♠ **Interpolação**

temperatura (°C)	20	25	30	35	40	45	50
calor específico	0,99907	0,99852	0,99826	0,99818	0,99828	0,99849	0,99878

(i) Qual o calor específico da água a 32,5°?

(ii) Qual a temperatura para a qual o calor específico é 0,99387?

A interpolação nos ajuda a resolver esse tipo de problema!

• **Def.** $\boxed{\mathbf{1}}$ **Interpolar** uma função f é aproximá-la por uma função g que satisfaça algumas propriedades.

► g é usada em substituíção à f.

Porque interpolamos?

(i) Qdo for necessário calcular o valor da função em um pto não tabelado

(ii) Qdo diferenciação e integração da função em estudo são difícieis de se calcular

Considere $(x_0, f(x_0)), ..., (x_n, f(x_n))$ $(n+1)$ ptos, com os x_i's distintos.
Queremos encontar g tal que

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ \vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

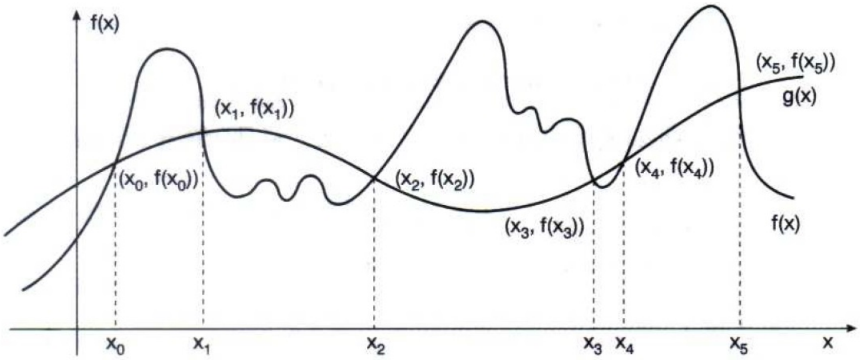


Figura 5.1

Teo. $\boxed{\mathbf{1}}$ $\exists!\, p_n$, polinômio de grau $\leq n$, tal que $p_n(x_k) = f(x_k)$, $\forall k = 0, 1, ..., n$, onde $x_k \neq x_j$ se $k \neq j$.

Dem.:

Ponha $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

A existência e unicidade de p_n satisfazendo $p_n(x_k) = f(x_k)$, $\forall k = 0, 1, ..., n$ é equivalente a existência e unicidade de solução do sistema:

$$\begin{cases} p_n(x_0) = f(x_0) \\ p_n(x_1) = f(x_1) \\ \vdots \\ p_n(x_n) = f(x_n) \end{cases} \iff (*) \underbrace{\begin{cases} a_0 + x_0 a_1 + x_0^2 a_2 + \cdots x_0^n a_n = f(x_0) \\ a_0 + x_1 a_1 + x_1^2 a_2 + \cdots x_1^n a_n = f(x_n) \\ \vdots \\ a_0 + x_n a_1 + x_n^2 a_2 + \cdots + x_n^2 a_n = f(x_n) \end{cases}}_{\text{sistema nas variaveis } a_0, a_1, ..., a_n}$$

A matriz dos coef é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Observe que se $x_k = x_j$ para algum $k \neq j$ teríamos $det\, A = 0$. Por exemplo, se $x_0 = x_1$, teríamos duas linhas iguais na matriz A e, portanto, teríamos $det\, A = 0$. Mas a informação $x_k \neq x_j$ se $k \neq j$ nos diz que os ptos $x_0, x_1, ..., x_n$ são distintos.

Além disso, observe que as linhas estão em P.G. Assim, A é uma matriz de Vandermonde cujo o determinante é: $det\, A = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (x_k - x_j) \neq 0$.

Logo o sistema admite solução única. Ou seja, $\exists^m!\, a_0, a_1, ..., a_n$ satisfazendo $(*)$.

► Formas de se obter p_n: Sistema Linear, Forma de Lagrange, Forma de Newton

Ex. $\boxed{\mathbf{1}}$: Usando o método do sistema linear, ache p_2 que interpolar f, onde:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Forma de Lagrange:

$(x_0, f(x_0)), ..., (x_n, f(x_n))$ ptos tais que os x_i's são distintos. Pelo Teo. $\boxed{1}$, $\exists p_n$ que interpolar f, ou seja, $p_n(x_i) = f(x_i)$, $\forall i = 0, 1, ..., n$.
Para cada $k = 0, 1, ..., n$, defina:

$$L_k(x) := \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

Observe:
(i) L_k são polinômios de grau n;
(ii)

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i \neq k \\ 1 & \text{se} \quad i = k \end{cases} \quad (*)$$

Veja tb:

$$\begin{aligned} p_n(x_i) &= f(x_i) = 0 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) + \cdots + 0 \cdot f(x_{i-1}) + 1 \cdot f(x_i) + 0 \cdot f(x_{i+1}) + \cdots + 0 \cdot f(x_n) \\ &\overset{(*)}{=} \underbrace{L_0(x_i)}_{0} f(x_0) + \cdots + \underbrace{L_{i-1}(x_i)}_{0} f(x_{i-1}) + \underbrace{L_i(x_i)}_{1} f(x_i) + \underbrace{L_{i+1}(x_i)}_{0} f(x_{i+1}) + \cdots + \underbrace{L_n(x_i)}_{0} f(x_n) \end{aligned}$$

Portanto, $p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots + f(x_n)L_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x) \quad (**)$
satisfaz a condição $p_n(x_i) = f(x_i)$, $\forall i = 0, 1, ..., n$.
$(**)$ é a forma como obtemos o polinômio interpolador p_n. Tal forma é chamada de **forma de Lagrange**.

► $\boxed{\text{Um caso simples:}}$
$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$, onde $x_0 \neq x_1$.
Temos:
$L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ e $L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$.
Daí,
$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) = f(x_0)\dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$
que é uma reta que passa pelos ptos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.
Obs.:
Usando o método do sistema linear, chagaremos a mesma expressão para p_1.

Use o método de Lagrange para obter o polinômio p_2 do Ex. $\boxed{1}$.

Forma de Newton:

$\boxed{\text{Operador diferenças divididas}}$

$$\begin{cases} f[x_0] := f(x_0) & \text{ordem } 0 \\[2ex] f[x_0,x_1] := \dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} & \text{ordem } 1 \\[2ex] f[x_0,x_1,x_2] := \dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} & \text{ordem } 2 \\[2ex] f[x_0,x_1,x_2,x_3] := \dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0} & \text{ordem } 3 \\[2ex] \vdots & \vdots \\[2ex] f[x_0,x_1,...,x_n] := \dfrac{f[x_1,...,x_n]-f[x_0,...,x_{n-1}]}{x_n-x_0} & \text{ordem } n \end{cases}$$

Obs.: $(x_0,f(x_0)),...,(x_n,f(x_n))$ tais que os x_i's são distintos.

(i) Quantas diferenças divididas de ordem 0 podemos formar?
Resposta: $\underbrace{f[x_0],f[x_1],...,f[x_n]}_{n+1 \text{ diferencas divididas de ordem } 0}$

(ii) Quantas diferenças divididas de ordem 1 podemos formar?
Resposta: $\underbrace{f[x_0,x_1],f[x_1,x_2],...,f[x_{n-1},x_n]}_{n \text{ diferencas divididas de ordem } 1}$

(iii) Quantas diferenças divididas de ordem 2 podemos formar?
Resposta: $\underbrace{f[x_0,x_1,x_2],f[x_1,x_2,x_3],...,f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]}_{n-1 \text{ diferencas divididas de ordem } 2}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

(iv) Quantas diferenças divididas de ordem $n-1$ podemos formar?
Resposta: $\underbrace{f[x_0,...,x_{n-1}],f[x_1,...,x_n]}_{2 \text{ diferencas divididas de ordem } n-1}$

(v) Quantas diferenças divididas de ordem n podemos formar?
Resposta: $\underbrace{f[x_0,x_1,...,x_n]}_{1 \text{ diferencas divididas de ordem } n}$

$\boxed{\text{Observações:}}$

► O operador diferenças divididas é **simétrico**:
$f[x_0,x_1,...,x_n] = f[x_{j_0},x_{j_1},...,x_{j_n}]$
para qualquer permutação: $(0,1,...,n) \longmapsto (j_0,j_1,...,j_n)$.

$\boxed{\text{Exemplo:}}$

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \\
&= \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f[x_1, x_0, x_2] &= \frac{f[x_0, x_2] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_1} = \frac{1}{x_2 - x_1}\left[\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}\right] \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1}\left[\frac{(x_0 - x_1)\Big(f(x_2) - f(x_0)\Big) - (x_2 - x_0)\Big(f(x_0) - f(x_1)\Big)}{(x_2 - x_0)(x_0 - x_1)}\right] \\
&= \frac{1}{x_2 - x_0}\left[\frac{(x_0 - x_1)\Big(f(x_2) - f(x_0)\Big) - (x_2 - x_0)\Big(f(x_0) - f(x_1)\Big)}{(x_2 - x_1)(x_0 - x_1)}\right] \\
&= \underbrace{\frac{1}{x_2 - x_0}}_{(*)}\left[\frac{(x_2 - x_0)\Big(f(x_0) - f(x_1)\Big) - (x_0 - x_1)\Big(f(x_2) - f(x_0)\Big)}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}\right] \\
&= (*)\left[\frac{x_1 f(x_2) - \underline{\underline{x_0 f(x_0)}} - x_0 f(x_2) + x_0 f(x_1) - x_2 f(x_1) + x_2 f(x_0) - x_1 f(x_0) + \underline{\underline{x_0 f(x_0)}}}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}\right] \\
&= (*)\left[\frac{x_1 f(x_2) - \underline{\underline{x_1 f(x_1)}} - x_0 f(x_2) + x_0 f(x_1) - x_2 f(x_1) + x_2 f(x_0) - x_1 f(x_0) + \underline{\underline{x_1 f(x_1)}}}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}\right] \\
&= \frac{1}{x_2 - x_0}\left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right] \\
&= f[x_0, x_1, x_2]
\end{aligned}
$$

Ex. $\boxed{2}$**:** De acordo com a tabela abaixo, ache as diferenças divididas.

x	-1	0	1	2	3
f(x)	1	1	0	-1	-2

Observe que teremos diferenças dividas de ordem 0 até a ordem 4.

★ $C^\infty([a,b]) \ni f$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

(i) Encontrar $p_0(x) = a_0$ que interpola f em x_0:

$a_0 = p_0(x_0) = f(x_0) = f[x_0] \Longrightarrow p_0(x) = a_0 = f[x_0]$
É fácil ver que $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x] = p_0(x) + \underbrace{(x - x_0)f[x_0, x]}_{=:E_0(x)}$

Portanto,
$E_0(x) = f(x) - p_0(x)$ é o erro que se comete em aprox f por p_0.

(ii) Encontrar $p_1(x) = a_0 + a_1 x$ que interpola f em x_0, x_1:

$$f[x_0, x_1, x] = f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} \Longrightarrow$$

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f[x_1, x_0]}_{=:p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x]}_{=:E_1(x)}$$

Veja que p_1 assim definido, interpola f em x_0 e x_1:
$p_1(x_0) = f(x_0)$

$$p_1(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f[x_1, x_0] = f(x_0) + (x_1 - x_0)\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f(x_1)$$

(iii) Encontrar $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ que interpola f em x_0, x_1 e x_2:

$$f[x_0, x_1, x_2, x] = f[x_2, x_1, x_0, x] = \frac{f[x_1, x_0, x] - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]}_{=:p_2(x)} \\ &\quad + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x]}_{E_2(x)} \end{aligned}$$

Resumo:

(i) $p_0(x) = f(x_0)$
$E_0(x) = (x - x_0)f[x_0, x]$

(ii) $p_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1]$
$E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x]$

(iii) $p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$
$E_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x]$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

(iv) $p_n(x) = f(x_0)+(x-x_0)f[x_0, x_1]+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, ..., x_n]$
$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)f[x_0, x_1, ..., x_n, x]$

Temos $f(x) = p_n(x) + E_n(x)$.

Daí, $f(x_i) = p_n(x_i) + E_n(x_i) = p_n(x_i), \ \ \forall i = 0, 1, ..., n$

$\boxed{\text{Ex}}$ De acordo com a tabela abaixo, use o método do Newton para achar p_2 que interpola f.

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Solução: $p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$

Estudar o erro na interpolação:

Obs.1: Se p_n interpola f em $x_0, x_1, ..., x_n$ tem-se que o erro cometido é $E_n(x) = f(x) - p_n(x)$.

Teo. Rolle:
$C^0 \ni f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(a) = f(b)$, $\exists f' : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R} \Longrightarrow \exists c \in (a,b);\ f'(c) = 0$.

Teo.2: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. $f\big|_{[x_0,x_n]} \in C^{n+1}$. p_n interpolador de f em $x_0, x_1, ..., x_n$. Então, para valores de $x \in [x_0, x_n]$, temos:
$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$, onde $\xi_x \in (x_0, x_n)$.

Dem.:
Para não ficar carregando expressões grandes, defina:

$$\begin{array}{rccc} G: & [x_0, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \end{array}$$

Para cada $x \in [x_0, ..., x_n] \setminus \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ fixado arbitrariamente, defina tb a função

$$\begin{array}{rccc} H: & [x_0, x_n] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & E_n(x)G(t) - E_n(t)G(x) \end{array}$$

Af.1: $H \in C^{n+1}$:
$p_n, f\big|_{[x_0,x_n]} \in C^{n+1} \Longrightarrow E_n = f - p_n \in C^{n+1}$. Além disso, $G \in C^{n+1}$, pois é polinômio. Então:

$$H = \underbrace{E_n(x)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{G}_{\in C^{n+1}} - \underbrace{E_n}_{\in C^{n+1}} \underbrace{G(x)}_{\in \mathbb{R}} \Longrightarrow H \in C^{n+1}$$

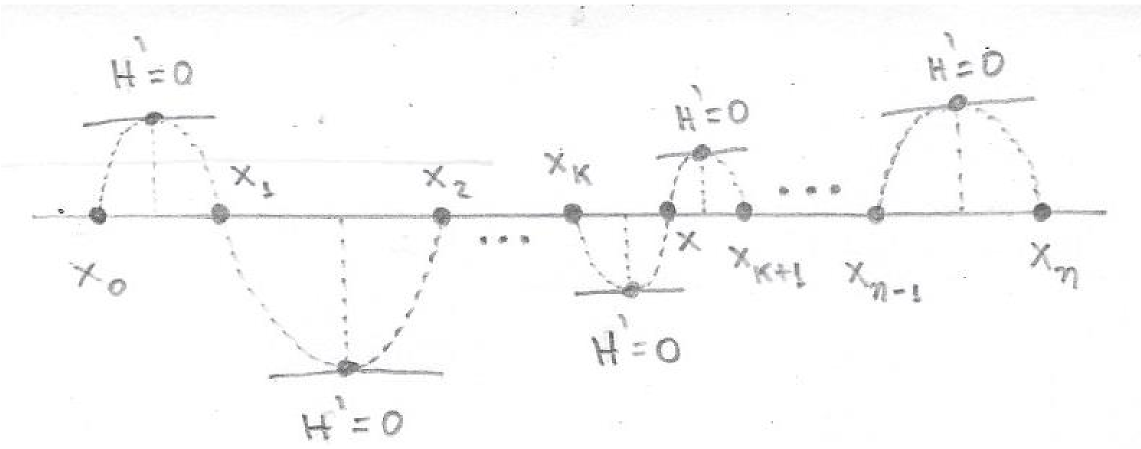
Portanto,
$H^{(n+1)}(t) = E_n(x)G^{(n+1)}(t) - E_n^{(n+1)}(t)G(x)$ (*).

Por outro lado, sabemos que $E_n(t) = f(t) - p_n(t)$. Assim,
$E_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - p_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$, onde $p_n^{n+1}(t) = 0$, pois p_n é um polinômio de grau $\leq n$.
Além disso, não é difícil ver que $G^{(n+1)}(t) = (n+1)!$.

Voltando a expressão (*):
$H^{(n+1)}(t) = (n+1)!E_n(x) - G(x)f^{(n+1)}(t)$ (**)
Agora,
como $H(x_0) = H(x_1) = \cdots = H(x_k) = H(x) = H(x_{k+1}) = \cdots = H(x_n) = 0$, temos, pelo Teo de Rolle:

$$\left.\begin{array}{l} \exists \alpha_{0,1} \in (x_0, x_1);\ H'(\alpha_{0,1}) = 0 \\ \exists \alpha_{1,2} \in (x_1, x_2);\ H'(\alpha_{1,2}) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \exists \alpha_{k,x} \in (x_k, x);\ H'(\alpha_{x_k,x}) = 0 \\ \exists \alpha_{x,k+1} \in (x, x_{k+1});\ H'(\alpha_{x,k+1}) = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \exists \alpha_{n-1,n} \in (x_{n-1}, x_n);\ H'(\alpha_{n-1,n}) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow H' \text{ possui } n+1 \text{ zeros.}$$

Ou seja, mostramos que H possui pelo menos $n+2 \Longrightarrow H'$ possui pelo menos $n+1$ zeros.



Analogamente, mostra-se:

$$\begin{aligned} H \text{ possui pelo menos } n+2 \text{ zeros} &\implies H' \text{ possui pelo menos } n+1 \text{ zeros} \\ &\implies H'' \text{ possui pelo menos } n \text{ zeros} \\ &\;\;\vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\implies H^{(n+1)} \text{ possui pelo menos } 1 \text{ zero} \end{aligned}$$

Seja então $\xi_x \in (x_0, x_n)$ um zero de $H^{(n+1)}$.
Assim, da expressão (**) temos:

$0 = H^{n+1}(\xi_x) = (n+1)!E_n(x) - G(x)f^{(n+1)}(\xi_x). \implies E_n(x) = G(x)\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

Ou seja, mostramos que para cada $x \in [x_0, x_n] \setminus \{x_0, ..., x_n\}$ vale:

$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$

Observe que se $x \in \{x_0, ..., x_n\}$ tem-se:

$\underline{\underline{E_n(x)}} = f(x) - p_n(x) = f(x) - f(x)\underline{\underline{\equiv 0}}$, pois p_n interpola f em $x_0, ..., x_n$.

Além disso, claramente $\underline{\underline{G(x) = 0}}$, para $x \in \{x_0, ..., x_n\}$.

Portanto,

$E_n(x) = 0 = G(x)\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$, para $x \in \{x_0, ..., x_n\}$.

Concluimos assim que

$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)\dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$, $\forall x \in [x_0, x_n]$.

$\boxed{\text{Obs.1:}}$ O erro que se comete ao aproximar f pelo polinômio de grau n, p_n, estar relacionado com a derivada de ordem $(n+1)$.

$\boxed{\text{Obs.2:}}$ A fórmula acima é pouco utilizada, pois precisamos saber ξ_x e $f^{(n+1)}(\xi_x)$

<u>Exemplo:</u> Usando interpolação linear (interpolação que usa apenas dois ptos) ache $\ln 3,7$, onde:

x	1	2	3	4
$\ln x$	0	0,6931	1,0986	1,3863

Solução: Como $3,7 \in (3,4)$, usaremos $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$.
Pela forma de Newton, $p_1(x) = \ln(x_0) + (x - x_0)\ln[x_0, x_1]$, onde
$\ln[x_0, x_1] = \dfrac{\ln x_1 - \ln x_0}{x_1 - x_0}$.
Portanto,

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \ln 3 + (x-3)\ln[3,4] = \ln 3 + (x-3)\frac{\ln 4 - \ln 3}{4-3} = 1,0986 + (x-3)(1,3863 - 1,0986) \\ &= 1,0986 + 0,2877(x-3) \Longrightarrow p_1(3,7) = 1,0986 + 0,2877(3,7-3) = 1,3000 \text{ (arredondando)} \end{aligned}$$

$\ln 3,7$ com quatro casas decimais: $\ln 3,7 = 1,3083$.
Então:
$E_1(3,7) = \ln(3,7) - p_1(3,7) = 0,0083 = 8,3 \times 10^{-3}$ é o erro cometido.

<u>Observação:</u> $f[x_0, ..., x_n, x] = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$, veja Teo.2 e (iv)

$\boxed{\text{Cor.1 do Teo.2 :}}$

$f^{(n+1)} \in C^0([x_0, x_n]) \Longrightarrow |f(x) - p_n(x)| = |E_n(x)| \leq |(x-x_0)\cdots(x-x_n)|\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$,
onde
$M_{n+1} = \max\limits_{x\in[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$

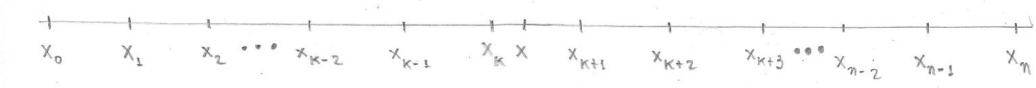
$\boxed{\text{Cor.2 do Teo. 2:}}$ $x_{i+1} - x_i = h$, $\forall i = 0, 1, ..., n$. Dado $x \in [x_0, x_n]$ tem-se que $x \in [x_k, x_{k+1}]$ para algum k. Então:

$$\begin{aligned}
&|x - x_0| < (k+1)h \\
&|x - x_1| < kh \\
&|x - x_2| < (k-1)h \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&|x - x_{k-2}| < 3h \\
&|x - x_{k-1}| < 2h \\
&|x - x_k| < h \\
\\
&|x - x_{k+1}| < h < (k+2)h \\
&|x - x_{k+2}| < 2h < (k+3)h \\
&|x - x_{k+3}| < 3h < (k+4)h \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&|x - x_{n-2}| < (n-k-2)h < (n-1)h \\
&|x - x_{n-1}| < (n-k-1)h < nh \\
&|x - x_n| < (n-k)h
\end{aligned}$$

$$\underbrace{|x-x_0|}_{<(k+1)h} \cdot \underbrace{|x-x_1|}_{<kh} \cdot \underbrace{|x-x_2|}_{(k-1)h} \cdots \underbrace{|x-x_{k-2}|}_{<3h} \cdot \underbrace{|x-x_{k-1}|}_{<2h} \cdot \underbrace{|x-x_k|}_{h} \cdot$$
$$\underbrace{|x-x_{k+1}|}_{<(k+2)h} \cdot \underbrace{|x-x_{k+2}|}_{<(k+3)h} \cdot \underbrace{|x-x_{k+3}|}_{<(k+4)h} \cdots \underbrace{|x-x_{n-2}|}_{<(n-1)h} \cdot \underbrace{|x-x_{n-1}|}_{<nh} \cdot \underbrace{|x-x_n|}_{<(n-k)h}$$

Portanto,

$$|E_n(x)| = |x-x_0| \cdots |x-x_n| \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} < n!(n-k)h^{n+1} \cdot \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n-k)h^{n+1}M_{n+1}}{n+1}$$



No livro: $|f(x) - p_n(x)| = |E_n(x)| < \dfrac{h^{n+1}M_{n+1}}{4(n+1)}$ (*)

Exemplo: $f(x) = e^x + x - 1$. Obter $f(0,7)$ por interpolação linear e analisar o erro, onde:

x	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	0,0	1,1487	2,7183	4,9811	8,3890

Solução: Como $0,7 \in (0,5, 1)$, na interpolação linear $x_0 = 0,5$ e $x_1 = 1$.
Forma de Newton: $p_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] \Longrightarrow p_1(0,7) = 1,7765$
Nesse exemplo temos como saber o verdadeiro erro, já que a expressão para f foi dada.
Erro verdadeiro$= f(0,7) - p_1(0,7) = 0,0628$
Cor.1: $|E_n(x)| \leq |x-x_0| \cdots |x-x_n| \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$, onde $M_{n+1} = \max\limits_{x \in [x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$.
$|E_1(0,7)| \leq |0,7 - 0,5| \cdot |0,7 - 1| \dfrac{M_2}{2!}$, onde $M_2 = \max\limits_{[x_0,x_1]} |f''(x)| = \max\limits_{[0,5,1]} |e^x| = e^1 = e$
Computando: $|E_1(0,7)| \leq 0,0815$. Tal estimativa é coerente com o verdadeiro erro.
Cor.2: $|E_n(x)| < \dfrac{h^{n+1}M_{n+1}}{4(n+1)}$.
Computando: $|E_1(0,7)| < \dfrac{(0,5)^2 M_2}{4 \cdot 2} = 0,0850$. Coerente com o verdaeiro erro.

Observação: Para usarmos as estimativas:
(i) $|E_n(x)| \leq |x-x_0| \cdots |x-x_n| \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$
(ii) $|E_n(x)| < \dfrac{h^{n+1}M_{n+1}}{4(n+1)}$
precisamos achar $M_{n+1} = \max\limits_{[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$.
Portanto, qdo f é dada na forma tabelada, não é possível achar M_{n+1}.
Porém, podemos tomar o maior valor absoluto da maior diferença dividada de ordem $(n+1)$, $f[x_0, ..., x_n, x_{n+1}]$, como uma aproximação para $\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ em $[x_0, x_n]$.

- $\Big| f[x_0, ..., x_n, x] \Big| \overset{Obs}{=} \dfrac{|f^{(n+1)}(\xi_x)|}{(n+1)!} \leq \dfrac{1}{(n+1)!} \max\limits_{[x_0,x_n]} |f^{(n+1)}(x)| = \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}$, onde $\xi_x \in (x_0, x_n)$.

Exemplo: Considere a tabela abaixo para:
(a) Obter $f(0,47)$ usando um polinômio de grau 2.
(b) Estimar $|E_2(x)|$.

x	0,2	0,34	0,4	0,52	0,6	0,72
f(x)	0,16	0,22	0,27	0,29	0,32	0,37

Solução: Sabemos que p_n interpola f em $(n+1)$ ptos.
Como queremos um polinômio p_2, precisaremos de $(2+1)$ ptos.
Como $0,47 \in (0.4, 0.52)$, $0,4$ e $0,52$ é um dos três ptos que devemos considerar.
Escolheremos o outro pto para ser $0,6$ (poderíamos ter escolhido $0,34$).
Nesse caso: $x_0 = 0,4$, $x_1 = 0,52$ e $x_2 = 0,6$.
Forma de Newton: $p_2(0,47) \simeq f(0,47)$
Temos três diferenças divididas de ordem $(2+1)$:
$f[0.2, 0.34, 0.4, 0.52]$, $f[0.34, 0.4, 0.52, 0.6]$, $f[0.4, 0.52, 0.6, 0.72]$
A maior delas em valor absoluto é: $18,2494$.
Assim,
$|E_2(0,47)| \leq |0,47-0,4| \cdot |0,47-0,52| \cdot |0,47-0,6| \cdot |18,2494|$.

$\boxed{\textbf{Interpolação inversa}}$

Considere a tabela abaixo:

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Interpolaçã inversa: Dado $y \in \Big(f(x_0), f(x_n)\Big)$, encontrar x tal que $f(x) = y$.
Como?
Obtem-se p_n que interpola f em $x_0, x_1, ..., x_n$ e encontra x tal que $p_n(x) = y$.

Exemplo: Encontrar x tal que $f(x) = 2$, onde:

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
f(x)	1,65	1,82	2,01	2,23	2,46	2,72

Solução: Como $2 \in (1.82, 2.01)$, consideremos $x_0 = 0,6$ e $x_1 = 0,7$ e encontraremos p_1 que interpola f em x_0 e x_1.
Forma de Lagrange:
$p_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) = f(x_0)\dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$
$\Longrightarrow p_1(x) = 1.9x + 0.68$. Daí
$p_1(x) = 2 \Longleftrightarrow \underline{\underline{x = 0.6947368}}$.

$\boxed{\text{Observação:}}$ Dado $y \in \Big(f(x_0, f(x_n)\Big)$ queremos encontrar x tal que $f(x) = y$.
Se a função f for inversível, $x = f^{-1}(y)$. Daí, interpolamos f^{-1} por um polinômio p_n e $p_n(y)$ será uma aproximação para $f^{-1}(y) = x$, ou seja,
$p_n(y) \simeq f^{-1}(y) = x$.
Nesse caso, o erro $E_n(y) = f^{-1}(y) - p_n(y)$ poderá ser estimado usando (*), Cor.1 do Teo.2 e maior valor absoluto das diferenças divididas

$\boxed{\text{Exemplo:}}$ Obter x tal que $\mathrm{e}^x = 1.3165$, usando um polinômio de grau 2, p_2, onde:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
e^x	1	1.1052	1.2214	1.3499	1.4918	1.6487

Solução: $\mathrm{e}^x = 1.3165 \Longleftrightarrow x = \ln 1.3165$.
Então basta interpolar ln.
Usando a forma de Newton (iv), para interpolar $f^{-1} = \ln$ usando um polinômio de grau 2 (p_2), precisamos de três ptos.
Dois deles devem ser 1.2214 e 1.3499, pois:
$y_0 = 1.2214 < \underline{\underline{1.3165}} < 1.3499 = y_1$
Escolha $y_2 = 1.4918$ para ser o outro.
Forma de Newton: $p_2(y) = f^{-1}(y_0) + (y - y_0)f^{-1}[y_0, y_1] + (y - y_0)(y - y_1)f^{-1}[y_0, y_1, y_2]$.
$p_2(y) = \ln 1.2214 + (y - 1.2214) \ln \big[1.2214, 1.3499\big] + (y - 1.2214)(y - 1.3499) \ln \big[1.2214, 1.3499, 1.4918\big]$
Computando: $p_2(y) = 0.2 + (y - 1.2214)0.7782 + (y - 1.2214)(y - 1.3499)(-0.2718)$
$\underline{\underline{p_2(1.3165) = 0.27487}}$
Assim, $x = \ln 1.3165 \simeq p_2(1.3165) = 0.27487 \Longleftrightarrow 1.3165 = \mathrm{e}^x \simeq \mathrm{e}^{0.27487}$

Escolha do grau do polinômio interpolador

Considere a tabela abaixo:

x	1	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$\sqrt{x}$	1	1.005	1.01	1.0149	1.0198	1.0247

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
1	1		
		0.5	
1.01	1.005		0
		0.5	
1.02	1.01		−0.5
		0.49	
1.03	1.0149		0
		0.49	
1.04	1.0198		0
		0.49	
1.05	1.0247		
		↑ constantes	

Veja que na tabela de diferenças dividas, no intervalo $[1, 1.05]$ as diferenças de ordem 1 são praticamente constantes (o que acarreta as diferenças de ordem 2 variarem próximas de zero). Isso é um bom critério para concluirmos que o polinômio de grau 1 é o melhor para interpolarmos $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo $[1, 1.05]$.

Observações:

$\boxed{1}$: Ao interpolarmos um polinômio de grau n por um polinômio de grau $\geq n$ obteremos o próprio polinômio que queríamos interpolar.

Ex.: Interpolar $f(x) = x^2$ nos ptos $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ por um polinômio de grau 3.

x	-2	-1	0	1
f(x)	4	1	0	1

$p_3(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \Longrightarrow p_3(x) = x^2$.

Exercícios

1. Dada a tabela abaixo,

a) Calcule $e^{3.1}$ usando um polinômio de interpolação sobre três pontos.

b) Dê um limitante para o erro cometido.

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
e^x	11.02	13.46	16.44	20.08	24.53	29.96	36.59	44.70

2. Use o *método do sistema linear, a forma de Lagrange e a forma de Newton* para achar o polinômio de grau 2 que interpola a função dada na tabela abaixo:

x	-3	-2	-1	2	4	5
f(x)	4	0	2	1	-1	3

3. Ache $f(0)$ na questão anterior e estime o erro cometido.

4. Sabendo que a função da tabela abaixo é invertível, use as duas maneiras que vimos na teoria para obter o x tal que $f(x) = \frac{1}{2}$ utilizando polinômio de grau 1.

x	0	1	8
f(x)	0	1	2