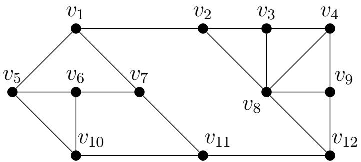
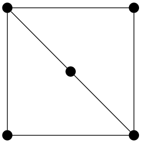
Гамильтонов цикл: определения и примеры

- Цикл в графе G называется гамильтоновым, если он содержит все вершины G по одному разу
  - ⋆ гамильтонов цикл — это простой цикл, содержащий все вершины графа
  - ⋆ как подграф, гамильтонов цикл изоморфен C_n, где n — число вершин в G
- Гамильтонов путь — это путь, содержащий все вершины G
  - гамильтонов цикл — частный случай гамильтонова пути
- Граф гамильтонов если в нем есть гамильтонов цикл

Примеры:





⋆ Граф слева гамильтонов; например,

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_8 \to v_4 \to v_9 \to v_{12} \to v_{11} \to v_7 \to v_6 \to v_{10} \to v_5 \to v_1$$

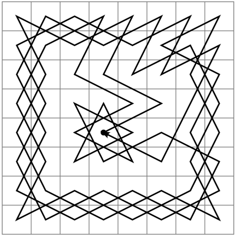
⋆ Граф справа негамильтонов
- но гамильтонов путь в нем очевидно есть

★ Гамильтонов граф является связным (далее увидим, что двусвязным)

⋆ Считаем, что петель и кратных ребер нет (на гамильтоновость это не влияет)

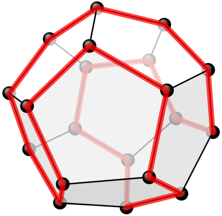
Происхождение

- Задача об обходе конем: обойти доску $n \times n$ шахматным конем, посетив все поля по одному разу и вернувшись на исходное поле

  - впервые упоминается в индийском трактате IX века
  - занимались, в том числе, Муавр и Эйлер
  - справа приведено одно из решений для доски 8×8
  - для нечетных n у задачи нет решения (почему?), поэтому для нечетных n не требуют возвращения в исходную точку

- Головоломка Гамильтона: обойти додекаэдр по ребрам, посетив все вершины по одному разу и вернувшись в исходную вершину

  - середина XIX века
  - справа приведено одно из решений
  - ★ графы всех правильных многогранников гамильтоновы
  - ★ существуют выпуклые многогранники с негамильтоновыми графами

- Задача коммивояжера (TSP): дан список городов, соединенных дорогами с известными длинами; коммивояжер должен посетить все города по одному разу и вернуться в свой город. Найти кратчайший маршрут коммивояжера
  - изучается математиками примерно с 1930-х
    - эвристика «идти в ближайший непосещенный город» может не найти ответ
    - термин: Джулия Робинсон (1949)
  - самая известная оптимизационная задача о графах
- Математическая формулировка: дан граф $G = (V, E)$, в котором каждому ребру $e \in E$ приписан неотрицательный вес $w(e)$; требуется найти в G гамильтонов цикл, сумма весов ребер в котором минимальна
  - ⋆ можно дополнить G до полного графа ребрами очень большого веса; если оптимальный маршрут в полном графе
    - ⋆ содержит добавленное ребро, то в исходном графе решения нет
    - ⋆ не содержит добавленных ребер, то он оптимален в исходном графе
- Вариации:
  - евклидова TSP
    - вершины — точки на плоскости, веса — евклидовы расстояния
  - метрическая TSP
    - веса удовлетворяют неравенству треугольника: $w(v_1, v_2) \leqslant w(v_1, v_3) + w(v_3, v_2)$
  - асимметричная TSP
    - граф ориентирован, $w(u, v)$ может не совпадать с $w(v, u)$
  - TSP с предшествованием
    - на вершинах задан (частичный) порядок, маршрут должен быть с ним согласован

Приложения:

- реальные логистические задачи
  - развоз товаров по магазинам, курьеры, школьные автобусы, ...
- проектирование чипов
- сборка ДНК из фрагментов

Теорема Оре

- Если в графе очень много ребер, он должен быть гамильтоновым
- Наиболее известны три достаточных условия гамильтоновости:
  теорема Дирака (самое слабое), теорема Хва́тала (самое сильное) и

Теорема Оре

Пусть G — обыкновенный граф с n вершинами, $n > 2$. Если $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$ для любых двух несмежных вершин u и v графа G, то граф G гамильтонов.

Доказательство: от противного

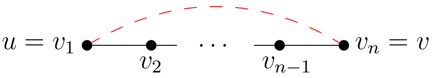
- пусть существует граф G, удовлетворяющий всем условиям теоремы и не являющийся гамильтоновым
- ⋆ если возможно, добавим к G новое ребро так, чтобы граф остался негамильтоновым
- ⋆ новый граф тоже удовлетворяет всем условиям теоремы
- будем повторять данную процедуру, пока это возможно
- в какой-то момент получим граф G', который удовлетворяет всем условиям теоремы и является максимальным негамильтоновым
  - превращается в гамильтонов при добавлении любого ребра
  - существование такого G' следует из того, что полный граф гамильтонов
- получим противоречие, построив гамильтонов цикл в G' $\Longrightarrow$

Доказательство теоремы Оре (окончание)

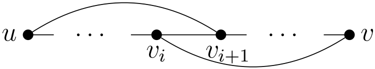
- Пусть u и v — произвольные несмежные вершины графа G'

⋆ В G' нет гамильтонова цикла, но при добавлении ребра (u, v) появится

  $\Rightarrow$ в G' есть гамильтонов (u, v)-путь:



- Пусть $S = \{i \mid u \text{ смежна с } v_{i+1}\}$ и $T = \{i \mid v \text{ смежна с } v_i\}$
  - ⋆ $|S| = \deg(u)$, $|T| = \deg(v)$
  - $\Rightarrow$ $|S| + |T| \geqslant n$ по условию теоремы
  - элементы множеств S и T являются числами 1 до $n-1$
  - $\Rightarrow$ $S \cap T \neq \varnothing$
  - пусть $i \in S \cap T$ $\Rightarrow$ в G' есть ребра (u, v_{i+1}) и (v_i, v):



$\Rightarrow$ В графе G' есть гамильтонов цикл

  - $u \to v_2 \to \cdots \to v_i \to v \to v_{n-1} \to \cdots \to v_{i+1} \to u$

- Требуемое противоречие получено

Лемма

Любой гамильтонов граф двусвязен.

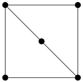
Доказательство:

- если граф G не двусвязен, то в нем есть точка сочленения v
- по лемме о точке сочленения найдутся вершины u и w, отличные от v и такие, что любой (u, w)-путь содержит v

$\Rightarrow$ любой цикл в G, содержащий u и w, содержит v как минимум дважды

$\Rightarrow$ в G нет цикла, содержащего все вершины по одному разу $\square$

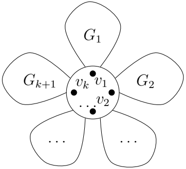
★ Не любой двусвязный граф гамильтонов

- Минимальный пример: 
- Есть ли более сильные необходимые условия гамильтоновости?
- Множество вершин $\{v_1, \ldots, v_k\}$ связного графа G называется обобщенной точкой сочленения k-го порядка, если граф $G - \{v_1, \ldots, v_k\}$ имеет более k компонент связности
  - ⋆ в графе из примера есть обобщенная точка сочленения второго порядка
  - ⋆ обобщенная точка сочленения первого порядка = точка сочленения

Теорема

Любой гамильтонов граф не имеет обобщенных точек сочленения

- Доказательство:
  - пусть граф G имеет обобщенную точку сочленения $\{v_1, \dots, v_k\}$, а граф $G - \{v_1, \dots, v_k\}$ — компоненты связности $G_1, G_2, \dots, G_{k+1}$:



  - ⋆ компонент связности может быть и больше, но для рассуждения это неважно
  - рассмотрим какой-нибудь цикл C, содержащий все вершины графа G
  - обходя C, мы должны хотя бы раз зайти в «лепесток» — подграф G_i $(i = 1, \dots, k+1)$ и хотя бы раз из него выйти

$\Rightarrow$ C содержит хотя бы $k+1$ путь, соединяющий вершины из разных «лепестков»

  - любой путь между вершинами из разных «лепестков» содержит какую-то из вершин $v_1, \dots, v_k$

$\Rightarrow$ по принципу Дирихле какая-то вершина v_i встречается по крайней мере в двух из упомянутых путей, т.е. дважды встречается в цикле C

$\Rightarrow$ C — не гамильтонов цикл

Задачи поиска эйлерова и гамильтонова цикла: сравнение

- ★ Несмотря на внешнюю схожесть определений эйлерова и гамильтонова циклов, задачи поиска этих циклов в графе разительно отличаются по сложности
- Поиск эйлерова цикла — это вычислительно простая (tractable) задача:
  - ⋆ теорема Эйлера — критерий, позволяющий установить наличие или отсутствие эйлерова цикла в графе с n вершинами и m ребрами за время $O(n^2)$
    - ⋆ если граф задан списками смежности, то и проверку связности, и вычисление степеней вершин можно реализовать за время $O(m)$
  - ⋆ если эйлеров цикл есть, его легко найти (например, алгоритмом из доказательства теоремы Эйлера, хотя есть и другие)
    - ⋆ при подходящей организации данных можно тоже уложиться во время $O(m)$
  - ★ поиск эйлерова цикла — характерный представитель класса **P** задач, разрешимых за полиномиальное от размера входных данных время
    - вычислительно простые = полиномиальные
- ★ Ни критерия гамильтоновости графа, ни эффективного алгоритма нахождения гамильтонова цикла в произвольном гамильтоновом графе не известно
- ★ В современной математике есть консенсус, что таких алгоритмов не существует: задача поиска гамильтонова цикла — вычислительно трудная (intractable)
  - ⋆ задачи о гамильтоновом цикле (включая задачу коммивояжера) входят в класс **NP**, содержащий **P**, а точнее, в подкласс наиболее трудных задач из **NP**, называемых **NP**-полными
  - ⋆ доказательство строгости включения $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ — одна из сложнейших проблем современной математики, самая известная из семи проблем тысячелетия
- Подробности рассказываются в курсе теории алгоритмов

Простые и сложные задачи (окончание)

- Кроме задач об эйлеровом и гамильтоновом циклах нам встречалась еще одна интересная с точки зрения вычислительной сложности задача: проверка изоморфности двух графов
  - неизвестно, является ли эта задача трудной, простой или «промежуточной»
  - ⋆ из NP-полноты проверки изоморфности следуют результаты теории сложности, которые выглядят нереалистично; поэтому есть консенсус, что она не NP-полна
  - если полиномиальный алгоритм существует, он вероятно очень сложен
  - ⋆ с 1980-х годов известен алгоритм со сложностью $2^{O(\sqrt{n \log n})}$
  - ⋆ в 2015 году Ласло Бабаи предъявил (а в 2017 исправил) алгоритм, проверяющий изоморфность за время $2^{O(\log^c n)}$, где c — константа
  - ★ изоморфизм — это перестановка, и задача проверки изоморфности оказалась задачей из теории групп, где все как правило очень сложно

- Трудные задачи оптимизации имеют важный дополнительный аспект: приближенные решения
  - ⋆ для метрической (в том числе евклидовой) TSP существует полиномиальный алгоритм, гарантирующий нахождение гамильтонова цикла, вес которого не более чем в 1.5 раза превосходит вес минимального гамильтонова цикла
    - такой алгоритм называют 1.5-приближенным
  - ⋆ в общем случае таких алгоритмов нет
  - ! пусть вам свыше дан полиномиальный C-приближенный алгоритм для общей задачи TSP, где $C > 1$ — некоторая константа;
    постройте полиномиальный алгоритм поиска гамильтонова цикла