

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования Московский
государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Лабораторная работа №2
«Метод наименьших квадратов»
по дисциплине
«Численные методы»

Студент группы ИУ9-62

Белогуров А.А.

Преподаватель

Домрачева А.Б.

Москва, 2017

Постановка задачи:

Функция $y_i = f(x_i), i = \overline{1, n}$ задана таблично (1), исходные данные включают ошибки измерения.

Таблица 1

x_1	x_2	\dots	x_n
y_1	y_2	\dots	y_n

Найти функцию $y_i \approx f(x_i), i = \overline{1, n}$ удовлетворяющую условию (1), без учета вычислительной погрешности (2):

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2 = 0 \quad (2)$$

Теоретические сведения:

В качестве $f(x_i)$ возьмем следующую функцию (3):

$$f(a, b, x_i) = f(x_i) = ax_i + b \quad (3)$$

$$f(a, b, x) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \rightarrow \min$$

Задача поиска экстремума заменяется эквивалентной задачей равенства нулю производной исходной функции, так как переменные a и b являются неизвестными (4) и (5):

$$\begin{cases} \frac{\partial f(a,b,x)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial f(a,b,x)}{\partial b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (5)$$

Подставим замену (6) в (5) и получим следующую систему (7).

$$A = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^n x_i, \quad C = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad D = \sum_{i=1}^n y_i \quad (6)$$

$$\begin{cases} aA + bB = C \\ aB + bn = D \end{cases} \quad (7)$$

Выразим b и подставим в систему (7) для нахождения a (8):

$$b = \frac{D - aB}{n}, \quad a = \frac{Cn - DB}{nA - B^2} \quad (8)$$

В качестве исходных данных возьмем функцию $x = y$, для каждой координаты x и y введем погрешность $\varepsilon = 0.1$, $n = 10$.

Практическая реализация:

Листинг 1: Метод наименьших квадратов

```

1 | import random
2 |
3 | coordY = [(i + 1) + random.uniform(-1, 1) * 0.1
4 |           for i in range(10)]
5 | coordX = [(i + 1) + random.uniform(-1, 1) * 0.1
6 |           for i in range(10)]

```

```

7 | n = len(coordX)
8 |
9 | print(coordY)
10 | print(coordX)
11 |
12 | A = 0
13 | for item in coordX:
14 |     A += item ** 2
15 |
16 | B = sum(coordX)
17 |
18 | C = 0
19 | for i in range(len(coordX)):
20 |     C += coordX[i] * coordY[i]
21 |
22 | D = sum(coordY)
23 |
24 | a = (C * n - D * B) / (n * A - B ** 2)
25 | b = (D - a * B) / n
26 |
27 | print("a: " + str(a))
28 | print("b: " + str(b))

```

Результаты:

При каждом запуске программы (Листинг 1) координаты x и y будут разными, так как мы считаем их методом *random*. Ниже приведен один из возможных ответов программы:

$a : 0.9971347394546591$

$b : 0.0150910246109411$

Выводы:

В ходе выполнения лабораторной работы был рассмотрен «Метод наименьших квадратов» и разобрана задача, которая является

эквивалентной по отношению к исходной задаче. Была написана реализация данного метода на языке программирования Python.

В качестве результатов были получены два рациональных числа a и b . Погрешность для этих чисел получилась $\varepsilon = 0.01$, которая обусловлена вычислительной погрешностью и погрешностью метода.