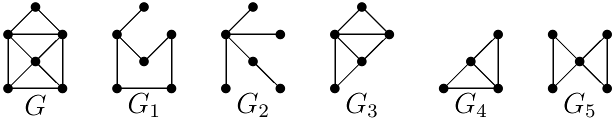
Основные понятия

- Граф: пара $G = (V, E)$
  - V — непустое множество (множество вершин)
  - E — бинарное мультиотношение на V (множество ребер)
- ⋆ Рассматриваем только конечные графы (V и E конечны)
  - кратность ребра — это его кратность как элемента E
  - если E симметрично — граф неориентированный
    - иначе — ориентированный (орграф)
  - Матрица смежности — это матрица мультиотношения E
    - обозначается M_G
  - ребро — упорядоченная пара
    - ребро (u, v) (или $u \to v$) исходит из u и входит в v
  - ребро (u, v) неориентированного графа — это пара ребер $u \to v$, $v \to u$
  - ⋆ это правило распространяется на петли — ребра вида (u, u)
    - ⋆ петля (u, u) неориентированного графа учитывается в матрице смежности как $M_G[u, u] = 2$
  - ⋆ степень исхода вершины $\deg^-(u)$ = число ребер вида (u, v) с учетом кратности
  - ⋆ степень захода вершины $\deg^+(u)$ = число ребер вида (v, u) с учетом кратности
    - ⋆ в неориентированном графе просто степень вершины $\deg(u) = \deg^-(u) = \deg^+(u)$
- ⋆ В ближайших лекциях граф = неориентированный граф
- ⋆ Обыкновенный граф — неориентированный граф без петель и кратных ребер
- ⋆ Полный граф — обыкновенный граф с условием $E = V^2 \setminus \Delta$
  - обозначается K_n, где $n = |V|$

- Маршрут — это последовательность $\{v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n\}$, где $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ для всех i
  - ⋆ в графе без кратных ребер маршрут записывают как последовательность вершин
  - ⋆ n — длина маршрута, тривиальный маршрут $\{v_0\}$ имеет длину 0
  - ⋆ часто говорят «маршрут из v_0 в v_n» или (v_0, v_n)-маршрут
  - ⋆ цепь: маршрут, в котором все ребра различны
  - ⋆ путь (простая цепь): цепь, в которой все вершины различны
  - ⋆ циклический маршрут: $v_n = v_0$, $n > 0$
  - ⋆ цикл: циклический маршрут, в котором все ребра различны
  - ⋆ простой цикл: цикл, в котором все вершины различны (кроме $v_0 = v_n$)
- ★ На маршрут часто смотрят как на граф, состоящий из всех его вершин и ребер
  - ⋆ стандартные обозначения: P_n / C_n — путь / простой цикл на n вершинах
- Вершины u и v связаны, если существует (u, v)-маршрут
  - ⋆ а значит и (v, u)-маршрут, поскольку граф неориентированный
- ⋆ связанность — отношение эквивалентности на V
  - ⋆ его классы $V_1, \ldots, V_k$ определяют графы $(V_1, E_1), \ldots, (V_k, E_k)$ такие, что $E_1 \cup \ldots \cup E_k = E$
  - ⋆ эти графы называются компонентами связности G
- ⋆ Граф связен, если у него одна компонента связности
  - ⋆ отношение связанности совпадает с V^2

- Граф $G' = (V', E')$ — подграф графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$
  - ⋆ G' — суграф, если $V' = V$
  - ⋆ G' — порожденный подграф, если $E' = E_{|V'}$

  Для приведенного ниже графа G
  - суграфами являются G_1, G_2
  - порожденными подграфами являются G_3, G_4



! Выведите формулу для числа подграфов полного графа K_n

Для графа $G = (V, E)$ определены операции
- удаление ребра e: $G - e = (V, E \setminus \{e\})$
- удаление вершины v: $G - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{(v, u) \mid u \in V\})$

⋆ Любой подграф графа G можно получить из G удалением вершин и ребер
  - ⋆ только удаление ребер $\Leftrightarrow$ результат — суграф
  - ⋆ только удаление вершин $\Rightarrow$ результат — порожденный подграф
  - ⋆ любой порожденный подграф можно получить удалением вершин

⋆ Компонента связности графа G — связный подграф графа G

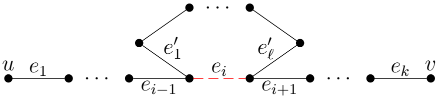
- ⋆ Циклы — это не только маршруты, но и подграфы
  - поэтому можно говорить «граф содержит цикл»

Лемма о разрыве цикла

Ребро e принадлежит некоторому циклу графа G $\Rightarrow$ число компонент связности графов G и $G-e$ совпадает.

Доказательство:

- e входит в некоторый цикл $\Rightarrow$ e входит в простой цикл $e, e'_1, \ldots, e'_\ell$
- пусть вершины u и v связаны в G; докажем, то они связаны в $G-e$
- в G найдется (u, v)-путь, скажем, $e_1, e_2, \ldots, e_k$
- если в этом пути нет ребра e, то u и v связаны в $G-e$ этим же путем
- если $e = e_i$, где $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, то в графе $G-e$ есть (u, v)-маршрут $e_1, \ldots, e_{i-1}, e'_1, \ldots, e'_\ell, e_{i+1}, \ldots, e_k$, как на рисунке

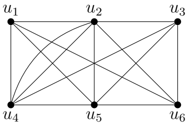


$\Rightarrow$ u и v связаны в $G-e$ □

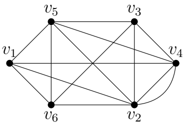
- Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ равны, если $V_1 = V_2, E_1 = E_2$
  - ⋆ в упражнении из предыдущего фрагмента надо считать неравные подграфы
- ⋆ Иногда считают, что множество вершин — это некое «стандартное» множество, например, $\{1, \dots, n\}$
  - тогда равенство графов G_1 и G_2 определяют равенством $M_{G_1} = M_{G_2}$
- Изоморфизм графов G_1 и G_2 — это биекция $\phi : V_1 \to V_2$, сохраняющая ребра
  - для любых $u, v \in V$ число ребер (u, v) в E_1 равно числу ребер $(\phi(u), \phi(v))$ в E_2
- G_1 и G_2 изоморфны ($G_1 \cong G_2$), если между ними существует изоморфизм

- Использование матрицы смежности подразумевает линейный порядок на множестве вершин
  - $V = \{v_1 < v_2 < \dots < v_n\}$
- ★ Изоморфизм указывает, как надо переупорядочить вершины G_2, чтобы матрица смежности совпала с M_{G_1}
  - а именно, $\phi(v_1) < \phi(v_2) < \dots < \phi(v_n)$

Пример: графы на рисунке изоморфны, $\phi(u_i) = v_i$ — изоморфизм



G_1



G_2

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Изоморфизм графов (2)

Теорема

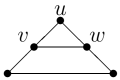
Графы G_1 и G_2 изоморфны $\Leftrightarrow$ $M_{G_1} = \Pi M_{G_2} \Pi^{-1}$, где Π — матрица некоторой перестановки.

Доказательство: упражнение □

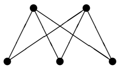
- Доказательство изоморфизма графов — довольно сложная задача
  - перебирать все $n!$ биекций — долго
- ⋆ Два заданных графа неизоморфны, если у них различаются такие элементы, которые у изоморфных графов должны совпасть
- ⋆ Изоморфизм сохраняет степени вершин
  - $\Rightarrow$ G_1 и G_2 имеют одно и то же мультимножество степеней вершин
  - ★ мультимножество степеней вершин — это разбиение числа $2m$, где $m = |E|$
    - сумма степеней вершин равна $2m$
- ⋆ Изоморфизм сохраняет подграфы
  - Если $G_1 \cong G_2$, G' — подграф G_1, то G_2 содержит подграф, изоморфный G'

Пример: графы на рисунке неизоморфны

- имеют одно и то же распределение степеней вершин $(3, 3, 2, 2, 2)$, но первый граф содержит подграф K_3 (на вершинах u, v, w), а второй — нет



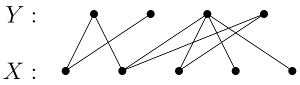
G_1


G_2

Двудольные графы

- ⋆ В этом фрагменте графы содержат более одной вершины и не имеют петель
- Граф $G = (V, E)$ — двудольный, если
  - существует разбиение V на классы X и Y (доли) такое, что у всякого ребра графа G одна вершина принадлежит X, а другая — Y
  - ⋆ для двудольного графа часто пишут $G = (X, Y, E)$

Пример:



- ★ Граф G двудольный $\Leftrightarrow$ каждая компонента связности G — двудольный или одноэлементный граф
  - если G не связен, то разбиение G на доли не единственно
- Частные случаи двудольных графов:
  - деревья и леса
  - паросочетания
    - паросочетанием называется граф, в котором все вершины имеют степень 1

Двудольные графы (2)

★ Обычно двудольные графы возникают, когда множества X и Y имеют различную природу и существует естественное бинарное отношение $E \subseteq X \times Y$

- Задача о назначениях: дан список из не более чем $|X|$ подмножеств некоторого множества X, выбрать в каждом подмножестве элемент так, чтобы все выбранные элементы были различны
    - Построим двудольный граф $(X, Y, \in)$, где Y — список подмножеств; нужно найти паросочетание, содержащее все вершины из Y
- Задача об узловых станциях: дан набор маршрутов в некотором графе, найти наименьшее множество вершин, пересекающееся с каждым из маршрутов

    ! опишите двудольный граф для этой задачи самостоятельно

Теорема (критерий двудольности)

Граф G двудольный $\Leftrightarrow$ любой цикл в G имеет четную длину.

- Доказательство (необходимость):
  - пусть $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$ — цикл в G, $v_k = v_0$

  $\Rightarrow$ для любого i вершины v_i и v_{i+1} принадлежат разным долям (определение двудольности)

  $\Rightarrow$ k четно
- Доказательство (достаточность):
  - пусть G — граф, в котором все циклы имеют четную длину
  - если все компоненты связности G двудольны или одноэлементны, то G двудолен

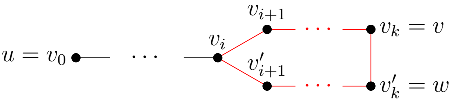
  $\Rightarrow$ можно считать, что G связен
  - $d(u, v)$ (расстояние между u и v) — наименьшая длина (u, v)-маршрута в G
  - зафиксируем в G произвольные вершины u, v, w так, чтобы v и w были смежны
  - докажем, что $\delta = |d(u, v) - d(u, w)| = 1$
  - к любому (u, v)-маршруту можно добавить ребро (v, w), получая (u, w)-маршрут на единицу большей длины

  $\Rightarrow$ $d(u, w) \leqslant d(u, v) + 1$
  - аналогично, $d(u, v) \leqslant d(u, w) + 1$

  $\Rightarrow$ $\delta \leqslant 1$; осталось показать, что $\delta \neq 0$ $\Longrightarrow$

Критерий двудольности (окончание доказательства)

- Условие $\delta \neq 0$ докажем от противного:
  - пусть $\delta = 0$, $d(u,v) = d(u,w) = k$
  - рассмотрим кратчайший (u,v)-путь и кратчайший (u,w)-путь
  - первые вершины этих путей совпадают, а последние — различаются
  - $\Rightarrow$ в G имеется такой подграф:



  - этот подграф содержит цикл

    $$v_i \to v_{i+1} \ldots \to v_k = v \to w = v'_k \to \ldots \to v'_{i+1} \to v_i$$

    нечетной длины $2(k-i)+1$ $\Rightarrow$ противоречие с условием теоремы
  - итак, $\delta = 1$, т.е. среди чисел $d(u,v)$, $d(u,w)$ одно четное и одно нечетное
- Положим

  $$X = \{v \in V \mid d(u,v) \text{ – нечетное}\}, \quad Y = \{v \in V \mid d(u,v) \text{ – четное}\}$$

  - $X \cap Y = \varnothing$, $X \cup Y = V$, $X, Y \neq \varnothing$
  - $\Rightarrow$ $\{X, Y\}$ — разбиение V
  - расстояния от u до любых двух смежных вершин графа G имеют разную четность
  - $\Rightarrow$ одна из этих вершин лежит в X, а другая — в Y
  - $\Rightarrow$ граф G по определению двудольный $\square$