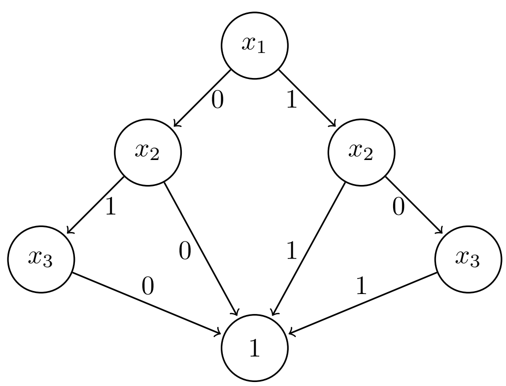
Verification : Homework 8

Marius Belly - Le Guilloux

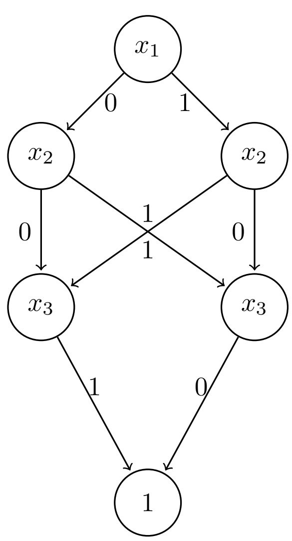
November 2021

Exercice 1

a)



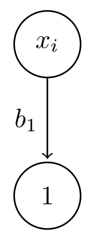
b)



Exercice 2

a) $B(f) = 1$

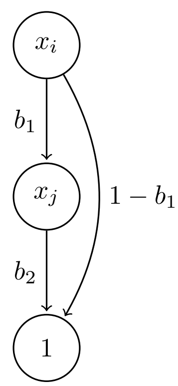
Un tel BDD est de la forme



Il y a $2n$ choix pour x_i et b_1 donc $2n$ fonctions f telle que $B(f) = 1$

b) $B(f) = 2$

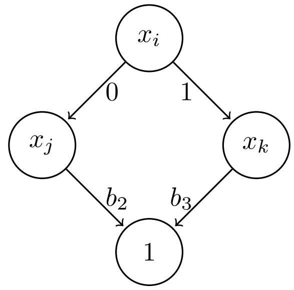
Un tel BDD est de la forme



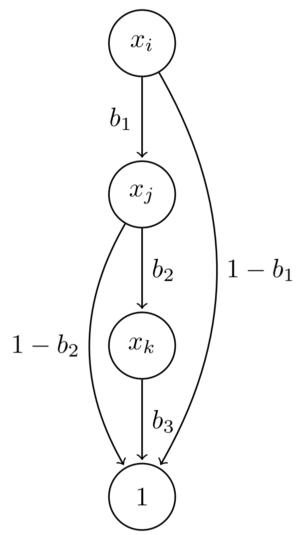
Il existe $\binom{n}{2}$ manières de choisir les étiquettes du BDD, 8 manières de choisir b_1 et b_2 et l'existence de l'arête étiquetée Il y a donc en tout $4n(n-1)$ fonctions possibles.

c) $B(f) = 3$

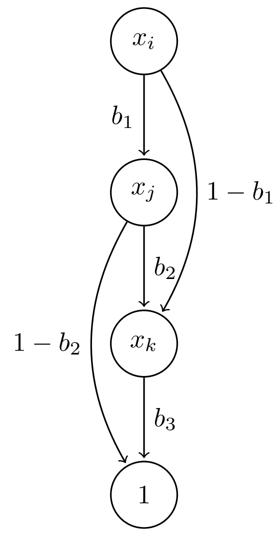
Les BDDs de taille 3 se divise en deux catégories : les arbres et les non arbres
• Comptons d'abord les premiers. Ceux-ci se divisent à nouveau en deux sous-catégories : les arbres de profondeur 2 et ceux de profondeur 3.
•• Les arbres de profondeur 2 sont de la forme



Si i, j et k sont distinct alors il existe $2\binom{n}{3}$ manières de choisir puis répartir les étiquettes du BDD et 4 manières de choisir b_1 et b_2.
Sinon, $j = k$. Il existe alors $\binom{n}{2}$ manières de choisir les étiquettes du BDD et $b_1 = 1 - b_2$, d'où deux manières de choisir b_1 et b_2.
Finalement, il existe $8\binom{n}{3} + n(n-1)$ fonctions dont le BDD est un arbre de taille 3 et de profondeur 2.
•• Les arbres de profondeur 3 sont de la forme



i, j et k sont nécessairement distincts donc il existe $\binom{n}{3}$ manières de choisir les étiquettes du BDD, 8 manières de choisir b_1, b_2 et b_3 et 4 manière de choisir l'existence des arètes étiquetées $1 - b_1$ et $1 - b_2$.
Il y a donc en tout $32\binom{n}{3}$ fonctions dont le BDD est un arbre de taille 3 et de profondeur 2.
• Comptons maintenant les BDD qui ne sont pas des arbres, c'est à dire les BDD de la forme



i, j et k sont nécessairement distincts donc il existe $\binom{n}{3}$ manières de choisir les étiquettes du BDD, 8 manières de choisir b_1, b_2 et b_3 et 2 manière de choisir l'existence de l'arête étiquetée $1 - b_2$.
Il y a donc en tout $16\binom{n}{3}$ fonctions dont le BDD est de taille 3 mais n'est pas un arbre.

Finalement, il existe $n(n-1) + 56\binom{n}{3}$ fonctions f telle que $B(f) = 3$