- Множество A равномощно множеству B, если существует биекция $f : A \to B$

★ Равномощность является отношением эквивалентности

- тождественная функция — биекция A на A (рефлексивность)
- если $f : A \to B$ — биекция, то $f^{-1} : B \to A$ — биекция (симметричность)
- если $f : A \to B$ и $g : B \to C$ — биекции, то $f \circ g : A \to C$ — биекция (транзитивность)

★ Таким образом, можно говорить о классах равномощных множеств

- ⋆ такие классы называются мощностями
- ⋆ каждому классу сопоставляется уникальное обозначение (имя, ключ, метка...), которое называется кардинальным числом или кардиналом
- ⋆ кардинальные числа — обобщение обычных натуральных чисел с нулем

- Примеры:
  - число 3 обозначает класс всех трехэлементных множеств
  - число 0 обозначает класс, состоящий из пустого множества
  - «число» $\aleph_0$ (алеф-ноль) обозначает класс, содержащий множество $\mathbb{N}$

! Стоп. Если σ — отношение равномощности, то $\sigma \subseteq U^2$ для некоторого множества U; что это за множество?

- видимо, U — множество всех множеств, поскольку для любой пары множеств (рассматриваемых как элементы U) либо биекция существует, либо нет
- но со множеством всех множеств есть проблемы...

- Пусть U — множество всех множеств
  - Тогда $U \in U$
  - ⋆ Значит, некоторые множества содержат себя в качестве элемента
  - ⋆ Назовем множество A нормальным, если $A \notin A$ и ненормальным, если $A \in A$

  Пример: Пусть A — множество всех правильных 17-угольников, лежащих в заданной плоскости
  - A — непусто
  - A не является правильным 17-угольником $\Rightarrow A \notin A$, A нормально

  Рассмотрим дополнение A, т.е. множество $\bar{A}$ всех сущностей, не являющихся правильными 17-угольниками
  - $\bar{A}$ — непусто
  - $\bar{A}$ не является правильным 17-угольником $\Rightarrow \bar{A} \in \bar{A}$, $\bar{A}$ ненормально

★ Пусть R — множество всех нормальных множеств; нормально ли R?
  - ⋆ R нормально $\Rightarrow$ ($R \in R$ по определению R) $\Rightarrow$ R ненормально
  - ⋆ R ненормально $\Rightarrow$ ($R \notin R$ по определению R) $\Rightarrow$ R нормально
  - ой...

★ Вывод: не любая совокупность, которую можно задать свойствами элементов, подчиняется законам логики
  - высказывание $R \in R$ не является ни истинным, ни ложным

★ Значит, надо определять, что такое множество, аксиоматически:
  - задать базовые множества (аксиомы)
  - задать способы конструирования множеств (правила вывода)

Понятие об аксиоматике ZFC

★ Опуская некоторые детали, можно сказать, что система аксиом ZFC

- Zermelo–Fraenkel with Axiom of Choice

постулирует следующее:

⋆ Равными считаются множества, состоящие из одних и тех же элементов
- кроме того, $A = B$ означает, что $A \in C \Leftrightarrow B \in C$

⋆ Существуют пустое множество и множество натуральных чисел

⋆ Для любых A, B существует неупорядоченная пара — множество $\{A, B\}$
- взяв $A = B$, можно получить одноэлементное множество $\{A\}$

⋆ Можно взять объединение (любого множества) множеств
- если A — множество (множеств), то существует множество $C = \bigcup_{B \in A} B$
- Пример: если $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3, \{4\}\}\}$, то $C = \{1, 2, 3, \{4\}\}$

⋆ Образ множества при действии функции — множество
- функция записывается как предикат, средствами самой ZFC
- в частности, все элементы множества, обладающие заданным свойством, образуют множество

⋆ Булеан множества — множество

⋆ Не существует множеств, удовлетворяющих условию $A \in A$
- или $A \in B_1 \in \cdots B_n \in A$

★ Если некоторую совокупность элементов нельзя получить указанными выше способами, то единственная причина, по которой она может быть множеством, — аксиома выбора, утверждающая, что
- для любого множества A существует функция f, определенная на A и такая, что $f(B) \in B$ для всех $B \in A$

- Согласно ZFC, множество всех множеств не существует
- ⋆ Термином класс называют любую совокупность (множество или не-множество)
  - ⋆ отношение равномощности определено на классе всех множеств
  - ⋆ мощность множества A — это класс всех множеств, равномощных A
  - ⋆ мощность и соответствующее ей кардинальное число часто отождествляют
  - стандартное обозначение: $|A|$ или $card(A)$; еще бывает $\#A$ (для конечных A)
- Множество A конечно, если оно равномощно отрезку $[1..n]$ множества $\mathbb{N}$ для некоторого n
- Множество A бесконечно, если оно не является конечным
- Бесконечные множества, равномощные $\mathbb{N}$, называют счетными
- Счетное множество A можно представить как последовательность $\{a_i\}_1^\infty$
  - здесь $a_i = f(i)$ для некоторой биекции $f : \mathbb{N} \to A$

Лемма о счетном подмножестве

В любом бесконечном множестве есть счетное подмножество.

Доказательство:

- Пусть A — бесконечное множество; выберем
- $a_1 \in A$; $a_2 \in A \setminus \{a_1\}; \ldots ; a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \ldots , a_n\}; \ldots$
- ⋆ все множества вида $A \setminus \{a_1, \ldots , a_n\}$ непусты (иначе A конечно по определению)
- $\Rightarrow$ мы построили счетное подмножество $\{a_i\}_1^\infty \subseteq A$ $\square$

Критерий бесконечности множества

- Подмножество $B \subseteq A$ называется собственным, если $B \neq A$

Теорема

Множество A бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству.

Доказательство:

- Не существует биекции n-элементного множества на m-элементное множество при $n > m$ (принцип Дирихле)

$\Rightarrow$ если A равномощно собственному подмножеству A, то A бесконечно

- Пусть A бесконечно, $a \in A$; построим биекцию A на его подмножество $A \backslash \{a\}$:
  - по лемме о счетном подмножестве, выделим $\{a_i\}_1^\infty \subseteq A$, начав с $a_1 = a$
  - определим функцию f:
    $f(b) = b$ для всех $b \in A \backslash \{a_i\}_1^\infty$
    $f(a_i) = a_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow$ f — искомая биекция $\square$

★ При работе с бесконечными множествами интуиция очень часто дает сбои
  - Мозг мыслит конечными величинами, поэтому тот факт, что натуральных чисел столько же, сколько степеней двойки среди них, контринтуитивен
  - Для тренировки мозга на подобные факты гуглите отель Гильберта
    - (не путайте с одноименным альбомом в стиле хэви-метал)

Сравнение мощностей. Теорема Бернштейна–Кантора

- $|A| \leqslant |B|$, если существует инъекция $f : A \to B$
  - ⋆ f — биекция A на $f(A)$, т.е. A равномощно подмножеству в B
- $\leqslant$ — бинарное отношение на множестве кардинальных чисел
  - ! Попробуйте доказать, что кардинальные числа образуют множество
- $\leqslant$ — отношение порядка:
  - рефлексивность (тождественная функция — инъекция A в A)
  - транзитивность (суперпозиция инъекций — инъекция)
  - антисимметричность $\Longrightarrow$

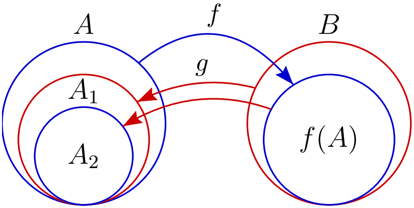
Теорема Бернштейна–Кантора

Биекция между множествами A и B существует тогда и только тогда, когда существуют инъекции из A в B и из B в A.

- Доказательство:
  - необходимость очевидна, так как биекция — частный случай инъекции
  - достаточность на следующем слайде
- Пример: отрезок $[0,1]$ и интервал $(0,1)$ равномощны
  - выберем α, β так, что $0 < \alpha < \beta < 1$
  - линейная функция $f(x) = \beta x + \alpha(1-x)$ — биекция $[0,1]$ на $[\alpha,\beta] \subseteq (0,1)$ и $(0,1)$ на $(\alpha,\beta) \subseteq [0,1]$
  - биекцию между $[0,1]$ и $(0,1)$ построить немного сложнее; в частности, она не может быть непрерывной функцией (почему?)

Доказательство теоремы Бернштейна–Кантора

Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to A$ — инъекции; обозначим $A_1 = g(B)$, $A_2 = g(f(A))$:



g — биекция B на A_1
$\phi = f \circ g$ — биекция A на A_2

Так как B равномощно A_1, достаточно построить биекцию A на A_1

- Положим $C_0 = A_1 \setminus A_2$, $C_n = \phi(C_{n-1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_i$
- Определим функцию $\psi : A \to A$ условием $\psi(a) = \begin{cases} a, & a \in C \\ \phi(a), & a \notin C \end{cases}$
- $\psi(A) \subseteq A_1$ по определениям A_2, ϕ и C; докажем, что ψ — биекция A на A_1
- достаточно доказать, что любой элемент A_1 имеет единственный ψ-прообраз
  - пусть $c \in C$; тогда c — единственный ψ-прообраз c, принадлежащий C
    - если $a \notin C$ — ψ-прообраз $c \Rightarrow a = \phi^{-1}(c) \Rightarrow c \in C_i$, $i \geqslant 1$ $\Rightarrow a \in C_{i-1} \subseteq C \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow c$ — единственный ψ-прообраз c
  - пусть $c \in A_1 \setminus C$; тогда у c нет ψ-прообразов в C
    - $c \in A_2$, т.е. имеет ψ-прообраз $\phi^{-1}(c)$ (единственный ввиду инъективности ϕ)

Еще о порядке на мощностях

Любые ли два множества можно сравнить по мощности?

- Если отношение линейного порядка $\preccurlyeq$ на множестве A удовлетворяет условию минимальности
  - $\preccurlyeq$ называется отношением полного порядка
  - $(A, \preccurlyeq)$ называется вполне упорядоченным множеством

⋆ на конечных множествах все линейные порядки — полные

⋆ $(\mathbb{N}, \leqslant)$ — вполне упорядоченное множество, в отличие от $(\mathbb{Z}, \leqslant)$, $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ и $(\mathbb{R}, \leqslant)$

Теорема

Отношение $\leqslant$ на множестве кардинальных чисел является отношением полного порядка.

- Теорема утверждает, что
  - любые множества можно сравнить по мощности
  - по множеству кардиналов можно проводить индукцию (трансфинитная индукция)
- Доказательство потребовало бы отдельной лекции
  - через теорию вполне упорядоченных множеств
  - можно посмотреть в книге Баранский, Кабанов. Общая алгебра и ее приложения

Теорема Кантора о булеане

Для любого множества A выполнено неравенство $|A| < |2^A|$.

Доказательство:

- Пусть $f(a) = \{a\}$ для всех $a \in A$
  - f — инъекция из A в 2^A; значит, $|A| \leqslant |2^A|$
- В обратную сторону докажем от противного:
  - пусть $\phi : 2^A \to A$ — инъекция
  - для каждого подмножества $B \subseteq A$
    - назовем элемент $\phi(B)$ синим, если $\phi(B) \in B$
    - назовем элемент $\phi(B)$ красным, если $\phi(B) \notin B$

  $\Rightarrow$ так как ϕ — инъекция, любой элемент A покрашен не более чем в один цвет
  - рассмотрим множество R, состоящее из всех красных элементов A
  - если $\phi(R) \in R$, то элемент $\phi(R)$ по определению синий $\Rightarrow \phi(R) \notin R$
  - если $\phi(R) \notin R$, то элемент $\phi(R)$ по определению красный $\Rightarrow \phi(R) \in R$

  $\Rightarrow$ противоречие; значит, ϕ не существует и $|2^A| \nleqslant |A|$ $\square$

★ Поскольку булеан любого множества является множеством,
- существует бесконечно много бесконечных кардиналов
- не существует максимального (наибольшего) кардинала

★ Если $|A| = \alpha$, то пишут $|2^A| = 2^\alpha$

★ Для всех практических и практически всех математических целей достаточно уметь различать две бесконечных мощности: мощность множества натуральных чисел и мощность множества действительных чисел

Теорема

$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

Доказательство:

- ⋆ $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$: $f(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$ является биекцией $\mathbb{R}$ на $(0,1)$
- ⋆ $2^{\aleph_0}$ — мощность множества $2^{\mathbb{N}}$
- $\Rightarrow$ достаточно доказать равномощность $(0,1)$ и $2^{\mathbb{N}}$

- Любое $x \in (0,1)$ представимо двоичной дробью $x = 0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$
  - положим $f(x) = \{n : x_n = 1\}$; тогда $f : (0,1) \to 2^{\mathbb{N}}$ — инъекция
- Любое $A \subseteq \mathbb{N}$ имеет характеристическую функцию $\chi_A(n) = [n \text{ принадлежит } A]$
  - скобка Иверсона [высказывание] конвертирует ИСТИНА/ЛОЖЬ в 1/0
  - положим $g(A)$ равным числу x, имеющему троичную запись $x = 0.x_1x_2\cdots x_n\cdots$, где $x_n = \chi_A(n)$
  - $\Rightarrow$ $g : 2^{\mathbb{N}} \to (0,1)$ — инъекция

$\Rightarrow$ по теореме Бернштейна–Кантора $|(0,1)| = |2^{\mathbb{N}}|$ □

- Пусть A — множество множеств, I — множество индексов, $f : A \to I$ — биекция
  - ⋆ f позволяет проиндексировать A: для каждого $B \in A$ найдется $i = f(B) \in I$, переобозначим $A_i = B$ и запишем $A = \{A_i \mid i \in I\}$

Теорема

Пусть $A = \{A_i \mid i \in I\}$, где мощность I и любого множества A_i не превосходит $\aleph_0$. Тогда $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leqslant \aleph_0$.

Доказательство:

- Запишем $A_i = \{a_{i1}, \ldots, a_{in}, \ldots\}$
- Выпишем элементы $\bigcup_{i \in I} A_i$ в последовательность, отсортировав все a_{ij} сначала по сумме индексов, а затем лексикографически □

★ Верно ли, что не существует способа увеличить мощность бесконечного множества, кроме перехода к булеану?

- ZFC позволяет построить декартово произведение двух множеств (через создание пар и объединение), но оно тоже не увеличивает мощность бесконечных множеств (доказательство аналогично приведенному)

Иерархия алефов и континуум-гипотеза

- Кантор предложил обозначать мощности бесконечных множеств буквой $\aleph$ с индексами:
  - ⋆ $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ — наименьший бесконечный кардинал (по лемме о счетном подмножестве)
    дальше идут $\aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_{\aleph_0}, \ldots$

Континуум-гипотеза Кантора

$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

- Иными словами, $|\mathbb{R}|$ покрывает $|\mathbb{N}|$ в ЧУМе кардиналов
- ★ Доказательство континуум-гипотезы — Проблема 1 в списке Гильберта (1900)
- ★ Континуум-гипотезу нельзя опровергнуть в ZFC (Гёдель, 1940)
- ★ Континуум-гипотезу нельзя доказать в ZFC (Коэн, 1964)