- Бинарное отношение на множествах A и B: произвольное подмножество $A \times B$
  - ⋆ порядок множеств важен!
  - иногда говорят «между A и B» или «из A в B»
- Обозначения:
  - теоретико-множественное $(x, y) \in \rho$ «элемент принадлежит множеству»
  - префиксное $\rho(x, y)$ «предикат истинен»
  - инфиксное $x \, \rho \, y$, например $1 \neq 2, \ell_1 \parallel \ell_2$, или $x \in Y$
- Пример: $\rho \subseteq \text{Студенты} \times \text{Дисциплины}$
  - $(x, y) \in \rho$ если студент x изучает дисциплину y
- Основной частный случай: $A = B$
  - ⋆ бинарные отношения на множестве
  - по умолчанию мы рассматриваем именно такие

- Бинарному отношению ρ на множествах $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ сопоставляется его матрица M_ρ
  - $M_\rho \in \{0,1\}^{n \times m}$
  - $M_\rho[i,j] = 1$ если $(a_i, b_j) \in \rho$; иначе $M_\rho[i,j] = 0$
  - обычно $\rho \in A^2$ и матрица квадратная, то есть с ней много чего можно делать!
- Если отношение $\rho \in A^2$ рассматривать как (ориентированный) граф $G_\rho \ldots$
  - ρ есть множество ориентированных ребер между вершинами множества A

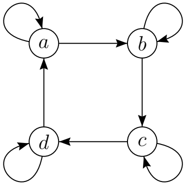
  …то матрица отношения ρ есть матрица смежности графа G_ρ
- Пример: $A = \{a, b, c, d\}$

$$\rho = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c),(c,d),(d,a),(d,d)\}$$

Отношение

$$M_\rho = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица



Граф

- Булевы матрицы — это матрицы с элементами из $\{0, 1\}$
  - ⋆ единичная матрица E является булевой
  - ⋆ E — матрица отношения равенства, обозначаемого Δ
- Операции над булевыми матрицами:
  - конъюнкция $\wedge$, дизъюнкция $\vee$, отрицание $\overline{}$, выполняемые поэлементно
  - транспонирование
  - булево умножение (на следующем слайде)

Операция	Определение	Матричные вычисления
объединение	$\rho \cup \sigma = \{(a, b) \in A^2 \mid (a, b) \in \rho$ или $(a, b) \in \sigma\}$	$M_{\rho\cup\sigma} = M_\rho \vee M_\sigma$
пересечение	$\rho \cap \sigma = \{(a, b) \in A^2 \mid (a, b) \in \rho$ и $(a, b) \in \sigma\}$	$M_{\rho\cap\sigma} = M_\rho \wedge M_\sigma$
дополнение	$\bar{\rho} = \{(a, b) \in A^2 \mid (a, b) \notin \rho\}$	$M_{\bar{\rho}} = \overline{M_\rho}$
обращение	$\rho^{-1} = \{(a, b) \in A^2 \mid (b, a) \in \rho\}$	$M_{\rho^{-1}} = M_\rho^\top$

- Умножение (композиция) бинарных отношений:
  - $\rho \circ \sigma = \{(a,c) \in A^2 \mid \exists b \in A : (a,b) \in \rho, (b,c) \in \sigma\}$
  - умножение определяет степень: $\rho^k = \underbrace{\rho \circ \rho \circ \cdots \circ \rho}_{k \text{ раз}}$; $\rho^0 = \Delta$
- Как найти матрицу $M_{\rho\circ\sigma}$?
- Введем операцию булевого умножения булевых матриц
  - ! обычное произведение булевых матриц — не всегда булева матрица
- ⋆ для $(n \times k)$-матрицы X и $(k \times m)$-матрицы Y,

$$(XY)[i,j] = \max_{\ell=1}^{k} X[i,\ell]Y[\ell,j]$$

  - ⋆ заменили сложение в обычном умножении матриц дизъюнкцией
- ⋆ запись XY для булевых матриц X и Y будет означать булево произведение

Теорема

$M_{\rho\circ\sigma} = M_\rho M_\sigma$.

Доказательство:

$$M_{\rho\circ\sigma}[i,j] = 1 \Leftrightarrow (a_i,a_j) \in \rho \circ \sigma \Leftrightarrow \exists \ell : (a_i,a_\ell) \in \rho \text{ и } (a_\ell,a_j) \in \sigma \Leftrightarrow$$
$$\exists \ell : M_\rho[i,\ell] = 1 \text{ и } M_\sigma[\ell,j] = 1 \Leftrightarrow \exists \ell : M_\rho[i,\ell]M_\sigma[\ell,j] = 1 \Leftrightarrow (M_\rho M_\sigma)[i,j] = 1 \quad \square$$

★ У нас есть четыре способа смотреть на один и тот же математический объект:

- бинарное отношение на множестве A
- бинарный предикат на множестве A
- орграф с множеством вершин A
- булева матрица размера $|A| \times |A|$

А еще в (ор)графах бывают кратные ребра...

- это не вписывается в нашу схему, поэтому нужно обобщить объект

- Мультимножеством называется пара (A, f), где A — множество, $f : A \to \mathbb{N}$ — функция, называемая кратностью
  - каждый элемент $x \in A$ входит в мультимножество $f(x)$ раз
  - $\{a^2, b^1, c^3\}$ обозначает мультимножество из двух a, одного b и трех c
  - на одном множестве A — носителе — можно определять разные мультимножества
- Операции:
  - при объединении мультимножеств для каждого элемента берется максимум из кратностей
  - при пересечении — минимум
  - есть еще сумма мультимножеств (кратности суммируются)
- Пример: натуральное число $\to$ мультимножество его простых делителей

  ? каким операциям над числами соответствуют сумма, объединение и пересечение таких мультимножеств?

Бинарным мультиотношением на множестве A называется мультимножество, носитель которого является подмножеством в A^2

- ⋆ мультиотношения задают (ор)графы с кратными ребрами — мульти(ор)графы

Матрица бинарного мультиотношения ρ на множестве $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — это матрица M_ρ размера $|A| \times |A|$ с неотрицательными целыми элементами, такими что $M_\rho[i,j]$ равно кратности пары (a_i, a_j) в ρ

- если $(a_i, a_j) \notin \rho$, то кратность считаем равной 0
- ⋆ M_ρ — матрица смежности мультиорграфа, определяемого ρ
- ⋆ мульти(ор)граф $G = (V, E)$ состоит из множества вершин и мультимножества ребер
  - E — бинарное мультиотношение на V
- матрицу смежности мультиорграфа будем обозначать через M_G (а не M_E)

Число маршрутов в графе

Задача: дан (мульти)(ор)граф G и число d; сколько существует маршрутов длины d из вершины v_i в вершину v_j?

- обозначим число указанных маршрутов через $W(v_i, v_j, d)$

Теорема

$W(v_i, v_j, d) = M_G^d[i, j]$.

Доказательство индукцией по d.

- База: $d = 1$
  - (v_i, v_j)-маршруты длины 1 — это ребра (v_i, v_j), а $M_G[i, j]$ — их число
- Шаг:
  - любой (v_i, v_j)-маршрут длины $d + 1$ состоит из (v_i, v_k)-маршрута длины d и последнего ребра (v_k, v_j)

  $\Rightarrow$ надо перемножить количество таких маршрутов на количество таких ребер и просуммировать по всем $k = 1, \ldots, n = |V|$
  - $W(v_i, v_k, d) = M_G^d[i, k]$ по предположению индукции
  - $W(v_k, v_j, 1) = M_G[k, j]$ по базе индукции
  - по определению умножения матриц $\sum_{k=1}^{n} M_G^d[i, k] \cdot M_G[k, j] = M_G^{d+1}[i, j]$ $\square$

⋆ У обычного умножения булевых матриц тоже есть применение!

Функция на множестве и ее граф

Рассмотрим произвольную функцию $f : A \to A$

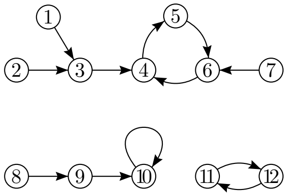
- ★ На f можно смотреть как на множество $\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$
  - т.е. как на бинарное отношение на A
- Как устроен граф, заданный этим отношением?
  - любая вершина имеет степень исхода 1
  - ⋆ такой орграф в общем случае состоит из 1 или более (ор)циклов, к которым могут присоединяться деревья
  - ! Докажите это утверждение
- Пример:

$A = \{1, 2, \ldots, 12\}$

Функция f:

$1 \to 3$	$7 \to 6$
$2 \to 3$	$8 \to 9$
$3 \to 4$	$9 \to 10$
$4 \to 5$	$10 \to 10$
$5 \to 6$	$11 \to 12$
$6 \to 4$	$12 \to 11$

Орграф G_f:



★ Если f является биекцией (перестановкой), то любая вершина G_f имеет степень захода 1, т.е. деревьев нет и G_f — объединение непересекающихся циклов

- Пусть A — произвольное множество; 2^A — множество подмножеств (булеан) A
- Оператором замыкания на A называется произвольная функция $\mathrm{Cl} : 2^A \to 2^A$, удовлетворяющая трем условиям для произвольных $X, Y \subseteq A$:
  - $X \subseteq \mathrm{Cl}(X)$ (экстенсивность)
  - $X \subseteq Y \Rightarrow \mathrm{Cl}(X) \subseteq Cl(Y)$ (монотонность)
  - $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(X)) = \mathrm{Cl}(X)$ (идемпотентность)
- Подмножества с условием $\mathrm{Cl}(X) = X$ называются замкнутыми относительно Cl
- Обычно операторы замыкания определяют, задавая систему замкнутых подмножеств $C \subset 2^A$
  - $\mathrm{Cl}(X)$ определяется, как наименьшее замкнутое подмножество, содержащее X
- Пример: $A = \mathbb{R}$, а система замкнутых подмножеств состоит (сюрприз!) из всех замкнутых подмножеств $\mathbb{R}$, как они определяются в матанализе
  - $\mathrm{Cl}(X)$ получается из X добавлением всех предельных точек
- Вообще, обычная ситуация, в которой задают оператор замыкания, такова:
  - есть унарный предикат P на множестве 2^A, т.е. свойство, которым подмножества A могут обладать или не обладать
  - $\mathrm{Cl}(X)$ есть наименьшее Y такое, что $X \subseteq Y$ и $P(Y)$
  - ⋆ это обеспечивает экстенсивность и идемпотентность
  - ⋆ монотонность и существование наименьшего должно обеспечить само свойство P
- будем рассматривать операторы замыкания для бинарных отношений
  - множеством будет A^2, операторы определены на 2^{A^2}

- Рассмотрим отношения на множестве A
- $P_1(\rho)$: «отношение ρ рефлексивно»
  - $(a, a) \in \rho$ для любого $a \in A$
  - ⋆ на главной диагонали матрицы M_ρ все элементы равны 1
- возьмем все рефлексивные отношения за систему замкнутых подмножеств
- $\mathrm{Cl}_R(\rho)$ — рефлексивное замыкание ρ
  - ⋆ $\mathrm{Cl}_R(\rho) = \rho \cup \Delta$ (напомним, Δ — отношение равенства на A)
  - ⋆ $M_{\mathrm{Cl}_R(\rho)} = M_\rho \vee E$
- Пример: $\mathrm{Cl}_R(<) = \leqslant$

- $P_2(\rho)$: «отношение ρ симметрично»
  - $(a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$ для любых $a, b \in A$
  - ⋆ матрица M_ρ симметрична ($M_\rho = M_\rho^\top$)
- возьмем все симметричные отношения за систему замкнутых подмножеств
- $\mathrm{Cl}_S(\rho)$ — симметричное замыкание ρ
  - ⋆ $\mathrm{Cl}_S(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$
  - ⋆ $M_{\mathrm{Cl}_S(\rho)} = M_\rho \vee M_\rho^T$
- Пример: взять симметричное замыкание орграфа = стереть все стрелки

Транзитивное замыкание

- $P_3(\rho)$: «отношение ρ транзитивно»
  - $(a,b) \in \rho, (b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$ для любых $a,b,c \in A$
  - как распознать транзитивность по матрице M_ρ?
  - ⋆ Критерий транзитивности: ρ транзитивно $\Leftrightarrow \rho^2 \subseteq \rho$
  - ⋆ в матричном виде: ρ транзитивно $\Leftrightarrow M_\rho \vee M_{\rho^2} = M_\rho$
- возьмем все транзитивные отношения за систему замкнутых подмножеств
- $\mathrm{Cl}_T(\rho)$ — транзитивное замыкание ρ
  - почему существует наименьшее транзитивное отношение, содержащее ρ?

Теорема

Для любого $\rho \subseteq A^2$ отношение $\mathrm{Cl}_T(\rho)$ существует и равно $\rho^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \rho^i$.

- Доказательство:
  - $\rho \subseteq \rho^+$
  - ρ^+ транзитивно: $(a,b),(b,c) \in \rho^+ \Rightarrow \exists i,j : (a,b) \in \rho^i$ и $(b,c) \in \rho^j \Rightarrow (a,c) \in \rho^{i+j}$ $\Rightarrow (a,c) \in \rho^+$
  - если $\rho \subseteq \tau$ и τ транзитивно, то $\rho^2 \subseteq \tau$: $(a,c) \in \rho^2 \Rightarrow \exists b : (a,b),(b,c) \in \rho \Rightarrow$ $(a,b),(b,c) \in \tau \Rightarrow (a,c) \in \tau$ (транзитивность τ)
  - аналогично $\rho^3 \subseteq \tau, \rho^4 \subseteq \tau, \ldots, \rho^n \subseteq \tau$ для всех $n \Rightarrow \rho^+ \subseteq \tau$
  - ρ^+ — наименьшее транзитивное отношение, содержащее ρ $\square$

! Докажите, что для n-элементного множества A выполняется $\mathrm{Cl}_T(\rho) = \bigcup_{i=1}^{n} \rho^n$

Примеры замыканий

- Пример 1: компоненты связности

  Дан граф $G = (V, E)$ и отношение смежности вершин (т.е. E)
  - ⋆ $\mathrm{Cl}_T(\mathrm{Cl}_R(E))$ — это отношение «лежать в одной компоненте связности»
  - ⋆ $\mathrm{Cl}_T(\mathrm{Cl}_R)$ — это рефлексивно-транзитивное замыкание
  - ⋆ $\mathrm{Cl}_T(\mathrm{Cl}_R(\rho)) = \rho^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho^i$

- Пример 2: совместимые частичные слова

  Дано множество всех конечных слов над алфавитом $\Sigma = \{0, 1, \diamond\}$
  - ⋆ его обозначают Σ^*, потому что оно равно $\bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$ (степень имеет другой смысл!)
  - ⋆ два слова u и v совместимы (обозначается $u \uparrow v$), если они
    - имеют одинаковую длину
    - на одинаковых позициях содержат либо одинаковые буквы, либо хотя бы один джокер $\diamond$
  - ⋆ совместимость нетранзитивна (проверьте!) но обладает свойством стабильности:
    - если $u \uparrow v$ и $x \uparrow y$, то $ux \uparrow vy$

  $\uparrow = \mathrm{Cl}_{St}(\mathrm{Cl}_S(\mathrm{Cl}_R(\{(0, \diamond), (1, \diamond)\})))$
    - где Cl_{St} — стабильное замыкание