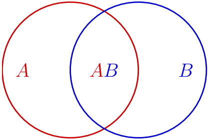
Пусть A — конечное множество, на котором задано k свойств (унарных предикатов), A_i $(i = 1, \ldots, k)$ — множество всех элементов A, обладающих i-м свойством.

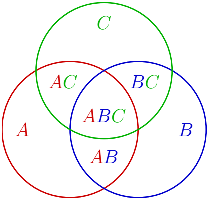
- ★ Принцип включения-исключения (ПВИ) — это способ ответить на вопросы: «сколько элементов A обладают хотя бы одним свойством» и «сколько элементов A не обладают ни одним свойством»
  - т.е. найти $|A_1 \cup \cdots \cup A_k|$ и $|A \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k)|$
- Способ основан на том, что часто бывает возможно найти число элементов, обладающих любым фиксированным свойством или набором свойств

Частные случаи:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$





Теорема (ПВИ)

Пусть A — конечное множество, $A_1, \ldots, A_k$ — его подмножества (не обязательно различные). Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{\substack{X \neq \varnothing \\ X \subseteq [1..k]}} (-1)^{|X|-1} \left|\bigcap_{i \in X} A_i\right|. \qquad (1)$$

- Справа участвуют мощности всех возможных пересечений множеств A_i
- Пересечение четного/нечетного числа множеств имеет знак $-/+$

Доказательство:

Возьмем произвольный элемент $a \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i$; пусть $Z = \{i \mid a \in A_i\}$

- a входит во множество в левой части (1), т.е. добавляет 1 к левой части
- a входит во множество $A_X = \bigcap_{i \in X} A_i$ в правой части (1) $\Leftrightarrow$ $X \subseteq Z$
- a добавляет 1 к $|A_X|$ для каждого такого X

$\Rightarrow$ a добавляет $C_a = \sum_{X \subseteq Z, X \neq \varnothing} (-1)^{|X|-1} \cdot 1$ к правой части (1)

- пусть $m = |Z|$; сгруппируем в формуле для C_a множества равной мощности:
- $C_a = \sum_{X \subseteq Z, X \neq \varnothing} (-1)^{|X|-1} \cdot 1 = \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i-1}$
  $= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i-1} + 1 = 1 - \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^{i} = 1 - 0 = 1$
  - ⋆ сумма четных биномиальных коэффициентов равна сумме нечетных

Итак, каждый элемент a добавляет 1 к левой и 1 к правой части (1)

$\Rightarrow$ левая и правая части (1) равны

Перепишем формулу (1) в виде

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\Bigg(\sum_{\substack{X\subseteq[1..k]\\|X|=j}}\left|\bigcap_{i\in X} A_i\right|\Bigg)$$

Пусть для $j = 1,\ldots,k$

$$N_j = \Bigg(\sum_{\substack{X\subseteq[1..k]\\|X|=j}}\left|\bigcap_{i\in X} A_i\right|\Bigg);\ \text{доопределим } N_0 = |A|$$

Тогда число элементов, не обладающих ни одним из k свойств, есть

$$\left|A\setminus\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = |A| - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = N_0 - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}N_j = N_0 + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}N_j = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}N_j$$

Симметричный вариант ПВИ: пусть $\left|\bigcap_{i\in X} A_i\right| = s_{|X|}$ зависит только от $|X|$; тогда

$$N_j = \binom{k}{j} s_j$$

ПВИ — все формулы

A — конечное множество, $A_1, \ldots, A_k \subseteq A$

$$N_j = \left(\sum_{\substack{X \subseteq [1..k] \\ |X|=j}} \left| \bigcap_{i \in X} A_i \right| \right), \quad N_0 = |A|$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} N_j$$

$$\left| A \setminus \bigcup_{i \in X} A_i \right| = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} N_j$$

если $\left| \bigcap_{i \in X} A_i \right| = s_{|X|}$, то $\left| A \setminus \bigcup_{i \in X} A_i \right| = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} s_j$

Число сюръекций

Пусть B и C — множества, $|B| = n, |C| = k$

★ Существует k^n различных функций из B в C

- k способов выбрать образ для каждого из n элементов

Теорема

Число сюръекций n-элементного множества B на k-элементное множество C равно

$$\mathrm{sur}(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Доказательство:

- пусть $A = \{f : B \to C\}$, $C = \{c_1, \ldots, c_k\}$
- возьмем следующие свойства $P_1, \ldots, P_k$ элементов A:
  - $P_i =$ «образ функции не содержит элемента c_i»

$\Rightarrow$ $|A_i| = (k-1)^n$ для любого i

- более того, $\left|\bigcap_{i \in X} A_i\right| = (k - |X|)^n$

$\Rightarrow$ можно воспользоваться симметричным ПВИ с $s_j = (k-j)^n$

$\Rightarrow$ $\mathrm{sur}(n,k) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{k-j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$

Числа Стирлинга второго рода. Числа Белла

- Числом Стирлинга второго рода называется число $\left\{ n \atop k \right\}$ разбиений n-элементного множества на k классов
  - ⋆ или число отношений эквивалентности с k классами на n-элементном множестве

Пример: $\left\{ 4 \atop 2 \right\} = 7$:

  - $\{1,2,3\}\{4\}; \{1,2,4\}\{3\}; \{1,3,4\}\{2\}; \{2,3,4\}\{1\}; \{1,2\}\{3,4\}; \{1,3\}\{2,4\}; \{1,4\}\{2,3\}$

- Числом Белла называется число $B(n)$ разбиений n-элементного множества
  - ⋆ $B(n) = \sum_{k=1}^{n} \left\{ n \atop k \right\}$

Теорема

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{\mathrm{sur}(n,k)}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Доказательство:

- пусть B, C — множества, $|B| = n$, $|C| = k$
- любая сюръекция $f : B \to C$ задает отношение эквивалентности $\sim_f$ на B:
  - $a \sim_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ f задает разбиение B на k классов

- любое разбиение B на k классов можно задать сюръекцией, «назначив» каждому классу свой элемент из C
- сюръекций, задающих фиксированное разбиение B на k классов, только же, сколько способов назначить классам элементы из C, т.е. $k!$

$\Rightarrow$ получили $\left\{ n \atop k \right\} = \frac{\mathrm{sur}(n,k)}{k!}$ □

Теорема

$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k \cdot \left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\}$, с начальными условиями $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ и $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ $(n > 0)$.

★ Очень похоже на $\left[{n+1 \atop k} \right] = n \cdot \left[{n \atop k} \right] + \left[{n \atop k-1} \right]$ для чисел Стирлинга первого рода

Доказательство: провести самостоятельно по аналогии с доказательством формулы для чисел Стирлинга первого рода

Функция Эйлера

- Натуральные числа m и k **взаимно просты**, если $\text{НОД}(m,k)=1$
- Количество чисел $i \in [1..n]$, взаимно простых с n, обозначается через $\phi(n)$
- $\phi(n)$ — **функция Эйлера**

Теорема

Пусть $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ — разложение числа n на простые множители. Тогда

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Доказательство:

- положим $A = [1..n]$, $A_i = \{j \mid j \text{ кратно } p_i\}$

$\Rightarrow$ $|A_i| = n/p_i$

- так как все p_i — простые, $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = n/(p_{i_1} \cdots p_{i_j})$
- применим ПВИ в общей форме:

$$\phi(n) = n - \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} + \ldots + (-1)^j \cdot \sum_{i_1 < \cdots < i_j} \frac{n}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} + \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \cdots p_k}$$

внезапно, $\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} + \ldots + (-1)^j \cdot \sum_{i_1 < \cdots < i_j} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{p_1 \cdots p_k}$

Перестановка $\sigma \in S_n$ называется перемещением, если $\sigma(i) \neq i$ для всех i

- ⋆ используется также термин полный беспорядок

Какую часть составляют перемещения от всех перестановок?

Уточним постановку:

- Пусть $D(n)$ — число перемещений n-элементного множества
- Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n!}$
  1. равен 0
  2. равен 1
  3. равен какому-то α, $0 < \alpha < 1$
  4. не существует
- Голосуем!

Перемещения (2)

Теорема

$$D(n) = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Следствие: $\frac{D(n)}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}$

Доказательство:

- положим $A = S_n$, $A_i = \{\sigma \mid \sigma(i) = i\}$
- на $\sigma \in A_i$ можно смотреть как на перестановку множества $[1..n] \setminus \{i\}$, доопределенную условием $\sigma(i) = i$

$\Rightarrow$ $|A_i| = (n-1)!$

$\Rightarrow$ аналогично, для любого $X \subseteq [1..n]$, $\left|\bigcap_{i\in X} A_i\right| = (n - |X|)!$

- применим симметричный ПВИ:

$$D(n) = \left|A \setminus \bigcup_{i\in X} A_i\right| = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)! = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{n!}{j!(n-j)!} (n-j)! = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

$\square$