Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Лабораторная работа №2
«Необходимые и достаточные условия существования безусловного экстремума»
по курсу
«Методы оптимизации»

Студент группы ИУ9-82 Белогуров А.А.

Преподаватель Каганов Ю.Т.

Москва, 2018

Содержание

1 Цель работы

1.1 Задача 2.1

1. Исследование необходимых и достаточных условий существования экстремума функции без учета ограничений (безусловный экстремум).

2. Вычисление экстремумов функции.

1.2 Задача 2.2

1. Исследование необходимых и достаточных условий существования экстремума функции с учетом ограничений (условный экстремум).

2. Вычисление экстремумов функции.

2 Постановка задачи

2.1 Задача 2.1

Дано: Дважды непрерывно дифференцируемая функция

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 + x_2x_1 - 6x_2 + 2, \tag{1}$$

определенная на множестве $X \in R^n$. Требуется исследовать функцию $f(x)$ на экстремум, т.е. определить точки $x^e \in R^n$ её локальных минимумов и максимумов на R^n:

$$f(x^e) = \min_{x \in R^n} f(x); \quad f(x^e) = \max_{x \in R^n} f(x). \tag{2}$$

С помощью заданного алгоритма решить поставленную задачу:

1. Записать необходимые условия экстремума первого порядка в форме $\nabla f(x^e) = 0$ и найти стационарные точки x^e в результате решения системы n в общем случае нелинейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Для численного решения могут быть использованы методы простой итерации - Зейделя или Ньютона.

2. В найденных стационарных точках x^e проверить выполнение достаточных, а если они не выполняются, то необходимых условий второго порядка с помощью одного из двух способов.

3. Вычислить значения $f(x^e)$ в точках экстремума.

2.2 Задача 2.2

Дано: система

$$\begin{cases} f(x) = (x_1^3 - 2)^2 + x_2^2 \to extr \\ g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x) = -x_1 \leq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Необходимо:

1. Составить обобщенную функцию Лагранжа.
2. Записать необходимые условия экстремума первого порядка.
3. Решить систему уравнений для двух случаев $\lambda_0 = 0$ и $\lambda \neq 0$. В результате находится точка x^e.
4. Для таких точек проверить достаточные и необходимые условия экстремума второго порядка.
5. Вычислить значения функции $f(x)$ в точках экстремума x_k^e.

3 Исследование

3.1 Задача 2.1

3.1.1 Шаг 1

Необходимо найти стационарные точки функции:

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 + x_2 x_1 - 6x_2 + 2, \quad x_i \in [-3, 15]. \tag{4}$$

- **Необходимые условия экстремума первого порядка**

  Пусть точка $x^e \in R^n$ - точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^e. Тогда градиент функции $f(x)$ в точке x^e равен нулю т.е. $\nabla f(x^e) = 0$.

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} f'_{x_1}(x) \\ f'_{x_2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3 + x_2 \\ 2x_2 + x_1 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

В результате решения системы были получены две стационарные точки - $(0, 3)$, $(\frac{1}{6}, \frac{35}{12})$.

3.1.2 Шаг 2

Нужно проверить выполнение необходимых и достаточных условий второго порядка для всех стационарных точек.

- **Необходимое условие экстремума второго порядка**

  Пусть точка $x^e \in R^n$ точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n и $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x^e. Тогда матрица Гессе $H(x^e)$ функции $f(x)$, вычисленной в точке x^e является положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной) т.е.

$$H(x^e) \geq 0, \quad (H(x^e) \leq 0).$$

- **Достаточные условия экстремума**

  Пусть функция $f(x)$ в точке $x^e \in R^n$ дважды дифференцируема, её градиент равен нулю, а матрица Гессе является положительно определенной (отрицательно определенной) т.е.

  $$\nabla f(x^e) = 0 \text{ и } H(x^e) > 0, \quad (H(x^e) < 0)$$

  Тогда точка $x^e \in R^n$ есть точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$ на множестве R^n.

Запишем матрицу Гессе для фукнции $f(x)$:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Тогда для для точки $(x_1, x_2) = (\frac{1}{6}, \frac{35}{12})$:

$$H(f(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0, \tag{7}$$

матрица Гессе является положительно определенной, следовательно точка $(\frac{1}{6}, \frac{35}{12})$ является точкной локального минимума.

Аналогично для точки $(x_1, x_2) = (0, 3)$:

$$H(f(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

в этом случае невозможно определить знак матрицы Гессе с помощью угловых и гравных миноров. Поэтому попробуем определить экстремум с помощью собственных значений матрицы Гессе:

$$|H(f(x_1,x_2)) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

Найдём решение квадратичного уравнения:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1+\sqrt{2} \\ \lambda = 1-\sqrt{2} \end{cases} \tag{10}$$

Так как собственные значения имеют разные знаки, то можно сказать, что точка $(x_1, x_2) = (0, 3)$ является седловой точкой.

3.1.3 Шаг 3

Необходимо вычислить значения функции

$$f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 + x_2x_1 - 6x_2 + 2 \tag{11}$$

в точках экстремума.

$f(x) = -7$ в точке локального минимума $(\frac{1}{6}, \frac{35}{12})$.

3.2 Задача 2.2

3.2.1 Шаг 1

Обобщённая функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L(x, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0((x_1^3 - 2)^2 + x_2^2) + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) - \lambda_2 x_1 \tag{12}$$

3.2.2 Шаг 2

Запишем необходимые условия экстремума первого порядка:

А) Условие стационарности обобщенной функции Лагранжа по х:

$$\frac{\partial L(x^e, \lambda_0^e, \lambda^e)}{\partial x_1} = 6\lambda_0(x_1^3 - 2)x_1^2 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 \tag{13}$$

$$\frac{\partial L(x^e, \lambda_0^e, \lambda^e)}{\partial x_2} = 2\lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2 \tag{14}$$

Б) Условие допустимости решения:

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x) = -x_1 \leq 0 \end{cases} \tag{15}$$

В) Условия неотрицательности (неположительности) для условного минимума (максимума):

$$\lambda_j^e \geq 0 \quad (\lambda_j^e \leq 0) \quad j = 1, 2 \tag{16}$$

Г) Условие дополняющей нежесткости:

$$\lambda_1^e g_1(x^e) = \lambda_1^e(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \tag{17}$$

$$\lambda_2^e g_2(x^e) = -\lambda_2^e x_1 = 0. \tag{18}$$

3.2.3 Шаг 3

Решим систему при $\lambda_0^e = 0$ с помощью сервиса WolframAlpha.com:

$$\begin{cases} 2\lambda_1^e x_1 - \lambda_2^e = 0, \\ 2\lambda_1^e x_2 = 0, \\ \lambda_1^e(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ -\lambda_2^e x_1 = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Все решения системы содержат $\lambda_1^e = \lambda_2^e = 0$, что невозможно, так как в этом случае значения всех x_i могут быть любыми.

Аналогично решим систему при $\lambda_0^e \neq 0 \quad (\lambda_0^e = 1)$:

$$\begin{cases} 6(x_1^3 - 2)x_1^2 + 2\lambda_1^e x_1 - \lambda_2^e = 0, \\ 2x_2 + 2\lambda_1^e x_2 = 0, \\ \lambda_1^e (x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ -\lambda_2^e x_1 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Были получены следующие значения:

- $\lambda_1 = -9, \lambda_2 = 0, x_1 = -1, x_2 = 0$
- $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, x_1 = 0, x_2 = -1$
- $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1$

Следовательно точки $(0, -1)$, $(0, 1)$ удовлетворяют поставленным условиям и являются регулярными точками. А так же они будут локальными максимумами, так как в них $\lambda_j^e \leq 0$ для $j = 1, 2$.

3.2.4 Шаг 4

Нужно для полученных точек на предыдущем шаге проверить достаточные условия экстремума. Для этого запишем матрицу Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$H = \begin{pmatrix} 18\lambda_0 x_1^4 + 12\lambda_0 x_1 (x_1^3 - 2) + 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_0 + 2\lambda_1 \end{pmatrix} \tag{22}$$

Для случая $\lambda_0 = 0$ матрица Гессе будет иметь вид:

$$H = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Второй дифференциал функции Лагранжа в найденной регулярной точке $x^e = (0, -1)$ равен:

$$d^2L(x^e, \lambda^e) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_i dx_j = 2\lambda_1 dx_1^2 + 2\lambda_1 dx_2^2 = 0 \quad (24)$$

Проверим условия, накладываемые на первые дифференциалы активных в точке x^e ограничений-неравенств.

$$dg_1(x^e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_1}{\partial g_i} dx_i = 2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 = 0 \quad (25)$$

$$dg_2(x^e) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_2}{\partial g_i} dx_i = -dx_1 = 0 \quad (26)$$

Следовательно, точка $x^e = (0, -1)$ является седловой точкой.

Аналогично посчитаем дифференциал функции Лагранжа в точке $x^e = (0, 1)$:

$$d^2L(x^e, \lambda^e) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} dx_i dx_j = 2\lambda_1 dx_1^2 + 2\lambda_1 dx_2^2 = 0 \quad (27)$$

Условия будут такими же, как и в случае с предыдущей точкой (25), (26). Поэтому точка $x^e = (0, 1)$ - тоже является седловой.

3.2.5 Шаг 5

Необходимо вычислить значения функции

$$f(x) = (x_1^3 - 2)^2 + x_2^2 \quad (28)$$

в точках экстремума.

$f(x) = 5$ в стационарных точках $(0, -1)$, $(0, 1)$.