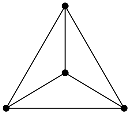
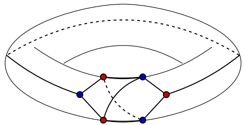
Изображения графов

- Любой граф можно изобразить на поверхности π, сопоставив вершинам различные точки π, а каждому ребру — отрезок кривой, соединяющей концы данного ребра
  - ⋆ чаще всего в роли поверхности выступает плоскость
- Изображение Φ графа $G = (V, E)$ на поверхности π — это пара инъекций
  - $\phi : V \to \pi$ и $\psi_\phi : E \to \Pi_\phi$,
    где Π_ϕ — множество несамопересекающихся кривых конечной длины, лежащих на π, концы которых принадлежат множеству $\phi(V)$
  - образы вершин/ребер при изображении тоже называют вершинами/ребрами
  - в правильном изображении у ребер нет общих точек, кроме концов
- Граф G укладывается на поверхности π, если существует правильное изображение G на π
- Граф G планарен, если существует правильное изображение G на плоскости
  - ⋆ плоский граф — это пара, состоящая из планарного графа и его правильного изображения на плоскости

Пример:

- слева правильное изображение полного графа K_4 на плоскости
- справа правильное изображение полного двудольного графа $K_{3,3}$ на торе
  - в полном двудольном графе любые две вершины из разных долей соединены ребром





Где возникают плоские графы?

Плоский граф как ответ

- Рисование графов (Graph Drawing) — область Computer Science
  - построение «человекочитаемых» изображений графов на плоскости:
  - ⋆ интернет и социальные сети
  - ⋆ карты и схемы
  - ⋆ диаграммы из лингвистики, биологии и т.д.
  - справа — схема московского метро
  - ★ правильные изображения удобнее для чтения
- Проектирование электронных схем
  - например, материнских плат
  - ★ проводящие дорожки не должны пересекаться

Плоский граф как данные

- Уличная сеть города
  - задачи навигации (кратчайшие маршруты)
  - ⋆ многоуровневые развязки нарушают правильность изображения
- Раскрой ткани или листового металла
  - ⋆ оптимальная траектория режущего инструмента

Теорема об укладке на сфере

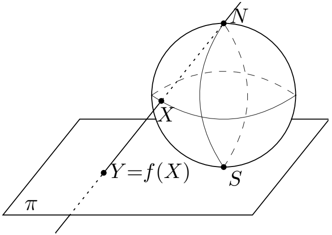
- Как соотносится укладываемость графа на плоскости и других поверхностях?

Теорема об укладке графа на сфере

Граф укладывается на сфере тогда и только тогда, когда он планарен.

Доказательство необходимости:

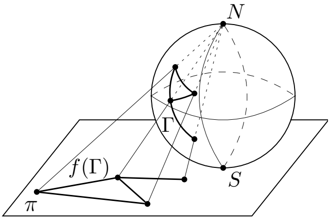
- дано Γ — правильное изображение G на сфере
- построим правильное изображение G на плоскости
- используем стереографическую проекцию:



- на сфере выберем точку N, не принадлежащую изображению
- в противоположной к точке N точке S проведем к сфере касательную плоскость π
- рассмотрим произвольную прямую, проходящую через N не параллельно π
- она имеет ровно одну общую точку со сферой, отличную от N, и ровно одну общую точку с плоскостью
- определим функцию f, которая переводит любую точку X сферы, не совпадающую с N, в точку Y плоскости π, лежащую на прямой NX $\Longrightarrow$

Доказательство теоремы об укладке на сфере (окончание)

- ⋆ $f : S \setminus \{N\} \to \pi$ — биекция
  - разные точки сферы переходят в разные точки плоскости
  - для любой точки $Y \in \pi$ можно найти ее прообраз, проведя прямую YN
- ⋆ f непрерывна
  - ! доказите это на языке ε-δ



$\Rightarrow$ f-образ кривой — кривая

$\Rightarrow$ $f(\Gamma)$ — изображение графа G

- Проверим, что изображение $f(\Gamma)$ графа G — правильное
  - пусть точка Y принадлежит двум ребрам $f(\Gamma)$
  - $\Rightarrow$ точка $X = f^{-1}(Y)$ принадлежит двум соответствующим ребрам изображения Γ
  - $\Rightarrow$ X — вершина в Γ, так как Γ — правильное
  - $\Rightarrow$ $Y = f(X)$ — вершина в Γ
  - $\Rightarrow$ $f(\Gamma)$ — правильное изображение
- G — планарный граф □

Доказательство достаточности:

- на плоскость, содержащую правильное изображение $\bar{\Gamma}$ графа G, «ставим» сферу
- за N берем точку сферы, противоположную точке касания с плоскостью
- строим биекцию f, как описано выше
- $f^{-1}(\bar{\Gamma})$ будет правильным изображением G на сфере □

Теорема Эйлера о многогранниках

Если выпуклый многогранник имеет n вершин, m ребер и r граней, то $n - m + r = 2$.

- Переведем эту теорему на язык теории графов
- ⋆ Если рассматривать ребро многогранника как пару соединяемых им вершин, то любой многогранник P задает граф G_P, вершины и ребра которого совпадают с вершинами и ребрами P
    - граф G_P является обыкновенным и связным

Лемма о выпуклом многограннике

Если многогранник P выпуклый, то граф G_P планарный.

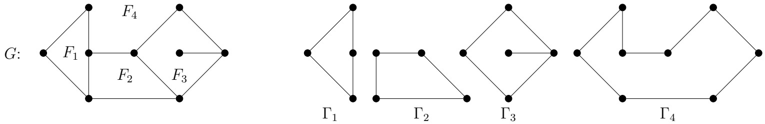
Доказательство:

- выберем внутри P произвольную точку C
- возьмем сферу σ с центром C такую, что P находится внутри сферы
- рассмотрим все лучи с началом C
- ⋆ каждый луч пересекает P в единственной точке (в силу выпуклости) и σ — тоже в единственной точке
- пусть f отображает каждую точку P в точку σ, находящуюся на том же луче
- ⋆ f — биекция и f непрерывна
- $\Rightarrow$ f отображает вершины и ребра P в правильное изображение графа G_P на сфере
    - правильность доказывается как в теореме об укладке на сфере
- по теореме об укладке графа на сфере граф G_P планарен

Грани плоского графа

- В формулировке теоремы Эйлера о многогранниках есть грани
- Грань плоского графа — это максимальная область плоскости, любые две точки которой можно соединить непрерывной линией, не пересекающей изображение
  - ⋆ плоский граф состоит из графа G и его правильного изображения Γ на плоскости!
  - точки изображения не принадлежат никакой грани
  - число граней плоского графа обозначается через $r(\Gamma)$
  - ★ плоский граф имеет одну неограниченную грань (грань бесконечной площади)
    - неограниченная грань называется внешней
- Границей грани F плоского графа (G, Γ) называется подграф графа G, состоящий в точности из всех вершин и ребер, изображения которых состоят из предельных точек F

  Пример:
  - слева изображение плоского графа G и его грани F_1, F_2, F_3 и F_4 (внешняя)
  - справа изображены границы граней



⋆ не внешняя грань имеет конечную площадь $\Rightarrow$ ее граница — замкнутая кривая

★ граница любой не внешней грани плоского графа содержит цикл

Теорема Эйлера о плоских графах

Если обыкновенный связный плоский граф имеет n вершин, m ребер и r граней, то $n - m + r = 2$.

- ⋆ Часто именно эту теорему называют «теорема Эйлера о многогранниках»
- Равенство $n - m + r = 2$ из формулировки теоремы — тождество Эйлера

Лемма о числе границ

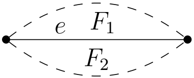
Лемма о числе границ

Ребро e плоского графа (G, Γ) принадлежит границе ровно одной его грани, если оно является мостом в G, и границе ровно двух граней, если не является мостом.

Доказательство:

- изображение Γ правильное

$\Rightarrow$ найдется область плоскости, пересекающаяся с Γ в точности по образу ребра e:



- все точки «верхней половины» области принадлежат одной и той же грани (F_1)
- все точки «нижней половины» области принадлежат одной и той же грани (F_2)
- границе граней, отличных от F_1 и F_2, ребро e не принадлежит

$\Rightarrow$ лемма эквивалентна утверждению $F_1 = F_2 \Leftrightarrow e$ — мост

Доказательство необходимости: пусть e не мост

$\Rightarrow$ e лежит в цикле по свойству моста $\Rightarrow$ e лежит в простом цикле

⋆ изображение простого цикла — замкнутая кривая

⋆ замкнутая кривая делит плоскость на внутреннюю и внешнюю области

  ⋆ любая линия, соединяющая точки из разных областей, пересекает кривую

$\Rightarrow$ одна из граней F_1, F_2 лежит во внутренней, а другая — во внешней области

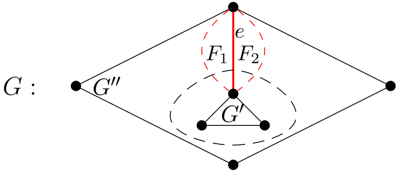
$\Rightarrow$ $F_1 \neq F_2$

$F_1 = F_2 \Leftrightarrow e$ — мост

Доказательство достаточности: пусть e — мост

$\Rightarrow$ по свойству моста граф $G-e$ состоит из двух компонент связности, G' и G''

⋆ изображение одной компоненты находится внутри грани изображения другой:



... либо изображения компонент находятся во внешней грани друг друга

! анализ аналогичен, разобрать самостоятельно

- у изображений G' и G'' нет общих точек

$\Rightarrow$ можно провести замкнутую кривую (пунктир на рисунке), внутри которой находится изображение G', а снаружи — G''

- при «возвращении» ребра e на место точки из областей F_1 и F_2 остаются соединенными фрагментом этой кривой $\Rightarrow F_1 = F_2$ □

Доказательство теоремы Эйлера о плоских графах

- Пусть обыкновенный связный плоский граф (G, Γ) имеет n вершин, m ребер и r граней
- Если в G нет циклов, то
  - ⋆ в Γ нет граней, отличных от внешней $\Rightarrow$ $r = 1$
  - ⋆ G — дерево по определению $\Rightarrow$ $n = m + 1$ по свойству деревьев

  $\Rightarrow$ $n - m + r = 2$
- Пусть G содержит циклы и ребро e принадлежит циклу
- Положим $G_1 = G - e$, $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \psi_\phi(e)$, $n_1 = n(G_1)$, $m_1 = m(G_1)$, $r_1 = r(G_1)$

⋆ (G_1, Γ_1) — плоский граф

⋆ G_1 связен по лемме о разрыве цикла

⋆ Ребро e не является мостом в G по свойству моста

$\Rightarrow$ По лемме о числе границ e принадлежит границе ровно двух граней графа G

$\Rightarrow$ При удалении e эти грани сольются в одну, остальные грани не изменятся

$\Rightarrow$ $n_1 - m_1 + r_1 = n - (m-1) + (r-1) = n - m + r$

- Будем повторять процедуру удаления ребра, принадлежащего циклу, до тех пор, пока очередной граф G_i с параметрами n_i, m_i, r_i не будет деревом
- Используя доказанное выше равенство для деревьев, получим $n - m + r = n_1 - m_1 + r_1 = \ldots = n_i - m_i + r_i = 2$

Следствие об инвариантности

Все изображения планарного графа имеют одинаковое число граней.

★ Число граней — характеристика планарного графа, сохраняющаяся при изоморфизме
- хотя у планарного графа никаких граней нет

★ В формулировке теоремы Эйлера можно заменить плоский граф на планарный

- Выпуклый многогранник, рассматриваемый как планарный граф, имеет число граней, которое совпадает с числом его граней как многогранника
  - ! убедитесь в этом, проследив доказательство планарности многогранника

$\Rightarrow$ теорема Эйлера о многогранниках — частный случай теоремы о плоских графах
- многие невыпуклые многогранники также являются планарными графами, а значит, подчиняются тождеству Эйлера
- ! придумайте пример многогранника, являющегося непланарным графом

Следствие о несвязных графах

Если плоский граф G имеет n вершин, m ребер, r граней и c компонент связности, то $n - m + r = c + 1$.

Доказательство: индукцией по c

- база индукции ($c = 1$): теорема Эйлера о плоских графах
- шаг индукции:
- пусть $c > 1$ и утверждение верно для всех графов, имеющих $c - 1$ компоненту связности
- обозначим одну из компонент связности графа G через G_1, а объединение всех остальных компонент связности — через G'
- пусть $n(G_1) = n_1$, $m(G_1) = m_1$, $r(G_1) = r_1$, $n(G') = n'$, $m(G') = m'$ и $r(G') = r'$

$\Rightarrow$ $n_1 - m_1 + r_1 = 2$ по теореме Эйлера, $n' - m' + r' = c - 1 + 1 = c$ по предположению индукции

$\star$ $n = n_1 + n'$, $m = m_1 + m'$ (определение компоненты связности)

$\star$ $r = r_1 + r' - 1$ (изображение G_1 принадлежит некоторой грани изображения G')

$\Rightarrow$ $n - m + r = (n_1 + n') - (m_1 + m') + (r_1 + r' - 1) = (n_1 - m_1 + r_1) + (n' - m' + r') - 1 = 2 + c - 1 = c + 1$ $\square$

Следствия из теоремы Эйлера (3)

Следствие о числе ребер

Если обыкновенный связный планарный граф G содержит n вершин и m ребер и $n \geqslant 3$, то $m \leqslant 3n - 6$.

Доказательство: пусть (G, Γ) — плоский граф

- положим $r = r(G)$
- можно считать, что G не является путем длины 2 (для него неравенство выполнено)
- длиной границы грани назовем число ребер в этой границе
- пусть $t(\Gamma)$ — сумма длин границ всех граней изображения Γ
- ⋆ граница грани не может состоять менее чем из трех ребер $\Rightarrow$ $t(\Gamma) \geqslant 3r$
- ⋆ по лемме о числе границ при подсчете $t(\Gamma)$ каждое ребро учтено не более чем дважды $\Rightarrow$ $t(\Gamma) \leqslant 2m$

$\Rightarrow$ $3r \leqslant 2m$

- ⋆ по тождеству Эйлера $r = m - n + 2 \Rightarrow 3m - 3n + 6 \leqslant 2m \Rightarrow m \leqslant 3n - 6$ □

★ В планарных графах многие алгоритмы работают быстрее, чем в общем случае

- например, алгоритмы поиска, работающие за время $O(m)$

★ Следствие о числе ребер позволяет доказывать непланарность графов

- ! докажите, что обратное к следствию утверждение неверно

Следствия из теоремы Эйлера (4)

Следствие о графе K_5

Полный граф K_5 не планарен.

Доказательство:

- граф K_5 содержит 5 вершин и 10 ребер
- $10 \not\leqslant 3 \cdot 5 - 6 \Rightarrow K_5$ не планарен по следствию о числе ребер $\square$

Следствие о графе $K_{3,3}$

Полный двудольный граф $K_{3,3}$ не планарен.

Доказательство: от противного

- пусть граф $K_{3,3}$ планарен, Γ — его правильное изображение на плоскости
- в $K_{3,3}$ 6 вершин и 9 ребер $\Rightarrow$ число граней равно 5 по тождеству Эйлера
- по критерию двудольности граф $K_{3,3}$ не содержит треугольников

$\Rightarrow$ каждая грань Γ ограничена как минимум 4 ребрами $\Rightarrow t(\Gamma) \geqslant 4r(K_{3,3}) = 20$

$\star$ по лемме о числе границ $t(\Gamma) \leqslant 2m(K_{3,3}) = 18$

$\Rightarrow$ $20 \leqslant 18$, противоречие $\square$

★ Данное следствие решает известную головоломку о домах и колодцах:

- в деревне есть три дома и три общих колодца, можно ли проложить тропинку от каждого дома к каждому колодцу, чтобы никакие две тропинки не пересекались?

★ Поскольку граф $K_{3,3}$ укладывается на торе, тор не эквивалентен плоскости (или сфере) с точки зрения укладки графов

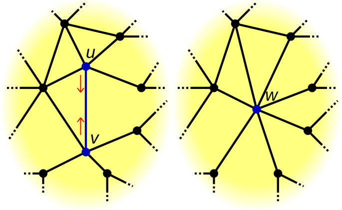
- укладка графов связана с топологической эквивалентностью поверхностей

- Следствия из теоремы Эйлера дают два необходимых условия планарности:
  - ★ в планарном графе с n вершинами не более $3n-6$ ребер
  - ★ в планарном графе нет подграфов K_5 и $K_{3,3}$
    - если граф имеет правильное изображение, то и любой его подграф имеет такое изображение
- Оба условия легко проверить алгоритмически, но они не являются критериями

? Существует ли эффективно проверяемый критерий планарности?
  - достаточно неожиданно, ответ да, причем критериев два

- Определим операцию стягивания ребра в графе:
  - пусть $G=(V,E)$ — граф, $(u,v)\in E$ — ребро
  - возьмем граф $G-u-v$
  - добавим в него вершину w и множество ребер $\{(w,x)\mid (u,x)\in E$ или $(v,x)\in E\}$
  - полученный граф обозначается $G/(u,v)$

Пример (заодно объясняет термин «стягивание»):



Миноры и теорема Вагнера

- Граф G' называется минором графа G, если G' можно получить из G последовательностью из 0 или более операций удаления ребра, удаления вершины и стягивания ребра
  - ⋆ все подграфы графа G являются его минорами, но обратное неверно

Теорема Вагнера

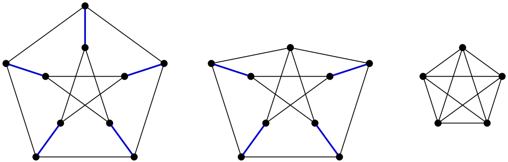
Граф G планарен тогда и только тогда, когда у него нет миноров K_5 и $K_{3,3}$.

Необходимость очевидна:

- из правильного изображения G легко получить правильное изображение G/e

Достаточность — в курсе Графы и матроиды

Пример: в графе Петерсена (слева) стянем синие ребра, получая K_5



★ Похожий критерий — теорема Понтрягина–Куратовского
- вместо стягивания используется другая операция

★ Алгоритм Хопкрофта–Тарьяна проверяет планарность за время $O(m)$