma non ce ne occuperemo. Rendiamo questo concetto preciso.

Definizione 4.1. Sia $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica su una superficie Riemanniana \mathcal{S} . Una *inversa generalizzata di f su U* è una funzione analitica $g : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ su una superficie Riemanniana $\tilde{\mathcal{S}}$ con $f \circ g = \pi_{\mathcal{S}}$ e $\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}}) = U$. Se \mathfrak{C} è una collezione di superfici Riemanniane, una inversa generalizzata è chiamata *della classe \mathfrak{C}* se il suo dominio è una superficie in \mathfrak{C} . Se una inversa generalizzata di classe \mathfrak{C} su U esiste, allora f è chiamata *\mathfrak{C} -risolvibile su U* .

Nota 4.2. Di per sé, una qualunque inversa generalizzata non è utile, per via dei due seguenti esempi triviali; f è naturalmente assunta essere non costante.

- Se U è abbastanza piccolo e non contiene punti di non invertibilità di f , allora esiste una branca di f sopra U che è di conseguenza una inversa generalizzata con dominio la superficie triviale U .
- Sia $\tilde{\mathcal{S}} = \pi_{\mathcal{S}}^{-1}(\pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) \setminus \pi_{\mathcal{S}}(Z(f'))) \subseteq \mathcal{S}$ il cilindro aperto senza punti di non invertibilità di f . Allora $\iota : (\tilde{\mathcal{S}}, f) \hookrightarrow (\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})$ è una inversa generalizzata di f su $\pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) \setminus \pi_{\mathcal{S}}(Z(f'))$.

Diventa interessante chiedersi quando esiste una inversa generalizzata g della quale la superficie di dominio e la base soddisfano certi criteri:

- una base $U \subseteq f(\mathcal{S})$ abbastanza grande,
- una superficie di dominio $\tilde{\mathcal{S}}$ in una specifica collezione \mathfrak{C} .

Esempi 4.3. Gli Esempi 3.7 di rivestimenti si traducono nelle seguenti inverse generalizzate.

- (1) Per ogni $1 \leq d, \tilde{d} \in \mathbb{N}$ tale che d divide \tilde{d} , $w \in (\mathbb{C}^*, w^{\tilde{d}}) \mapsto w^{\tilde{d}/d} \in (\mathbb{C}^*, id_{\mathbb{C}^*})$ è una inversa generalizzata di $w \in \mathbb{C} \mapsto w^d \in \mathbb{C}$ su \mathbb{C}^* .
- (2) Per ogni $1 \leq d \in \mathbb{N}$, $w \in (\mathbb{C}^*, exp) \mapsto exp(\frac{w}{d}) \in (\mathbb{C}^*, id_{\mathbb{C}^*})$ è una inversa generalizzata di $w \in \mathbb{C} \mapsto w^d \in \mathbb{C}$ su \mathbb{C}^* .

Nota 4.4. Ci interesseranno specialmente superfici Riemanniane costruibili dalle superfici triviali attraverso due operazioni viste negli Esempi 2.16:

- prodotto fibrato sulle loro basi $\mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$, cosicché ogni due funzioni f su \mathcal{S} e g su \mathcal{T} possono essere estese a un dominio comune (in particolare ci si può restringere a ogni cilindro aperto $\mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times U_{\pi_{\mathcal{T}}}$), e poi essere composte via le operazioni algebriche,
- prodotto fibrato $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$ con una speciale superficie $(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}})$ e $f : \mathcal{S} \rightarrow \pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})$ analitica, ad esempio una d -esima superficie radicale (\mathbb{C}^*, w^d) cosicché si può sempre rappresentare la d -esima radice ' $\sqrt[d]{f}$ '.

Sarà conveniente considerare la collezione \mathfrak{Rie} di tutte le superfici Riemanniane⁸; questa è di certo una collezione grande e imponente, ragion per cui i caratteri minacciosi.

⁸Il lettore sospettoso di cosa davvero sia \mathfrak{Rie} , in quanto contiene in particolare tutti gli insiemi, è invitato a considerare stringhe di caratteri del tipo ' $\in \mathfrak{Rie}$ ' meramente come un'abbreviazione per 'è una superficie Riemanniana'.

Definizione 4.5.

$$\mathfrak{Rad}_0 := \{(\mathcal{U}, \pi_{\mathcal{U}}) \in \mathfrak{Rie} \mid \exists U \subseteq \mathbb{C} \text{ aperto} : (\mathcal{U}, \pi_{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\cong}_{\mathbb{C}} (U, \pi_U : U \hookrightarrow \mathbb{C})\}$$

Costruiamo per induzione una successione infinita di soprainsiemi $\mathfrak{Rad}_0 \subseteq \mathfrak{Rad}_1 \subseteq \mathfrak{Rad}_2 \dots$ di superfici Riemanniane. Per $n \in \mathbb{N}$, supponendo di aver definito \mathfrak{Rad}_n , definiamo \mathfrak{Rad}_{n+1} come

$$\begin{aligned} \mathfrak{Rad}_{n+1} := & \{(\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}) \in \mathfrak{Rie} \mid \exists \mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathfrak{Rad}_n : (\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\cong}_{\mathbb{C}} (\mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}})\} \\ & \cup \left\{ (\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}) \in \mathfrak{Rie} \mid \begin{array}{l} \exists \mathcal{S} \in \mathfrak{Rad}_n, 2 \leq d \in \mathbb{N} \\ f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}^* \text{ analitica} \end{array} : (\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\cong}_{\mathbb{C}} (\mathcal{S}_f \times \mathbb{C}_{z^d}^*, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}) \right\} \end{aligned}$$

Ogni $\mathcal{S} \in \mathfrak{Rad}_n$ è canonicamente isomorfa sopra \mathbb{C} a $(\mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathbb{C}_{id_{\mathbb{C}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}) \in \mathfrak{Rad}_{n+1}$, abbiamo così l'inclusione $\mathfrak{Rad}_n \subseteq \mathfrak{Rad}_{n+1}$.

Chiamiamo *superfici radicali* le superfici Riemanniane in uno dei \mathfrak{Rad}_n , ne definiamo così la collezione

$$\mathfrak{Rad} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Rad}_n.$$

Definizione 4.6. Sia $1 \leq d \in \mathbb{N}$, e stipuliamo che tutti gli indici k in questa definizione variino su $0 \leq k < d$. Per ogni $\{a_k\}_k \subseteq \mathbb{C}$ denotiamo $P_{\{a_k\}_k} = w^d + \sum_k a_k w^k$ il polinomio di grado d con coefficienti a_k . Per ogni $0 \leq j < d$ e $\{a_k\}_{k \neq j} \subseteq \mathbb{C}$, definiamo la funzione analitica che estrae il coefficiente a_j :

$${}_j P_{\{a_k\}_{k \neq j}} : w \in \mathbb{C}^* \mapsto -\frac{1}{w^j} \left(w^d + \sum_{0 \leq k < d, k \neq j} a_k w^k \right) \in \mathbb{C},$$

cosicchè $\forall a_j \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}^* : P_{\{a_k\}_{k \neq j} \sqcup \{a_j\}}(w) = 0 \iff {}_j P_{\{a_k\}_{k \neq j}}(w) = a_j$. Per $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e \mathfrak{C} una collezione di superfici Riemanniane, chiamiamo una inversa generalizzata per ${}_j P_{\{a_k\}_{k \neq j}}$ su U della classe \mathfrak{C} una *formula per gli zeri dei polinomi* $\{P_{\{a_k\}_{k \neq j} \sqcup \{a_j\}}\}_{a_j \in U}$ in termini del coefficiente a_j della classe \mathfrak{C} .

Nota 4.7. La definizione di 'formula' appena data ha due mancanze. La prima è che parliamo di 'formule' in termini di ogni singolo coefficiente a_j e non di tutti assieme. La seconda è che per caratterizzarla, non usiamo la condizione più naturale $P_{\{a_k\}_k}(w) = 0$, ma la condizione equivalente ${}_j P_{\{a_k\}_{k \neq j}}(w) = a_j$ che ci costringe a eliminare 0 dal dominio. La teoria di superfici Riemanniane che abbiamo sviluppato tratta solo di funzioni tra spazi di 'dimensione' uno. Provare a colmare queste due mancanze porta naturalmente allo sviluppo di una teoria per 'spazi complessi' definiti da equazioni a più variabili, che discutiamo nella Sezione 5.3.

Inoltre, come visto negli Esempi 2.17 e 2.18, diventa noioso tener conto di quali punti sono stati eliminati per via di singolarità o non invertibilità; i punti eliminati sono sempre di numero finito per tutte le superfici costruite da polinomi, e sono almeno discreti in \mathbb{C} per tutte le superfici costruite da funzioni analitiche. Per questo ci accontenteremo di affermare l'esistenza di formule su sottoinsiemi aperti $U \subseteq \mathbb{C}$ con $\mathbb{C} \setminus U$ finito (risp. discreto), che chiamiameremo *cofiniti* (risp. *codiscreti*).

Teorema 4.8. Per ogni $1 \leq d \leq 4$, $0 \leq j < d$ e $\{a_k\}_{k \neq j}^{0 \leq k < d} \subseteq \mathbb{C}$, esiste una formula per gli zeri dei polinomi $\{P_{\{a_k\}_{k \neq j}^{0 \leq k < d} \sqcup \{a_j\}}\}_{a_j \in U}$ in termini del coefficiente a_j della classe \mathfrak{Rad} su un sottoinsieme cofinito $U \subseteq \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Il grado $d = 1$ è immediato, in quanto $\{w + a_0\}_{a_0 \in \mathbb{C}}$ hanno formula per i loro zeri $a_0 \mapsto -a_0$.

Nell'Esempio 2.17 abbiamo trattato il grado $d = 2$ e i coefficienti b, c dei polinomi $w^2 + bw + c$, dove non avevamo normalizzato il polinomio per rendere i calcoli più interessanti; basta inserire $a = 1$ dovunque appare per ottenere il nostro caso.

Nell'Esempio 2.18 abbiamo trattato il grado $d = 3$ e il coefficiente q dei polinomi $w^3 + pw + q$. Il coefficiente p è trattato in modo analogo, mentre il caso generale dei polinomi $w^3 + bw^2 + pw + q$ si riduce a quelli precedenti attraverso una cambio lineare di coordinate.

Lasciamo come esercizio convincersi che per il grado $d = 4$ si può applicare la stessa analisi alla formula quartica, che si può trovare su Wikipedia. \square

Nota 4.9. Vedremo che ci sono equazioni di grado maggiori al quarto che non ammettono una formula per i loro zeri della classe \mathfrak{Rad} nel senso della Definizione 4.6. Nella nostra teoria di superfici Riemanniane e inverse generalizzate, questo fatto è analogo al conosciuto teorema di Abel-Ruffini, che discutiamo nella Sezione 6. Ma prima ci concentreremo su esempi più semplici.

Nella formula quadratica, cubica e quartica vengono estratte solo radici di grado ≤ 2 , ≤ 3 e ≤ 4 rispettivamente, è quindi naturale rafforzare il Teorema 4.8 per affermare che una formula esiste di una classe costruita da (\mathbb{C}^*, w^2) , (\mathbb{C}^*, w^3) e (\mathbb{C}^*, w^4) rispettivamente. D'altro canto, si può sospettare che estrarre queste radici sia necessario, nel senso che non esiste una formula quadratica, cubica o quartica senza estrarre delle radici di grado 2,3 e 4.

Per precisare queste intuizioni e dimostrare vari risultati di irrisolvibilità, definiamo in modo analogo a 4.5 la gerarchia di superfici costruibili partendo da una arbitraria collezione \mathfrak{C} , non solo da tutte le d -esime superfici radicali.

Definizione 4.10. Sia \mathfrak{C} una collezione di superfici Riemanniane.

$$\mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_0 := \{(\mathcal{U}, \pi_{\mathcal{U}}) \in \mathfrak{Rie} \mid \exists U \subseteq \mathbb{C} \text{ aperto} : (\mathcal{U}, \pi_{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\cong}_{\mathbb{C}} (U, \pi_U : U \hookrightarrow \mathbb{C})\}$$

Per $n \in \mathbb{N}$, supponendo di aver definito $\mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_n$, definiamo $\mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_{n+1}$ come

$$\begin{aligned} \mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_{n+1} := & \{(\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}) \in \mathfrak{Rie} \mid \exists \mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_n : (\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\cong}_{\mathbb{C}} (\mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}})\} \\ & \cup \left\{ (\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}) \in \mathfrak{Rie} \mid \begin{array}{l} \exists \mathcal{S} \in \mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_n, \mathcal{T} \in \mathfrak{C} \\ f : \mathcal{S} \rightarrow \pi_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) \text{ analitica} \end{array} : (\mathcal{P}, \pi_{\mathcal{P}}) \xrightarrow{\cong}_{\mathbb{C}} (\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}) \right\} \end{aligned}$$

Ogni $\mathcal{S} \in \mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_n$ è canonicamente isomorfa sopra \mathbb{C} a $(\mathcal{S}_{\pi_{\mathcal{S}}} \times \mathbb{C}_{id_{\mathbb{C}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}) \in \mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_{n+1}$, abbiamo così l'inclusione $\mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_n \subseteq \mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_{n+1}$. Chiamiamo *superfici costruibili da \mathfrak{C}* le superfici Riemanniane in uno dei $\mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_n$, ne definiamo così la collezione

$$\mathfrak{Cos}(\mathfrak{C}) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})_n.$$

Definizione 4.11. Abbiamo definito $\mathfrak{Rad} := \mathfrak{Cos}(\{(\mathbb{C}^*, w^d)\}_{1 \leq d \in \mathbb{N}})$, ma più restrittivamente possiamo definire $\mathfrak{Rad}^D := \mathfrak{Cos}(\{(\mathbb{C}^*, w^d)\}_{d \in D})$ per ogni insieme di gradi $D \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Esercizio 4.12. Convinciti che per ogni $1 \leq d, m \in \mathbb{N}$ abbiamo $(\mathbb{C}^*, w^{dm}) \in \mathfrak{Rad}^{\{d\}}$. In particolare, $\mathfrak{Rad}^{\{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ primo}\}} = \mathfrak{Rad}$.

Esercizio 4.13. Convinciti che, nel contesto del Teorema 4.8, una formula esiste perlopiù della classe $\mathfrak{Rad}^{\{2\}}$, $\mathfrak{Rad}^{\{2,3\}}$ e $\mathfrak{Rad}^{\{2,3\}}$ per $d = 2, 3$ e 4 rispettivamente.

4.2. Irrisolubilità in termini di radicali. Sfrutteremo il teorema sulle orbite di un sottogruppo, rammentato nel prossimo esercizio, per ottenere informazioni sulla monodromia di un'arbitraria superficie in \mathfrak{Rad}^D dalla monodromia $\text{Mon}_{z_0}(\mathbb{C}^*, w^d) \cong \mathbb{Z}_d$ per $d \in D$.

Esercizio 4.14. Per un sottogruppo $H < G$ di un gruppo finito G , vale $|G| = |H| \cdot |G/H|$, dove G/H è l'insieme di classi laterali ad H sotto l'azione di G .

Corollario 4.15. Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ un rivestimento tra superfici Riemanniane uniformi con gruppi di monodromia finiti. Allora

$$|\text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})| \text{ divide } |\text{Mon}_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}})|, \quad \forall z_0 \in \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}}).$$

In particolare, se p è un fattore primo di $|\text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})|$, allora lo è anche di $|\text{Mon}_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}})|$.

Dimostrazione. Si applica l'Esercizio 4.14 all'epimorfismo $p_* : \text{Mon}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}) \twoheadrightarrow \text{Mon}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})$. \square

Teorema 4.16. Per ogni $D \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, tutte le superfici radicali $\mathcal{S} \in \mathfrak{Rad}_n^D$ sono uniformi, hanno fibre finite sopra ogni punto e i loro gruppi di monodromia soddisfano

$$\exists \{\tilde{d}_i\}_{1 \leq i \leq \lfloor 2^{n-1} \rfloor} \subseteq D : \quad |\text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})| \text{ divide } \prod_{i=1}^{\lfloor 2^{n-1} \rfloor} \tilde{d}_i,$$

rispetto a qualsiasi punto base $z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$. In particolare, se $p \in \mathbb{N}$ è un fattore primo di $|\text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})|$, allora è anche un fattore primo di una $d \in D$.

Dimostrazione. Tutte le superfici radicali in \mathfrak{Rad}_0^D hanno rivestimenti sottostanti triviali di grado uniforme 1, ovvero con gruppi di monodromia di cardinalità 1, che è il prodotto vuoto per convenzione. Quindi l'affermazione vale per $n = 0$.

La collezione \mathfrak{Rad}^D è stata costruita induttivamente da \mathfrak{Rad}_0^D con due operazioni che possono potenzialmente ingrandire le fibre e il gruppo di monodromia, quindi resta da dimostrare il passo induttivo:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : (\forall \mathcal{S} \in \mathfrak{Rad}_n^D : \mathcal{S} \text{ è uniforme, } \exists \{\tilde{d}_i\}_{1 \leq i \leq \lfloor 2^{n-1} \rfloor} \subseteq D \forall z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) : |\text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})| \text{ divide } \prod_{i=1}^{\lfloor 2^{n-1} \rfloor} \tilde{d}_i) \\ \implies (\forall \mathcal{S} \in \mathfrak{Rad}_{n+1}^D : \mathcal{S} \text{ è uniforme, } \exists \{\tilde{d}_i\}_{1 \leq i \leq \lfloor 2^n \rfloor} \subseteq D \forall z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) : |\text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})| \text{ divide } \prod_{i=1}^{\lfloor 2^n \rfloor} \tilde{d}_i). \end{aligned}$$

Sia quindi $n \in \mathbb{N}$. Per definizione, ogni superficie in \mathfrak{Rad}_{n+1}^D è isomorfa sopra \mathbb{C} a un prodotto fibrato $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$ nei due casi

- (1) $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathfrak{Rad}_n^D$, $f = \pi_{\mathcal{S}}$,
- (2) $\mathcal{S} \in \mathfrak{Rad}_n^D$, $\mathcal{T} = (\mathbb{C}^*, w^d)$ per $d \in D$ e $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}^*$ una funzione analitica.

Visto che le fibre di \mathcal{S} e \mathcal{T} sono finite, anche il prodotto ha fibre finite. Per via dell'invarianza sotto isomorfia 3.19, è sufficiente dimostrare l'affermazione per il prodotto fibrato. Per induzione, sappiamo che \mathcal{S} e \mathcal{T} sono uniformi in ogni caso, poiché (\mathbb{C}^*, w^d) è uniforme. Nei Lemma 3.36 e 3.38 abbiamo visto che allora anche $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$ è uniforme nei casi (1) e (2) rispettivamente. Sia $z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(p_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}})) = \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$ un qualsiasi punto nella base di $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$. Nel caso (1) abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}) &\xrightarrow{3.36} \text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) \oplus \text{Mon}_{z_0}(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}}) \implies \\ |\text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}})| &\text{ divide } |\text{Mon}_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})| \cdot |\text{Mon}_{z_0}(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}})| \stackrel{\text{induzione}}{\text{divide}} \prod_{i=1}^{\lfloor 2^{n-1} \rfloor} \tilde{d}_i \cdot \prod_{i=1}^{\lfloor 2^{n-1} \rfloor} \overline{d_i}, \end{aligned}$$

per delle $\{\tilde{d}_i\}_{1 \leq i \leq 2^{n-1}}, \{\overline{d}_i\}_{1 \leq i \leq 2^{n-1}} \subseteq D$.

Nel caso (2) applichiamo il Corollario 3.39 a un qualsiasi $s_0 \in \pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\}$ per ottenere

- (a) $\ker p_{\mathcal{S}*} \trianglelefteq \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}_f \times \mathbb{C}_{w^d}^*, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}})$ e il loro quoziente è $\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})$,
- (b) $\ker p_{\mathcal{S}*} \hookrightarrow \mathcal{M}on_{s_0}(\mathcal{S}_f \times \mathbb{C}_{w^d}^*, p_{\mathcal{S}}) \hookrightarrow \mathcal{M}on_{f(s_0)}(\mathbb{C}^*, w^d)$,

che ci permettono di applicare l'Esercizio 4.14 due volte per ottenere

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}})| &\stackrel{(a)}{=} |\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})| \cdot \deg(\ker p_{\mathcal{S}*}) \\ &\stackrel{(b)}{\text{divide}} |\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})| \cdot |\mathcal{M}on_{f(s_0)}(\mathbb{C}^*, w^d)| \stackrel{\substack{|\mathcal{M}on_{f(s_0)}(\mathbb{C}^*, w^d)|=d \\ \text{induzione e}}} \text{divide} \left(\prod_{i=1}^{\lfloor 2^{n-1} \rfloor} \tilde{d}_i \right) \cdot d, \end{aligned}$$

per delle $\{\tilde{d}_i\}_{1 \leq i \leq \lfloor 2^{n-1} \rfloor} \subseteq D$. \square

Esempio 4.17. Per $2 \leq d \in \mathbb{N}$ e $P : w \in \mathbb{C} \mapsto w^d \in \mathbb{C}$. Abbiamo calcolato $\mathcal{M}on_1(\mathbb{C}^*, P) \cong \mathbb{Z}_d$, ma per di più vale $\mathcal{M}on_{z_0}(P^{-1}(U), P) \cong \mathbb{Z}_d$ per qualsiasi sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{C}^*$ codiscreto e $z_0 \in U$. Questo perché rimuovere un insieme discreto di punti dalla base non ci impedisce di modificare leggermente il ciclo naturale usato in 3.22 per concludere che la sua azione di monodromia induce comunque un isomorfismo con \mathbb{Z}_d ; inoltre il gruppo di monodromia è lo stesso sopra ogni punto per via di 3.20.

Allora, per qualsiasi $D \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $U \subseteq \mathbb{C}$ codiscreto, una formula della classe \mathfrak{Rad}^D per gli zeri dei polinomi $\{w^d - z\}_{z \in U}$ in termini del coefficiente z sarebbe per definizione una funzione analitica $\mathcal{F} : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow P^{-1}(U)$ su una superficie radicale $\tilde{\mathcal{S}} \in \mathfrak{Rad}^D$ con $P \circ \mathcal{F} = \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}$ e $\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}}) = U$. In particolare, $\tilde{\mathcal{S}}$ deve essere uniforme e \mathcal{F} quindi un rivestimento via il Lemma 3.8. Dal Corollario 4.15, allora seguirebbe che $d = |\mathcal{M}on_{z_0}(P^{-1}(U), P)|$ divide $|\mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}})|$.

D'altro canto, grazie al Teorema 4.16, d può dividere $|\mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}})|$ solo se ha un fattore primo in comune con una $\tilde{d} \in D$. Quindi, se d è coprimo a tutte le $d \in D$, allora non esiste una formula della classe \mathfrak{Rad}^D per gli zeri dei polinomi $\{w^d - z\}_{z \in U}$ in termini del coefficiente z su un $U \subseteq \mathbb{C}$ codiscreto. Ad esempio, non esiste una formula per gli zeri dei polinomi $\{w^2 - z\}_{z \in U}$ della classe $\mathfrak{Rad}^{\{p \in \mathbb{N} \setminus \{2\} \mid p \text{ primo}\}}$.

Nota 4.18. Il criterio della divisibilità è utile per escludere l'esistenza di una formula della classe \mathfrak{Rad}^D per una $D \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Un'altra proprietà che si propaga prevedibilmente attraverso il prodotto fibrato è il cosiddetto *grado di irrisolvibilità*, dandoci informazioni sulla monodromia di un'arbitraria superficie in \mathfrak{Rad} .

Definizione 4.19. Sia G un gruppo. Il *commutatore* di due elementi $g, h \in G$ è definito come l'elemento $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Il sottoinsieme

$$[G, G] := \{[g, h] \in G \mid g, h \in G\} \subseteq G$$

è un sottogruppo normale, chiamato il *gruppo dei commutatori di G* .

Iteriamo questa costruzione per definire l'*n-esimo gruppo dei commutatori di G*

$$[G, G]^n := [[G, G]^{n-1}, [G, G]^{n-1}] \text{ per } 1 \leq n \in \mathbb{N}, [G, G]^0 := G.$$

La *serie derivata* di G è la sequenza di sottogruppi

$$G \trianglerighteq [G, G] \trianglerighteq [G, G]^2 \trianglerighteq \dots$$

Definiamo il *grado di irrisolvibilità* di G

$$\deg(G) := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} \mid [G, G]^n = 1\} & \text{se } \exists n \in \mathbb{N} : [G, G]^n = 1 \\ \infty & \text{sennò} \end{cases}$$

e chiamiamo G *risolvibile* se la sua serie derivata eventualmente termina in 1, ovvero se $\deg(G) < \infty$.

Esercizio 4.20. Siano G, H due gruppi. Dimostra le seguenti affermazioni.

- Se esiste un monomorfismo $H \hookrightarrow G$, allora vale $\deg(H) \leq \deg(G)$.
- Per ogni epimorfismo $p : G \twoheadrightarrow H$ vale $\deg(H) \leq \deg(G) \leq \deg(\ker p) + \deg(H)$.
- Per il prodotto diretto vale $\deg(G \oplus H) \leq \max(\deg(G), \deg(H))$.

Corollario 4.21. Sia $p : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ un rivestimento tra superfici Riemanniane uniformi. Allora

$$\deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}})) \geq \deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})), \quad \forall z_0 \in \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}}).$$

In particolare, se i $\mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}})$ sono risolvibili, allora i $\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})$ sono risolvibili.

Dimostrazione. Si applica l'Esercizio 4.20 all'epimorfismo $p_* : \mathcal{M}on_{z_0}(\tilde{\mathcal{S}}, \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}) \twoheadrightarrow \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})$. \square

Teorema 4.22. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, tutte le superfici radicali $\mathcal{S} \in \mathfrak{Rad}_n$ sono uniformi e il grado di irrisolvibilità dei loro gruppi di monodromia soddisfa

$$\deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})) \leq n,$$

rispetto a qualsiasi punto base $z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$. In particolare, ogni superficie radicale ha gruppi di monodromia risolvibili.

Dimostrazione. Tutte le superfici radicali in \mathfrak{Rad}_0 sono uniformi e hanno monodromia triviale, ovvero con grado di irrisolvibilità 0, perché i loro rivestimenti sottostanti sono triviali, di grado uniforme 1. Quindi l'affermazione vale per $n = 0$.

La collezione \mathfrak{Rad} è stata costruita induttivamente da \mathfrak{Rad}_0 con due operazioni che possono potenzialmente ingrandire il gruppo di monodromia, quindi resta da dimostrare il passo induttivo:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : (\forall \mathcal{S} \in \mathfrak{Rad}_n : \mathcal{S} \text{ è uniforme, } \forall z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) : \deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})) \leq n) \implies \\ (\forall \mathcal{S} \in \mathfrak{Rad}_{n+1} : \mathcal{S} \text{ è uniforme, } \forall z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}) : \deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})) \leq n+1). \end{aligned}$$

Sia quindi $n \in \mathbb{N}$. Per definizione, ogni superficie in \mathfrak{Rad}_{n+1} è isomorfa sopra \mathbb{C} a un prodotto fibrato $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$ nei due casi

- (1) $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathfrak{Rad}_n$, $f = \pi_{\mathcal{S}}$,
- (2) $\mathcal{S} \in \mathfrak{Rad}_n$, $\mathcal{T} = (\mathbb{C}^*, w^d)$ e $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}^*$ una funzione analitica.

Per via dell'invarianza sotto isomorfia 3.19, è sufficiente dimostrare l'affermazione per il prodotto fibrato. Per induzione, sappiamo che \mathcal{S} e \mathcal{T} sono uniformi in ogni caso, poiché (\mathbb{C}^*, w^d) è uniforme. Nei Lemma 3.36 e 3.38 abbiamo visto che allora anche $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$ è uniforme nei casi (1) e (2) rispettivamente. Sia $z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(p_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}})) = \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$ un qualsiasi punto nella base di $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$. Nel caso (1) abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}}) &\xrightarrow{3.36} \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}) \oplus \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}}) \implies \\ \deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}})) &\stackrel{4.20}{\leq} \max(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}), \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}})) \stackrel{\text{Induzione}}{\leq} n. \end{aligned}$$

Nel caso (2) applichiamo il Corollario 3.39 a un qualsiasi $s_0 \in \pi_{\mathcal{S}}^{-1}\{z_0\}$ per ottenere

- (a) $\ker p_{\mathcal{S}*} \trianglelefteq \mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}_f \times \mathbb{C}_{w^d}^*, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}})$ e il loro quoziente è $\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})$,
- (b) $\ker p_{\mathcal{S}*} \hookrightarrow \mathcal{M}on_{s_0}(\mathcal{S}_f \times \mathbb{C}_{w^d}^*, p_{\mathcal{S}}) \hookrightarrow \mathcal{M}on_{f(s_0)}(\mathbb{C}^*, w^d)$,

che ci permettono di applicare l'Esercizio 4.20 due volte per ottenere

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}, \pi_{\mathcal{S}} \circ p_{\mathcal{S}})) &\stackrel{(a)}{\leq} \deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})) + \deg(\ker p_{\mathcal{S}*}) \\ &\stackrel{(b)}{\leq} \deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})) + \deg(\mathcal{M}on_{f(s_0)}(\mathbb{C}^*, w^d)) \stackrel{\text{induzione e } \deg(\mathbb{C}^*, w^d) \leq 1}{\leq} n + 1. \end{aligned}$$

□

Esempio 4.23. Rammenta l'Esercizio 3.29, con il polinomio ${}_0P_{a_1}(w) = -w^d - a_1 w$ di grado $2 \leq d \in \mathbb{N}$ e coefficiente $a_1 \in \mathbb{C}^*$. Abbiamo calcolato $\mathcal{M}on_0(\mathcal{S}, {}_0P_{a_1}) \cong S_d$ per $\mathcal{S} = {}_0P_{a_1}^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{\zeta_j\}_{0 \leq j < d}) \subseteq \mathbb{C}$ un particolare sottoinsieme cofinito, ma per di più vale $\mathcal{M}on_{z_0}({}_0P_{a_1}^{-1}(U), {}_0P_{a_1}) \cong S_d$ per qualsiasi sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{\zeta_j\}_{0 \leq j < d}$ codiscreto e $z_0 \in U$. Questo perché rimuovere un insieme discreto di punti dalla base non ci impedisce di modificare leggermente le curve e i cicli usati in 3.28 per concludere che le loro azioni di monodromia generano comunque tutto S_d ; inoltre il gruppo di monodromia è lo stesso sopra ogni punto per via di 3.20.

Allora, per qualsiasi $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{\zeta_j\}_{0 \leq j < d}$ codiscreto, una formula della classe \mathfrak{Rad} per gli zeri dei polinomi $\{w^d + a_1 w + a_0\}_{a_0 \in U}$ in termini del coefficiente a_0 sarebbe per definizione una funzione analitica $\mathcal{F} : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow {}_0P_{a_1}^{-1}(U)$ su una superficie radicale $\tilde{\mathcal{S}} \in \mathfrak{Rad}$ con ${}_0P_{a_1} \circ \mathcal{F} = \pi_{\tilde{\mathcal{S}}}$ e $\pi_{\tilde{\mathcal{S}}}(\tilde{\mathcal{S}}) = U$. In particolare, $\tilde{\mathcal{S}}$ deve essere uniforme e \mathcal{F} quindi un rivestimento via il Lemma 3.8. Dal Corollario 4.21, allora seguirebbe che $\mathcal{M}on_{z_0}({}_0P_{a_1}^{-1}(U), {}_0P_{a_1})$ è risolvibile.

D'altro canto, l'Esercizio 4.24 afferma che S_d è risolvibile se e solo se $d \leq 4$. Quindi, per ogni $a_1 \in \mathbb{C}^*$, una formula della classe \mathfrak{Rad} per gli zeri dei polinomi $\{w^d + a_1 w + a_0\}_{a_0 \in U}$ in termini del coefficiente a_0 su un $U \subseteq \mathbb{C}$ codiscreto esiste solo per $d \leq 4$. Inoltre, per $d \leq 4$, una tale formula della classe \mathfrak{Rad}_n esiste solo per $n \geq d-1$, sempre per via di 4.24 e 4.21. Ciò vuol dire che la formula quadratica e di Cardano viste in 2.17 e 2.18 sono ottimali, nel senso che non esiste una formula che usa un numero minore di estrazioni di radici: una formula per $\{w^2 + a_1 w + a_0\}_{a_0}$ non esiste definita su una superficie in \mathfrak{Rad}_0 , mentre una formula per $\{w^3 + a_1 w + a_0\}_{a_0}$ non esiste definita su una superficie in \mathfrak{Rad}_1 . Similmente, non esiste una formula per i polinomi $\{w^4 + a_1 w + a_0\}_{a_0}$ definita su una superficie in \mathfrak{Rad}_2 .

Un'analisi analoga può essere applicata alle funzioni analitiche viste nell'Esercizio 3.31, con ${}_1P_{a_0}(w) = \frac{-w^d - a_0}{w}$ di grado $2 \leq d \in \mathbb{N}$ e coefficiente $a_0 \in \mathbb{C}^*$. Ovvero, per ogni $a_0 \in \mathbb{C}^*$, una formula della classe \mathfrak{Rad} per gli zeri dei polinomi $\{w^d + a_1 w + a_0\}_{a_1 \in U}$ in termini del coefficiente a_1 su un $U \subseteq \mathbb{C}$ codiscreto esiste solo per $d \leq 4$. Inoltre, per $d \leq 4$, una tale formula della classe \mathfrak{Rad}_n esiste solo per $n \geq d-1$.

Esercizio 4.24. Verifica i seguenti gradi di irrisolvibilità:

$$\deg(S_1) = 0, \deg(S_2) = 1, \deg(S_3) = 2, \deg(S_4) = 3, \deg(S_d) = \infty, \text{ per } d \geq 5.$$

4.3. Irrisolubilità in termini di collezioni più grandi.

Definizione 4.25. Per \mathfrak{C} la collezione di superfici Riemanniane uniformi $(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})$ con gruppi di monodromia finiti, ovvero $|\mathcal{M}on_z(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})| < \infty$, definiamo $\mathfrak{Fin} = \mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})$; si noti che anche superfici con delle fibre infinite potrebbero comunque avere monodromia finita.

Esercizio 4.26. Dimostra che tutte le superfici in \mathfrak{Fin} hanno gruppi di monodromia finiti; quindi in realtà vale già $\mathfrak{Fin} = \mathfrak{Fin}_1$ nella gerarchia della Definizione 4.10.

Corollario 4.27. Sia (\mathcal{S}, f) una superficie Riemanniana uniforme indotta da una funzione analitica $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$. Se f è \mathfrak{Fin} -risolvibile su $f(\mathcal{S})$, allora $(\mathcal{S}, f) \in \mathfrak{Fin}$. La direzione inversa è una tautologia: se $(\mathcal{S}, f) \in \mathfrak{Fin}$ allora f ha inversa generalizzata $id_{\mathcal{S}}$ definita su $(\mathcal{S}, f) \in \mathfrak{Fin}$.

Esempi 4.28. (1) \exp non è \mathfrak{Fin} -risolvibile su alcun sottoinsieme aperto $U \subseteq \mathbb{C}^*$ che contiene una palla aperta $B_r(0) \setminus \{0\}$.

(2) \cos non è \mathfrak{Fin} -risolvibile su alcun sottoinsieme aperto connesso $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ che circonda entrambi i punti di ramificazione ± 1 ; ad esempio se contiene palle aperte $B_r(1) \setminus \{1\}$ e $B_r(-1) \setminus \{-1\}$. D'altro canto, se U circonda al massimo uno dei due punti ± 1 , allora \cos è \mathfrak{Fin} -risolvibile su U .

Nella dimostrazione del Teorema 4.22, le d -esime superfici radicali usate per costruire \mathfrak{Rad} giocano un ruolo solo nel limitare l'aumento del grado di irrisolubilità di 1. Possiamo quindi generalizzare alla collezione costruita attraverso il prodotto fibrato con superfici \mathcal{T} delle quali i gruppi di monodromia soddisfano $\deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}})) \leq 1$, ovvero con $\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{T}, \pi_{\mathcal{T}})$ un gruppo abeliano.

Definizione 4.29. Per \mathfrak{C} la collezione di superfici Riemanniane uniformi $(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})$ con gruppi di monodromia abeliani, ovvero $\deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})) \leq 1$, definiamo $\mathfrak{Abl} := \mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})$ la collezione di *superficie Abeliane*.

Esempio 4.30. $(\mathbb{C}, \exp), (\mathbb{C}^*, w^d) \in \mathfrak{Abl}_1$, per ogni $1 \leq d \in \mathbb{N}$.

Esercizio 4.31. Dimostra che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, tutte le superfici Abeliane $\mathcal{S} \in \mathfrak{Abl}_n$ sono uniformi e i loro gruppi di monodromia soddisfano $\deg(\mathcal{M}on_{z_0}(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})) \leq n$, per ogni $z_0 \in \pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$.

Esempio 4.32. Per ogni $a_1 \in \mathbb{C}^*$ (risp. $a_0 \in \mathbb{C}^*$), una formula della classe \mathfrak{Abl} per gli zeri dei polinomi $\{w^d + a_1 w + a_0\}_{a_0 \in U}$ (risp. $\{w^d + a_1 w + a_0\}_{a_1 \in U}$) in termini del coefficiente a_0 (risp. a_1) su un $U \subseteq \mathbb{C}$ codiscreto esiste solo per $d \leq 4$, e in tal caso esiste della classe \mathfrak{Abl}_n solo se $n \geq d - 1$.

Per applicare il Corollario 4.21 e concludere che una superficie \mathcal{S} non ammette un rivestimento da un'altra $\tilde{\mathcal{S}}$ come nell'Esempio 4.23, è sufficiente usare che $\tilde{\mathcal{S}}$ è risolvibile, e non un limite sul grado di irrisolubilità. Possiamo quindi generalizzare l'irrisolubilità di tali funzioni analitiche alla collezione di tutte le superfici con gruppi di monodromia risolvibili.

Definizione 4.33. Per \mathfrak{C} la collezione di superfici Riemanniane uniformi $(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})$ con gruppi di monodromia risolvibili, ovvero $\deg(\mathcal{M}on_z(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}})) < \infty$, definiamo $\mathfrak{Sol} = \mathfrak{Cos}(\mathfrak{C})$ la collezione di *superficie risolvibili*.

Esercizio 4.34. Dimostra che tutte le superfici risolvibili hanno i gruppi di monodromia risolvibili; quindi in realtà vale già $\mathfrak{Sol} = \mathfrak{Sol}_1$ nella gerarchia della Definizione 4.10.

Corollario 4.35. Sia (\mathcal{S}, f) una superficie Riemanniana uniforme indotta da una funzione analitica $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$. Se f è \mathfrak{Sol} -risolvibile su $f(\mathcal{S})$ (Definizione 4.1), allora $(\mathcal{S}, f) \in \mathfrak{Sol}$. La direzione inversa è una tautologia.

Esempio 4.36. Ricollegandoci all’Esempio 4.23, per ogni $a_1 \in \mathbb{C}^*$ (risp. $a_0 \in \mathbb{C}^*$), possiamo per di più concludere che ${}_0P_{a_1}(w) = -w^d - a_1 w$ (risp. ${}_1P_{a_0}(w) = \frac{-w^d - a_0}{w}$) non ammette una inversa generalizzata della classe \mathfrak{Sol} su un $U \subseteq \mathbb{C}$ codiscreto per $d > 4$.

Quindi, usando il linguaggio della Sezione 1, per $d > 4$ non esiste una formula per gli zeri dei polinomi $w^d + a_1 w + a_0$ in termini del coefficiente a_0 o a_1 , che è definita su una superficie Riemanniana costruita attraverso operazioni algebriche $+, -, \cdot, \div$ e funzioni analitiche ordinare e ‘multivaluate’ delle quali i gruppi di monodromia sono risolvibili; ad esempio, non solo non esiste una tale formula in termini delle d -esime radici $\sqrt[d]{f(z)}$ per qualsiasi funzioni analitiche f , ma neanche in termini di logaritmi $\log(f(z))$ o delle funzioni multivaluate che estraggono gli zeri di qualsiasi polinomi $P_z(w) = w^4 + a_3 w^3 + a_2 w^2 + a_1 w + a_0$ aventi un coefficiente $a_j = f(z)$ una funzione analitica in z .

Esempio 4.37. Abbiamo visto nell’Esempio 3.32 che la funzione analitica \cos induce una superficie Riemanniana uniforme $(\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}, \cos)$ con gruppi di monodromia isomorfi al gruppo libero in due generatori nilpotenti

$$\langle g, h \mid g^2 = 0 = h^2 \rangle \xrightarrow{\sim} \text{Mon}_0(\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}, \cos), \quad \deg(\text{Mon}_0(\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}, \cos)) = \infty.$$

Di conseguenza, non esiste una inversa generalizzata di \cos su un $U \subseteq \mathbb{C}$ codiscreto della classe \mathfrak{Sol} .

5. SUPERFICI RIEMANNIANE, E POI ?

In questa sezione mostriamo come le moderne branche della matematica che mirano a modellare la geometria nascono in modo naturale dalla nostra teoria di superfici Riemanniane.

5.1. Topologia. Studiare le funzioni continue $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è di interesse centrale nell'analisi. La definizione $\epsilon - \delta$

$$\forall p \in U \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(p)) \subseteq B_\epsilon(f(p))$$

è forse la più intuitiva, ma trova una riformulazione più semplice nella definizione equivalente

$$\forall V \subseteq \mathbb{C} \text{ aperto} : f^{-1}(V) \subseteq U \text{ è aperto,}$$

dove un sottoinsieme $V \subseteq \mathbb{C}$ è chiamato aperto se può essere coperto da palle aperte contenute in esso. Il concetto di continuità quindi dipende dalla collezione di sottoinsiemi $V \subseteq \mathbb{C}$ che chiamiamo *aperti*.

Meditando sulla Definizione 2.5, ignorando per adesso l'aspetto analitico, il concetto di continuità può essere generalizzato a funzioni $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ tra superfici Riemanniane nel modo

$\forall \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ coperto da branche di \mathcal{T} contenute in esso :

$$f^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{S} \text{ è coperto da branche di } \mathcal{S} \text{ contenute in esso .}$$

È quindi naturale generalizzare il concetto di sottoinsiemi aperti di \mathbb{C} a sottoinsiemi di una superficie Riemanniana che sono coperti da branche contenute in essi, cosicchè possiamo definire una funzione continua $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ come

$$\forall \mathcal{V} \subseteq \mathcal{T} \text{ aperto} : f^{-1}(V) \subseteq \mathcal{S} \text{ è aperto.}$$

La collezione di tutte le branche $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$, e tutti i sottoinsiemi che sono una loro unione, quindi determinano un concetto di continuità sullo 'spazio astratto' formato da una superficie $(\mathcal{S}, \pi_{\mathcal{S}}, \{\beta_b\}_{b \in \mathcal{B}})$, del quale l'insieme sottostante \mathcal{S} non ha a priori niente a che fare con \mathbb{C} .

Questo è il punto di partenza della *topologia*, una branca della matematica che studia funzioni continue tra spazi astratti. Questi spazi astratti sono dati da un insieme X e una *topologia* su X , ovvero una collezione di sottoinsiemi che vengono chiamati *aperti*. Funzioni continue $f : X \rightarrow Y$ tra questi *spazi topologici* sono allora per definizione quelle che soddisfano

$$\forall V \subseteq Y \text{ aperto} : f^{-1}(V) \subseteq X \text{ è aperto.}$$

In particolare, le nostre superfici Riemanniane con la topologia data dai sottoinsiemi coperti da branche contenute in essi sono esempi di spazi topologici. La carta di superfici uniformi diventa un cosiddetto *rivestimento topologico* sopra un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} .

5.2. Geometria Differenziale. In realtà, le superfici Riemanniane che abbiamo studiato sono spazi topologici molto speciali, in quanto permettono lo studio di funzioni continue tra di loro, ma tutt'alpiù funzioni analitiche. Questo grazie al fatto che una superficie \mathcal{S} è, per definizione, localmente simile a sottoinsiemi aperti di \mathbb{C} attraverso la carta $\pi_{\mathcal{S}}$, dando alle funzioni in questione una nozione di differenziabilità, rappresentabilità per serie di potenze, ordine, e altre nozioni del calcolo differenziale e dell'analisi complessa.

Uno spazio topologico con proprietà simili è chiamato una *varietà complessa*, ovvero un insieme X con una topologia e un insieme di omeomorfismi $\{\phi_i : U_i \xrightarrow{\sim} \tilde{U}_i\}_i$ tra sottoinsiemi aperti $U_i \subseteq X$ e $\tilde{U}_i \subseteq \mathbb{C}$, chiamate *carte*; le inverse delle carte $\phi_i^{-1} : \tilde{U}_i \hookrightarrow X$ corrispondono

alle funzioni che abbiamo finora chiamato branchi di una superficie. Infatti, per formare una varietà complessa, si richiede che ogni due ϕ_i, ϕ_j soddisfino una condizione di consistenza sul loro dominio comune simile a quella vista per le branchi. Nella *geometria differenziale* si studiano le proprietà topologiche e analitiche di queste varietà, non solo complesse ma anche reali, lisce e lineari.

È importante notare che la comune definizione di superficie Riemanniana, ovvero una varietà complessa di dimensione 1, è molto più generale rispetto a quella che abbiamo considerato in queste note.

5.3. Geometria Algebrica. Abbiamo visto un modo molto generale per costruire superfici Riemanniane da altre attraverso il prodotto fibrato, ad esempio $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}} = \{(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{T} \mid f(s) = \pi_{\mathcal{T}}(t)\} \subseteq \mathbb{C}^2$ tra due sottoinsiemi aperti $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subseteq \mathbb{C}$. Ma si noti che abbiamo costruito la struttura di superficie ad hoc per $\mathcal{S}_f \times \mathcal{T}_{\pi_{\mathcal{T}}}$. È invece desiderevole avere una teoria più robusta per descrivere in che modo sottoinsiemi $\{p \in \mathbb{C}^2 \mid f(p) = g(p)\} \subseteq \mathbb{C}^2$ ereditano la struttura di spazio topologico, o perlomeno varietà complessa, da \mathbb{C}^2 .

Più generalmente, nella *geometria algebrica* si studiano sottoinsiemi di $\{p \in \mathbb{C}^n \mid f_1(p) = g_1(p), \dots, f_m(p) = g_m(p)\} \subseteq \mathbb{C}^n$ ritagliati da equazioni polinomiali in termini delle coordinate di \mathbb{C}^n ; sottoinsiemi di questo tipo sono chiamati *varietà algebriche*.

In particolare, i nostri prodotti fibrati sono (quasi) varietà algebriche; quasi, perché sono in realtà sottoinsiemi aperti di varietà algebriche, in quanto abbiamo sempre rimosso i sottoinsiemi discreti di punti di non invertibilità. Ad esempio,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{id_{\mathbb{C}}} \times \mathbb{C}_{w^2}^* &= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z, w \neq 0\} \stackrel{\text{aperto}}{\subset} \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z\}, \\ (\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\})_{z(z-1)} \times \mathbb{C}_{w^2}^* &= \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z(z-1), \substack{w \neq 0 \\ z \neq \frac{1}{2}}\} \stackrel{\text{aperto}}{\subset} \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z(z-1)\}, \\ \mathbb{C}_{id_{\mathbb{C}}} \times (\mathbb{C} \setminus \{-\frac{b}{2a}\})_{-aw^2-bw} &\stackrel{\text{aperto}}{\subset} \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid aw^2 + bw + z = 0\}, \quad a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0. \end{aligned}$$

L'ultima superficie Riemanniana è l'insieme che, per ogni $z \in \mathbb{C}$, contiene gli zeri del polinomio $aw^2 + bw + z$, si vede quindi come sarebbe possibile generalizzare la nozione di 'formula risolutiva' come discussa nell'Esempio 2.17 a tutto \mathbb{C} .

Possiamo anche considerare varietà algebriche date da equazioni con termini z, w misti

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 + zw + z^2 = 0\}, \quad \{(z, w, v) \in \mathbb{C}^3 \mid vw^2 + vz + wz + z^5 = 0\},$$

o con più equazioni

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid zw = 1, z = 2w^2\}, \quad \{(z, w, v) \in \mathbb{C}^3 \mid w^2 + v = 0, v^2 + z = 0\}.$$

Ci sarebbe ovviamente anche il desiderio di considerare varietà del tipo

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid zw^2 = \exp(zw + 1)\}, \quad \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \sin(w) = \exp(z + 2)\},$$

ma questo, per adesso, resta fuori del dominio della geometria algebrica, in quanto funzioni come *sin* e *exp* non sono polinomiali, ma meramente rappresentabili come serie di potenze.

5.4. Topologia Algebrica. Abbiamo visto che a ogni superficie Riemanniana uniforme possiamo associare il gruppo di monodromia sopra un punto nella base. Le azioni di monodromia determinano come i valori della 'funzione multivaluata' rappresentata dalla superficie si permutano per via di variazioni lungo curve chiuse nella base. Abbiamo inoltre ricavato informazioni sul gruppo di una superficie in termini dei gruppi delle superfici dalle quali essa è stata costruita. Con ciò, abbiamo potuto dedurre che certi rivestimenti tra superfici Riemanniane non possono esistere; si veda il Corollario 4.21. L'inesistenza di un rivestimento viene da un ostruzione che dipende puramente dalle azioni di monodromia, non dalle superfici Riemanniane in se.

Il gruppo di monodromia può essere quindi chiamato una invariante algebrica delle superfici, essendo invariante sotto isomorfia, che 'misura l'altezza' della superficie, nel senso che più il gruppo è grande o complicato, più ammetterà rivestimenti *verso* altre superfici e meno ammetterà rivestimenti *da* altre superfici; si veda la Proposizione 3.34.

Questa procedura è molto comune. Nella *topologia algebrica* si va a caccia di invarianti algebriche di spazi topologici (gruppi, anelli, moduli) come il gruppo di monodromia; quest'ultimo può essere definito per rivestimenti tra qualsiasi spazi topologici, e soddisfa le stesse proprietà che per le superfici Riemanniane. Due spazi con invarianti differenti sono necessariamente non isomorfi, come spazi topologici, ma due spazi non isomorfi potrebbero avere la stessa invariante. In questo senso, le invarianti permettono di classificare gli spazi topologici in maniera più grezza, ma in compenso più semplice, che rispetto a isomorfismo. Ad esempio, è più semplice determinare se due gruppi non sono isomorfi, ma d'altro canto se sono uguali non è abbastanza per concludere che gli spazi stessi sono isomorfi.

Una delle invarianti più importanti di uno spazio topologico X con un punto base $x_0 \in X$ è il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0) := \Omega_{x_0}X / \sim$, ottenuto dall'insieme di cicli in x_0 sotto la relazione di equivalenza di omotopia, ovvero deformazione continua con estremi fissati. Si da il caso che le azioni di monodromia di cicli in $\Omega_{x_0}X$ su un rivestimento $p : Y \rightarrow X$ in realtà dipendono solo dalla classe di omotopia in $\pi_1(X, x_0)$, ovvero l'azione discende a un omomorfismo di gruppi

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{x_0}X & \twoheadrightarrow & \mathcal{M}on_{x_0}(Y, p) \\ & \searrow & \nearrow \sigma \\ & \pi_1(X, x_0) & \end{array}$$

Da notare come non abbiamo avuto la necessità di calcolare esplicitamente il gruppo fondamentale delle superfici Riemanniane. Sfruttando le simmetrie dei rivestimenti considerati, abbiamo ottenuto direttamente il gruppo di monodromia. Infatti, questa è in generale la procedura per calcolare il gruppo fondamentale stesso: si può costruire un rivestimento $p : Y \rightarrow X$ tanto grande che l'azione σ diventa un isomorfismo (il "rivestimento universale"), e tanto simmetrico che le azioni di monodromia possono essere calcolate esplicitamente.

6. TEORIA DI GALOIS

Concludiamo con una discussione riguardo i collegamenti con la teoria di Galois. La ricerca di formule generali in termini di radicali per la risoluzione di equazioni polinomiali è stata certamente una grande forza dietro allo sviluppo dell'algebra. Condensare la storia dalla nascita dei numeri complessi all'algebra astratta in pochi paragrafi non le farebbe giustizia, partiremo quindi direttamente dal celebrato teorema di Abel-Ruffini. Esso afferma che *non*

esiste una formula generale per gli zeri di un polinomio di grado maggior al quarto in termini di radicali dei suoi coefficienti. Tuttavia, cosa esattamente voglia dire questa proposizione non viene mai spiegato. La ragione è che il concetto stesso di *formula* è molto ambiguo, per non parlare di *radicali* di un numero, che non sono univocamente definiti. Per un lettore interessato citiamo [3], che dipinge il contesto storico ed espone la dimostrazione di Abel.

La ricerca di un linguaggio nel quale esprimere precisamente questi concetti si è storicamente concentrata dalla parte dell'algebra, con l'avvento dell'algebra astratta, la teoria dei campi e la teoria di Galois. La risoluzione in termini di radicali di un polinomo $P_{\{a_k\}_k}$ con dati coefficienti $\{a_k\}_k$ trova un'interpretazione naturale nell'esistenza di una torre di estensioni radicali del campo $\mathbb{Q}(\{a_k\}_k)$ che eventualmente contiene ogni zero di $P_{\{a_k\}_k}$. Ci sono polinomi che non ammettono una tale torre di estensioni per via di una ostruzione misurata dal gruppo di Galois del polinomio, che entra in gioco dal grado 5 in poi.

Come abbiamo mostrato in queste note, il linguaggio delle superfici Riemanniane e 'funzioni multivaluate' fornisce un punto di vista topologico sulla questione. Ovvero, una formula risolutiva, in termini di un coefficiente a_j , è considerata come una inversa generalizzata della funzione $_j P_{\{a_k\}_{k \neq j}}$ che estrae il coefficiente a_j . Questa è in particolare una funzione continua tra spazi topologici, e dipende crucialmente dal dominio a codominio. Parliamo allora di risolvibilità di un'intera collezione di polinomi $\{P_{\{a_k\}_{k \neq j} \sqcup \{a_j\}}\}_{a_j \in U}$ con dati coefficienti $\{a_k\}_{k \neq j}$ e coefficiente a_j variante su U . Abbiamo poi dimostrato che certi polinomi, dal grado 5 in poi, non ammettono una tale formula per via di una ostruzione misurata dal gruppo di monodromia della superficie indotta dal polinomio.

Si tenga però in mente che il gruppo di Galois di un polinomio $P_{\{a_k\}_k} \in \mathbb{C}[w]$ di grado d e il gruppo di monodromia sopra a_j della superficie indotta dalla funzione $_j P_{\{a_k\}_{k \neq j}}$ che estrae il coefficiente a_j , sebbene entrambi sottogruppi di $S(P_{\{a_k\}_k}^{-1}\{0\})$, parlano di oggetti completamente diversi: il primo di permutazioni che rispettano le relazioni algebriche dell'estensione di campi $\mathbb{Q}(\{a_k\}_k) \hookrightarrow \mathbb{Q}(\{a_k\}_k, Z(P_{\{a_k\}_k}))$, il secondo di permutazioni indotte da variazioni lungo curve chiuse del coefficiente a_j . Ad esempio, il gruppo di Galois di $P_{0,0,-1}(w) = w^3 - 1$ e il gruppo di monodromia di ${}_0 P(w)_{0,0} = -w^3$ su $a_0 \in \mathbb{C}^*$ non ammettono omomorfismi non triviali tra di loro.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{Z}_3 & \xrightarrow{\sim} & \langle (1, e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{-\frac{2\pi}{3}i}) \rangle & & \langle (e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{-\frac{2\pi}{3}i}) \rangle \xleftarrow[\sim]{} \mathbb{Z}_2 \\
 & & \parallel & \nearrow ? & \parallel \\
 & & \mathcal{M}on_1(\mathbb{C}^*, w^3) & \hookrightarrow S(\{1, e^{\frac{2\pi}{3}i}, e^{-\frac{2\pi}{3}i}\}) & \hookleftarrow Gal(\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi}{3}i}) : \mathbb{Q}) \\
 \mathbb{C}^* & \downarrow -w^3 & \uparrow & & \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi}{3}i}) \\
 \mathbb{C}^* & & \Omega_1 \mathbb{C}^* & & \mathbb{Q}
 \end{array}$$

L'aspetto più intrigante di questa faccenda è che, nonostante la versione algebrica e la versione topologica del teorema di Abel-Ruffini affermino due cose completamente diverse (una parla di torri di estensioni radicali, l'altra di superfici Riemanniane e rivestimenti), i noccioli delle loro dimostrazioni sono completamente analoghi: si dimostra che un'estensione radicale (di campi o di superfici) aumenta il grado di irrisolvibilità del gruppo (di Galois o di monodromia) di al massimo 1, e che i gruppi di certi polinomi hanno grado di irrisolvibilità ∞ . Come riconciliare le due versioni sotto un unico linguaggio per ora resta un mistero all'autore.

7. APPENDICE: ANALISI COMPLESSA

Definizione 7.1. Una funzione $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ su un sottoinsieme aperto $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ è detta *complessa-differenziabile* se in ogni punto $w_0 \in \mathcal{S}$ la derivata complessa

$$\lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f(w) - f(w_0)}{w - w_0} \text{ converge a un numero } f'(w_0) \in \mathbb{C}.$$

In altre parole, f è approssimabile di secondo ordine in ogni punto da una funzione affine complessa

$$\forall w_0 \in \mathcal{S} : f(w) = f(w_0) + f'(w_0) \cdot (w - w_0) + O(|w - w_0|^2) \text{ per } w \rightarrow w_0.$$

Sia $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa-differenziabile. Rappresentando i numeri complessi $w \in \mathbb{C}$ come vettori nel piano euclideo $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$, la funzione affine complessa che approssima f in un punto $w_0 \in \mathcal{S}$ corrisponde alla funzione affine reale

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\vec{w} \mapsto \overrightarrow{f(w_0)} + J_{w_0}(f) \cdot (\vec{w} - \vec{w}_0)} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{w \mapsto f(w_0) + f'(w_0) \cdot (w - w_0)} & \mathbb{C} \end{array},$$

dove $J_{w_0}(f)$ è la matrice Jacobiana reale che, rappresentando $f'(w_0) = |f'(w_0)|e^{i\theta}$ in coordinate polari, è uguale a

$$J_{w_0}(f) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f'(w_0)) & -\operatorname{Im}(f'(w_0)) \\ \operatorname{Im}(f'(w_0)) & \operatorname{Re}(f'(w_0)) \end{pmatrix} = |f'(w_0)|^2 \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot SO(2).$$

Ciò vuol dire che la funzione affine è *conforme*, ovvero lascia invarianti gli angoli e l'orientazione, almeno dove $f'(w_0) \neq 0$. Perlopiù, si può verificare che ogni funzione affine reale tra i piani euclidei che è conforme, ovvero rappresentata da una matrice in $\mathbb{R}_{>0} \cdot SO(2)$, è indotta da una funzione affine complessa, quindi i due concetti sono equivalenti.

Visto che tutte le questioni di geometria euclidea nel piano \mathbb{R}^2 sono invarianti sotto traslazioni, dilatazioni e rotazioni (trasformazioni conformali), sono anche invarianti sotto funzioni con derivata complessa, almeno fino ad un'approssimazione locale. È questa la proprietà fondamentale delle funzioni con derivata complessa che le rende interessanti dal punto di vista geometrico.

Le funzioni complesse-differenziabili più semplici sono i polinomi $a_0 + a_1 w + \cdots + a_d w^d$, interpretati come funzioni complesse $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Più generalmente, le serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (w - w_0)^k$$

convergenti su una palla aperta $B_r(w_0)$, $r > 0$, sono complesse-differenziabili in quella palla. Il risultato più notevole dell'analisi complessa è che, localmente, tutte le funzioni complesse-differenziabili hanno questa forma.

Definizione 7.2. Una funzione $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ su un sottoinsieme aperto $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ è detta *analitica* se in ogni punto $w_0 \in U$ esiste una serie di potenze convergente su una palla aperta

$B_r(w_0) \subseteq \mathcal{S}$, $r > 0$ che coincide con f , ovvero

$$\forall w \in B_r(w_0) : f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (w - w_0)^k$$

per dei coefficienti $\{a_k\}_k \subset \mathbb{C}$.

Teorema 7.3. Una funzione $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ su un sottoinsieme aperto $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$ è complessa-differenziabile se e solo se è analitica.

In tal caso, f è perlopiù infinitamente differenziabile su \mathcal{S} , e le sue derivate in una palla aperta $B_r(w_0)$ dove è rappresentabile da una serie di potenze convergente con coefficienti $\{a_k\}_k$ sono date da

$$\forall d \in \mathbb{N} \forall w \in B_r(w_0) : f^{(d)}(w) = \sum_{k=d}^{\infty} (k)(k-1)\cdots(k-d+1) a_k (w - w_0)^{k-d}.$$

Ci limitiamo a dare uno schizzo della dimostrazione, in quanto questa appendice non è volta a sostituire un'introduzione appropriata all'analisi complessa.

Schizzo. Il primo passo è stabilire il teorema di Cauchy per le funzioni complesse-differenziabili. Da esso si ricava una espressione locale per f in termini di un integrale sul bordo di una qualsiasi palla aperta con chiusura $\overline{B_r(w_0)} \subseteq \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \forall w \in B_r(w_0) : f(w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(w_0)} \frac{f(\omega)}{\omega - w} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(w_0)} \frac{f(\omega)}{\omega - w_0} \frac{1}{1 - \frac{w-w_0}{\omega-w_0}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(w_0)} \frac{f(\omega)}{\omega - w_0} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{w-w_0}{\omega-w_0} \right)^k \right) d\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(w_0)} \frac{f(\omega)}{(\omega-w_0)^{k+1}} d\omega \right) (w-w_0)^k, \end{aligned}$$

dove bisogna giustificare la commutazione tra integrale e sommatoria. \square

Sia $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica su un sottoinsieme aperto $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$. Ci volgiamo ora a studiare il comportamento locale di f su un *qualsiasi* punto $w_0 \in \mathcal{S}$, non solo laddove f è localmente invertibile.

Definizione 7.4. Per ogni $w_0 \in \mathcal{S}$, definiamo l'*ordine* di f in w_0 da

$$ord_{w_0}(f) = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid f^{(k)}(w_0) = 0\} = \sup\{k \in \mathbb{N} \mid a_k = 0\} \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\},$$

dove $\{a_k\}_k$ sono i coefficienti della serie di potenze che rappresenta f in un intorno di w_0 .

Nota 7.5. f è costante in un vicinato di w_0 se e solo se la sua derivata è costante zero in quel vicinato, e quindi in tutta la componente连通的 di \mathcal{S} che lo contiene (segue dal Principio dell'identità 7.7). Questo è equivalente a $ord_{w_0}(f') = ord_{w_0}(f - f(w_0)) = \infty$.

Se invece f non è costante e \mathcal{S} è connesso, allora $1 \leq ord_{w_0}(f - f(w_0)) < \infty$ per ogni $w_0 \in \mathcal{S}$ e la seguente proposizione ci assicura che, vicino a w_0 , f si comporta come un semplice monomio traslato $w \mapsto f(w_0) + (w - w_0)^d$, dove d è l'ordine.

Proposizione 7.6 (Forma locale standard). Se f non è costante e \mathcal{S} è connesso, per ogni $w_0 \in \mathcal{S}$ esiste un vicinato aperto $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$ di w_0 e un omeomorfismo analitico $\phi : \mathcal{V} \xrightarrow{\sim} B_r(w_0)$ su una palla aperta, $r > 0$, tali che

$$\forall w \in B_r(w_0) : f(\phi^{-1}(w)) = f(w_0) + (w - w_0)^d, \quad \text{dove } d = ord_{w_0}(f - f(w_0)).$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{V} & \xrightarrow[\sim]{\phi} & B_r(w_0) \\
& \searrow f & \swarrow f(w_0)+(w-w_0)^d \\
& B_{r^d}(f(w_0)) &
\end{array}$$

Perlopiù segue che $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathbb{C}$ è aperto per ogni sottoinsieme aperto $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$.

Dimostrazione. Consideriamo la serie di potenze che rappresenta f in una palla aperta:

$$\forall w \in B_r(w_0) : f(w) = f(w_0) + (w - w_0)^d (a_d + a_{d+1}(w - w_0) + \dots) =: f(w_0) + (w - w_0)^d g(w),$$

dove g una funzione analitica con $g(w_0) = a_d \neq 0$ per definizione di $\text{ord}_{w_0}(f - f(w_0))$.

Allora esiste una branca $\sqrt[d]{\cdot}$ della d -esima potenza definita su un vicinato aperto di $g(w_0)$. Rimpicciolendo $B_r(w_0)$ se necessario, possiamo assumere che $g(B_r(w_0))$ è contenuto in questo vicinato.

Si prenda $\phi : w \mapsto w_0 + (w - w_0) \sqrt[d]{g(w)}$, che ha $\phi'(w_0) = \sqrt[d]{g(w_0)} \neq 0$, permettendoci di restringerla a un omeomorfismo analitico $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \phi(\mathcal{V})$ applicando il Teorema 1.2, cosicché $f(w_0) + (\phi(w) - w_0)^d = f(w)$ per ogni $w \in \mathcal{V}$. Esiste una palla aperta $B_r(w_0) \subseteq \phi(\mathcal{V})$, quindi restringiamo ulteriormente $\mathcal{V} = \phi^{-1}(B_r(w_0))$ per ottenere il diagramma desiderato. \square

Corollario 7.7 (Principio dell'identità). Se f non è costante e \mathcal{U} è connesso, gli zeri $Z(f) = \{z \in U | f(z) = 0\} \subseteq U$ formano un sottoinsieme discreto. In particolare, se due funzioni analitiche $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ sono identiche su un sottoinsieme non discreto di U , allora sono identiche su tutto U .

Dimostrazione. Sia $z_0 \in U$ uno zero di f , e si prenda un vicinato aperto $z_0 \in V \subseteq U$ come nella Proposizione 7.6. Allora f non ha altri zeri in V perché $(z - z_0)^d : B_r(z_0) \rightarrow B_{r^d}(0)$ non ha altri zeri. \square

Corollario 7.8 (Principi del massimo e del minimo). Se f non è costante e \mathcal{U} è connesso, la funzione continua $z \in U \mapsto |f(z)| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ non assume alcun punto di massimo locale, e assume un punto di minimo locale solo laddove svanisce.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrario. Grazie al Lemma 7.6, $P(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ è un vicinato aperto di $P(z_0)$, quindi $(1 + \epsilon)P(z_0), (1 - \epsilon)P(z_0) \in P(\mathbb{C})$ per una $\epsilon > 0$ abbastanza piccola, ovvero

$$\forall V \subseteq \mathbb{C} \text{ aperto}, z_0 \in V \exists z \in V : |P(z)| = |(1 + \epsilon)P(z_0)| > |P(z_0)|,$$

$$P(z_0) \neq 0 \implies \forall V \subseteq \mathbb{C} \text{ aperto}, z_0 \in V \exists z \in V : |P(z)| = |(1 - \epsilon)P(z_0)| < |P(z_0)|.$$

I principi del massimo e del minimo seguono per contrapposizione dalle due precedenti osservazioni rispettivamente. \square

Teorema 7.9 (Teorema fondamentale dell'algebra). Ogni polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ di grado $d \geq 1$ si decomponete in d fattori lineari, ovvero ha d zeri in \mathbb{C} contati con molteplicità.

Dimostrazione. Per induzione sul grado, è sufficiente dimostrare che P ha almeno uno zero.

Essendo P un polinomio di grado $d \geq 1$, esiste un raggio abbastanza grande $R > 0$ al di fuori del quale $|P(z)|$ è strettamente limitato dal basso da $|P(0)|$, ovvero

$$\forall z \notin B_R(0) : |P(z)| > |P(0)|.$$

Consideriamo la funzione continua

$$z \in \overline{B_R(0)} \mapsto |P(z)| \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

che assume un punto di minimo $\zeta \in \overline{B_R(0)}$ essendo il dominio compatto. Visto che vale $|P(\zeta)| \leq |P(0)|$, il precedente punto implica $\zeta \in B_R(0)$. Allora ζ è un punto di minimo dell'intera funzione $|P(z)|$ su \mathbb{C} . Grazie al Lemma 7.8, ζ può solo essere uno zero di P . \square

Nota 7.10. Rammentiamo alcuni fatti sulle curve nel piano complesso che ci permetteranno di esprimere la funzione inversa, quando esiste, come un integrale sul bordo del codominio. Una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ è chiamata *regolare* se è continuamente differenziabile e con derivata non evanescente. È chiamata *semplice* se è iniettiva, ovvero se non si autointerseca. Se parliamo di una curva chiusa, ovvero $\gamma(0) = \gamma(1)$, allora la si chiama *semplice* se $\gamma|_{[0,1]}$ è iniettiva. Il teorema di Jordan dice che una curva regolare semplice chiusa divide il piano in due sottoinsiemi aperti connessi $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1]) = U \sqcup V$, uno limitato, chiamato l'*interno* della curva, e l'altro illimitato, chiamato l'*esterno*. Questi due insiemi sono caratterizzati dall'indice di avvolgimento, dove U è l'interno:

$$\forall z \in V : \text{ind}_\gamma(z) = 0, \quad \forall z \in U : \text{ind}_\gamma(z) = 1.$$

Teorema 7.11 (Forma integrale della funzione inversa). Sia $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione analitica su un sottoinsieme aperto $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{C}$. Per ogni curva regolare semplice chiusa $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ con interno $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ contenuto in \mathcal{S} vale

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus f(\tilde{\gamma}([0, 1])) : \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\omega f'(\omega)}{f(\omega) - z} d\omega = \sum_{\substack{w \in \mathcal{U} \\ f(w)=z}} w.$$

Inoltre, la curva chiusa nel codominio $\gamma := f \circ \tilde{\gamma}$ è altrettanto una curva regolare semplice se e solo se la restrizione $f|_{\tilde{\gamma}([0, 1]) \cup \mathcal{U}}$ è iniettiva. In tal caso, l'interno di γ è $U := f(\mathcal{U})$ e la restrizione $f|_U^U$ è un omeomorfismo analitico la cui inversa è data da

$$\forall z \in U : \quad f^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\omega f'(\omega)}{f(\omega) - z} d\omega.$$

Dimostrazione. Per via del teorema di Cauchy, l'integrale si può calcolare sommando tutte le integrali lungo curve chiuse che parametrizzano (in senso opposto a $\tilde{\gamma}$) palle abbastanza piccole intorno ai finiti punti $w \in \mathcal{U}$ dove $\frac{\omega f'(\omega)}{f(\omega) - z}$ ha poli, ovvero la preimmagine $f_{\mathcal{U}}^{-1}\{z\} = \{w \in \mathcal{U} \mid f(w) = z\}$; quindi il calcolo si riduce al caso in cui c'è un solo tale punto. Allora calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\omega f'(\omega)}{f(\omega) - z} d\omega &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\epsilon(w)^-} \frac{\omega f'(\omega)}{f(\omega) - z} d\omega \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\epsilon(w)^-} \frac{\omega}{f(\omega) - z} \frac{f(\omega) - f(w)}{\omega - w} d\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\epsilon(w)^-} \frac{\omega}{\omega - w} d\omega = w. \end{aligned}$$

La direzione " \Leftarrow " è chiara. Per " \Rightarrow ", se f' svanisse su un punto in $\tilde{\gamma}([0, 1])$, allora $\gamma := f \circ \tilde{\gamma}$ avrebbe derivata zero in quel punto, quindi non sarebbe regolare. Visto che γ è semplice, $f|_{\tilde{\gamma}([0, 1])}$ è iniettiva, e quindi si restringe a un omeomorfismo liscio tra $\tilde{\gamma}([0, 1])$ e $\gamma([0, 1])$. Possiamo allora usare sostituzione per calcolare l'indice di avvolgimento di γ

attorno a ogni $z \notin \gamma([0, 1])$, in maniera analoga al calcolo precedente:

$$ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f'(\omega)}{f(\omega) - z} d\omega = \sum_{\substack{w \in \mathcal{U} \\ f(w) = z}} 1 = |f_{|\mathcal{U}}^{-1}\{z\}|.$$

Visto che γ è una curva regolare semplice chiusa, l'indice di avvolgimento è determinato dai due casi

$$z \notin U \implies 0 = ind_{\gamma}(z) = |f_{|\mathcal{U}}^{-1}\{z\}| \implies z \notin f(\mathcal{U})$$

$$z \in U \implies 1 = ind_{\gamma}(z) = |f_{|\mathcal{U}}^{-1}\{z\}| \implies z \in f(\mathcal{U}) \text{ con una sola preimmagine,}$$

ovvero, $f_{|\mathcal{U}}^U$ è una biiezione la cui inversa è data dall'integrale calcolata in primo luogo. \square

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Bernhard Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Inauguraldissertation, Göttingen 1851.
- [2] V.B. Alexeev, *Abel's Theorem in Problems and Solutions, based on lectures of Professor V.I. Arnold*, Moscow State University, 2004.
- [3] Jim Brown, *Abel and the unsolvability of the quintic*, Ohio State University.