Задача SAT

- ⋆ Метод резолюций — один из способов решения задачи SAT
  - от satisfiability (выполнимость)
- SAT: дана КНФ $F = \bigwedge_{i=1}^{\ell} C_i$, определить, выполнима ли она
  - если F выполнима, обычно нужно предъявить пример

    т.е. булев вектор $\vec{b}$ такой, что $F_{|\vec{b}} = 1$
  - если F — противоречие, иногда нужно предъявить доказательство
- SAT — трудная задача
  - NP-полная
- SAT — самая важная NP-полная задача
  - для нее существуют эффективные с практической точки зрения решатели (SAT-solvers)
- Очень часто оптимальный способ решения других трудных задач состоит в том, чтобы перекодировать задачу в задачу SAT и скормить решателю
  - так решают
  - ⋆ задачи планирования
  - ⋆ задачи верификации железа и софта
  - ⋆ комбинаторные задачи вроде раскраски и гамильтонова цикла

Задача о гамильтоновом пути в форме SAT

- HAMILTONIAN PATH: дан граф $G = (V, E)$, определить, есть ли в нем гамильтонов путь
  - при ответе «да» предъявить пример такого пути
- Опишем преобразование HAMILTONIAN PATH в SAT:
  - переменные: x_{ij}, $i, j \in V = \{1, \ldots, n\}$
  - семантика: $x_{ij} = 1 \Leftrightarrow j$ — i-я вершина в гамильтоновом пути
- Клозы разбиваются на 5 групп:
  1. $x_{1j} \vee \ldots \vee x_{nj}$ для всех $j = 1, \ldots, n$
     - вершина j есть в гамильтоновом пути
  2. $\bar{x}_{ij} \vee \bar{x}_{kj}$ для всех $i, k, j = 1, \ldots, n$, $i \neq k$
     - вершина j не входит в гамильтонов путь дважды
  3. $x_{i1} \vee \ldots \vee x_{in}$ для всех $i = 1, \ldots, n$
     - на i-ом месте в гамильтоновом пути стоит какая-то вершина
  4. $\bar{x}_{ij} \vee \bar{x}_{ik}$ для всех $i, k, j = 1, \ldots, n$, $j \neq k$
     - на i-ом месте в гамильтоновом пути есть только одна вершина
  5. $\bar{x}_{ij} \vee \bar{x}_{(i+1)k}$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$, $k, j = 1, \ldots, n$, $(j, k) \notin E$
     - соседние вершины в гамильтоновом пути должны быть соединены ребром
- если формула выполнима, переменные, равные 1, задают гамильтонов путь

Еще немного про SAT

- ★ SAT остается вычислительно трудной даже при ограничении, что задана константа $k \geqslant 3$ и каждый клоз содержит не более k литералов (задача k-SAT)
- ★ Общепринятая в настоящее время гипотеза экспоненциального времени утверждает существование констант $s_k > 0$ для любого $k \geqslant 3$ таких, что ни один алгоритм не может решить задачу k-SAT за время, меньшее $2^{s_k \ell}$
  - ⋆ фразу «не может решить» следует понимать так: для любого алгоритма найдется бесконечная серия «трудных» КНФ с разным числом клозов ℓ, на проверку выполнимости которых алгоритм затратит время $\Omega(2^{s_k \ell})$
- ★ Особенность SAT: трудные примеры встречаются редко
  - важную роль играет отношение числа клозов ℓ к числу переменных n
  - если клозов мало, обычно есть много выполняющих наборов и такой набор можно быстро найти
  - если клозов много, обычно формула невыполнима и противоречие находится быстро
  - на границе попадаются трудные формулы (либо выполнимые с очень малым числом выполняющих наборов, либо невыполнимые, но такие, что некоторые наборы выполняют почти все клозы)

Распространение переменной

- Пусть КНФ состоит из клозов $C_1, \ldots, C_\ell$ и зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$
  - можно считать, что КНФ F задана двумя массивами:
  - $L[1..2n]$: в $L[i]$ хранится список номеров клозов, в которые входит литерал x_i (при $i \leqslant n$) либо литерал $\bar{x}_{i-n}$ (при $i > n$)
  - $C[1..\ell]$: в $C[i]$ хранится список номеров литералов, которые входят в клоз C_i (номер $i > n$ означает литерал $\bar{x}_{i-n}$)
  - ⋆ при переводе КНФ в такую форму можно сразу отбросить клозы, содержащие два противоположных литерала одновременно
- Распространение переменной (unit propagation) — процедура упрощения КНФ
  - ⋆ Если в F есть клоз, состоящий из единственного литерала (x_i либо $\bar{x}_i$), то набор $(b_1, \ldots, b_n)$ выполняет F только при условии, что b_i выполняет данный клоз
  - ⇒ значение b_i определено однозначно
    - пусть литерал равен x_i, т.е. $b_i = 1$; случай $b_i = 0$ аналогичен
  - ⇒ можно присвоить значение b_i и упростить формулу:
  - ♣ клозы, содержащие x_i, выполнены — их можно удалить
  - ♠ из клозов, содержащих $\bar{x}_i$, можно удалить этот литерал (он равен 0)
    - если получился пустой клоз, то F невыполнима
  - ⋆ можно создать очередь одноэлементных клозов
    - очередь пополняется при выполнении пункта (♠)
  - ⋆ распространение переменной выполняется в цикле, пока очередь непуста

⋆ КНФ $F \xrightarrow{\text{распространение переменной}}$ КНФ $UP(F)$

- $UP(F) = 1$, если удалены все клозы
- $UP(F) = 0$, если встретился пустой клоз
- $UP(F)$ выполнима $\Leftrightarrow$ F выполнима

★ Распространение переменной выполняется за время $O(\text{число литералов в } F)$

Распространение переменной (2)

Пример:

$F = (a \vee d) \wedge (c \vee d \vee \bar{a}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}) \wedge (\bar{a}) \wedge (a \vee b \vee \bar{c})$

- в очереди единственный клоз $\bar{a}$, достаем его
- ♣ удаляем клозы $\bar{a}$ и $c \vee d \vee \bar{a}$
- ♠ удаляем a из клозов $a \vee b \vee \bar{c}$ и $a \vee d$ (новый клоз d добавляем в очередь)
- текущий список клозов: $d, \bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}, b \vee \bar{c}$
- достаем клоз d из очереди
- ♣ удаляем клоз d
- ♠ удаляем $\bar{d}$ из клоза $\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}$
- очередь пуста, получаем $UP(F) = (b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c})$
- ⋆ $UP(F)$ можно выполнить, положив $c = 0$
- ⇒ набор $a = 0, c = 0, d = 1$ выполняет F (при любом b)

- Дополнение к распространению переменной: правило чистой переменной
  - ⋆ если в результате удаления клоза (♣) у литерала не осталось вхождений в формулу, то переменной этого литерала присваивается значение, превращающее этот литерал в 0
  - это позволяет выполнить все клозы, содержащие противоположный литерал, и тем самым упростить текущую КНФ
  - ⋆ когда в примере получено $UP(F) = (b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c})$, литерал c не имеет вхождений, и присвоение $c = 0$ позволяет выполнить оба оставшихся клоза

⋆ В дальнейшем под $UP(F)$ мы понимаем формулу, полученную из F применением обоих правил

Процедура DPLL

- Процедура DPLL — это алгоритм оптимизированного перебора, решающий задачу SAT
  - основан на статьях Дэвиса–Патнема (1960) и Дэвиса–Логманна–Лавлэнда (1962)
- Пусть $DPLL(F)$ — булево значение, возвращаемое алгоритмом на входе F
- ⋆ Рекурсивная запись процедуры DPLL:
  - выбрать переменную x
  - вернуть $DPLL(F) = DPLL(UP(F \wedge x)) \vee DPLL(UP(F \wedge \bar{x}))$
- Комментарии:
  - ⋆ формулы F и $(F \wedge x) \vee (F \wedge \bar{x})$ эквивалентны
  - ⋆ алгоритм представляет вычисление деревом:
    - с каждым узлом связана «остаточная» формула, которую нужно выполнить;
    - некоторой переменной x остаточной формулы присваивается значение 1, формула упрощается распространением переменной и присваивается дочернему узлу
    - если формулу не удалось выполнить, вычисление возвращается в родительский узел и выполняется присвоение $x = 0$
  - ⋆ клоз x ($\bar{x}$) добавляется не к формуле, а сразу в очередь, чтобы запустить распространение переменной
- Скорость работы перебора зависит от эвристики выбора переменной x_i
  - пример эвристики: выбирается переменная с максимальным числом вхождений в клозы минимальной длины
  - цель — увеличить ресурс использования распространения переменной
- Используется много других оптимизаций для сокращения перебора
- ⋆ DPLL до сих пор лежит в основе многих SAT-решателей

Хорновская выполнимость

- Существуют частные случаи задачи SAT, для которых существуют полиномиальные (и даже линейные) алгоритмы
- ⋆ КНФ называется хорновской, если каждый клоз содержит не более одной переменной без отрицания
  - Пример: $F = (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{d}) \wedge (a) \wedge (\bar{a} \vee d)$
- ⋆ Задача SAT с хорновской КНФ также называется хорновской (HornSAT)

Теорема

Задача HornSAT может быть решена за время $O(m)$, где m — число литералов в формуле.

- Доказательство:
  - пусть F — хорновская КНФ
  - применим распространение переменной и вычислим $UP(F)$
    - как уже обсуждалось, это требует времени $O(m)$
  - если $UP(F) \in \{0, 1\}$ — мы уже получили ответ
  - иначе каждый клоз содержит хотя бы два литерала

  $\Rightarrow$ каждый клоз содержит литерал вида $\bar{x}$

  $\Rightarrow$ присвоим всем оставшимся переменным нули

  $\Rightarrow$ $UP(F)$ выполнима $\Rightarrow$ F выполнима $\square$

- ⋆ Тем же способом решается SAT для двойственных хорновских КНФ, в которых каждый клоз содержит не более одного литерала с отрицанием

Хорновская выполнимость (2)

Пример 1:

$F = (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (\bar{b} \vee \bar{c} \vee d) \wedge (\bar{d} \vee \bar{c}) \wedge (c) \wedge (\bar{d} \vee e) \wedge (\bar{a} \vee \bar{c} \vee d \vee \bar{e})$

- распространяем c: $a \vee \bar{b}, \bar{b} \vee d, \bar{d}, \bar{d} \vee e, \bar{a} \vee d \vee \bar{e}$
- распространяем $\bar{d}$: $a \vee \bar{b}, \bar{b}, \bar{a} \vee \bar{e}$
- распространяем $\bar{b}$: $\bar{a} \vee \bar{e}$
- присваиваем нули оставшимся переменным: $a = e = 0$

$\Rightarrow$ набор $a = 0, b = 0, c = 1, d = 0, e = 0$ выполняет F

Пример 2:

$F = (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (b \vee \bar{c} \vee \bar{d}) \wedge (d \vee \bar{c}) \wedge (c) \wedge (\bar{d} \vee e) \wedge (\bar{a} \vee \bar{c} \vee \bar{d} \vee \bar{e})$

- распространяем c: $a \vee \bar{b}, b \vee \bar{d}, d, \bar{d} \vee e, \bar{a} \vee \bar{d} \vee \bar{e}$
- распространяем d: $a \vee \bar{b}, b, e, \bar{a} \vee \bar{e}$
- распространяем b: $a, e, \bar{a} \vee \bar{e}$
- распространяем e: $a, \bar{a}$
- распространяем a: $\square$

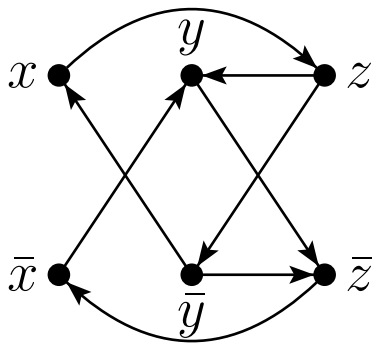
$\Rightarrow$ F невыполнима

2-выполнимость

- КНФ, в которой каждый клоз состоит из двух литералов, называется 2-КНФ
- ⋆ Задача SAT с 2-КНФ называется 2-выполнимость (2-SAT)
- ★ Формула $l_1 \vee l_2$, где l_1 и l_2 — литералы, эквивалентна $\bar{l}_1 \to l_2$ и $\bar{l}_2 \to l_1$
- Пусть дана 2-КНФ F; построим по ней орграф $G(F)$ (граф импликаций):
  - вершины — литералы из F
  - каждому клозу $l_1 \vee l_2$ сопоставлены ребра $(\bar{l}_1, l_2)$ и $(\bar{l}_2, l_1)$
- Эквивалентная формулировка 2-SAT на языке графа импликаций:
  - ★ существует ли раскраска ϕ графа импликаций в цвета $\{0, 1\}$ такая, что

    (i) $\phi(l) \neq \phi(\bar{l})$ для любой вершины l и
    (ii) $\phi(l_2) \geqslant \phi(l_1)$ для любого ребра (l_1, l_2)?
  - ϕ с указанными свойствами будем называть булевой раскраской
  - ◇ по транзитивности, если l_2 достижима из l_1, то $\phi(l_2) \geqslant \phi(l_1)$

Пример: $F = (x \vee y) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (\bar{z} \vee y)$



граф импликаций $G(F)$:

2-выполнимость (2)

Лемма

Существует булева раскраска орграфа $G(F) \Leftrightarrow$ не существует переменной x, для которой вершины x и $\bar{x}$ взаимно достижимы в $G(F)$.

- Доказательство необходимости:
  - существование такой переменной x влечет $\phi(x) = \phi(\bar{x})$ согласно $(\diamond)$, что нарушает первое условие для булевой раскраски $\square$
- Доказательство достаточности:
  - разобьем $G(F)$ на компоненты сильной связности
  - отношение достижимости компонент — отношение порядка, дополним его до линейного порядка $\leqslant$
    - т.е. выполним топологическую сортировку компонент
  - по условию, вершины x и $\bar{x}$ лежат в разных компонентах для любой переменной x

  $\Rightarrow$ положим $\phi(x) = 1$ $(\phi(x) = 0)$, если $\mathrm{comp}(x) > \mathrm{comp}(\bar{x})$ $(\mathrm{comp}(x) < \mathrm{comp}(\bar{x}))$
    - все вершины любой компоненты имеют один цвет

  $\Rightarrow$ $\phi(x) \neq \phi(\bar{x})$ для всех x, условие (i) выполнено
  - пусть существует ребро (l_1, l_2) такое, что $\phi(l_1) = 1, \phi(l_2) = 0$

  $\Rightarrow$ существует ребро $(\bar{l}_2, \bar{l}_1)$, $\phi(\bar{l}_2) = 1, \phi(\bar{l}_1) = 0$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{comp}(l_1) < \mathrm{comp}(l_2)$ и $\mathrm{comp}(\bar{l}_2) < \mathrm{comp}(\bar{l}_1)$
  - из нашего определения ϕ следует $\mathrm{comp}(\bar{l}_1) < \mathrm{comp}(l_1)$ и $\mathrm{comp}(l_2) < \mathrm{comp}(\bar{l}_2)$

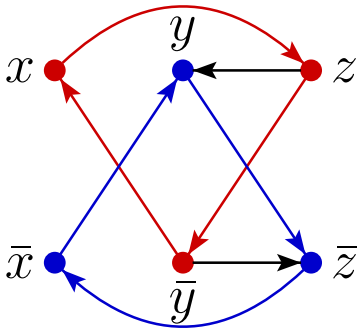
  $\Rightarrow$ противоречие с тем, что $\leqslant$ — порядок

  $\Rightarrow$ $\phi(l_2) \geqslant \phi(l_1)$ для любого ребра (l_1, l_2), условие (ii) выполнено $\square$

2-выполнимость (3)

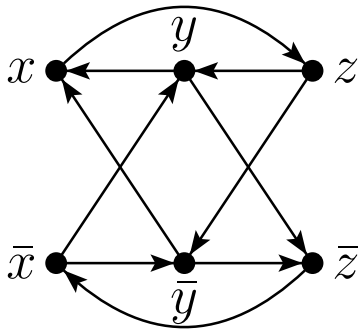
Примеры:

$F = (x \vee y) \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (\bar{z} \vee y)$ выполнима:



В графе $G(F)$ две компоненты,
красные вершины красим в 0, синие — в 1

$F' = F \wedge (x \vee \bar{y})$ невыполнима:



В графе $G(F')$ единственная компонента,
ее нельзя раскрасить

Теорема

Задача 2-SAT может быть решена за время $O(\ell)$, где ℓ — число клозов в формуле.

- Доказательство:
  - построим по формуле F граф $G(F)$, в нем 2ℓ ребер
  - найдем компоненты сильной связности и отсортируем их топологически
    - ⋆ например, и алгоритм Косараю, и алгоритм Тарьяна ищут компоненты за линейное от числа ребер время и выдают их в топологически отсортированном виде
  - если $\mathrm{comp}(x) = \mathrm{comp}(\bar{x})$ для какой-нибудь вершины x, возвращаем 0
  - иначе выполняем булеву раскраску $G(F)$ и возвращаем полученные значения
  - все шаги требуют времени $O(\ell)$