Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования Московский
государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Лабораторная работа №5
«Метод Рунге-Кутта четвертого порядка для решения дифференциальных уравнений II-порядка»
по дисциплине
«Численные методы»

Студент группы ИУ9-62 Белогуров А.А.

Преподаватель Домрачева А.Б.

Москва, 2017

Цель: Анализ метода Рунге-Кутта четвертого порядка, и решение дифференциального уравнения II-порядка с помощью него.

Постановка задачи:

Дано дифференциальное уравнение II-порядка (1), коэффициенты которого выбираются произвольно. В моем случае были выбраны следующие значения (2):

$$y''(x) + p(x)y'(x) + g(x)y(x) = f(x) \tag{1}$$

$$y(x) = e^x, \quad p(x) = 1, \quad q(x) = -1 \tag{2}$$

После подстановки (2) в (1) получим следующее дифференциальное уравнение (3):

$$y''(x) + y'(x) - y(x) = e^x \tag{3}$$

Так же необходимо определить условия Коши (4), которые в данном случае будут равны значениям (5), и количество разбиений n (6) данного отрезка.

$$x \in [a, b], \quad y(a) = A, \quad y'(a) = B \tag{4}$$

$$x \in [0, 1], \quad y(0) = e^0 = 1, \quad y'(a) = e^0 = 1 \tag{5}$$

$$n = 10 \tag{6}$$

С помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка вычислить приближенное значение дифференциального уравнения (3) с заданными условиями Коши (5) и сравнить возникшую погрешность метода с действительным значением функции.

Теоретические сведения:

Методы Рунге-Кутта (в разных источниках используется название Рунге-Кутты) - большой класс численных методов для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Первые методы данного класса были предложены около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М. В. Куттой.

В данной лабораторной работе будет рассматриваться классический метод Рунге-Кутта, имеющий четвертый порядок точности. Стоит отметить, что данный метод предназначен для решения дифференциальных уравнений I-порядка, поэтому в нашем случае необходимо будет понизить порядок уравнения (3).

Для этого необходимо будет выполнить замену (7) и (8), и решить полученные дифференциальные уравнение методом Рунге-Кутта.

$$g(x, y, z) = z = y'(x) \tag{7}$$

$$f(x, y, z) = z' = e^x + y(x) - y'(x) \tag{8}$$

Описание алгоритма: Приближенное значение дифференциального уравнения считается по итерационной формуле (9), где количество итераций было задано раннее (6) :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}, \quad n = \overline{0, 10} \tag{9}$$

Где значения k_i, кроме k_1, вычисляются на основе предыдущего значения k_{i-1}:

$$k_1 = h \times f(x_n, y_n, z_n)$$

$$k_2 = h \times f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}, z_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h \times f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}, z_n + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h \times f(x_n + h, y_n + k_3, z_n + k_3)$$

Начальные значение для уравнения (3) были заданы раннее (5). Тогда получим (10):

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1, \quad h = \frac{b-a}{n} = 0.1 \tag{10}$$

Этот метод имеет четвертый порядок точности. Это значит, что ошибка на одном шаге имеет порядок $O(h^5)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O(h^4)$.

Практическая реализация:

Листинг 1: Метод Рунге-Кутта четвертого порядка для решения диф. уравнения II-порядка

```
import math


def f(x, y, z):
    return math.exp(x)+y-z


def g(x, y, z):
    return z


def rk(f, a, b, n, is_print=False):
    h = (b-a) / n
    x_n = [a + i * h for i in range(n+1)]
    y = []
    y_cur = z_cur = 1

    for x in x_n:
        y.append(y_cur)
            if is_print:
                print(str(y_cur) + " " + str(math.exp(x) - y_cur))

            k1 = h * f(x, y_cur, z_cur)
            k2 = h * f(x + h/2, y_cur + k1/2, z_cur + k1/2)
            k3 = h * f(x + h/2, y_cur + k2/2, z_cur + k2/2)
            k4 = h * f(x + h, y_cur + k3, z_cur + k3)
```

```python

            y_cur += (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
            z_cur += (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6

    return y

if __name__ == "__main__":
    result = [rk(f, 0, 1, 10, True), rk(g, 0, 1, 10)]

        print()
        for i in range(len(result[0])):
            print(str(result[0][i]) + " " + str(result[1][i]))
```

Результаты:

Для тестирования было выбрано уравнение (3). Погрешность считается по формуле (11):

$$\varepsilon = e^{x_n} - y_n \tag{11}$$

Ниже приведена таблица результата тестовой программы (Листинг 1) на формуле (8):

Значение x	Результат программы	Погрешность $\varepsilon(\times 10^{-9})$
0.0	1	0.0
0.1	1.105171	-3.651
0.2	1.221403	-7.685
0.3	1.349859	-12.144
0.4	1.491825	-17.072
0.5	1.648721	-22.518
0.6	1.822119	-28.537
0.7	2.013753	-35.189
0.8	2.225541	-42.541
0.9	2.459603	-50.666
1.0	2.718282	-59.645

Далее приведена таблица сравнений результатов для формул (8) и (7):

Значение x	Результат программы для $f(x, y, z)$	Результат программы для $g(x, y, z)$
0.0	1	1
0.1	1.10517092	1.10517083
0.2	1.22140277	1.22140257
0.3	1.34985882	1.3498585
0.4	1.49182471	1.49182424
0.5	1.64872129	1.64872064
0.6	1.82211883	1.82211796
0.7	2.01375274	2.01375163
0.8	2.22554097	2.22553956
0.9	2.45960316	2.45960141
1.0	2.71828189	2.71827974

Выводы:

В ходе выполнения лабораторной работы был рассмотрен метод Рунге-Кутта четвертого порядка для решения дифференциальных уравнений II-порядка. Была написана реализация данного метода на языке программирования Python.

Как видно выше в таблице вычислений, данный метод вполне успешно можно использовать для решений различных типов дифференциальных уравнений, так как возникшая погрешность довольна мала и ею можно пренебречь. Но если все же важно добиться как можно большей точности, то для этого необходимо увеличивать количество разбиений n (6) до тех пор, пока не будет получен нужный результат.

Метод Рунге-Кутта является одним из самых популярных методов для решений дифференциальных уравнений в силу своей простоты и скоростью вычислений. Но так же стоит отметить, что в разделе численных методов существуют и другие методы для решений данного класса уравнений, которые отличаются своими преимуществами и недостатками.