# Разбиение графа на независимые множества

- Множество вершин $U \subseteq V$ графа $G = (V, E)$ называется независимым, если любые вершины, входящие в $U$, несмежны
  - ⋆ $U$ независимо $\Leftrightarrow$ подграф в $G$, порожденный $U$, не имеет ребер
- Существует класс задач, которые моделируются графами так:
  - вершины — некоторые объекты
  - ребро между двумя вершинами означает «несовместимость» этих объектов
- В задаче может требоваться
  - найти наибольшее совместимое множество объектов (Independent set)
    - или совместимое множество заданного размера
  - разбить все объекты на совместимые множества (Graph coloring)
    - разбиваем на минимальное или на заданное количество множеств
- Мы рассматриваем задачи второго типа — о раскраске графа
  - ⋆ Расписание:
    - дано множество занятий в формате (кто ведет, у кого ведет, номер аудитории)
    - включить все занятия в недельное расписание так чтобы занятия, проходящие в одно время, не пересекались ни по одному из параметров
  - ⋆ Доступ к ресурсам:
    - дано множество процессов, запрашивающих доступ к последовательным ресурсам
    - выполнить все процессы как можно быстрее, избежав конфликтов доступа
  - ⋆ Выделение памяти:
    - дана программа, использующая объекты данных («переменные») и набор регистров, которые можно использовать (их меньше, чем переменных)
    - у переменных есть время жизни с момента первого вычисления до момента последнего использования
    - назначить переменные регистрам так, чтобы данные не портились в ходе выполнения программы

# Основные определения и простые оценки

- Пусть $k \in \mathbb{N}$
- Раскраска графа $G = (V, E)$ в $k$ цветов ($k$-раскраска) — функция $f : V \to [1..k]$
  - если $f(v) = i$, то говорят, что $v$ раскрашена в цвет $i$
- Раскраска $f$ графа $G$ называется правильной, если $f(u) \neq f(v)$ для любого ребра $(u, v) \in E$
  - граф $G$ $k$-раскрашиваем, если для него существует правильная $k$-раскраска
  - ⋆ ориентация и кратность ребер не влияют на правильность раскрасок, а граф с петлями невозможно правильно раскрасить
    - поэтому в задачах о раскраске рассматриваются обыкновенные графы
  - ⋆ если $f$ — правильная раскраска, то множество $\{v \mid f(v) = i\}$ — независимое
- Число $k = \chi(G)$ — хроматическое число графа $G$, если $G$ $k$-раскрашиваем, но не $(k-1)$-раскрашиваем
  - правильная $\chi(G)$-раскраска графа $G$ называется оптимальной

★ Вычисление хроматического числа — трудная задача
  - и остается трудной даже для планарных графов!

Классы графов, для которых $\chi(G)$ указать легко:
  - ⋆ $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow$ в $G$ нет ребер
  - ⋆ $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow$ $G$ двудольный (хотя бы с одним ребром)
    - двудольный граф по определению разбивается на два независимых множества
  - ⋆ $\chi(K_n) = n$
    - все вершины полного графа должны иметь разные цвета
  - ⋆ $\chi(\mathrm{C}_n) = 2 + n \bmod 2$
    - четный цикл — двудольный граф, нечетный превращается в двудольный удалением вершины

## Лемма о нижних оценках

1. Пусть $\omega(G)$ — максимальное число вершин в полном подграфе графа $G$ (кликовое число). Тогда $\chi(G) \geqslant \omega(G)$.
2. Пусть $\beta(G)$ — максимальное число вершин в независимом множестве графа $G$ (число независимости). Тогда $\chi(G) \geqslant n/\beta(G)$, где $n$ — число вершин в $G$.

Доказательство:

1. в $G$ есть подграф $K_{\omega(G)}$, для раскраски которого нужно $\omega(G)$ цветов
2. множество вершин разбивается на $\chi(G)$ независимых множеств, каждое мощности не более $\beta(G)$, откуда $n \leqslant \chi(G)\beta(G)$ □

! Придумайте примеры графов, для которых

- $\chi(G) - \omega(G) \geqslant 1$; $\chi(G) - \omega(G) \geqslant 2$
- $\chi(G)/\beta(G) = \Omega(n)$

★ Главная проблема приведенных нижних оценок — не в том, что они неточны, а в том, что задачи поиска кликового числа и числа независимости — тоже трудные

# Раскраска блоков

- ⋆ При раскраске графа компоненты связности можно раскрашивать независимо
  - ⋆ хроматическое число графа равно максимуму хроматических чисел его компонент
- ⋆ Верно более сильное утверждение:

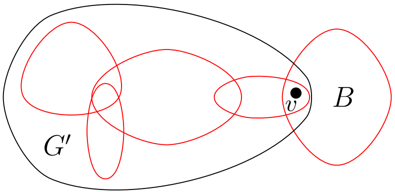
## Лемма о раскраске блоков

Хроматическое число графа равно максимуму хроматических чисел его блоков.

Доказательство:

- ⋆ достаточно доказать лемму для связного графа $G$
- пусть $B(G)$ — дерево блоков $G$
- любая точка сочленения принадлежит по крайней мере двум блокам
- $\Rightarrow$ листья $B(G)$ — блоки (назовем их концевыми блоками)
- проведем индукцию по числу $k$ блоков графа $G$
- база индукции: $k = 1$ — очевидно
- шаг индукции: пусть лемма верна для графов с $\leqslant k$ блоками, а $G$ имеет $k+1$ блок
- пусть $B$ — концевой блок $G$, а $G'$ — объединение всех остальных блоков
- $\Rightarrow$ графы $B$ и $G'$ имеют ровно одну общую вершину $v$, которая является точкой сочленения $\Longrightarrow$

# Раскраска блоков (окончание доказательства)




- пусть $r$ — максимум хроматических чисел блоков графа $G \Rightarrow \chi(G) \geqslant r$
- граф $G'$ имеет $k$ блоков $\Rightarrow \chi(G') \leqslant r$ по предположению индукции
- зафиксируем произвольные оптимальные раскраски графов $B$ и $G'$ и рассмотрим два случая:

1. вершина $v$ в графах $B$ и $G'$ раскрашена одинаково

$\Rightarrow$ получили правильную раскраску графа $G$ в $\max\{\chi(B), \chi(G')\} = r$ цветов

2. вершина $v$ в графе $B$ раскрашена в $i$-й цвет, а в графе $G'$ — в $j$-й цвет, $i \neq j$

$\Rightarrow$ заменим раскраску $f$ графа $B$ раскраской $f \circ \phi$, где $\phi : [1..r] \to [1..r]$ — перестановка, такая что $\phi(i) = j$ и $\phi(j) = i$

$\Rightarrow$ получили правильную раскраску $B$, подходящую под случай 1 $\square$

- Раскраски графов — не единственный класс задач, которые сводятся к случаю, когда граф является блоком

! Докажите, что граф планарен, если все его блоки планарны

**Лемма о жадной оценке**

Пусть $G$ — произвольный граф, $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины в $G$. Тогда $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Доказательство: раскрасим $G$ следующим жадным алгоритмом:

- вершины $G$ упорядочиваются в список произвольным образом
- очередная вершина $v$ красится в наименьший из цветов, не совпадающих с цветами уже покрашенных смежных вершин
- ⋆ алгоритм строит правильную раскраску
- ⋆ любая вершина имеет не более $\Delta(G)$ окрашенных соседей и получает цвет $\leqslant \Delta(G) + 1$ □

! Приведите пример, когда алгоритм раскрасит цикл $C_6$ в три цвета вместо двух

★ Удивительно (и печально), но приведенную простую оценку не удается улучшить более, чем на единицу; наилучшей общей верхней оценкой является

**Теорема Брукса**

Если $G$ — неполный граф и $\Delta(G) \geqslant 3$, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

# Еще о простых алгоритмах и сложных задачах

- Стратегия
  - разбить граф на блоки
  - используя подходящую эвристику, упорядочить вершины блока
  - раскрасить блок жадным алгоритмом с предыдущего слайда

  в большинстве случаев позволит получить раскраску в число цветов, мало отличающееся от хроматического, но...

★ В предположении о том, что задача оптимальной раскраски — трудная, для любого полиномиального алгоритма раскраски и любого достаточно большого $n$ существуют «сложные» графы, на которых алгоритм ошибается в числе цветов в $\Omega(\frac{n}{\log^3 n})$ раз

★ Задача проверки 3-раскрашиваемости графа по-прежнему трудна
  - проверка 2-раскрашиваемости проста, поскольку это проверка двудольности

★ Задача проверки 3-раскрашиваемости планарного графа все еще трудна

... а задача проверки 4-раскрашиваемости планарного графа тривиальна:

**Теорема о четырех красках (Аппель, Хакен, 1976)**

Хроматическое число любого планарного графа не превосходит 4.

- Первое доказательство теоремы, опирающееся на компьютерный перебор
- «Руками» можно доказать более слабое утверждение (см. следующий фрагмент)

### Теорема Хивуда

Хроматическое число любого планарного графа не превосходит 5.

Для доказательства нам потребуется

### Лемма о вершине степени $\leqslant 5$

В любом обыкновенном планарном графе есть вершина степени не более 5.

Доказательство:

- число ребер и число вершин обыкновенного планарного графа $G = (V, E)$ связаны неравенством $m \leqslant 3n - 6$
  - следствие из теоремы Эйлера о плоских графах

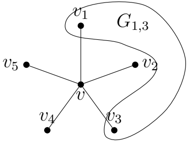
$\Rightarrow$ $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m \leqslant 6n - 12$

- сумма $n$ слагаемых меньше $6n$ $\Rightarrow$ найдется слагаемое, меньшее 6 $\square$

- Пусть $G$ (обыкновенный) планарный граф с $n$ вершинами, $\Gamma$ — его правильное изображение; докажем теорему Хивуда индукцией по $n$
  - база индукции ($n = 1$) очевидна
  - шаг индукции: пусть $n > 1$
  - выберем в графе $G$ вершину $v$ с $\deg(v) \leqslant 5$
    - вершина $v$ существует по доказанной лемме
  - граф $G - v$ имеет правильную раскраску $f$ не более чем 5 красками
    - по предположению индукции

⋆ если для раскраски вершин, смежных с $v$, использовано менее 5 цветов, то $f$ можно дополнить до правильной раскраски графа $G$ 5 красками, раскрасив вершину $v$ «незанятым» цветом

$\Rightarrow$ далее считаем, что соседи $v$ раскрашены в 5 разных цветов; значит,
  - $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ — все смежные с $v$ вершины
  - нумерация вершин — в порядке следования на изображении $\Gamma$ по часовой стрелке
  - $f(v_1) = 1, \ldots, f(v_5) = 5$




- $G_{1,3}$ — подграф графа $G$, порожденный всеми вершинами $u$ такими, что $f(u) \in \{1, 3\}$
  - граф $G_{1,3}$ содержит вершины $v_1$ и $v_3$ $\Longrightarrow$

# Доказательство теоремы Хивуда (2)

- Граф $G_{1,3}$ может быть связным или несвязным; возможны два случая

1. вершины $v_1$ и $v_3$ лежат в разных компонентах связности графа $G_{1,3}$
   - пусть $K$ — компонента связности $G_{1,3}$, содержащая $v_1$
   - переопределим $f$ на $K$, перекрасив вершины цвета 1 в цвет 3 и наоборот
   - ⋆ новая функция $f'$ — правильная раскраска графа $G-v$:
   - новые вершины цвета 1 не смежны между собой
     - имели один цвет в $f$, а $f$ — правильная
   - новые вершины цвета 1 не смежны со «старыми» вершинами цвета 1
     - находятся в разных компонентах графа $G_{1,3}$
   - то же верно для вершин цвета 3
   - для вершин остальных цветов ничего не изменилось

   $\Rightarrow$ построена правильная 5-раскраска $f'$ графа $G-v$, в которой ни одна из вершин, смежных с $v$ в графе $G$, не имеет цвета 1
     - при перекраске вершина $v_1$ получила цвет 3, вершины $v_2$, $v_3$, $v_4$ и $v_5$ сохранили цвет

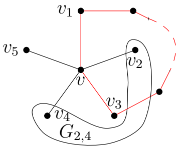
   $\Rightarrow$ можно покрасить вершину $v$ в цвет 1, получая правильную 5-раскраску графа $G$

2. вершины $v_1$ и $v_3$ лежат в одной компоненте связности графа $G_{1,3}$

   $\Rightarrow$ в $G$ есть $(v_1, v_3)$-путь, все вершины которого имеют цвета 1 и 3
   - дополним 1-3 раскрашенный $(v_1, v_3)$-путь ребрами $(v, v_1)$ и $(v_3, v)$ до простого цикла $C$: $\Longrightarrow$

# Доказательство теоремы Хивуда (3)

- Дополним $(v_1, v_3)$-путь ребрами $(v, v_1)$ и $(v_3, v)$ до простого цикла $C$:




  ⋆ $C$ ограничивает часть плоскости, содержащую ровно одну из вершин $v_2$ и $v_4$
  - рассмотрим подграф $G_{2,4}$ графа $G$, порожденный всеми вершинами цветов 2 и 4
    - граф $G_{2,4}$ содержит вершины $v_2$ и $v_4$
  - пусть $v_2$ и $v_4$ лежат в одной компоненте связности графа $G_{2,4}$
  
  $\Rightarrow$ существует простой $(v_2, v_4)$-путь, проходящей только через вершины графа $G_{2,4}$
  - изображение этого пути в Γ — линия, соединяющая точки $v_2$ и $v_4$
  
  $\Rightarrow$ эта линия пересекает изображение цикла $C$
    - одна из вершин $v_2$, $v_4$ внутри, а другая — вовне области, ограниченной изображением $C$
  - Γ правильное $\Rightarrow$ общая точка цепи и цикла — вершина графа
  
  $\Rightarrow$ в $C$ есть вершина цвета 2 или 4 $\Rightarrow$ противоречие

  $\Rightarrow$ вершины $v_2$ и $v_4$ лежат в разных компонентах связности графа $G_{2,4}$
  - аналогично случаю 1, перекрасим компоненту связности $G_{2,4}$, содержащую $v_2$, поменяв цвета 2 и 4 местами
  
  $\Rightarrow$ полученная раскраска $f''$ будет правильной 5-раскраской графа $G - v$
  - среди смежных с $v$ вершин нет вершины цвета 2
  - положив $f''(v) = 2$, получим правильную 5-раскраску графа $G$ □

★ Заметим, что доказательство дает способ построения 5-раскраски