

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ОТЧЕТ ПО ЗАДАНИЮ №6

**«Сборка многомодульных программ.
Вычисление корней уравнений и определенных
интегралов.»**

Вариант 8 / 2 / 1

Выполнил:
студент 104 группы
Беляев Р. Д.

Преподаватель:
Смирнов Л. М.

Москва
2023

Содержание

Постановка задачи	2
Математическое обоснование	3
Результаты экспериментов	5
Структура программы и спецификация функций	6
Сборка программы (Make-файл)	7
Отладка программы, тестирование функций	8
Программа на Си и на Ассемблере	9
Анализ допущенных ошибок	10
Список цитируемой литературы	11

Постановка задачи

Требуется реализовать численный метод, позволяющий вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми. Для нахождения данной площади необходимо вычислить алгебраическую сумму определенных интегралов данных функций на отрезках, ограниченных точками пересечения их графиков.

Для нахождения координат точек пересечения графиков данных функций необходимо решать уравнения. Поиск корней уравнений должен осуществляться посредством использования метода хорд (секущих).

Для вычисления определенного интеграла функции на отрезке требуется использовать формулу прямоугольников.

Математическое обоснование

Даны функции:

$$f_1(x) = e^x + 2;$$

$$f_2(x) = -2x + 8;$$

$$f_3(x) = \frac{-5}{x}.$$

Ниже представлены графики данных функций (рис. 1).

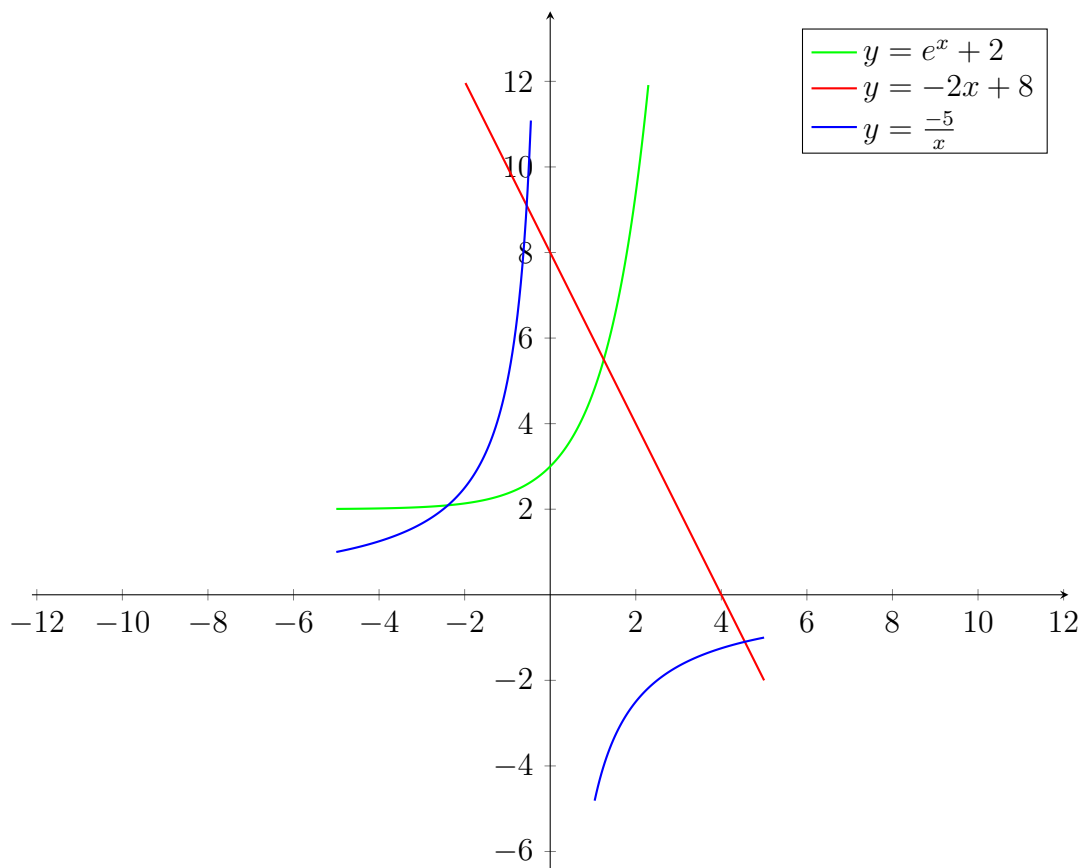


Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Обозначим рассматриваемую фигуру, ограниченную графиками этих функций за Φ .

Для начала определим отрезки, на которых следует искать точки пересечения графиков функций. Сразу заметим, что $f_1(x) > 0 \forall x \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow \Phi$ лежит в полуплоскости $x < 0$, т.к. $f_3(x) < 0 \forall x \in (0, +\infty)$.

Рассмотрим функции f_1 и f_3 .

$$F_1(x) := f_3(x) - f_1(x) \forall x \in (-\infty, 0).$$

При $x < 0$ имеем: $F_1'(x) = f_3'(x) - f_1'(x) = \frac{5}{x^2} - e^x > 0 \Leftrightarrow x^2 e^x < 5$. Но $(x^2 e^x)' = e^x(x^2 + 2x) \Rightarrow (x^2 e^x)' < 0$ при $x \in (-2, 0)$ и $(x^2 e^x)' > 0$ при $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \Rightarrow x^2 e^x < (-2)^2 e^{-2} < 1 \forall x < 0 \Leftrightarrow F_1 \uparrow (-\infty, 0)$. Заметим также, что $f_3(-3) = \frac{5}{3} < 2 < e^{-3} + 2 = f_1(-3)$ и $f_1(-2) = e^{-2} + 2 < \sqrt{2}^{-2} + 2 = \frac{5}{2} = f_3(-2) \Rightarrow a := f_1 \cap f_3 \in (-3, -2)$.

Рассмотрим функции f_2 и f_3 при $x \in (-\infty, 0)$. $f_2 \downarrow (-\infty, 0)$ и $f_3 \uparrow (-\infty, 0)$, значит, на данном интервале есть не более чем одна точка пересечения $b := f_2 \cap f_3$. Заметим, что $f_3(-1) = 5 < 2 + 8 = f_2(-1)$ и $f_2(-0.5) = 9 < 10 = f_3(-0.5) \implies b \in (-1, -0.5)$.

Рассмотрим функции f_1 и f_2 при $x \in (-\infty, +\infty)$. $f_2 \downarrow (-\infty, +\infty)$ и $f_3 \uparrow (-\infty, +\infty)$, значит, на данном интервале есть не более чем одна точка пересечения $c := f_1 \cap f_2$. Заметим, что $f_1(1) = e + 2 < 6 = f_2(1)$ и $f_2(2) = 4 = 2 + 2 < e^2 + 2 = f_1(2) \implies c \in (1, 2)$.

Обозначим также $F_2(x) := f_2(x) - f_1(x)$.

Отсюда легко получить, что $S_\Phi = \int_a^b F_1(x)dx + \int_b^c F_2(x)dx$. (*)

Заметим, что $F_1 \uparrow [-3, -0.5]$ — доказывается полностью аналогично, как это было сделано для отрезка $[-3, -2]$ выше. $|F_1(-3)| = \left| \frac{5}{3} - e^{-3} - 2 \right| < 2$, $|F_1(-0.5)| = |10 - e^{-0.5} - 2| < 10$.

Также из монотонности функций f_1 и f_2 следует, что $F_2 \uparrow (-\infty, +\infty)$. $|F_2(-0.5)| = |e^{-0.5} + 2 + 2(-0.5) - 8| < 10$, $|F_2(2)| = |e^2 + 2 + 2(2) - 8| < 10$.

Используя полученные неравенства, получаем:

$$\begin{aligned} & \left| S_\Phi - \left(\int_{a-\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_1} F_1(x)dx + \varepsilon_2 \right) - \left(\int_{b-\varepsilon_1}^{c+\varepsilon_1} F_2(x)dx + \varepsilon_2 \right) \right| \leq \left| \left(\int_{a-\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_1} F_1(x)dx - \int_a^b F_1(x)dx \right) \right| + \\ & \left| \left(\int_{b-\varepsilon_1}^{c+\varepsilon_1} F_2(x)dx - \int_b^c F_2(x)dx \right) \right| + 2\varepsilon_2 \leq \left| \int_{a-\varepsilon_1}^a F_1(x)dx \right| + \left| \int_b^{b+\varepsilon_1} F_1(x)dx \right| + \left| \int_{b-\varepsilon_1}^b F_2(x)dx \right| + \\ & \left| \int_c^{c+\varepsilon_1} F_2(x)dx \right| + 2\varepsilon_1 < (a - (a - \varepsilon_1)) \max_{x \in [a-\varepsilon_1, a]} F_1(x) + ((b + \varepsilon_1) - b) \max_{x \in [b, b+\varepsilon_1]} F_1(x) + (b - \\ & (b - \varepsilon_1)) \max_{x \in [b-\varepsilon_1, b]} F_2(x) + ((c + \varepsilon_1) - c) \max_{x \in [c, c+\varepsilon_1]} F_2(x) + 2\varepsilon_2 < 4\varepsilon_1 \cdot 10 + 2\varepsilon_2 = 40\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Тогда если взять $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{100} = 0.00001$, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{10} = 0.0001$, получим, что

$$\left| S_\Phi - \left(\int_{a-\varepsilon_1}^{b+\varepsilon_1} F_1(x)dx + \varepsilon_2 \right) - \left(\int_{b-\varepsilon_1}^{c+\varepsilon_1} F_2(x)dx + \varepsilon_2 \right) \right| < 40\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = \frac{3}{5}\varepsilon < \varepsilon, \text{ что и требуется.}$$

Таким образом, нам подходят значения $\varepsilon_1 = 0.00001$, $\varepsilon_2 = 0.0001$.

Для сходимости метода хорд (секущих) необходимо выполнение следующих условий для каждой из функций $F(x) := f_i(x) - f_j(x)$, где $1 \leq i < j \leq 3$ на соответствующем отрезке $[a, b]$:

- 1) F определена и непрерывна на $[a, b]$;
- 2) $F(a) \cdot F(b) < 0$;
- 3) F дифференцируема на $[a, b]$ и F' знакопостоянна, монотонна и непрерывна на $[a, b]$.

Погрешность для метода прямоугольников равна $R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} F''(\xi)$, $\xi \in [a, b]$.

Подробнее про оценку и методы можно узнать по ссылке [1].

Результаты экспериментов

Результаты проведенных вычислений: координаты точек пересечения (таблица 1) и площадь полученной фигуры (рис. 2).

Кривые	x	y
1 и 2	1.25175	5.49648
2 и 3	-0.54951	9.09902
1 и 3	-2.39053	2.09158

Таблица 1: Координаты точек пересечения

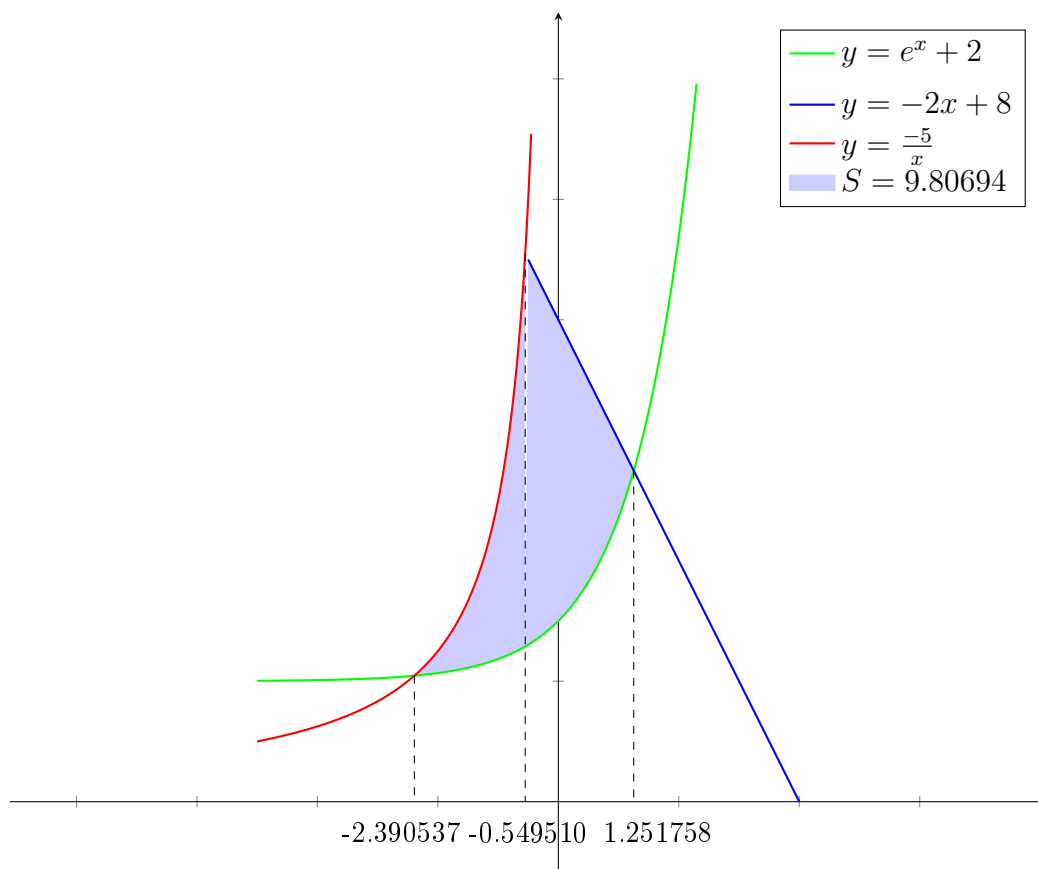


Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Структура программы и спецификация функций

Список модулей:

- `main.c` – основная логика программы
- `math.h` – подключаемая библиотека
- `func.asm` – программа, реализующая данные функции f_1 , f_2 и f_3 , а также функцию `d`, вычисляющую их производные.
- `func.h` – заголовочный файл, в котором объявлены функции `func.asm`

Список функций:

- `int main (char argc, char** argv)`
- `double root (double (*f)(double), double (*g)(double), double a, double b, double eps1, const char param1, const char param2)` – функция, вычисляющая корень уравнения $f(x) - g(x) = 0$ на отрезке $[a, b]$ с точностью `eps1`; `param1` и `param2` – параметры, от значений которых зависит, должна ли функция выводить количество выполненных итераций и возвращаемое значение – абсциссу точки `x`;
- `double integral (double (*f)(double), double a, double b, double eps2, char param)` – функция, вычисляющая определенный интеграл функции `f` на отрезке $[a, b]$ с точностью `eps2`; `param` – параметр, от значения которого зависит, должна ли функция выводить возвращаемое значение;
- `void testroot (unsigned N)` – функция, предназначенная для тестирования функции `root`, параметр `N` указывает количество тестов;
- `void testintegral (unsigned N)` – функция, предназначенная для тестирования функции `integral`, параметр `N` указывает количество тестов;
- `f1`, `f2`, `f3` – функции, вычисляющие значения соответствующих функций f_1 , f_2 , f_3 из условия задачи
- `df1`, `df2`, `df3` – функции, вычисляющие значения производных функций f_1 , f_2 , f_3 в точке `x`, где `x` – единственный параметр функций.
- `d` – функция, принимающая в качестве параметров `double (*f)` – указатель на некоторую функцию из `f1`, `f2`, `f3`, и `double value` – некоторое число. Данная функция вычисляет значение производной функции `f` в точке `value`.

Сборка программы (Make-файл)

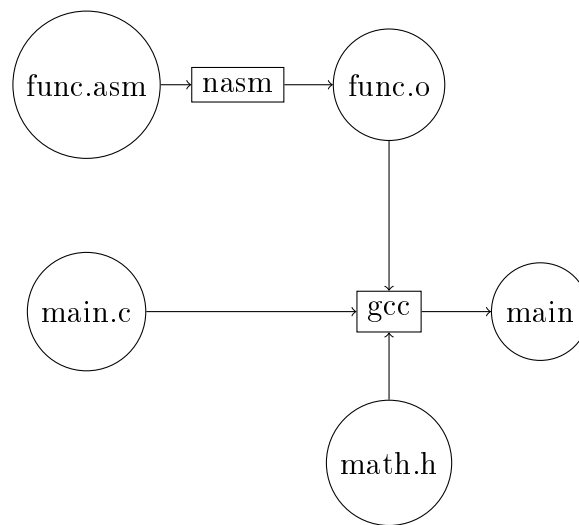


Рис. 3: Схема зависимости между компонентами программы

```
Makefile:
all: func.o main.c
    gcc -m32 -no-pie main.c func.o -o main -lm
func.o: func.asm
    nasm -f elf32 func.asm -o func.o
clean:
    rm func.o
```

Схема зависимостей между модулями программы можно наблюдать на (рис. 3).

Отладка программы, тестирование функций

№	f(x)	g(x)	аналитическое решение	результат численного метода
1	x	$-x$	$x_0 - (-x_0) = 2x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ $-1 \leq x_0 \leq x_0$	0.0000
2	$\frac{-5}{x}$	$-2x + 8$	$\frac{-5}{x_0} + 2x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{26}}{2}$ $3 \leq x_0 \leq 5; x_0 = \frac{4 + \sqrt{26}}{2}$	4.5495
3	$x^2 + 7$	$10x$	$x_0^2 - 10x_0 + 7 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{18}$ $8 \leq x_0 \leq 10; x_0 = 5 + \sqrt{18}$	9.24264

Таблица 2: Тестирование метода хорд (секущих)

№	f(x)	аналитическое решение	результат численного метода
1	$\frac{x^2}{3}$	$\int_2^5 \frac{x^2}{3} = \frac{x^3}{9} \Big _2^5 = \frac{125-8}{9} = 13$ $f''(x) = \frac{2}{3}$	12.9999
2	$e^x + x$	$\int_{-1}^3 (e^x + x) dx = (e^x + \frac{x^2}{2}) \Big _{-1}^3 = e^3 - \frac{1}{e} + 4$ $f''(x) = e^x$	23.7176
3	$\frac{-1}{x^3}$	$\int_{-5}^{-0.5} (\frac{-1}{x^3}) dx = \frac{1}{2x^2} \Big _{-5}^{-0.5} = 2 - \frac{1}{50} = 1.98$ $f''(x) = \frac{-12}{x^5}$	1.9800

Таблица 3: Тестирование метода прямоугольников

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программы имеются в архиве, который приложен к этому отчету.

Анализ допущенных ошибок

В начале написания программы мною было неправильно понято понятие точности вычисления определенного интеграла для функции (величина ε_2). Так, я считал, что условием достижения необходимой точности было выполнение неравенства $|I_n - I_{n-1}| < \varepsilon_2$, где I_n и I_{n-1} – приближенные значения интеграла, полученные по формуле прямоугольников при данном числе отрезков разбиения n и $n - 1$ соответственно. Однако во время тестирования функции `integral` ошибка была обнаружена и исправлена.

Список литературы

- [1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.