Формальные доказательства

- Формальные доказательства — большой раздел математической логики

⋆ Формальное доказательство — это конечная последовательность синтаксически корректных формул, составленная по правилам, определяемым системой доказательств

- Система доказательств состоит из
  - правил вывода (получения новых формул из имеющихся в доказательстве)
  - аксиом (формул, которые можно включать в доказательство без ограничений)
- Цель формального доказательства — из набора формул-условий получить требуемую формулу-заключение

  Пример:
  - формулы — слова над алфавитом $\{S, (,)\}$
  - аксиома — слово S
  - правила вывода: любой символ S в формуле можно заменить на SS, (S) или $()$
  - вывод формулы $(()())$ из пустого набора условий:

$$
\begin{array}{l}
S \\
(S) \\
(SS) \\
(()S) \\
(()())
\end{array}
$$

  ⋆ формула над $\{(,)\}$ выводится из пустого набора условий

  $\Leftrightarrow$ она является правильной расстановкой скобок

⋆ Такие системы доказательств называются формальными грамматиками

Доказательство теорем

- Как выглядит теорема?
  - даны условия $F_1, \ldots, F_k$ и гипотеза G
  - доказать, что из условий следует гипотеза
  - ⋆ т.е. что формула $(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_k) \to G$ — тавтология
  - ⋆ если формула $X \to Y$ — тавтология, то формула Y называется следствием X
- Простейший случай: $F_1, \ldots, F_k, G$ — булевы формулы
  - ⋆ могут быть более сложные формулы (с предикатами, кванторами и т. д.)
  - ⋆ даже для булевых формул проверка «в лоб» очень трудоемка: таблицу значений формулы из m литералов и n переменных можно вычислить за время $\Theta(m \cdot 2^n)$
- Доказательство от противного:
  - доказать, что $\overline{(F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_k) \to G}$ — противоречие
  - эквивалентная формула: $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_k \wedge \bar{G}$
  - ⋆ если каждую из формул $F_1, \ldots, F_k, \bar{G}$ заменить на эквивалентную КНФ, общая формула станет КНФ
- Задача: дана КНФ, является ли она противоречием?

★ Наблюдение: Y — следствие $X \Leftrightarrow X$ эквивалентна $X \wedge Y$

★ Следствие: 0 — следствие $X \Leftrightarrow X$ — противоречие

- Стратегия доказательства: получить 0 как следствие исходной формулы
- Метод резолюций — система доказательств, реализующая эту стратегию

Задача SAT

- ⋆ Метод резолюций — один из способов решения задачи SAT
  - от satisfiability (выполнимость)
- SAT: дана КНФ $F = \bigwedge_{i=1}^{\ell} C_i$, определить, выполнима ли она
  - если F выполнима, обычно нужно предъявить пример

    т.е. булев вектор $\vec{b}$ такой, что $F_{|\vec{b}} = 1$
  - если F — противоречие, иногда нужно предъявить доказательство
- SAT — трудная задача
  - NP-полная
- SAT — самая важная NP-полная задача
  - для нее существуют эффективные с практической точки зрения решатели (SAT-solvers)
- Очень часто оптимальный способ решения других трудных задач состоит в том, чтобы перекодировать задачу в задачу SAT и скормить решателю
  - так решают
  - ⋆ задачи планирования
  - ⋆ задачи верификации железа и софта
  - ⋆ комбинаторные задачи вроде раскраски и гамильтонова цикла

Задача о гамильтоновом пути в форме SAT

- HAMILTONIAN PATH: дан граф $G = (V, E)$, определить, есть ли в нем гамильтонов путь
  - при ответе «да» предъявить пример такого пути
- Опишем преобразование HAMILTONIAN PATH в SAT:
  - переменные: x_{ij}, $i, j \in V = \{1, \ldots, n\}$
  - семантика: $x_{ij} = 1 \Leftrightarrow j$ — i-я вершина в гамильтоновом пути
- Клозы разбиваются на 5 групп:
  1. $x_{1j} \vee \ldots \vee x_{nj}$ для всех $j = 1, \ldots, n$
     - вершина j есть в гамильтоновом пути
  2. $\bar{x}_{ij} \vee \bar{x}_{kj}$ для всех $i, k, j = 1, \ldots, n$, $i \neq k$
     - вершина j не входит в гамильтонов путь дважды
  3. $x_{i1} \vee \ldots \vee x_{in}$ для всех $i = 1, \ldots, n$
     - на i-ом месте в гамильтоновом пути стоит какая-то вершина
  4. $\bar{x}_{ij} \vee \bar{x}_{ik}$ для всех $i, k, j = 1, \ldots, n$, $j \neq k$
     - на i-ом месте в гамильтоновом пути есть только одна вершина
  5. $\bar{x}_{ij} \vee \bar{x}_{(i+1)k}$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$, $k, j = 1, \ldots, n$, $(j, k) \notin E$
     - соседние вершины в гамильтоновом пути должны быть соединены ребром
- если формула выполнима, переменные, равные 1, задают гамильтонов путь

- SAT остается вычислительно трудной даже при ограничении, что задана константа $k \geqslant 3$ и каждый клоз содержит не более k литералов (задача k-SAT)
- Общепринятая в настоящее время гипотеза экспоненциального времени утверждает существование констант $s_k > 0$ для любого $k \geqslant 3$ таких, что ни один алгоритм не может решить задачу k-SAT за время, меньшее $2^{s_k \ell}$
  - фразу «не может решить» следует понимать так: для любого алгоритма найдется бесконечная серия «трудных» КНФ с разным числом клозов ℓ, на проверку выполнимости которых алгоритм затратит время $\Omega(2^{s_k \ell})$
- Особенность SAT: трудные примеры встречаются редко
  - важную роль играет отношение числа клозов ℓ к числу переменных n
  - если клозов мало, обычно есть много выполняющих наборов и такой набор можно быстро найти
  - если клозов много, обычно формула невыполнима и противоречие находится быстро
  - на границе попадаются трудные формулы (либо выполнимые с очень малым числом выполняющих наборов, либо невыполнимые, но такие, что некоторые наборы выполняют почти все клозы)

Лемма

Для любых булевых формул X, Y, Z формула $Y \vee Z$ — следствие формулы $(X \vee Y) \wedge (\bar{X} \vee Z)$.

Доказательство:

- пусть $F_{|\vec{b}}$ обозначает результат подстановки набора значений $\vec{b}$ в формулу F
- пусть $\vec{b}$ — произвольный набор, такой что $((X \vee Y) \wedge (\bar{X} \vee Z))_{|\vec{b}} = 1$

$\Rightarrow$ $(X \vee Y)_{|\vec{b}} = 1$, $(\bar{X} \vee Z)_{|\vec{b}} = 1$

- если $X_{|\vec{b}} = 1$, то $\bar{X}_{|\vec{b}} = 0 \Rightarrow Z_{|\vec{b}} = 1$
- если $X_{|\vec{b}} = 0$, то $Y_{|\vec{b}} = 1$

$\Rightarrow$ $(Y \vee Z)_{|\vec{b}} = 1$

$\Rightarrow$ $((X \vee Y) \wedge (\bar{X} \vee Z)) \to (Y \vee Z)$ — тавтология $\square$

Метод резолюций:

- формулы, которыми оперирует метод — это клозы (элементарные дизъюнкции)
- клоз рассматривается как множество литералов
  - порядок литералов не важен, повторяющиеся литералы стираются
- единственное правило вывода — правило резолюций:
  - если есть клозы вида $x \vee C$ и $\bar{x} \vee D$ (x — переменная), дописать клоз $C \vee D$
  - ⋆ клоз, содержащий пару литералов $\{y, \bar{y}\}$, не дописывается
  - если C и D — пустые множества литералов, дописывается пустой клоз $\Box$
- аксиом нет
- условия — все клозы КНФ, поданной на вход метода
- цель — получить пустой клоз

- Пусть КНФ состоит из клозов $C_1, \ldots, C_\ell$ и зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$
  - можно считать, что КНФ F задана двуми массивами:
  - $L[1..2n]$: в $L[i]$ хранится список номеров клозов, в которые входит литерал x_i (при $i \leqslant n$) либо литерал $\bar{x}_{i-n}$ (при $i > n$)
  - $C[1..\ell]$: в $C[i]$ хранится список номеров литералов, которые входят в клоз C_i (номер $i > n$ означает литерал $\bar{x}_{i-n}$)
  - ⋆ при переводе КНФ в такую форму можно сразу отбросить клозы, содержащие два противоположных литерала одновременно
- Распространение переменной (unit propagation) — процедура упрощения КНФ
  - ⋆ Если в F есть клоз, состоящий из единственного литерала (x_i либо $\bar{x}_i$), то набор $(b_1, \ldots, b_n)$ выполняет F только при условии, что b_i выполняет данный клоз
  - $\Rightarrow$ значение b_i определено однозначно
    - пусть литерал равен x_i, т.е. $b_i = 1$; случай $b_i = 0$ аналогичен
  - $\Rightarrow$ можно присвоить значение b_i и упростить формулу:
  - ♣ клозы, содержащие x_i, выполнены — их можно удалить
  - ♠ из клозов, содержащих $\bar{x}_i$, можно удалить этот литерал (он равен 0)
    - если получился пустой клоз, то F невыполнима
  - ⋆ можно создать очередь одноэлементных клозов
    - очередь пополняется при выполнении пункта (♠)
  - ⋆ распространение переменной выполняется в цикле, пока очередь непуста

⋆ КНФ $F \xrightarrow{\text{распространение переменной}}$ КНФ $UP(F)$

- $UP(F) = 1$, если удалены все клозы
- $UP(F) = 0$, если встретился пустой клоз
- $UP(F)$ выполнима $\Leftrightarrow$ F выполнима

★ Распространение переменной выполняется за время $O(\text{число литералов в } F)$

Распространение переменной (2)

Пример:

$F = (a \vee d) \wedge (c \vee d \vee \bar{a}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}) \wedge (\bar{a}) \wedge (a \vee b \vee \bar{c})$

- в очереди единственный клоз $\bar{a}$, достаем его
- ♣ удаляем клозы $\bar{a}$ и $c \vee d \vee \bar{a}$
- ♠ удаляем a из клозов $a \vee b \vee \bar{c}$ и $a \vee d$ (новый клоз d добавляем в очередь)
- текущий список клозов: $d, \bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}, b \vee \bar{c}$
- достаем клоз d из очереди
- ♣ удаляем клоз d
- ♠ удаляем $\bar{d}$ из клоза $\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}$
- очередь пуста, получаем $UP(F) = (b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c})$
- ⋆ $UP(F)$ можно выполнить, положив $c = 0$
- ⇒ набор $a = 0, c = 0, d = 1$ выполняет F (при любом b)

- Дополнение к распространению переменной: правило чистой переменной
  - ⋆ если в результате удаления клоза (♣) у литерала не осталось вхождений в формулу, то переменной этого литерала присваивается значение, превращающее этот литерал в 0
  - это позволяет выполнить все клозы, содержащие противоположный литерал, и тем самым упростить текущую КНФ
  - ⋆ когда в примере получено $UP(F) = (b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c})$, литерал c не имеет вхождений, и присвоение $c = 0$ позволяет выполнить оба оставшихся клоза

⋆ В дальнейшем под $UP(F)$ мы понимаем формулу, полученную из F применением обоих правил

Теорема о полноте метода резолюций

КНФ $F = C_1 \wedge \cdots \wedge C_k$ является противоречием $\Leftrightarrow$ существует доказательство методом резолюций с условиями $C_1, \ldots, C_k$ и заключением $\square$.

Доказательство достаточности:

- рассмотрим доказательство методом резолюций с заключением $\square$
- каждая формула является либо условием, либо получено по правилу резолюций из каких-то предыдущих формул
  - а значит, является следствием конъюнкции этих формул согласно лемме
- отношение «быть следствием» транзитивно
- любая формула вида $C_{i_1} \wedge \cdots \wedge C_{i_j}$ является следствием F

$\Rightarrow$ любая формула в доказательстве является следствием F

⋆ пустой клоз является следствием формулы $x \wedge \bar{x}$, а значит, задает константу 0

$\Rightarrow$ 0 — следствие $F \Rightarrow F$ — противоречие $\square$

Комментарий:

⋆ мы доказали корректность метода: если существует доказательство, содержащее пустой клоз, то заданная КНФ действительно является противоречием

⋆ обратная импликация доказывает полноту метода: если КНФ — противоречие, то это можно доказать методом резолюций

Доказательство необходимости

- Проведем индукцию по числу n переменных в F
- База индукции: $n = 1$
  - F — противоречие $\Rightarrow$ F содержит клозы x и $\bar{x}$
  - $\Rightarrow$ по правилу резолюций из x и $\bar{x}$ выводится пустой клоз
- Шаг индукции:
  - пусть $F = F(x_1, \ldots, x_n)$, $S = \{C_1, \ldots, C_k\}$
  - считаем, что клоз не может содержать одновременно x_i и $\bar{x}_i$
    - если такой клоз есть, он задает константу 1 и может быть удален из F
  - построим два множества клозов, S^+ и S^-:
  - $S^+ = \{C \in S \mid \text{ в } C \text{ нет переменной } x_n\} \cup \{C \mid (C \vee x_n) \in S\}$
  - $S^- = \{C \in S \mid \text{ в } C \text{ нет переменной } x_n\} \cup \{C \mid (C \vee \bar{x}_n) \in S\}$
  - ⋆ докажем, что КНФ $F^+ = \bigwedge_{C \in S^+} C$ является противоречием:
  - пусть существует набор значений $b_1, \ldots, b_{n-1}$ такой, что $F^+_{|b_1,\ldots,b_{n-1}} = 1$
  - рассмотрим значения всех клозов из множества S на наборе $b_1, \ldots, b_{n-1}, 0$:
    - если клоз C не содержит переменную x_n, то $C_{|b_1,\ldots,b_{n-1},0} = C_{|b_1,\ldots,b_{n-1}} = 1$
    - если клоз имеет вид $C \vee x_n$, то $(C \vee x_n)_{|b_1,\ldots,b_{n-1},0} = C_{|b_1,\ldots,b_{n-1}} = 1$
    - клоз вида $C \vee \bar{x}_n$ превращается в 1 за счет значения $b_n = 0$
  - $\Rightarrow$ $F_{|b_1,\ldots,b_{n-1},0} = 1$, что невозможно, так как F — противоречие
  - ⋆ аналогично, $F^- = \bigwedge_{C \in S^-} C$ является противоречием
    - к гипотетическому набору, выполняющему F^-, надо добавить $b_n = 1$
  - ⋆ по предположению индукции, из каждого из множеств S^+, S^- можно вывести пустой клоз

$\Longrightarrow$

Шаг индукции — окончание

- Рассмотрим вывод пустого клоза из множества S^+
  - если в выводе участвовали только клозы из S, то из S выводим пустой клоз
  - пусть в выводе участвовал хотя бы один клоз $C \in S^+ \setminus S$; тогда $(C \vee x_n) \in S$
  - $\Rightarrow$ построим вывод из S, заменив в выводе из S^+ каждый клоз из $S^+ \setminus S$ на соответствующий клоз из S
  - $\Rightarrow$ во всех следствиях из таких клозов добавится литерал x_n
  - $\Rightarrow$ из S выводится клоз x_n
- ⋆ аналогично, из вывода пустого клоза из S^- получим вывод клоза $\bar{x}_n$ из S
  - $\Rightarrow$ из клозов x_n и $\bar{x}_n$ получим пустой клоз □

Комментарий:
- ⋆ искать доказательства методом резолюций может компьютер
  - существуют различные стратегии оптимизации поиска вывода
- ⋆ на более общем варианте метода резолюций (для формул логики первого порядка) основан язык Пролог

★ Если формула F не является противоречием, то метод резолюций заканчивает работу, когда не может вывести больше ни одного нового клоза
- по построенным клозам можно восстановить набор значений, выполняющий F

Процедура DPLL

- Процедура DPLL — это алгоритм оптимизированного перебора, решающий задачу SAT
  - основан на статьях Дэвиса–Патнема (1960) и Дэвиса–Логманна–Лавлэнда (1962)
- Пусть $DPLL(F)$ — булево значение, возвращаемое алгоритмом на входе F
- ⋆ Рекурсивная запись процедуры DPLL:
  - выбрать переменную x
  - вернуть $DPLL(F) = DPLL(UP(F \wedge x)) \vee DPLL(UP(F \wedge \bar{x}))$
- Комментарии:
  - ⋆ формулы F и $(F \wedge x) \vee (F \wedge \bar{x})$ эквивалентны
  - ⋆ алгоритм представляет вычисление деревом:
    - с каждым узлом связана «остаточная» формула, которую нужно выполнить;
    - некоторой переменной x остаточной формулы присваивается значение 1, формула упрощается распространением переменной и присваивается дочернему узлу
    - если формулу не удалось выполнить, вычисление возвращается в родительский узел и выполняется присвоение $x = 0$
  - ⋆ клоз x $(\bar{x})$ добавляется не к формуле, а сразу в очередь, чтобы запустить распространение переменной
- Скорость работы перебора зависит от эвристики выбора переменной x_i
  - пример эвристики: выбирается переменная с максимальным числом вхождений в клозы минимальной длины
  - цель — увеличить ресурс использования распространения переменной
- Используется много других оптимизаций для сокращения перебора
- ⋆ DPLL до сих пор лежит в основе многих SAT-решателей

Пример доказательства методом резолюций

Вася всегда приходит на совещание, если босс его позвал. Если босс хочет видеть Васю, он зовет его на совещание. Если босс не хочет видеть Васю и не зовет его на совещание, то Васю скоро уволят. Вася не пришел на совещание. Докажите, что его скоро уволят.

- Запишем теорему, которую надо доказать:
  - ⋆ $\Big((invite \to attend) \wedge (see \to invite) \wedge ((\overline{see} \wedge \overline{invite}) \to fire) \wedge (\overline{attend})\Big) \to fire$
- Отрицание теоремы:
  - ⋆ $(invite \to attend) \wedge (see \to invite) \wedge ((\overline{see} \wedge \overline{invite}) \to fire) \wedge (\overline{attend}) \wedge \overline{fire}$
- КНФ отрицания теоремы и множество клозов:
  - ⋆ $(\overline{invite} \vee attend) \wedge (\overline{see} \vee invite) \wedge (see \vee invite \vee fire) \wedge (\overline{attend}) \wedge (\overline{fire})$
  - $S = \{\overline{invite} \vee attend,\ \overline{see} \vee invite,\ see \vee invite \vee fire,\ \overline{attend},\ \overline{fire}\}$

Доказательство:

1.	$see \vee invite \vee fire$	условие
2.	$\overline{fire}$	условие
3.	$see \vee invite$	по правилу резолюций из 1,2
4.	$\overline{see} \vee invite$	условие
5.	$invite$	по правилу резолюций из 3,4; $invite \vee invite = invite$
6.	$\overline{invite} \vee attend$	условие
7.	$attend$	по правилу резолюций из 5,6
8.	$\overline{attend}$	условие
9.	$\square$	по правилу резолюций из 7,8 жалко Васю. . .

- Существуют частные случаи задачи SAT, для которых существуют полиномиальные (и даже линейные) алгоритмы

⋆ КНФ называется хорновской, если каждый клоз содержит не более одной переменной без отрицания
  - Пример: $F = (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{d}) \wedge (a) \wedge (\bar{a} \vee d)$

⋆ Задача SAT с хорновской КНФ также называется хорновской (HornSAT)

Теорема

Задача HornSAT может быть решена за время $O(m)$, где m — число литералов в формуле.

- Доказательство:
  - пусть F — хорновская КНФ
  - применим распространение переменной и вычислим $UP(F)$
    - как уже обсуждалось, это требует времени $O(m)$
  - если $UP(F) \in \{0, 1\}$ — мы уже получили ответ
  - иначе каждый клоз содержит хотя бы два литерала

  $\Rightarrow$ каждый клоз содержит литерал вида $\bar{x}$

  $\Rightarrow$ присвоим всем оставшимся переменным нули

  $\Rightarrow$ $UP(F)$ выполнима $\Rightarrow$ F выполнима $\square$

⋆ Тем же способом решается SAT для двойственных хорновских КНФ, в которых каждый клоз содержит не более одного литерала с отрицанием

Хорновская выполнимость (2)

Пример 1:

$F = (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c} \vee d) \wedge (\bar{d} \vee \bar{c}) \wedge (c) \wedge (\bar{d} \vee e) \wedge (\bar{a} \vee \bar{c} \vee d \vee \bar{e})$

- распространяем c: $a \vee \bar{b}, \bar{b} \vee d, \bar{d}, \bar{d} \vee e, \bar{a} \vee d \vee \bar{e}$
- распространяем $\bar{d}$: $a \vee \bar{b}, \bar{b}, \bar{a} \vee \bar{e}$
- распространяем $\bar{b}$: $\bar{a} \vee \bar{e}$
- присваиваем нули оставшимся переменным: $a = e = 0$

$\Rightarrow$ набор $a = 0, b = 0, c = 1, d = 0, e = 0$ выполняет F

Пример 2:

$F = (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (b \vee \bar{c} \vee \bar{d}) \wedge (d \vee \bar{c}) \wedge (c) \wedge (\bar{d} \vee e) \wedge (\bar{a} \vee \bar{c} \vee \bar{d} \vee \bar{e})$

- распространяем c: $a \vee \bar{b}, b \vee \bar{d}, d, \bar{d} \vee e, \bar{a} \vee \bar{d} \vee \bar{e}$
- распространяем d: $a \vee \bar{b}, b, e, \bar{a} \vee \bar{e}$
- распространяем b: $a, e, \bar{a} \vee \bar{e}$
- распространяем e: $a, \bar{a}$
- распространяем a: $\Box$

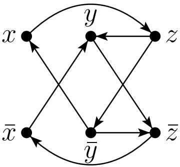
$\Rightarrow$ F невыполнима

2-выполнимость

- КНФ, в которой каждый клоз состоит из двух литералов, называется 2-КНФ
- ⋆ Задача SAT с 2-КНФ называется 2-выполнимость (2-SAT)
- ★ Формула $l_1 \vee l_2$, где l_1 и l_2 — литералы, эквивалентна $\bar{l}_1 \to l_2$ и $\bar{l}_2 \to l_1$
- Пусть дана 2-КНФ F; построим по ней орграф $G(F)$ (граф импликаций):
  - вершины — литералы из F
  - каждому клозу $l_1 \vee l_2$ сопоставлены ребра $(\bar{l}_1, l_2)$ и $(\bar{l}_2, l_1)$
- Эквивалентная формулировка 2-SAT на языке графа импликаций:
  - ★ существует ли раскраска ϕ графа импликаций в цвета $\{0, 1\}$ такая, что
    - (i) $\phi(l) \neq \phi(\bar{l})$ для любой вершины l и
    - (ii) $\phi(l_2) \geqslant \phi(l_1)$ для любого ребра (l_1, l_2)?
  - ϕ с указанными свойствами будем называть булевой раскраской
  - ◇ по транзитивности, если l_2 достижима из l_1, то $\phi(l_2) \geqslant \phi(l_1)$

Пример: $F = (x \vee y) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (\bar{z} \vee y)$

граф импликаций $G(F)$:



Лемма

Существует булева раскраска орграфа $G(F)$ $\Leftrightarrow$ не существует переменной x, для которой вершины x и $\bar{x}$ взаимно достижимы в $G(F)$.

- Доказательство необходимости:
  - существование такой переменной x влечет $\phi(x) = \phi(\bar{x})$ согласно ($\diamond$), что нарушает первое условие для булевой раскраски $\square$
- Доказательство достаточности:
  - разобьем $G(F)$ на компоненты сильной связности
  - отношение достижимости компонент — отношение порядка, дополним его до линейного порядка $\leqslant$
    - т.е. выполним топологическую сортировку компонент
  - по условию, вершины x и $\bar{x}$ лежат в разных компонентах для любой переменной x

  $\Rightarrow$ положим $\phi(x) = 1$ ($\phi(x) = 0$), если $\mathrm{comp}(x) > \mathrm{comp}(\bar{x})$ ($\mathrm{comp}(x) < \mathrm{comp}(\bar{x})$)
    - все вершины любой компоненты имеют один цвет

  $\Rightarrow$ $\phi(x) \neq \phi(\bar{x})$ для всех x, условие (i) выполнено
  - пусть существует ребро (l_1, l_2) такое, что $\phi(l_1) = 1, \phi(l_2) = 0$

  $\Rightarrow$ существует ребро $(\bar{l}_2, \bar{l}_1)$, $\phi(\bar{l}_2) = 1, \phi(\bar{l}_1) = 0$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{comp}(l_1) < \mathrm{comp}(l_2)$ и $\mathrm{comp}(\bar{l}_2) < \mathrm{comp}(\bar{l}_1)$
  - из нашего определения ϕ следует $\mathrm{comp}(\bar{l}_1) < \mathrm{comp}(l_1)$ и $\mathrm{comp}(l_2) < \mathrm{comp}(\bar{l}_2)$

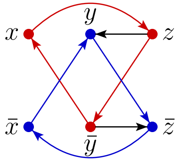
  $\Rightarrow$ противоречие с тем, что $\leqslant$ — порядок

  $\Rightarrow$ $\phi(l_2) \geqslant \phi(l_1)$ для любого ребра (l_1, l_2), условие (ii) выполнено $\square$

2-выполнимость (3)

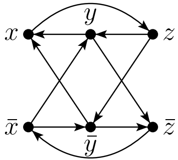
Примеры:

$F = (x \vee y) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (\bar{z} \vee y)$ выполнима:



В графе $G(F)$ две компоненты,
красные вершины красим в 0, синие — в 1

$F' = F \wedge (x \vee \bar{y})$ невыполнима:



В графе $G(F')$ единственная компонента,
ее нельзя раскрасить

Теорема

Задача 2-SAT может быть решена за время $O(\ell)$, где ℓ — число клозов в формуле.

- Доказательство:
  - построим по формуле F граф $G(F)$, в нем 2ℓ ребер
  - найдем компоненты сильной связности и отсортируем их топологически
    - ⋆ например, и алгоритм Косараю, и алгоритм Тарьяна ищут компоненты за линейное от числа ребер время и выдают их в топологически отсортированном виде
  - если $\mathrm{comp}(x) = \mathrm{comp}(\bar{x})$ для какой-нибудь вершины x, возвращаем 0
  - иначе выполняем булеву раскраску $G(F)$ и возвращаем полученные значения
  - все шаги требуют времени $O(\ell)$ $\square$