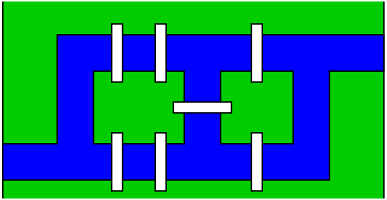
Эйлеров цикл

- Цикл в графе G называется эйлеровым, если он содержит все ребра G
  - ⋆ как подграф, эйлеров цикл совпадает с G с точностью до вершин степени 0 (изолированных вершин)
- Эйлерова цепь — это цепь, содержащая все ребра G
  - эйлеров цикл — частный случай эйлеровой цепи
- Граф эйлеров (полуэйлеров), если в нем есть эйлеров цикл (цепь)
- Источник понятия — старая головоломка о кенигсбергских мостах:
- Город Кенигсберг расположен на берегах реки Прегель и двух островах на этой реке; части города соединены мостами (см. рисунок)
- Можно ли обойти все мосты, пройдя по каждому из них ровно один раз?



⋆ В головоломке спрашивается о наличии эйлеровой цепи в графе с 4 вершинами (берега и острова реки) и 7 ребрами (мосты)

Теорема Эйлера о циклах

Граф без изолированных вершин является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и степени всех его вершин четны.

Доказательство (необходимость):

- Пусть G — эйлеров граф без изолированных вершин
  - $\Rightarrow$ Каждая вершина инцидентна хотя бы одному ребру
  - $\Rightarrow$ Эйлеров цикл проходит по всем вершинам
  - $\Rightarrow$ Любые две вершины в G соединены цепью (частью эйлерова цикла)
  - $\Rightarrow$ G связен
- «Обойдем» G по эйлерову циклу
- Для произвольной вершины v
  - мы «зайдем» в вершину v столько же раз, сколько «выйдем» из нее
  - инцидентное v ребро используется либо только для захода в v, либо только для выхода из v
  - ⋆ петля используются и для захода, и для выхода
  - при подсчете степени вершины каждая петля учитывается дважды
  - остальные ребра разбиваются на пары (входящее ребро, исходящее ребро)
  - $\Rightarrow$ Степень v четна

□

Доказательство (достаточность):

- Пусть G связен, степени всех вершин в G четны; построим в G эйлеров цикл
- Если в G есть петли, то можно
  - удалить петли (связность графа и четность степеней вершин не нарушатся)
  - построить эйлеров цикл в получившемся графе
  - встроить петли в построенный цикл, получая эйлеров цикл в G

$\Rightarrow$ В дальнейшем считаем, что в G нет петель

- Пусть v_0 — произвольная вершина графа G
  - $\deg(v_0) > 0$ $\Rightarrow$построим цепь с началом в v_0
    - ребра $e_1, e_2, \ldots$ выбираем произвольно
    - останавливаемся, когда цепь нельзя продолжить (все ребра, инцидентные текущей вершине v_k уже вошли в цепь)

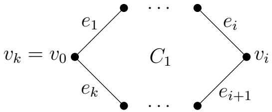
    $\Rightarrow$ остановимся через конечное число шагов
  - пусть построена цепь $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$
  - докажем, что $v_k = v_0$, т.е. мы построили цикл
  - от противного: пусть $v_k \neq v_0$

  $\Rightarrow$ проходя по цепи от v_0 к v_k, мы входили в v_k $\ell > 0$ раз, а выходили $\ell - 1$ раз
  - все ребра, по которым мы входили и выходили, различны

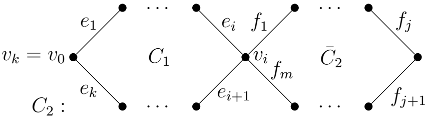
  $\Rightarrow$ в цепи $2\ell - 1$ ребер, инцидентных v_k
  - это не все ребра в G, инцидентные v_k, так как $\deg(v_k)$ четна

  $\Rightarrow$ противоречие с правилом построения цепи $\Rightarrow v_k = v_0$
- Окончание доказательства $\Longrightarrow$

Теорема Эйлера о циклах — достаточность (2)



- Пусть C_1 — построенный цикл:
  - Если C_1 — эйлеров, построение закончено
- Пусть C_1 не эйлеров, т.е. в графе $G_1 = G - \{e_1, \ldots, e_k\}$ есть ребра
- Среди этих ребер есть ребро f_1, инцидентное какой-то вершине v_i цикла C_1
  - ⋆ иначе C_1 — компонента связности связного графа G, не совпадающая с G
- ⋆ В графе G_1 степени всех вершин четны
  - при удалении ребер $e_1, \ldots, e_k$ степень каждой из вершин $v_1, \ldots, v_k$ уменьшилась на четное число, а степени остальных вершин не изменились
- Рассмотрим компоненту связности графа G_1, содержащую ребро f_1
  - в ней можно построить цикл $\bar{C}_2$ из ребер $f_1, \ldots, f_m$ тем же способом, которым был построен цикл C_1:



  - последовательность ребер $e_1, \ldots, e_i, f_1, f_2, \ldots, f_m, e_{i+1}, \ldots, e_k$ образует цикл C_2
  - ⋆ в C_2 больше ребер, чем в C_1
  - ⋆ если цикл C_2 эйлеров, построение закончено
  - ⋆ иначе повторим процедуру, расширив цикл C_2 до C_3, и т.д.
- ⋆ число ребер в G конечно $\Rightarrow$ какой-то цикл C_j окажется эйлеровым

Комментарии к теореме Эйлера о циклах

★ Если G — эйлеров граф, e — какое-то его ребро, то граф $G - e$ полуэйлеров

- если в эйлеровом цикле удалить произвольное ребро, останется эйлерова цепь

⇒ Верна следующая версия теоремы Эйлера:

★ Граф без изолированных вершин является полуэйлеровым ⇔ он связен и в нем не более двух вершин нечетной степени

⋆ Понятия эйлерова цикла/цепи переносятся без изменений на орграфы

⇒ Анализ доказательства дает теорему Эйлера для орграфов:

★ Орграф без изолированных вершин является эйлеровым ⇔ он сильно связен и для любой вершины степень исхода равна степени захода

! Сформулируйте ориентированную версию критерия для полуэйлеровых графов

- будьте внимательны!

⋆ Граф кенигсбергских мостов не является полуэйлеровым

- все 4 вершины имеют нечетную степень (проверьте!)

- ⋆ Задача китайского почтальона: дан граф с неотрицательными весами ребер, требуется найти циклический маршрут наименьшего веса, содержащий все ребра графа
  - практическая задача: составление маршрутов поливальных/посыпальных машин на улицах города
  - ⋆ если граф эйлеров, то оптимальным маршрутом является эйлеров цикл
  - ⋆ неэйлеров граф превращают в эйлеров заменой некоторых ребер на кратные
    - соответствует дополнительному «холостому» проходу по ребру
- ⋆ Задача о разрезании лазером: в станок для лазерной резки подается лист металла, который нужно разрезать на детали в соответствии с чертежом
  - лазер не должен проходить один и тот же отрезок дважды (может оплавиться край детали)
  - лазер можно отключить и переустановить на другую точку листа, но это сложная процедура, и количество отключений надо минимизировать

! Опишите связь этой задачи с эйлеровыми графами

! Чем отличается работа с неэйлеровыми графами в задаче о разрезании лазером и задаче китайского почтальона?

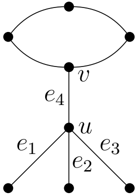
Диаметр эйлеровых графов

- $d(u,v)$ — расстояние от u до v (наименьшая длина (u,v)-маршрута) в графе G
  - ⋆ $d(u,u) = 0$, $d(u,v) = \infty$ если (u,v)-маршрута не существует
  - ⋆ в неориентированном графе $d(u,v) = d(v,u)$
- ⋆ Диаметр графа: $diam(G) = \max_{u,v \in V} d(u,v)$
  - ⋆ диаметр графа/орграфа, не являющегося связным/ сильно связным, бесконечен
  - ⋆ реальный мир: огромные графы с маленьким диаметром (шесть рукопожатий)
- ⋆ Диаметр орграфа называют ориентированным диаметром
  - неориентированный диаметр $\overline{diam}(G)$ орграфа G — это диаметр графа G', полученного симметризацией G (стиранием всех стрелок)
  - ⋆ это «диаметр для пешеходов»: по улицам с односторонним движением пешеход может двигаться в любую сторону
- ⋆ $\overline{diam}(G) \leqslant diam(G)$, и разница может быть сколь угодно велика
  - например, $\overline{diam}(G) < \infty = diam(G)$
- ★ Теорема Бабаи (2006): если G — эйлеров, то $diam(G) = O(\overline{diam}(G) \cdot \Delta \cdot \ln n)$, где Δ — максимальная степень вершины в G, n — число вершин
- Пусть T — порождающее множество группы G; граф Кэли $\Gamma(G,T)$ имеет множество вершин G и множество ребер $\{(u,v) \mid \exists t \in T : v = ut\}$
  - ★ граф Кэли эйлеров (объясните, почему)
  - можно определить диаметр группы G: $diam(G) = \max_T diam(\Gamma(G,T))$
  - ★ гипотеза Бабаи: диаметр симметрической группы S_n полиномиален от n

Пусть G — произвольный неориентированный граф

- Ребро e графа G называется мостом, если $G - e$ имеет больше компонент связности, чем G
- Вершина v графа G называется точкой сочленения, если $G - v$ имеет больше компонент связности, чем G

  Пример: граф на рисунке имеет четыре моста и две точки сочленения
  - ребра e_1, e_2, e_3 и e_4 и вершины u, v



- Мосты и точки сочленения обычно рассматривают для связных графов

★ Единственный связный граф с мостом и без точек сочленения — цепь длины 1
  - во всех остальных случаях хотя бы одна из инцидентных мосту вершин является точкой сочленения

★ Мосты и точки сочленения моделируют узкие места в сетях связи

Лемма о циклах

Для любого графа G, e — мост $\Leftrightarrow$ e не содержится ни в одном цикле G.

Доказательство (необходимость):

- e содержится в некотором цикле

$\Rightarrow$ по лемме о разрыве цикла, $G - e$ и G имеют одни и те же компоненты связности

$\Rightarrow$ e не мост $\Rightarrow$ мост не содержится ни в одном цикле

Достаточность:

- $e = (u, v)$ не содержится ни в одном цикле
- если в $G - e$ есть (u, v)-цепь, эта цепь вместе с e образует цикл, что невозможно

$\Rightarrow$ u и v лежат в разных компонентах связности $G - e$

  - но в одной компоненте связности G, благодаря ребру e

$\Rightarrow$ число компонент связности увеличилось

$\Rightarrow$ e — мост $\square$

Свойства мостов (2)

Лемма об удалении моста

Удаление моста увеличивает число компонент связности графа G ровно на 1.

Доказательство:

- пусть G_e — компонента связности графа G, содержащая мост $e = (u, v)$
- все компоненты G, кроме G_e, переходят в граф $G - e$ без изменения

$\Rightarrow$ достаточно показать, что в графе $G_e - e$ две компоненты связности

- докажем, что любая вершина $w \in G_e$ связана в $G_e - e$ либо с u, либо с v:
  - G_e связен $\Rightarrow$ существует (w, u)-путь P
  - если $e \notin P$, то w и u связаны в $G_e - e$
  - если $e \in P$, то $P = (w, e_1, \ldots, v, e, u) \Rightarrow w$ и v связаны в $G_e - e$ $\square$

Лемма о точке сочленения

Вершина v связного графа G является точкой сочленения $\Leftrightarrow$ в G найдутся две отличные от v вершины u и w такие, что любой (u,w)-путь содержит v.

Доказательство (необходимость):

- v — точка сочленения графа $G \Rightarrow G-v$ не связный
- пусть u и w — любые вершины из разных компонент связности графа $G-v$

$\Rightarrow$ любой (u,w)-путь проходит через v

Достаточность:

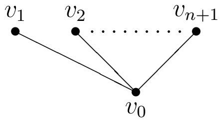
- пусть вершины $u \neq v$ и $w \neq v$ таковы, что любой (u,w)-путь содержит v

$\Rightarrow$ в графе $G-v$ вершины u и w не связаны

$\Rightarrow$ $G-v$ не связный $\Rightarrow$ v — точка сочленения $\square$

★ В отличие от удаления моста, удаление точки сочленения может привести к сколь угодно большому росту числа компонент связности

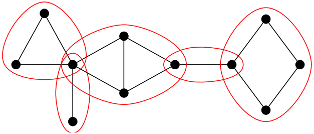
Пример: в графе на рисунке при удалении v_0 число компонент увеличивается на n



Двусвязные графы. Блоки

- Связный граф без точек сочленения называется двусвязным
- ★ Если граф моделирует сеть связи, то двусвязность — это отказоустойчивость:
  - выход из строя одного узла не нарушает функционирования остальной сети, независимо от того, какой узел вышел из строя
  - выход из строя одной линии не нарушает функционирования остальной сети, независимо от того, какая линия вышла из строя
    - кроме случая, когда сеть связи — цепь длины 1
- ★ Рассматривают и более сильные требования отказоустойчивости:
  - выход из строя любых k узлов не нарушает функционирования остальной сети ((k+1)-связные графы)
  - выход из строя любых k линий не нарушает функционирования остальной сети (реберно (k+1)-связные графы)
- ⋆ Задача мониторинга связности локальной сети с глобальным интернетом
- Компонента двусвязности (блок) графа G — это любой максимальный по включению двусвязный подграф G

  Пример: в графе на рисунке 5 блоков (обведены красным)



- ★ Блоки, в отличие от компонент связности, могут иметь общие вершины

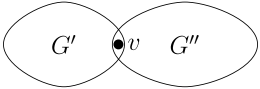
Лемма о блоках

Два различных блока графа G либо не имеют общих вершин, либо имеют единственную общую вершину, являющуюся точкой сочленения G.

Доказательство:

- пусть компоненты двусвязности G' и G'' графа G имеют общую вершину v
- рассмотрим граф $\bar{G}$, состоящий из всех вершин и ребер графов G' и G'':

$\bar{G}$:



- $\bar{G}$ связен, но не двусвязен по определению блока

$\Rightarrow$ в $\bar{G}$ есть точка сочленения, и ей может быть только вершина v

  - если удалить любую другую вершину из G', то G' останется связным $\Rightarrow$ для любой оставшейся в G' вершины u найдется (u, v)-путь $\Rightarrow$ для любой вершины $w \in G''$ найдется (u, w)-путь $\Rightarrow$ $\bar{G}$ останется связным
  - при удалении вершины из G'' рассуждаем аналогично

- поскольку v — точка сочленения, подграфы G' и G'' не могут иметь других общих вершин: если такая вершина v' есть, то граф $\bar{G} - v$ связен, поскольку любая его вершина связана с v' в силу двусвязности графов G' и G'' □

! Докажите, что блок — это порожденный подграф

Дерево блоков

- Граф блоков $B(G)$ графа G определяется следующим образом:
  - вершинами являются блоки и точки сочленения G
  - каждая точка сочленения соединена неориентированным ребром со всеми блоками, в которые она входит

Теорема о графе блоков

Граф блоков связного графа G является деревом.

Доказательство:

- $B(G)$ очевидно связен; докажем, что в $B(G)$ нет циклов
- пусть имеется цикл $B_1, a_1, \ldots, B_k, a_k, B_1$ $(k \geqslant 2)$

$\Rightarrow$ любые вершины из блоков, например, B_1 и B_k соединены двумя путями (один проходит через a_k, а другой — нет)

$\Rightarrow$ a_k не точка сочленения по лемме о точке сочленения $\square$