Функции нескольких переменных

Метрические пространства

Определение

Метрикой называется функция $\rho : X^2 \to R$, если $\forall a, b, c \in X$ выполнены:

1. $\rho(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (не вырожденность);
2. $\rho(a, b) = \rho(b, a)$ (симметрия);
3. $\rho(a, b) <= \rho(a, c) + \rho(c, b)$ (неравенство треугольника).

Замечание

$\rho(a, b) > 0, \forall a, b \in X$ (всегда положительная, хотя явно не вводили) Доказательство: $0 = \rho(a, a) <= \rho(a, b) + \rho(b, a) = \rho(a, b) + \rho(a, b) = 2\rho(a, b)$.

Определение

(X, ρ) - метрическое пространство.

Определение

$B[a, r] = x \in X : \rho(x, a) <= r$ – **замкнутый шар**. $B(a, r) = x \in X : \rho(x, a) < r$ – **открытый шар**.

Определение

$O(a) = B(a, r)$ – окрестность точки

Определение

Множество $A \subset X$ называется **ограниченным**, если $\exists B(a, r) \supset A$

Открытые множества

Определение

Точка $a \in A$ называется **внутренней** для множества A, если $\exists B(a, r) \subset A$.

Определение

Внутренностью $\, ^\circ A$ множества A, называется множество его внутренних точек.

Определение

Множество называется **открытым**, если все точки внутренние $A = \, ^\circ A$.

Замкнутые множества

Определение

Точка $a \in X$ называется **предельной** для множества A, если $\forall B(a,r) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$. Множество предельных точек обозначается $A^{'}$.

Определение

Точка a называется **граничной** для множества А, если $\forall B(a,r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(a,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Множество граничных точек обозначается ∂A.

Определение

Точка $a \in A$ называется **изолированной** для множества A, если $\exists B(a,r) \cap A = a$.

Определение

Множество называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки $A^{'} \subset A$.

Утверждение

1. Открытый шар – открытое множество.
2. Замкнутый шар – замкнутое множество.

Доказательство

1. Пусть $B(a,r)$ - исходный шар. Покажем, что $\forall x \in B(a,r)$ внутренняя. Для этого рассмотрим шар $B(x,\varepsilon), \varepsilon < r - \rho(a,x)$ Тогда $\forall b \in B(x,\varepsilon)$ справедливо $\rho(a,b) <= \rho(a,x) + \rho(x,b) < \rho(a,x) + (r - \rho(a,x)) = r$. Значит $b \in B(a,r)$.
2. Пусть $B[a,r]$ - исходный шар. Покажем, что $\forall x \notin B[a,r]$ не является предельной. Для этого рассмотрим шар $B(x,\varepsilon), \varepsilon < \rho(a,x) - r$ Тогда $\forall b \in B(x,\varepsilon)$ справедливо $\rho(a,b) > \rho(a,x) - \rho(x,b) > \rho(a,x) - (\rho(a,x) - r) = r$. Значит $\exists B(x,\varepsilon) \cap B[a,r] = \emptyset$ и x не предельная.

Компактность

Определение

Семейство множеств $\{G_k\}$ называется **покрытием** множества A, если $A \subset \cup_k G_k$.

Определение

Множество A называется **компактным**, если для любого покрытия $\{G_k\}$, состоящего из открытых множеств, найдется конечный набор множеств $\{Gk\}_{k=1}^{n}$, покрывающий множество A.

Теорема

Если К - компактно -> К - ограниченно и замкнуто

Доказательство

1. ограниченно

$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0,n)$, из компактности К: $\exists \bigcup_{k=1}^{\infty} B(0,n_k) \supset K$ т.к. шаров конечно есть самый большой $B(0,n_k^*)$, поэтому $K \subset B(0,n_k^*) => K - \text{огр.}$

2. замкнуто

$y \notin K$ и докажем, что $y \notin K^{'}$ $\forall x \in K \ \ \exists O(x), O(y) : O(x) \cap O(y) = \varnothing$ $K \subset_{x \in K} O(x)$ из компактности К $\exists \bigcup_{k=1}^{m} O(x_k) \supset K$, $\left(\bigcap_{k=1}^{m} O_{x_k}(y)\right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{m} O_{x_k}(x_k)\right) = \varnothing$ $O(y) \cap K = \varnothing => y \notin K^{'}$

Сходимость в R^m

(в этой теме индекс пишется сверху)

Определение

Пусть (x, ρ) - метрическое пространство

$$\forall n \in N \ \ x^n \in X, \text{ то } x^n{}_{n=1}^{\infty} - \text{последовательность}$$

Определение

А - называется пределом $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$, если $\forall E > 0 \, \exists N(E) \, \forall n > N \ \ \rho(x^n, A) < E$

Теорема (о координатной сходимости)

Если $x^n \to_{n\to\infty}^{\rho_p} A <=> \forall K \in \overline{1,m} \ \ x_k^n \to_{n\to\infty} a_k$ ρ_p - метрика

Доказательство

$$=> |x_k^n - a_k| = (|x_k^n - a_k|^p)^{1/p} \le (\sum_{k=1}^{m} |x_k^n - a_k|^p)^{1/p} = \rho(x^n, A) \to 0$$

$$<= (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n - a_k|^p)^{1/p} \le ((max|x_k^n - a_k|^p) * M)^{1/p} = |x_{k^*}^n| * m^{1/p} \to 0$$

Определение

Метрики называются эквивалентными, если: $x^n \to^{\rho_p} A <=> x^n \to^{\rho_q} A$

Следствие

Для любых p и q метрики $\rho_p, \ \rho_q$ эквивалентны

Теорема (принцип Кантора)

(про вложенные стягивающиеся замкнутые m-мерные прямоугольники)

$$\triangle^n = \{\times_{k=1}^{m} [a_k^n, b_k^n]\} \subset R^m$$

Если $\triangle^{n+1} \subset \triangle^n$ и $diam \triangle^n = sup_{x,y \in \triangle^n} \rho(x,y) \to 0$ (diam - диаметр), то $\exists! c \in R^m \ \ c \in \triangle^n \ \ \forall \in N$

Доказательство

$\forall k \in \overline{1, m}\ [a_k^n, b_k^n]$ - вложены и стягиваются => по принципу Кантора из первого семестра существует нужная точка

Теорема Болцано-Вейерштрасса

Каждая ограниченная последовательность точек пространства R^m имеет сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство

Пусть $\{\mathbf{x}^n\}$ – ограниченная последовательность. Рассмотрим куб $\Delta = \{\mathbf{x} : a \leq x_k \leq b\}$, содержащий все точки $\{\mathbf{x}^n\}$.

$$\mathrm{diam}_\infty \Delta = |b - a|.$$

Разделим каждое ребро куба Δ пополам и рассмотрим замкнутые кубики, построенные на полученных при этом половинках ребер. Обозначим Δ^1 любой из этих кубиков, содержащий бесконечно много точек последовательности $\{\mathbf{x}^n\}$. Заметим, что $\mathrm{diam}\Delta^1 = \frac{1}{2}\mathrm{diam}\Delta$. Выберем некоторый элемент $\mathbf{x}^{n_1} \in \Delta^1$.

Делим теперь каждое ребро куба Δ^1 пополам, получаем 2^m более мелких замкнутых кубиков и в качестве Δ^2 берем любой из таких кубиков, содержащий бесконечно много точек исходной последовательности. $\mathbf{x}^{n_2} \in \Delta^2 :\ n_2 > n_1$. При этом $\mathrm{diam}\Delta^2 = \frac{1}{2}\mathrm{diam}\Delta^1 = \frac{1}{4}\mathrm{diam}\Delta$.

Продолжив неограниченно такое построение, получим последовательность вложенных кубов $\{\Delta^j\}$, причем $\mathrm{diam}\Delta^j = \frac{1}{2^j}\mathrm{diam}\Delta \to 0,$ и подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{n_j}\} :\ \mathbf{x}^{n_j} \in \Delta^j$. Согласно предыдущей теореме существует единственная точка $\mathbf{c}$, принадлежащая всем кубам Δ^j. Эта точка является пределом последовательности $\{\mathbf{x}^{n_j}\}$, так как любая - окрестность точки $\mathbf{c}$ содержит все кубики, начиная с некоторого. ■

Лемма Гейне-Бореля

Если $A \in R^m$ ограничено и замкнуто, то A - компактно.

Доказательство

о/п. Пусть A нельзя покрыть конечным набором множеств семейства $\{G\alpha\}$. Рассмотрим замкнутый куб Δ, содержащий A. Разделив каждое ребро куба Δ пополам, построим на полученных ребрах 2^m одинаковых замкнутых кубиков. Части A, попавшие в каждый из этих кубиков, являются замкнутыми множествами. По крайней мере одну из этих частей нельзя покрыть конечным набором множеств семейства $\{G\alpha\}$. Берем теперь кубик, содержащий такую часть А, этот кубик также делим на 2^m одинаковых замкнутых кубиков и находим среди них такой, что содержащуюся в нем часть А нельзя покрыть конечным набором множеств семейства $\{G\alpha\}$. Продолжив неограниченно такое построение, получим последовательность замкнутых вложенных кубов, диаметры которых стремятся к нулю и в каждом кубе есть точки множества A. Согласно теореме о вложенных стягивающихся прямоугольниках существует точка c, принадлежащая всем этим кубам, которая в силу замкнутости множества A принадлежит A. В семействе $\{G\alpha\}$ имеется множество G_{α^0} , которому принадлежит точка c, причем является его внутренней точкой. Значит, достаточно малая $O(c)$, содержится в G_{α^0}. Так как диаметры кубиков построенной последовательности стремятся к нулю, то все эти кубики, начиная с некоторого, попадут в указанную $O(c)$, таким образом, будут покрыты множеством G_{α^0} . Получено противоречие, поскольку кубики выбирались так, что содержащиеся в них части A нельзя покрыть конечным набором множеств семейства $\{G\alpha\}$.

Пределы функций нескольких переменных

Пусть $f(x) = f(x_1, ..., x_m) : R^m \supset D \to R$, и $x^0 \in D'$.

Определение по Коши

Число A называют пределом функции f в точке $\mathbf{x}^0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \ \forall \mathbf{x} \in D$$
$$0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow \| f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = A$ или $f(\mathbf{x}) \xrightarrow[\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0]{D} A$.

Определение по Гейне

$$\forall \{\mathbf{x}^n\} \subset D \setminus \{\mathbf{x}^0\} : \mathbf{x}^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbf{x}^0 \Rightarrow f(\mathbf{x}^n) \xrightarrow[n \to \infty]{} A$$

Теорема

Определения по Коши и Гейне эквивалентны.

Доказательство

```
Доказательство повторяет доказательство в одномерном случае.
```

$\Rightarrow$ Пусть A – предел функции f в точке $\mathbf{x}^0$ по Коши. Покажем, что A является пределом и по Гейне. Рассмотрим произвольную $\{\mathbf{x}^n\} \subset D \setminus \{\mathbf{x}^0\} : \mathbf{x}^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbf{x}^0.$ По заданному $\varepsilon > 0$ найдем $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что при всех $\mathbf{x}$, для которых $0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \delta_\varepsilon$, выполняется условие $|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$. Так как $\mathbf{x}^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathbf{x}^0$, то существует число N, зависящее от этого δ_ε, а в конечном счете зависящее от ε, такое, что $\forall n > N$ справедлива оценка $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \delta_\varepsilon$. Тогда для этих n имеем $|f(\mathbf{x}^n) - A| < \varepsilon$, т. е. $A = \lim_{n \to \infty} f(\mathbf{x}^n)$. Таким образом, A является пределом функции f по Гейне.

$\Leftarrow$ Пусть A – предел функции f в точке $\mathbf{x}^0$ по Гейне. Покажем, что A является пределом и по Коши. Предположим, что это не так.

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta \ \exists \mathbf{x} \in D \ 0 < \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \delta : |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Возьмем последовательно $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Для каждого n получим точку

$$\mathbf{x}^n \neq \mathbf{x}^0, \rho(\mathbf{x}^n, \mathbf{x}^0) < \frac{1}{n}, |f(\mathbf{x}^n) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Эта последовательность относится к числу тех, которые рассматриваются в определении предела по Гейне, но для нее $|f(\mathbf{x}^n) - A| \geq \varepsilon_0$, что противоречит условию, что A -- предел функции f по Гейне. ■

Теорема (Критерий Коши)

Пусть $f:\mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}$ и $\mathbf{x}^0 \in D'$.

Функция f имеет предел в точке $\mathbf{x}^0$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in D \setminus \{\mathbf{x}^0\} : \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in O_\delta(\mathbf{x}^0) \Rightarrow |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \varepsilon$$

Теорема (Простейшие свойства пределов)

Если функция имеет конечный предел в точке, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки

Если $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = A \neq 0$, то $\exists O(\mathbf{x}^0) : x \in D \cap \check{O}(\mathbf{x}^0) \Rightarrow |f(\mathbf{x})| > \frac{A}{2}$

Если $\forall x \in D \cap \check{O}(\mathbf{x}^0) : f(\mathbf{x}) \geq g(\mathbf{x})$, то $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \geq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} g(\mathbf{x})$,

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} g(\mathbf{x})$

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}(f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) - \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} g(\mathbf{x})$

$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}(f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) \cdot \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} g(\mathbf{x})$

$lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0}(f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x})/\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} g(\mathbf{x})$, если $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} g(\mathbf{x}) \neq 0$

Определение (Предел по направлению)

Пусть f определена в $\check{O}(\mathbf{x}^0) = O(x_1^0, \ldots, x_m^0)$. $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ – произвольное направление и

$$L: \begin{cases} x_1 = x_1^0 + a_1 t \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = x_m^0 + a_m t \end{cases}, t \geq 0.$$

Предел функции f по этому лучу при стремлении к точке $\mathbf{x}^0$ называется **пределом по направлению $\mathbf{a}$** в точке $\mathbf{x}^0$

Замечание

Предел по направлению является пределом при $t \to +0$ функции одной переменной $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{a}t) = f(x_1^0 + a_1 t, \ldots, x_m^0 + a_m t)$.

Замечание

Если у функции существует предел в точке, то все пределы по направлениям существуют и равны этому пределу.

Определение (повторные пределы)

Пусть функция $f(x,y)$ определена в проколотой окрестности точки (x^0, y^0). **Повторными пределами** функции $f(x,y)$ в точке (x^0,y^0) называют пределы $\lim_{x\to x^0}\left(\lim_{y\to y^0} f(x,y)\right)$ и $\lim_{y\to y^0}\left(\lim_{x\to x^0} f(x,y)\right)$.

Теорема о связи двойного и повторных пределов

Пусть функция $f(x, y)$ определена в $\check{O}(x^0, y^0)$, существует $\lim_{(x,y)\to(x^0,y^0)} f(x, y) = A$, и $\forall y \in \check{O}(y_0)$ существует $\lim_{x\to x^0} f(x, y)$, тогда существует :

$$\lim_{y\to y^0}\left(\lim_{x\to x^0} f(x, y)\right) = A$$

Доказательство

По условию

$$\forall\,\varepsilon > 0\exists\,\delta_\varepsilon > 0 : 0 < \rho((x, y), (x^0, y^0)) < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x, y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Перейдем к пределу в последнем неравенстве

$$\left|\lim_{x\to x^0} f(x, y) - A\right| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Эта оценка имеет место для всех y из некоторой проколотой окрестности точки y_0, а это и есть требуемое равенство. ■

Непрерывность сложной функции

Определение

Функция f **непрерывна** в точке $\mathbf{x}^0$, если

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon > 0\ \ :\ \forall\mathbf{x} \in D\ \ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \delta_\varepsilon\ \ \ \Rightarrow\ \ |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| < \varepsilon.$$

Теорема (непрерывность сложной функции)

Если функция $g(\mathbf{y}) = g(y_1, \ldots, y_m) :\ \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $\mathbf{y}^0 \in E$, а функции $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}) :\ \mathbb{R}^s \supset D \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_s^0) \in D$, причем $\mathbf{y}^0 = (f_1(\mathbf{x}^0), \ldots, f_m(\mathbf{x}^0))$, то сложная функция $h(\mathbf{x}) = g\left(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\right) :\ \mathbb{R}^s \supset D \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}^0$.

Доказательство.

По определению непрерывности $g(\mathbf{y})$ в точке $\mathbf{y}^0$,

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\sigma(\varepsilon) > 0\ \ :\ \forall\mathbf{y} \in E\ \ \rho(\mathbf{y}, \mathbf{y}^0) < \sigma(\varepsilon)\ \ \ \Rightarrow\ \ |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{y}^0)| < \varepsilon.$$

Из непрерывности $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^0$, $\ \forall\,\sigma(\varepsilon) > 0$

$$\begin{gathered}\exists\,\delta\left(\sigma(\varepsilon)\right) = \delta_\varepsilon > 0 :\\ \forall\mathbf{x} \in D\ \ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \delta_\varepsilon\ \ \ \Rightarrow\ \ |f_k(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x}^0)| < \sigma(\varepsilon).\end{gathered}$$

$$\rho_\infty\left(\left(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\right), \left(f_1(\mathbf{x}^0), \ldots, f_m(\mathbf{x}^0)\right)\right) = \max_k |f_k(\mathbf{x}) - f_k(\mathbf{x}^0)| < \sigma(\varepsilon).$$

$$\begin{gathered}\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon > 0 :\\ \forall\mathbf{x} \in D\ \ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \delta_\varepsilon\ \ \ \Rightarrow\ \ |h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}^0)| =\end{gathered}$$

$$= \left|g(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) - g(f_1(\mathbf{x}^0), \ldots, f_m(\mathbf{x}^0))\right| = |g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{y}^0)| < \varepsilon. ■$$

Теоремы Вейерштрасса

Теорема (Вейерштрасса)

Образом компактного множества при непрерывном отображении является компакт.

Теорема об ограниченности непрерывной функции

Если f непрерывна на компактном K, то f ограничена на K.

Доказательство

о/п.

$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists\, \mathbf{x}^n \in K : |f(\mathbf{x}^n)| > n$, т.е. $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}^n) = \infty$. $\{\mathbf{x}^n\}$ ограничена, поэтому по т. Б.-В. $\exists \mathbf{x}^{n_k} \to \mathbf{x}^0 \in K$.

По определению непрерывности $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{n_k}) = f(\mathbf{x}^0) \neq \infty$. $\blacksquare$

Теорема о достижимости точной верхней граней

Если f непрерывна на компактном K, то f достигает своих точной верхней и точной нижней граней.

Доказательство

Докажем достижимость точной верхней грани. Пусть $M = \sup_{x\in k} f(\mathbf{x})$. $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists\, \mathbf{x}^n \in K :$ $M - \frac{1}{n} < f(\mathbf{x}^n) \leq M$, тогда $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}^n) = M$. $\{\mathbf{x}^n\}$ ограничена, поэтому по т. Б.-В. $\exists \mathbf{x}^{n_k} \to \mathbf{x}^0 \in K$. По определению непрерывности $\lim_{k\to\infty} f(\mathbf{x}^{n_k}) = f(\mathbf{x}^0) = M$. $\blacksquare$

Определение

$f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \supset D \to \mathbb{R}$, **равномерно непрерывна** на D, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \;:\; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \;\; \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_\varepsilon \;\;\Rightarrow\;\; |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Теорема (Кантора о равномерной непрерывности)

Если f непрерывна на компактном K , то f равномерно непрерывна на K.

Доказательство.

о/п.

$\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, \delta > 0 \;:\; \exists\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in D \;\; \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_\varepsilon \;\; \wedge \;\; |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \geq \varepsilon$. $\delta = 1,\; \frac{1}{2},\; \frac{1}{3}, \ldots \;\; \exists \mathbf{x}^n, \mathbf{y}^n \in K : \;\; |\rho(\mathbf{x}^n, \mathbf{y}^n)| \leq \frac{1}{n} \;\wedge |f(\mathbf{x}^n) - f(\mathbf{y}^n)| \geq \varepsilon$. $\{\mathbf{x}^n\}$ ограничена, поэтому по т. Б.-В. $\exists\, \mathbf{x}^{n_k} \to \mathbf{x}^0 \in K$. $\rho(\mathbf{y}^{n_k}, \mathbf{x}^0) \leq \rho(\mathbf{y}^{n_k}, \mathbf{x}^{n_k}) + \rho(\mathbf{x}^{n_k}, \mathbf{x}^0) < \frac{1}{n_k} + \rho(\mathbf{x}^{n_k}, \mathbf{x}^0) \to 0$, поэтому $\mathbf{y}^{n_k} \to \mathbf{x}^0$ Из непрерывности $\lim_{k\to\infty} \left(f(\mathbf{x}^{n_k}) - f(\mathbf{y}^{n_k})\right) = f(\mathbf{x}^0) - f(\mathbf{x}^0) = 0$, что противоречит неравенству $|f(\mathbf{x}^{n_k}) - f(\mathbf{y}^{n_k})| \geq \varepsilon$. $\blacksquare$

Определение (линейно связанное множество)

Множество называется **линейно связным**, если любые две точки, этого множества, можно соединить непрерывной кривой.

Теорема (Коши о промежуточном значении)

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна на связном множестве D, и для точек $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in D,\ f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{b})$. Тогда $\forall\, C\ \in (f(\mathbf{a}); f(\mathbf{b}))$ существует $\mathbf{c}\ \in D$ такая, что $f(\mathbf{c}) = C$.

Доказательство.

Пусть $\gamma(t) = \begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m = x_m(t) \end{cases},\quad [t_0, T] \to E \subset D$ - такая непрерывная кривая, что $\gamma(t_0) = \mathbf{a},\ \gamma(T) = \mathbf{b}$.

Тогда сложная функция $g(t) = f(x_1(t), \ldots, x_m(t))$ непрерывна на $[t_0, T]$.

Значит $\forall\, C \in (f(\mathbf{a}); f(\mathbf{b})) = (g(t_0); f(T))\ \exists\, t^* \in [t_0, T]:\ g(t^*) = C$. Точка $\mathbf{c} = \gamma(t^*) \in D$ искомая: $f(\mathbf{c}) = g(t^*) = C$.

Дифференцируемость ФНП

Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ определена в $O(\mathbf{x}^0)$.

Определение (частная производная)

Если у функции $g(x_k) = f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0)$ существует производная в точке x_k^0, то это значение называют **частной производной** функции f в точке $\mathbf{x}^0$ по переменной x_k.

Обозначение: $f'_{x_k}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^0)$.

Примеры.

$f(x, y) = xy^2,\ \ f'_x(x, y) = y^2, f'_y(x, y) = 2xy.$

$f(x, y) = x^y,\ \ f'_x(x, y) = yx^{y-1},\ \ f'_y(x, y) = x^y \ln(x).$

$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ f'_x(0, 0) = f'_x(x, 0) = \left(\frac{0}{|x|}\right)'_x \Big|_{x=0} = 0.$

Определение (приращение функции)

Приращением функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^0$, соответствующим приращению $\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m) = (x_1 - x_1^0, \ldots, x_m - x_m^0)$ называется величина $\Delta f(\mathbf{x}^0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)$.

Определение (дифференцируемость функции)

Функция f **дифференцируема** в точке $\mathbf{x}^0$, если $\exists A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}$:

$$\Delta f(\mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^{m} A_k \Delta x_k + o\left(\|\Delta\mathbf{x}\|\right),\ \ \|\Delta\mathbf{x}\| \to 0.$$

Теорема (необходимое условие дифференцируемости)

Если функция f дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$, то она непрерывна в этой точке, существуют частные производные по всем переменным и справедливы равенства $f'_{x_k}(\mathbf{x}^0) = A_k$.

Доказательство

Если $\|\Delta\mathbf{x}\| \to 0$, то $\forall\, k \in \overline{1,m} \quad x_k \to 0$ и $\Delta f(\mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^m A_k \Delta x_k + o\left(\|\Delta\mathbf{x}\|\right) \to 0$, а это и есть непрерывность.

Рассмотрим $\Delta\mathbf{x} = (0, \ldots, \Delta x_k, \ldots, 0)$. Тогда из дифференцируемости

$$\Delta f(\mathbf{x}^0) = A_k \Delta x_k + o\left(|\Delta x_k|\right).$$

$$f'_{x_k}(\mathbf{x}^0) = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta f(\mathbf{x}^0)}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} A_k + o(1) = A_k. \quad \blacksquare$$

Определение

Если функция f дифференцируема в $\mathbf{x}^0$ то линейную часть приращения

$$df(\mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^m f'_{x_k}(\mathbf{x}^0)\Delta x_k$$

называют **дифференциалом**.

Теорема (достаточное условие дифференцируемости)

Если у функции $f(\mathbf{x})$ существуют частные производные по всем переменным в точке $\mathbf{x}^0$, и $(m-1)$ из них непрерывны в этой точке, то f дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$.

Доказательство

Пусть непрерывны $f'_{x_k}(\mathbf{x}),\ k \in \overline{1, m-1}$. $\Delta f = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) == f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) + +f(x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) + + \ldots + f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$.

По теореме Лагранжа $\exists\, c_k \in [x_k^0, x_k^0 + \Delta x_k],\ k \in \overline{1, m-1} : \Delta f = f'_{x_1}(c_1, x_2^0 + \Delta x_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)\Delta x_1 + +f'_{x_2}(x_1^0, c_2, \ldots, x_m^0 + \Delta x_m)\Delta x_2 + \ldots + f'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)\Delta x_m + o(|x_m|) == \sum_{k=1}^m f'_{x_k}\Delta x_k + o\left(\|\Delta\mathbf{x}\|\right). \quad \blacksquare$

Теорема о дифференцируемости сложной функции

Если функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$, а функции

$x_1(\mathbf{t}), \ldots, x_m(\mathbf{t})$ дифференцируемы в точке $\mathbf{t}^0 = (t_1^0, \ldots, t_s^0)$, причем $\mathbf{x}^0 = (x_1(\mathbf{t}^0), \ldots, x_m(\mathbf{t}^0))$, то сложная функция $g(\mathbf{t}) = f\left(x_1(\mathbf{t}), \ldots, x_m(\mathbf{t})\right)$ дифференцируема в точке $\mathbf{t}^0$ и

$$g'_{t_j}(\mathbf{t}^0) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}^0) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial t_j}(\mathbf{t}^0).$$

Доказательство

По определению дифференцируемости:

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \Delta x_k + o\left(\|\Delta \mathbf{x}\|\right),$$

$$\Delta x_k = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \Delta t_j + o\left(\|\Delta \mathbf{t}\|\right), \quad j = 1, \ldots, s.$$

$$\Delta g = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \Delta t_j + o\left(\|\Delta \mathbf{t}\|\right) \right) + o\left(\|\Delta \mathbf{x}\|\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \Delta t_j + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} o\left(\|\Delta \mathbf{t}\|\right) + o\left(\|\Delta \mathbf{x}\|\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \Delta t_j + o\left(\|\Delta \mathbf{t}\|\right) + o\left(\|\Delta \mathbf{x}\|\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \right) \Delta t_j + o\left(\|\Delta \mathbf{t}\|\right).$$

$$\|\Delta \mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{m} |x_k| = \sum_{k=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \Delta t_j + o\left(\|\Delta \mathbf{t}\|\right) \right| \leq \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{\partial x_k}{\partial t_j} \right| \|\Delta \mathbf{t}\| + o\left(\|\Delta \mathbf{t}\|\right)$$

Определение (Производная по направлению)

Пусть заданы $f(\mathbf{x})$, определенная в окрестности $\mathbf{x}^0$ и единичный вектор $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_m), \ \|\mathbf{a}\|_2 = 1.$

Производной функции f по направлению $\mathbf{a}$ в точке $\mathbf{x}^0$ называют

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}^0) = \lim_{t \to +0} \frac{f(x_1^0 + a_1 t, \ldots, x_m^0 + a_m t) - f(x_1^0, \ldots, x_m^0)}{t}$$

Замечание

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\mathbf{x}^0) \cdot (x_k^0 + a_k t)' = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(\mathbf{x}^0) \cdot a_k.$$

Определение

Градиентом называется $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0) = \left(f'_{x_1}(\mathbf{x}^0), \ldots, f'_{x_m}(\mathbf{x}^0) \right)$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}^0) \right| = |(\mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0), \mathbf{a})| \leq |\mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0)|$$

Градиент – это вектор, длина которого равна максимальному значению производной по направлению, а направлением градиента является то, производная по которому имеет наибольшее значение.

Определение (касательная плоскость)

L - называется касательной плоскостью к $f(x)$ в точке x_0, если $\rho(M,L)=o(\rho(M.M^0))$ $M \to M^0$, где $M^0=(X^0,f(x^0))=(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0,f(x_1^0,x_2^0,...,x_m^0))$ $M=(x,f(x))$

Теорема (геометрический смысл дифференцируемости)

f - дифференцируема в точке $x^0 <=> \exists$ касательная плоскость L, не параллельная оси O_y

$$y-y^0=\sum_{k=1}^{m} f_k^{'}(x^0)(x_k-x_k^0)$$

Доказательство

$\rightarrow$

$$f(x)-f(x^0)=\sum f_k^{'}(x^0)(x_k-x_k^0)+o(|x-x_k|)$$

$$\rho(M,L)=\frac{|f(x)-y^0-\sum_{k=1}^{m} f_k^{'}(x^0)(x_k-x_k^0)|}{\sqrt{(\sum(f_k^{'}(x^0))^2)+1}}=$$

$$o(|x-x^0|)=o(\sqrt{|x-x^0|+(f(x)-y)^2})=o(M,M^0)$$

$\leftarrow$ Пусть $\sum_{k=1}^{m} A_k(x_k-x_k^0)+B(y-y_0)=0$ касательная плоскость ($\sum A_k^2+B^2=1, B>0$)

$$(*)\ \ \rho(M,L)=|\sum A_k(x_k-x_k^0)+B(f(x)-y^0)|<=$$

$$\frac{B}{2}\rho(M,M^0)=\frac{B}{2}\sqrt{(f(x)-y^0)^2+||x-x^0||^2}<=$$

$$<=\frac{B}{2}(|f(x)-y^0|+||x-x^0||)$$

теперь в звёздочке сумму А переносим вправо, а $\frac{B}{2}|f(x)-y^0|$ влево

$$B|f(x)-y^0|-\frac{B}{2}|f(x)-y^0|<=\frac{B}{2}||x-x^0||+|\sum A_k(x_k-x_k^0)|$$

по неравенству Коши-Буняковского:

$$\frac{B}{2}|f(x)-y^0|<=||x-x^0||(\frac{B}{2}+1)$$

домножим на $\frac{2}{B}$

$$|f(x)-y^0|<=\gamma||x-x^0||, \gamma=1+\frac{2}{B}$$

$$\sum A_k(x_k-x_k^0)+B(f(x)-y^0)=o(\gamma||x-x^0||+||x-x^0||)$$

$$f(x)=y^0-\sum\frac{A_k}{B}(x_k-x_k^0)+o(||x-x^0||)$$

$$(y^0=f(x^0))$$

$$f_k^{'}=-\frac{A_k}{B}$$

Производные высших порядков

Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ определена и имеет $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ в $O(\mathbf{x}^0)$.

Определение (производная второго порядка)

Если существует $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$, то ее называют частной **производной второго порядка**.

Обозначение: $f''_{x_k x_j}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}^0)$.

Если $k \neq j$, то производную называют **смешанной**. Если $k = j$, то также используют обозначение $f''_{x_k x_k}(\mathbf{x}^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(\mathbf{x}^0)$.

Производные высших порядков определяются аналогично. У функции m переменных m^s частных производных s-го порядка.

Пример.

$$f(x,y) = xy^2. \;\; f'_x(x,y) = y^2, \;\; f'_y(x,y) = 2xy$$

$$f''_{xx}(x,y) = 0, \;\; f''_{xy}(x,y) = 2y, \;\; f''_{yx}(x,y) = 2y, \;\; f''_{yy}(x,y) = 2x.$$

$$f'''_{xxx} = f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx} = f'''_{yyy}(x,y) = 0, \;\; f'''_{xyy} = f'''_{yxy} = f'''_{yyx} = 2.$$

Пример Шварца (значения смешанных частных производных зависят от порядка дифференцирования)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f'_x(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \;\; f'_y(x,y) = -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f''_{xy}(0,0) = (f'_x(0,y))'_y\,\big|_{y=0} = (-y)'_y\Big|_{y=0} = -1.$$

$$f''_{yx}(0,0) = \left(f'_y(x,0)\right)'_x\,\big|_{y=0} = (x)'_x\Big|_{y=0} = 1.$$

Теорема Янга (о равенстве смешанных производных

Если частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ определены в $O(x^0, y^0)$ и дифференцируемы в (x^0, y^0), то смешанные частные производные равны в этой точке:

$$f''_{xy}(x^0, y^0) = f''_{yx}(x^0, y^0).$$

Доказательство

Рассмотрим разность второго порядка в точке (x^0, y^0), соответствующую приращению $(\Delta x, \Delta y) = (h, h)$:

$\Delta^2 f = f(x^0+h, y^0+h) - f(x^0, y^0+h) - f(x^0+h, y^0) - f(x^0, y^0) = g(y^0+h) - g(y^0)$, где $g(y) = f(x^0+h, y) - f(x^0, y)$.

По теореме Лагранжа $\exists\theta \in (0,1) : \Delta^2 f = g'(y^0+\theta h)h = \left(f'_y(x^0+h, y^0+\theta h) - f'_y(x^0, y^0+\theta h)\right) h$.

По определению дифференцируемости f'_y $f'_y(x^0+h, y^0+\theta h) = f'_y(x^0, y^0) + f''_{yx}(x^0, y^0)h + f''_{yy}(x^0, y^0)\theta h + o(\|(h,h)\|)$, $f'_y(x^0, y^0+\theta h) = f'_y(x^0, y^0) + f''_{yx}(x^0, y^0) \cdot 0 + f''_{yy}(x^0, y^0)\theta h + o(\|(h,h)\|)$.

Окончательно $\Delta^2 f = f''_{yx}(x^0, y^0)h^2 + o(h^2)$.

Аналогично $\Delta^2 f = f(x^0+h, y^0+h) - f(x^0, y^0+h) - f(x^0+h, y^0) - f(x^0, y^0) =\}= \varphi(x^0+h) - \varphi(x^0)$, где $\varphi(y) = f(y^0+h, y) - f(y^0, y)$.

По теореме Лагранжа $\exists\eta \in (0,1) : \Delta^2 f = \varphi'(x^0+\eta h)h = \left(f'_x(x^0+h\eta, y^0+h) - f'_x(x^0+\eta h, y^0)\right) h$.

По определению дифференцируемости f'_x $f'_x(x^0+\eta h, y^0+h) = f'_x(x^0, y^0) + f''_{xx}(x^0, y^0)\eta h + f''_{xy}(x^0, y^0)h + o(\|(h,h)\|)$, $f'_x(x^0+\eta h, y^0) = f'_x(x^0, y^0) + f''_{xx}(x^0, y^0)\eta h + f''_{xy}(x^0, y^0) \cdot 0 + o(\|(h,h)\|)$.

Теперь та же самая разность $\Delta^2 f = f''_{xy}(x^0, y^0)h^2 + o(h^2) = f''_{yx}(x^0, y^0)h^2 + o(h^2)$, откуда делением на h^2 получается необходимое равенство $f''_{xy}(x^0, y^0) = f''_{yx}(x^0, y^0)$. ■

Теорема Шварца (о равенстве смешанных производных)

Если частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ определены в $O(x^0, y^0)$, смешанная частная производная $f''_{xy}(x,y)$ определена в $O(x^0, y^0)$ и непрерывна в (x^0, y^0), то существует $f''_{yx}(x^0, y^0)$ и справедливо равенство

$$f''_{xy}(x^0, y^0) = f''_{yx}(x^0, y^0).$$

Доказательство схоже с Янгом

Примеры равенства производных

(необязательно знать)

Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах

$(3x^2 - 3y^2 + 4x)dx - (6xy + 4y)dy = 0$ $(3x^2 - 3y^2 + 4x)'_y = -6y = (6xy+4y)'_x$ $x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + C = 0$

Вещественная и мнимая часть комплексных функций

$(x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ $Ln(x+iy) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i * arctg\frac{y}{x} + iC$

Определение (дифференциал второго порядка)

Если все первые частные производные f'_{x_k} дифференцируемы, то функция f называется дважды дифференцируемой, и дифференциалом второго порядка называется $d^2 f = d(df)$.

Дифференциалы более высоких порядков определяются аналогично $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

Пример

$f(x,y)=xy^2,\ \ f'_x=y^2,\ \ f'_x=2xy,\ \ df=y^2dx+2xydy.\ d^2f=d(y^2dx+2xydy)=0dxdx+2ydydx+2ydxdy+2xdydy.$

Утверждение

Если переменные x_k **независимые**, то $d^2f=\sum_{k=1}^m\sum_{k=j}^m f''_{x_kx_j}dx_kdx_j.$

Утверждение (инвариантность формы дифференциала)

При замене независимых переменных x_k на функции, зависящие от каких-либо других переменных, форма первого дифференциала не меняется. Для дифференциалов старших порядков это не так.

Доказательство

Пусть $g(\mathbf{t})=g(t_1,\dots,t_s)=f(x_1(\mathbf{t}),\dots,x_m(\mathbf{t}))$. По определению дифференциала $dg=\sum_{k=1}^s g'_{t_k}dt_k$.

Из теоремы о д-ти сложной функции $dg=\sum_{k=1}^m f'_{x_k}\sum_{j=1}^s\frac{\partial x_k}{\partial t_j}dt_j$.

Но если учесть, что $dx_k=\sum_{j=1}^s\frac{\partial x_k}{\partial t_j}dt_j$, то

$$dg=\sum_{k=1}^s f'_{x_k}dx_k.$$

$$d^2f=d\left(\sum_{k=1}^m f'_{x_k}dx_k\right)=\sum_{k=1}^m d\left(f'_{x_k}dx_k\right)=\sum_{k=1}^m\left(df'_{x_k}\cdot dx_k+f'_{x_k}\cdot d(dx_k)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^m\left(\sum_{j=1}^m f''_{x_kx_j}dx_jdx_k+f'_{x_k}\cdot d^2x_k\right)=\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^m f''_{x_kx_j}dx_kdx_j+\sum_{k=1}^m f'_{x_k}\cdot d^2x_k.$$

Пример.

$f(x,y)=e^x\sin(y),\ \ x(p,q)=p+q,\ \ y(p,q)=pq,\ \ g(p,q)=e^{p+q}\sin(pq).$

$dg=g'_pdp+g'_qdq==(e^{p+q}\sin(pq)+e^{p+q}\cos(pq)q)dp+(e^{p+q}\sin(pq)+e^{p+q}\cos(pq)p)dq==e^{p+q}\sin(pq)(dp+dq)+e^{p+q}\cos(pq)(qdp+pdq)=f'_xdx+f'_ydy.\}$

$d^2g=g''_{pp}(dp)^2+2g''_{pq}dpdq+g''_{qq}(dq)^2==$
$\left(e^{p+q}\sin(pq)+2e^{p+q}\cos(pq)q-e^{p+q}\sin(pq)q^2\right)(dp)^2+$
$+\left(e^{p+q}\sin(pq)+e^{p+q}\cos(pq)(p+q)-e^{p+q}\sin(pq)qp+e^{p+q}\cos(pq)\right)2dpdq+$
$\left(e^{p+q}\sin(pq)+2e^{p+q}\cos(pq)p-e^{p+q}\sin(pq)p^2\right)(dq)^2$

$dx=dp+dq,\ \ (dx)^2=(dp)^2+2dpdq+(dq)^2, dy=qdp+pdq,\ \ (dy)^2=q^2(dp)^2+2pqdpdq+p^2(dq)^2, dxdy=q(dp)^2+(p+q)dpdq+p(dq)^2,\ \ d^2x=0,\ d^2y=2dpdq.$

$dg=f''_{xx}(dx)^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{yy}(dy)^2+f'_yd^2y.$

На случай, если вы ничего не поняли: https://youtu.be/gCHiXJp-s0U?list=PL-HkTwjSc6GwKq9Ylc5xp4cSqUGqBIhKj&t=2603

Теорема (формула Тейлора в форме Лагранжа)

Если функция n раз дифференцируема в $O(\mathbf{x}^0)$, то $\forall\, x \in O(\mathbf{x}^0),\ \exists\, \theta \in (0;1),\ \mathbf{c} = \mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \in (\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_k=1}^{m} \frac{\partial^k\, f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}} (x_{j_1} - x_{j_1}^0) \cdots (x_{j_k} - x_{j_k}^0) +$$

$$+ \frac{1}{n!} \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_m=1}^{m} \frac{\partial^n\, f(\mathbf{c})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} (x_{j_1} - x_{j_1}^0) \cdots (x_{j_k} - x_{j_m}^0)$$

Доказательство

$g(t) = f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) = f(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), \ldots, x_m^0 + t(x_m - x_m^0)).$

По формуле Тейлора для функции одной переменной $\exists\, \theta \in (0;1)$:

$$g(t) = g(0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{g^{(n)}(\theta t)}{n!} t^n.$$

Осталось подставить $t = 1$ и заметить, что

$$g(1) = f(\mathbf{x}),\ \ g(0) = f(\mathbf{x}^0),\ \ g'(0) = \sum_{j_1=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{j_1}} (x_{j_1} - x_{j_1}^0), \ldots$$

Теорема (формула Тейлора в форме Лагранжа)

Если положить $dx_k = \Delta x_k = x_k - x_k^0$, то если функция n раз диф-ма в $O(\mathbf{x}^0)$, то $\forall\, x \in O(\mathbf{x}^0),\ \exists\, \mathbf{c} \in (\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{d^k f(\mathbf{x}^0)}{k!} + \frac{d^n f(\mathbf{c})}{n!}$$

Теорема (формула Тейлора в форме Пеано)

Если функция n раз непрерывно диф-ма в $O(\mathbf{x}^0)$, то $\forall\, x \in O(\mathbf{x}^0)$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(\mathbf{x}^0)}{k!} + o(\|\Delta x\|^n),\ \ \|\Delta x\| \to 0$$

Важный частный случай

Если функция дважды непрерывно диф-ма в $O(\mathbf{x}^0)$, то $\forall\, x \in O(\mathbf{x}^0)$

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{k=1}^{m} f'_{x_k}(\mathbf{x}^0) \Delta x_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f''_{x_k x_j}(\mathbf{x}^0) \Delta x_k \Delta x_j + o(\|\Delta \mathbf{x}\|^2).$$

Экстремумы функций нескольких переменных

Определение (локальный экстремум)

Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_m) : D \to \mathbb{R}$.

Если $\exists\, O(\mathbf{x}^0) : \forall\, \mathbf{x} \in D \cap O(\mathbf{x}^0) \quad f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0)$, то $\mathbf{x}^0$ называется точкой локального минимума функции f.

Если $\exists\, O(\mathbf{x}^0) : \forall\, \mathbf{x} \in D \cap O(\mathbf{x}^0) \quad f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0)$, то $\mathbf{x}^0$ называется точкой локального максимума функции f.

Если $\exists\, O(\mathbf{x}^0) : \forall\, \mathbf{x} \in D \cap \check{O}(\mathbf{x}^0) \quad f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^0)$, то $\mathbf{x}^0$ называется точкой строгого локального минимума функции f.

Если $\exists\, O(\mathbf{x}^0) : \forall\, \mathbf{x} \in D \cap \check{O}(\mathbf{x}^0) \quad f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^0)$, то $\mathbf{x}^0$ называется точкой строгого локального максимума функции f.

Точки, в которых функция имеет (строгий) локальный максимум или (строгий) локальный минимум, называют точками (строгого) локального экстремума.

Необходимые условия локального экстремума

Теорема (необходимое условие локального экстремума)

Если функция $f(\mathbf{x})$ в точке локального экстремума $\mathbf{x}^0$ имеет частные производные f'_{x_k} по всем переменным, то $f'_{x_k}(\mathbf{x}^0) = 0 \ \ \forall\, k = 1, \ldots, m$.

Равносильные условия $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$ или $df(\mathbf{x}^0) = 0$.

Доказательство

Рассмотрим функцию $g(x_k) = f(x_1^0, \ldots, x_k, \ldots, x_m^0)$. По условию x_k^0 - точка локального экстремума. По теореме Ферма $f'_{x_k}(\mathbf{x}^0) = g'(x_k^0) = 0 \ \ \forall\, k = 1, \ldots, m. \quad \blacksquare$

Определение

Точки, в которых $df(\mathbf{x}^0) = 0$, называются стационарными.

Достаточные условия локального экстремума

Теорема (достаточные условия экстремума)

Пусть f дважды непрерывно дифференцируема в $O(\mathbf{x}^0)$, и $\mathbf{x}^0$ – стационарная.

Определим квадратичную $\Phi(\mathbf{a}) = \Phi(a_1, \ldots, a_m) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} f''_{x_k x_j}(\mathbf{x}^0) a_k a_j$

Если $\Phi(\mathbf{a})$ положительно определенная, то $\mathbf{x}^0$ - точка строгого локального минимума.

Если $\Phi(\mathbf{a})$ отрицательно определенная, то $\mathbf{x}^0$ - точка строгого локального максимума.

Если $\Phi(\mathbf{a})$ знакопеременная, то $\mathbf{x}^0$ - не является экстремумом.

Напоминание

Критерий Сильвестра

Квадратичная форма является положительно определенной, тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы строго положительны.

Квадратичная форма является отрицательно определенной, тогда и только тогда, когда знаки всех угловых миноров ее матрицы чередуются, причем минор порядка 1 отрицателен.

Доказательство

$\mathbf{x}^0$ - стационарная, $\Phi(\mathbf{a}) = \Phi(a_1, \dots, a_m) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_k x_j}(\mathbf{x}^0) a_k a_j$

1. Если $\Phi(\mathbf{a}) > 0$, то $\mathbf{x}^0$ - точка строгого локального минимума. По формуле Тейлора

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{k=1}^m f'_{x_k}(\mathbf{x}^0)\Delta x_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_k x_j}(\mathbf{x}^0)\Delta x_k \Delta x_j + o(\|\Delta\mathbf{x}\|^2).$$

$\sum_{k=1}^m f'_{x_k}(\mathbf{x}^0)\Delta x_k$ уничтожается так как x_0 точка локального экстремума

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{\|\Delta x\|^2}{2}\left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m f''_{x_k x_j}(\mathbf{x}^0)\frac{\Delta x_k}{\|\Delta\mathbf{x}\|}\frac{\Delta x_j}{\|\Delta\mathbf{x}\|} + o(1)\right)$$

Положим $a_k = \frac{\Delta x_k}{\|\Delta\mathbf{x}\|},\ k = 1, \dots, m$. Тогда $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|^2}{2}\big(\Phi(\mathbf{a}) + o(1)\big),\ \ \|\mathbf{a}\| = 1$.

$\{a:\ \|\mathbf{a}\| = 1\} = S(0,1) = B[0,1] \setminus B(0,1)$ - компакт. По теореме Вейерштрасса $\exists a^0 \in S(0,1) : \inf_{a\in S(0,1)} \Phi(\mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{a}^0) > 0$. А значит для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \geq \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|^2}{2}\left(\Phi(\mathbf{a}^0) - \frac{\Phi(\mathbf{a}^0)}{2}\right) = \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|^2}{4}\Phi(\mathbf{a}^0) > 0.$$

Значит $\mathbf{x}^0$ - точка строгого локального минимума.

2. Если $\Phi(\mathbf{a}) < 0$, то $\mathbf{x}^0$ - точка строгого локального максимума.

$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|^2}{2}\big(\Phi(\mathbf{a}) + o(1)\big),\ \ \|\mathbf{a}\| = 1.$

$\{a:\ \|\mathbf{a}\| = 1\} = S(0,1) = B[0,1] \setminus B(0,1)$ - компакт.

По теореме Вейерштрасса $\exists a^0 \in S(0,1) : \sup_{a\in S(0,1)} \Phi(\mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{a}^0) < 0$. А значит для всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|^2}{2}\left(\Phi(\mathbf{a}^0) - \frac{\Phi(\mathbf{a}^0)}{2}\right) = \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|^2}{4}\Phi(\mathbf{a}^0) < 0.$$

Значит $\mathbf{x}^0$ - точка строгого локального максимума.

3. Если $\Phi(\mathbf{a}^1) < 0,\ \Phi(\mathbf{a}^1) > 0$, то $\mathbf{x}^0$ - не точка локального экстремума.

$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|^2}{2}\big(\Phi(\mathbf{a}) + o(1)\big),\ \ \|\mathbf{a}\| = 1.$}

Для любой $O(\mathbf{x}^0)$ найдутся $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in O(\mathbf{x}^0)$, соответствующие $\mathbf{a}^1$ и $\mathbf{a}^2$ такие, что

$$f(\mathbf{x}^1) - f(\mathbf{x}^0) < \frac{\|\Delta\mathbf{x}^1\|^2}{2}\left(\Phi(\mathbf{a}^1) - \frac{\Phi(\mathbf{a}^1)}{2}\right) = \frac{\|\Delta\mathbf{x}^1\|^2}{4}\Phi(\mathbf{a}^1) < 0,$$

$$f(\mathbf{x}^2) - f(\mathbf{x}^0) > \frac{\|\Delta\mathbf{x}^2\|^2}{2}\left(\Phi(\mathbf{a}^2) - \frac{\Phi(\mathbf{a}^2)}{2}\right) = \frac{\|\Delta\mathbf{x}^2\|^2}{4}\Phi(\mathbf{a}^2) > 0$$

Значит $\mathbf{x}^0$ - не точка локального экстремума.

Примеры

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 3x$.

$$f(x) = \begin{cases} f'_x = 2x - y - 3 = 0, \\ f'_y = -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (2,1)$$ - стационарная точка.

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = 2 > 0, \; A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$(x,y) = (2,1)$ - точка строгого локального минимума.

2. $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 - 3x$.

$$f(x) = \begin{cases} f'_x = 2x - 3y - 3 = 0, \\ f'_y = -3x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{6}{5}, -\frac{9}{5}\right)$$ - стационарная точка.

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1 = 2 > 0, A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -5 < 0,$$

в точке $(x,y) = \left(-\frac{6}{5}, -\frac{9}{5}\right)$ экстремума нет.

3. $f(x,y) = x^2y^2(5 - x - y)$.

$$f(x) = \begin{cases} f'_x = 2xy^2(5 - x - y) - x^2y^2 = xy^2(10 - 3x - 2y), \\ f'_y = 2x^2y(5 - x - y) - x^2y^2 = x^2y(10 - 2x - 3y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$(0,y), \;\; (x,0), \;\; (x,y) = (2,2)$ - стационарные точки.

$$\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2(10 - 6x - 2y) & 2xy(10 - 3x - 3y) \\ 2xy(10 - 3x - 3y) & x^2(10 - 2x - 6y) \end{pmatrix}.$$

Для точки $(2,2)$ $A_1 = -24, \;\; A_2 = 24^2 - 16^2 > 0 \;\Rightarrow\; (2,2)$ -- max.

$A_1(0,y) = y^2(10 - 2y), \;\; A_2(0,y) = 0, \;\;\; A_1(x,0) = 0, \;\; A_2(x,0) = 0,$ и теорема о достаточных условиях неприменима. Рассмотрим точку $(0,0)$ и достаточно малые $\Delta x > 0, \; \Delta y > 0.$ $\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = (\Delta x)^2(\Delta y)^2(5 - \Delta x - \Delta y) \geq 0\}$ и $(0,0)$ - точка минимума. Рассмотрим точку $(x,0)$ и достаточно малые $\Delta x > 0, \; \Delta y > 0$. $\Delta f = f(x + \Delta x, \Delta y) - f(x,0) = (x + \Delta x)^2(\Delta y)^2(5 - x - \Delta x - \Delta y)$.

Если $x < 5$, то $\Delta f \geq 0$ и это точки минимума. Если $x > 5$, то $\Delta f \leq 0$ и это точки максимума. Если $x = 5$, то знак Δf зависит $\Delta x, \Delta y$ и экстремума нет.

Неявно заданные функции

Определение

Пусть $F(\mathbf{x}, y) = F(x_1, \ldots, x_m, y) : \; \mathbb{R}^{m+1} \supset D \to \mathbb{R}$.

Если на некотором множестве E существует $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_m) : \; \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}$, $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = F(x_1, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m)) = 0, \;\; \forall \, \mathbf{x} \in E$, то говорят, что функция неявно задана уравнением $F(\mathbf{x}, y) = 0$.

Пример.

$x^2 + y^2 = 1.$

$f(x) = \sqrt{1-x^2},\;\; f(x) = -\sqrt{1-x^2},\;\;\; x \in [-1, 1].$

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in X, \\ -\sqrt{1-x^2}, & x \notin X. \end{cases}$

Теорема (о неявной функции, заданной одним уравнением)

Пусть $F(\mathbf{x}, y)$ непрерывна в $O(\mathbf{x}^0, y^0)$, причем $F(\mathbf{x}^0, y^0) = 0$.

Если $F'_y(\mathbf{x}, y)$ непрерывна в точке $\mathbf{x}^0, y^0$, и $F'_y(\mathbf{x}^0, y^0) \neq 0$, то существуют $K = \{\mathbf{x}:\ |x_k - x_k^0| \leq \delta\}$ и $\varepsilon > 0$, что на прямоугольнике $K \times [y^0 - \varepsilon, y^0 + \varepsilon]$ определена неявная функция, то есть существует единственная $f(\mathbf{x}) : F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = F(x_1, \ldots, x_m, f(x_1, \ldots, x_m)) = 0,\ \ \forall\, \mathbf{x} \in K$, при этом $f(\mathbf{x})$ непрерывна.

Если дополнительно $F(\mathbf{x}, y)$ дифференцируема в точке $(\mathbf{x}^0, y^0)$, то f дифференцируема в $\mathbf{x}^0$ и

$$f'_{x_k}(\mathbf{x}^0) = -\frac{F'_{x_k}(\mathbf{x}^0, y^0)}{F'_y(\mathbf{x}^0, y^0)}.$$

Доказательство

Б.О.О. $F'_y(\mathbf{x}^0, y_0) > 0.$

Тогда для достаточно малого $\varepsilon:\ \ F(\mathbf{x}^0, y_0 + \varepsilon) > 0,\ F(\mathbf{x}^0, y_0 - \varepsilon) < 0.$

По теореме об отделимости от нуля найдутся

$$O(\mathbf{x}^0, y_0 + \varepsilon):\ \ \forall\, (\mathbf{x}, y) \in O(\mathbf{x}^0, y_0 + \varepsilon),\ \ F(\mathbf{x}, y) > 0,$$

$$O(\mathbf{x}^0, y_0 - \varepsilon):\ \ \forall\, (\mathbf{x}, y) \in O(\mathbf{x}^0, y_0 - \varepsilon),\ \ F(\mathbf{x}, y) < 0.$$

Выберем δ настолько малым, чтобы для $K = \{\mathbf{x}:\ |x_k - x_k^0| \leq \delta\}$ неравенства $F(\mathbf{x}, y_0 + \varepsilon) > 0,\ F(\mathbf{x}, y_0 - \varepsilon) < 0$ выполнялись для всех $\mathbf{x} \in K$.

Рассмотрим $\forall\, \mathbf{x}^* \in K$. По построению $F(\mathbf{x}^*, y^0 + \varepsilon) > 0,\ F(\mathbf{x}^*, y^0 - \varepsilon) < 0$, значит по теореме о промежуточном значении $\exists\, y^* \in [y^0 - \varepsilon, y^0 + \varepsilon]:\ F(\mathbf{x}^*, y^*) = 0$, а из $F'_y(\mathbf{x}^0, y_0) > 0$ и непрерывности F'_y такая точка единственна. Непрерывность следует из построения. Если $F(\mathbf{x}, y)$ дифференцируема, то по формуле Тейлора

$$0 = F(x_1^0 + \Delta x_1, \ldots, x_m^0, y^0 + \Delta y) - F(x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots, x_m^0, y^0) =$$

$$F'_{x_1}(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_m^0, y^0 + \theta\Delta y)\Delta x_1 + F'_y(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_m^0, y^0 + \theta\Delta y)\Delta y.$$

$$f'_{x_1} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} -\frac{F'_{x_1}(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_m^0, y^0 + \theta\Delta y)}{F'_y(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \ldots, x_m^0, y^0 + \theta\Delta y)} = -\frac{F'_{x_k}(\mathbf{x}^0, y^0)}{F'_y(\mathbf{x}^0, y^0)}.$$

Пример.

Лист Декарта $x^3 + y^3 = 3xy$. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,\ \ F'_y = 3y^2 - 3x = 0,\ \ y^6 + y^3 - 3y^3 = 0,\ \ y^3(y^3 - 2) = 0,\ \ y = 0,\ \ y = \sqrt[3]{2}$. Функция не определена в точках $(0, 0)$ и $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

Для нахождения точек экстремума $y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = 0 \ \Leftrightarrow 3x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.

Системы неявных функций

Определение

Пусть функции $f_j(\mathbf{y}) = f_j(y_1, \ldots, y_n), \ \ j = 1, \ldots, n$ имеют частные производные первого порядка по всем переменным в точке $\mathbf{y}^0$. Якобианом называют определитель $J(\mathbf{y}^0) = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)}(\mathbf{y}^0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\left(\mathbf{y}^0\right) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\left(\mathbf{y}^0\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1}\left(\mathbf{y}^0\right) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\left(\mathbf{y}^0\right) \end{vmatrix}$

Теорема (о неявных функциях заданных системой уравнений)

Пусть $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_k(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n), \ \ k = 1, \ldots, n$ непрерывно дифференцируемы в $O(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$, причем $F_k(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = 0$.

Если $J(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = \frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} \neq 0$, то существуют $K_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x}: \ |x_i - x_i^0| \leq \delta, \ i = \overline{1,m}\}, \ \ K_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x}: \ |y_k - y_k^0| \leq \varepsilon, \ j = \overline{1,n}\}$, что система уравнений $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ имеет единственное решение, т.е. существуют непрерывные $f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_n(\mathbf{x})$, определенные на $K_{\mathbf{x}}$:

$$F_k(x_1, \ldots, x_m, f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m)) = 0, \forall \, \mathbf{x} \in K_{\mathbf{x}}, \ k = \overline{1,n}.$$

Доказательство

Б.И. $n = 1$ предыдущая теорема.

П.И. теорема верна для $n - 1, \ \ n \geq 2$.

Ш.И. $J(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \neq 0 \ \Rightarrow J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0, \ \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in O(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$.

Б.О.О. $J_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial(F_1,\ldots,F_{n-1})}{\partial(y_1,\ldots,y_{n-1})}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$.

Для первых $n - 1$ уравнения $F_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \ k = \overline{1, n-1}$ справедливо предположение индукции, то есть $\exists \ f_1(x_1, \ldots, x_m, y_n), \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_m, y_n)$ такие, что $F_k(x_1, \ldots, x_m, f_1(x_1, \ldots, x_m, y_n), \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_m, y_n), y_n) = 0, \ \forall x \in K_{\mathbf{x}}, \ y_n \in [y_n^0 - \varepsilon, y_n^0 + \varepsilon], \ k = \overline{1, n-1}$.

Осталось показать, что

$$F(\mathbf{x}, y_n) = F_n(x_1, \ldots, x_m, f_1(x_1, \ldots, x_m, y_n), \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_m, y_n), y_n) = 0$$

можно разрешить относительно y_n.

А по теореме о существовании неявной функции, заданной одним уравнением, это можно сделать, если $F'_{y_n}(\mathbf{x}^0, y_n^0) \neq 0$.

По теореме о дифференцируемости сложной функции из тождеств

$$F_k(x_1, \ldots, x_m, f_1(x_1, \ldots, x_m, y_n), \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_m, y_n), y_n) = 0,$$

$$\frac{\partial F_k}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial y_n}+\dots+\frac{\partial F_k}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_n}+\frac{\partial F_k}{\partial y_n}=0,\ \ k=\overline{1,n-1}.$$

Также для функции

$$F(\mathbf{x},y_n)=F_n(x_1,\dots,x_m,f_1(x_1,\dots,x_m,y_n),\dots,f_{n-1}(x_1,\dots,x_m,y_n),y_n)$$

$$F'_{y_n}=\frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial y_n}+\dots+\frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_n}+\frac{\partial F_n}{\partial y_n}.$$

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & 0 \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} & F'_{y_n} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Таким образом $F'_{y_n}\neq 0$ и последнее уравнение $F(\mathbf{x},y_n)$ разрешимо относительно y_n. ■

Определение

Пусть $f(\mathbf{x})=f(x_1,\dots,x_m)$ определена в D или $O(\mathbf{x}^0)$.

Для некоторых функций $g_1(\mathbf{x}),\dots,g_n(\mathbf{x}),\ n<m$ определим множество $A=\{\mathbf{x}\in D:\ g_k(\mathbf{x})=0,\ \ k=\overline{1,n}.\}$

Точка $\mathbf{x}^0\in A$ называется точкой **условного локального экстремума** функции $f(\mathbf{x})$ при наличии связей $g_k(\mathbf{x})=0$, если $\mathbf{x}^0$ - точка локального экстремума функции $f(\mathbf{x})$ на множестве A.

Теорема(необходимые условия условного локального экстремума)

Пусть $f(\mathbf{x})$ и $g_k(\mathbf{x}),\ k=\overline{1,n}$ непрерывно дифференцируемы на D.

Ранг матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$ в точке $\mathbf{x}^0\in D$ равен $n<m$.

Если $\mathbf{x}^0$ точка условного локального экстремума функции $f(\mathbf{x})$, при наличии уравнений связи $g_k(\mathbf{x})=0,\ k=\overline{1,n}$, то $\exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ такие, что $\mathbf{x}^0$ стационарная точка функции $L(\mathbf{x})=L(x_1,\dots,x_m,\lambda_1,\dots,\lambda_n)=f(\mathbf{x})-\sum_{k=1}^n\lambda_k g_k(\mathbf{x})$.

Доказательство

$$L(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-\sum_{k=1}^n\lambda_k g_k(\mathbf{x}).$$

Б.О.О.

$$J=\frac{\partial(g_1,\dots,g_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(\mathbf{y}^0)=\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}\neq 0.$$

По теореме о неявных функциях на некотором кубе K найдутся $\varphi_1(x_{n+1},\dots,x_m),\dots,\varphi_n(x_{n+1},\dots,x_m):$

$g_k(\varphi_1(x_{n+1},\dots,x_m),\dots,\varphi_n(x_{n+1},\dots,x_m),x_{n+1},\dots,x_m)\equiv 0,\ k=\overline{1,n}.$

Точка $\mathbf{x}^0$ является точкой условного экстремума $f(\mathbf{x}) \Leftrightarrow (x^0_{n+1}, \dots, x^0_m)$ является точкой локального экстремума функции

$$h(x_{n+1}, \dots, x_m) = f(\varphi_1(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_{n+1}, \dots, x_m), x_{n+1}, \dots, x_m).$$

Запишем условие стационарности $(x^0_{n+1}, \dots, x^0_m)$ для функции h и воспользуемся инвариантностью формы первого дифференциала:

$$dh(x^0_{n+1}, \dots, x^0_m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0) dx_j = 0.$$

$$g_k(\varphi_1(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_{n+1}, \dots, x_m), x_{n+1}, \dots, x_m) \equiv 0,\ k = \overline{1, n}.$$

$$dg_k(\mathbf{x}^0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0) dx_j = 0.$$

Значит системы уравнений относительно $dx_1, \dots, dx_n$ равносильны:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

А значит последняя строка есть линейная комбинация первых:

$$\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n : \ \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}^0),\ \ \forall\, j = \overline{1, m}. \ \blacksquare$$

Теорема (достаточные условия условного локального экстремума)

Пусть $f(\mathbf{x})$ и $g_k(\mathbf{x}),\ k = \overline{1, n}$ дважды непрерывно дифференцируемы на D.

Ранг матрицы $\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$ в точке $\mathbf{x}^0 \in D$ равен $n < m$,

и $\mathbf{x}^0$ - стационарная точка функции $L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k(\mathbf{x})$.

$\Phi(d\mathbf{x}) = \Phi(dx_1, \dots, dx_m) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} L''_{x_k x_j}(\mathbf{x}^0) dx_k dx_j$.

Если $\Phi(d\mathbf{x}) > 0$, то $\mathbf{x}^0$ - точка условного локального минимума. Если $\Phi(d\mathbf{x}) < 0$, то $\mathbf{x}^0$ - точка условного локального максимума. Если $\Phi(d\mathbf{x})$ знакопеременная, то $\mathbf{x}^0$ - не является экстремумом.

Доказательство

Пусть $\varphi_1(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_{n+1}, \dots, x_m)$ и $h(x_{n+1}, \dots, x_m) = f(\varphi_1(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_{n+1}, \dots, x_m), x_{n+1}, \dots, x_m)$ из доказательства необходимых условий. Тогда

$$d^2h(x_{n+1},\dots,x_m)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m f''_{x_ix_j}(\mathbf{x})dx_idx_j+\sum_{j=1}^m f'_{x_j}(\mathbf{x})d^2x_j.$$

$$\sum_{j=1}^m\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x})dx_j\equiv 0,\ \ k=\overline{1,n}\ \ \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_j\partial x_i}(\mathbf{x})dx_idx_j+\sum_{j=1}^m\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x})d^2x_j=0.$$

А если вспомнить, что $L(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-\sum_{k=1}^n\lambda_kg_k(\mathbf{x})$, то

$$d^2h(x^0_{n+1},\dots,x^0_m)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m L''_{x_ix_j}(\mathbf{x}^0)dx_idx_j+\sum_{j=1}^m L'_{x_j}(\mathbf{x}^0)d^2x_j=$$

$$=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m L''_{x_ix_j}(\mathbf{x}^0)dx_idx_j$$

Замечание.

Достаточно рассматривать только дифференциалы, удовлетворяющие уравнениям связи

Пример. $f(x,y)=xy,\ \ x+y-2=0$. $L(x,y)=xy-\lambda(x+y-2)$.

$\begin{cases} L'_x=y-\lambda=0\\ L'_y=x-\lambda=0\\ x+y-2=0\end{cases}$ $\Rightarrow (1,1)$ -- стационарная точка. $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \ A_1=0,\ \ A_2=-1$ и

достаточные условия не применимы.

$dL(1,1)=0dx^2+dxdy+dydx+0dy^2$

$d(x+y-2)=dx+dy=0\ \ \Rightarrow dL(1,1)=-2dx^2<0,\ dx\neq 0.$

Значит $(1,1)$ - максимум.