Тестовое задание:

Написать программу численного решения задачи Коши для уравнения:

$$\frac{d^5y}{dx^5} + 15\frac{d^4y}{dx^4} + 90\frac{d^3y}{dx^3} + 270\frac{d^2y}{dx^2} + 405\frac{dy}{dx} + 243y = 0, \quad x\epsilon[0,5]$$

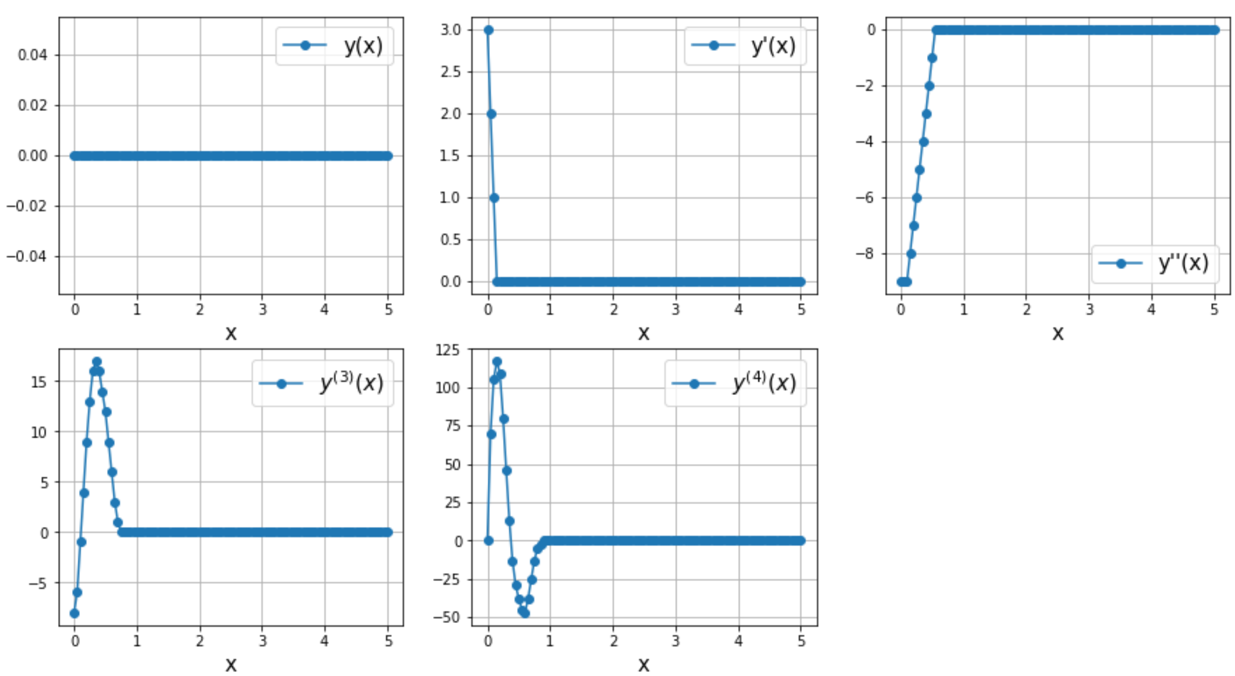
$$x = 0: \quad y = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = 3, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -9, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = -8, \qquad \frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

1. Реализовать какую-либо численную схему ***без использования готовых решателей***.
2. Построить график решения.
3. Обосновать достоверность полученного результата.

Решение:

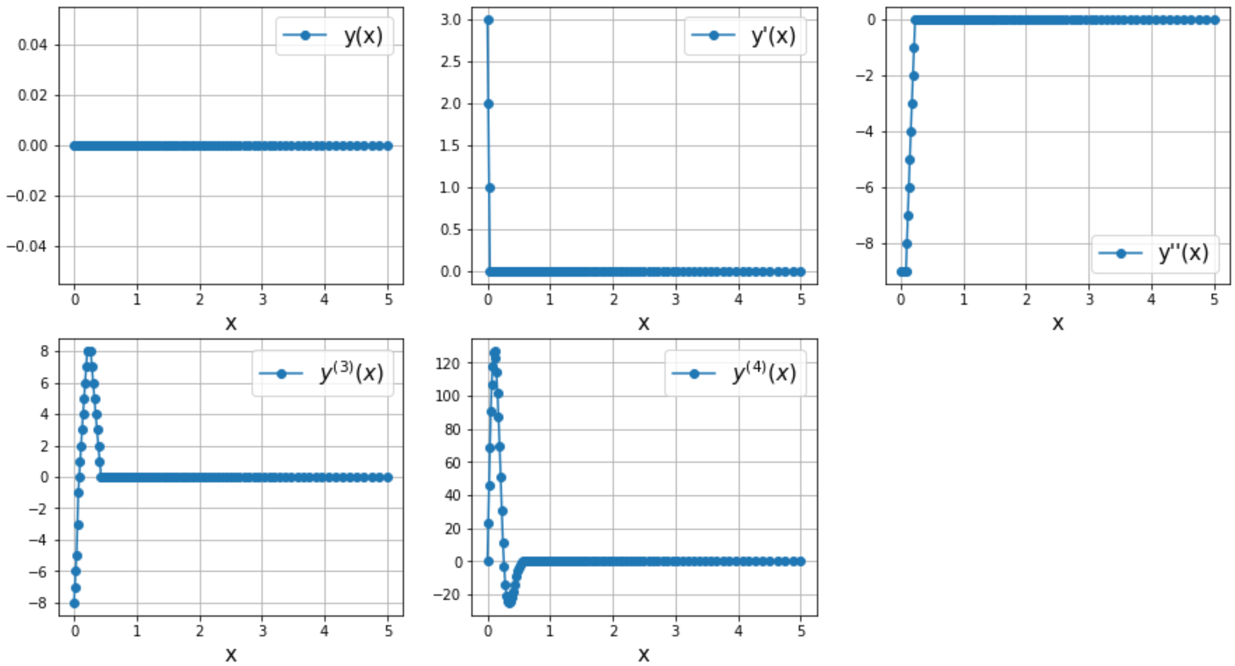
Для решения описанного выше дифференциального уравнения пробовал использовать следующие методы:

1. Метод Эйлера с линейным шагом. Получен следующий результат:



Решение, очевидно, не удовлетворительное. Но, стало понятно, что лучше использовать не линейную сетку

2. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка с логарифмическим шагом:



Решение не многим лучше полученного в прошлом пункте. Возможно, проблема в том, что рассмотренные методы в принципе плохо применимы к дифференциальным уравнениям высших порядков, поскольку для их решения требуется сведение к системе уравнений.

В данном случае:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1 = f_1(y, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 = f_2(y, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 = f_3(y, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_4 = f_4(y, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dfrac{dy_4}{dx} = f_5(y, y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dots \end{cases}$$

При применении схемы Рунге-Кутты: $\boldsymbol{y}(x_{i+1} = x_i + h) = \boldsymbol{y}(x_i) + h * \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(x_i))$, где $\boldsymbol{y} = (y, y_1, y_2, y_3, y_4)$ **-** вектор значений производных в i-м узле сетки, а h - шаг сетки**,**

В каждой точке сетки x_i возникает зависимость:

$$y(x_i) = y(y_1(x_{i-1})) = y\left(y_1(y_2(x_{i-2}))\right) = \dots$$
$$= y\left(y_1(y_2(y_3(y_4(f_5(y, y_1, y_2, y_3, y_4)))))\right)(x_{i-5})$$

Поскольку изменения всех переменных, кроме y_4 происходят линейно, требуется большое количество шагов на обратное распространение изменения в значении этой производной. Полагаю, именно из-за этого метод может работать некорректно.

3. Для сравнения приведу численное решение, сделанное с помощью SciPy: