

Tensores y autovalores

Brayan Monroy* Emmanuel Martinez
Universidad Industrial de Santander
Cra 27 Calle 9 Ciudad Universitaria

25 de marzo de 2022

Índice

1. Análisis de Partículas	1
1.1. Caso 2D	2
1.2. Caso 3D	4
2. Análisis del Producto Interno Bruto	6
3. Conclusiones y Recomendaciones	10

Resumen

En el presente informe se hace desarrollo del taller de tensores y autovalores. Primero se observará un conjunto de datos de partículas con diferentes posiciones y masas para analizar sus diferentes momentos tanto en sus coordenadas 2D como 3D. Posteriormente, se observará un conjunto de datos del producto interno bruto de la mayoría de países del mundo para analizar estos datos mediante matrices de covarianza y correlación. Finalmente, para ambos conjunto de datos se analizarán sus vectores propios formados por sus espacios correspondientes y la matriz de transformación de sus respectivas bases a la base de autovectores y autovalores.

1. Análisis de Partículas

Dado el conjunto de datos de N partículas como $\mathcal{X}_i = \{|x\rangle_1, |x\rangle_2, \dots, |x\rangle_N\}$ con sus respectivas masas $\mathcal{V}_i = \{|v\rangle_1, |v\rangle_2, \dots, |v\rangle_N\}$, donde cada

$$|x\rangle_i = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{ó} \quad |x\rangle_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

representa las respectivas coordenadas (x, y) y (x, y, z) para los casos 2D y 3D, respectivamente. Este análisis se llevó a cabo observando cada uno de los momentos del conjunto de datos.

*e-mail: brayan2180032@correo.uis.edu.co

1.1. Caso 2D

Para el caso 2D tenemos que el momento de orden cero representa la masa total del sistema como

$$\mu_0(v) = \sum_{i=1}^N v_i = 4627.$$

El momento de orden uno representa el centro de masa del sistema como

$$\mu_1(v) = \sum_{i=1}^N v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle_i) = \sum_{i=1}^N v_i \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 17773,73 \\ 4850,63 \end{bmatrix},$$

que se observa en la figura 1.

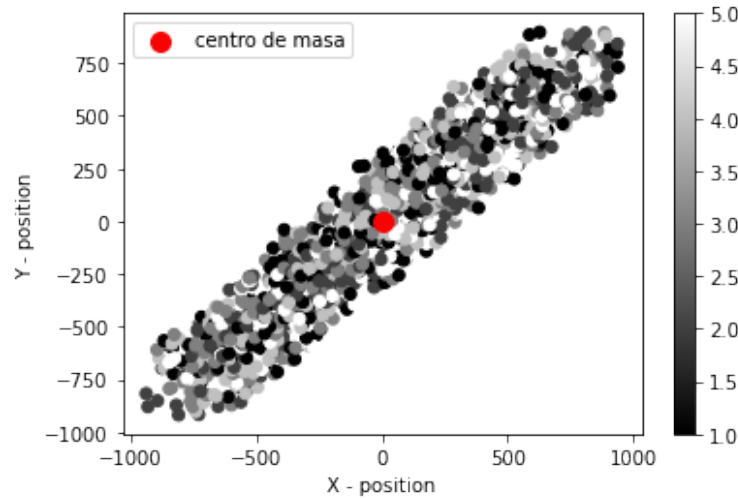


Figura 1

El momento de orden dos representa el tensor momento de inercia del sistema y se encuentra representado por

$$\mu_2(v) = \sum_{i=1}^N v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle_i)^2 = \sum_{i=1}^N v_i \begin{bmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{bmatrix}_i^2 = 10^8 \begin{bmatrix} 9,59 & 9,12 \\ 9,12 & 9,64 \end{bmatrix},$$

que se observa en la figura 2.

- Sea $A : V \rightarrow V$ un operador lineal de cierto \mathbb{K} -espacio vectorial V y un vector \mathbf{v} no nulo en V . Si existe un escalar c tal que:

$$A\mathbf{v} = c\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq 0, \quad c \in \mathbb{K}$$

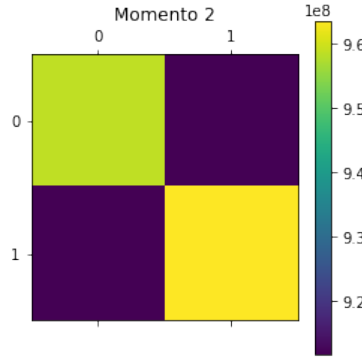


Figura 2

entonces decimos que \mathbf{v} es un vector propio del operador A .

Dicho esto, una forma de verificar que los vector base del sistema cartesiano $|e_i\rangle$ sean autovectores del tensor momento de inercia M_2 consiste en realizar la transformación $M_2|e_i\rangle$ y verificar si esta transformación se puede expresar como $c|e_i\rangle$ dada la definición del vector propio. Entonces tenemos que

$$10^8 \begin{bmatrix} 9,59 & 9,12 \\ 9,12 & 9,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 9,59 \\ 9,12 \end{bmatrix} \neq c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ y que}$$

$$10^8 \begin{bmatrix} 9,59 & 9,12 \\ 9,12 & 9,64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 9,12 \\ 9,64 \end{bmatrix} \neq c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

entonces se demuestra que los vectores cartesianos no son autovectores del tensor momento de inercia.

- Para encontrar los vectores propios del tensor de inercia M_2 , primero es necesario encontrar los valores propios λ_i mediante la construcción de su polinomio característicos $\det(M_2 - \lambda I) = 0$, una vez obtenidos los valores propios, los vectores propios \mathbf{v} se pueden encontrar mediante la solución del sistema de ecuaciones homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$. Mediante el uso de librerías de Python se realizan los respectivos cálculos y los vectores propios junto con el conjunto de datos se observan en la figura 3.
- Dado los vectores del sistema cartesiano $|e_i\rangle$, es necesario encontrar la matriz de transformación T mediante la cual se realiza el cambio a los autovectores para la nueva base $|e_i\rangle \rightarrow |v_i\rangle$.

Considerando que

$$|e_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = |v_1\rangle,$$

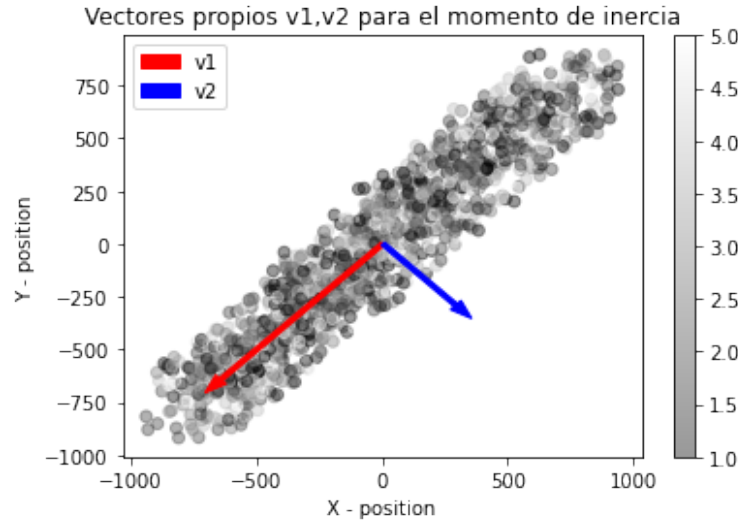


Figura 3

$$|e_2\rangle = \delta_i^j \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = |v_2\rangle,$$

por lo tanto, la matriz de transformación se puede construir mediante la combinación de los autovectores. De esta forma, la matriz de transformación es

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2].$$

Al aplicar esta transformación al conjunto de datos, se obtiene una nueva distribución de las masas de las partículas como se observa en la figura 4.

1.2. Caso 3D

Para este caso, se puede tomar todo lo anteriormente resuelto para el caso 2D y añadir una nueva componente z para realizar nuevamente todos los cálculos, de tal manera que los momentos se encuentran representados por:

$$\mu_0(v) = 4627, \quad \mu_1(v) = \begin{bmatrix} 17773,73 \\ 4850,63 \\ 2036,23 \end{bmatrix}, \quad \mu_2(v) = 10^8 \begin{bmatrix} 9,59 & 9,12 & -0,07 \\ 9,12 & 9,64 & -0,02 \\ -0,07 & -0,02 & 1,02 \end{bmatrix},$$

donde los momentos uno y dos se pueden observar en las figuras 5 y 6, respectivamente.

- Para este caso tenemos que

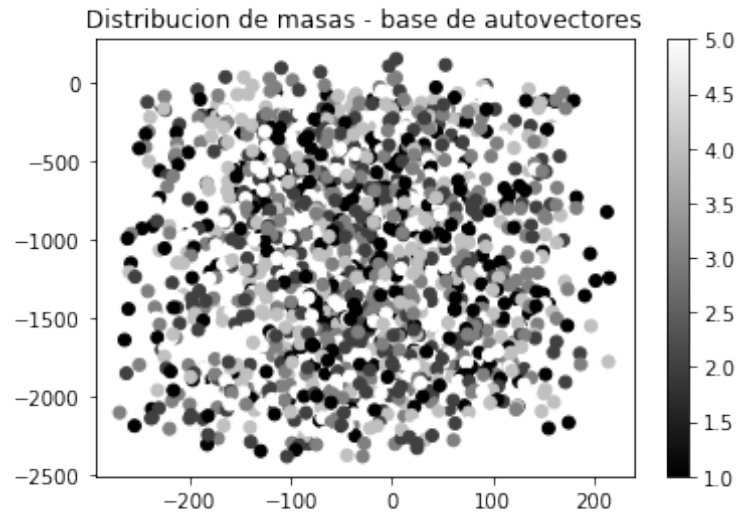


Figura 4

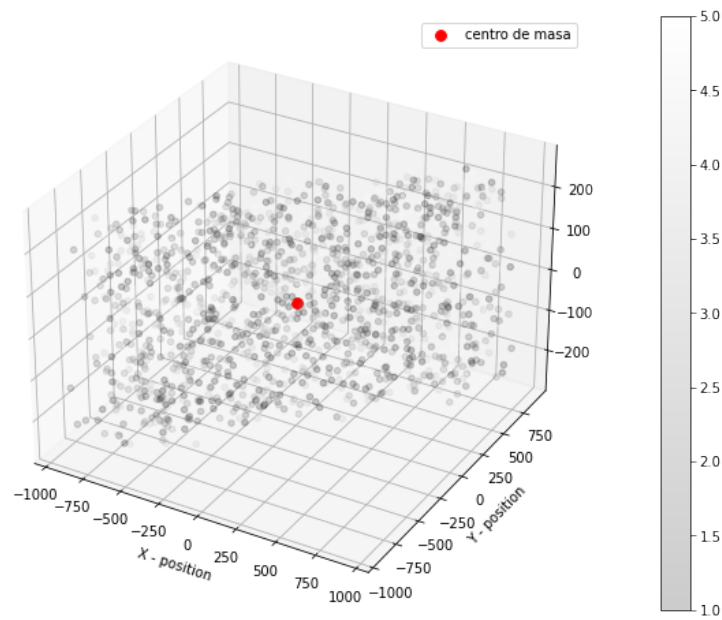


Figura 5

$$10^8 \begin{bmatrix} 9,59 & 9,12 & -0,07 \\ 9,12 & 9,64 & -0,02 \\ -0,07 & -0,02 & 1,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

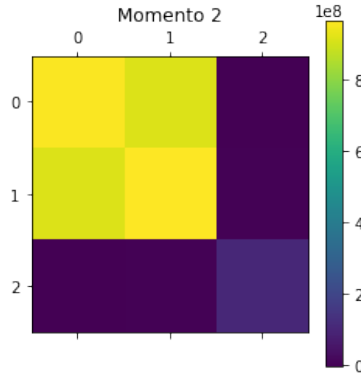


Figura 6

$$10^8 \begin{bmatrix} 9,59 & 9,12 & -0,07 \\ 9,12 & 9,64 & -0,02 \\ -0,07 & -0,02 & 1,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ y que}$$

$$10^8 \begin{bmatrix} 9,59 & 9,12 & -0,07 \\ 9,12 & 9,64 & -0,02 \\ -0,07 & -0,02 & 1,02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

entonces se demuestra que los vectores cartesianos no son autovectores del tensor momento de inercia.

- Mediante el uso de librerías de Python se realizan los respectivos cálculos y los vectores propios junto con el conjunto de datos se observan en la figura 7.
- La matriz de transformación se puede construir mediante la combinación de los autovectores. De esta forma, la matriz de transformación es

$$\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & hc \\ f & i \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3].$$

Al aplicar esta transformación al conjunto de datos, se obtiene una nueva distribución de las masas de las partículas como se observa en la figura 8.

2. Análisis del Producto Interno Bruto

Con el propósito de analizar el producto interno bruto (GDP) del país en los últimos 15 años en defensa, salud, educación, y ciencia y tecnología, como se observa en la figura 9, se realizaron los siguientes cálculos:

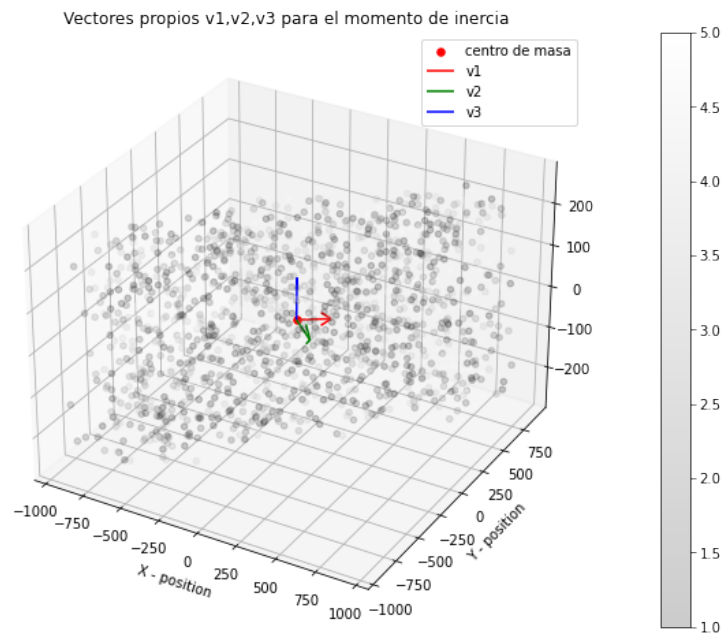


Figura 7

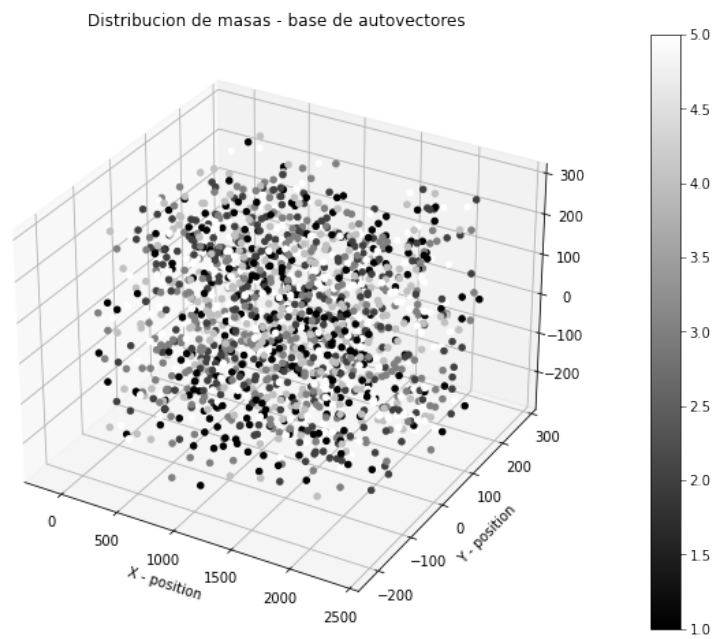


Figura 8

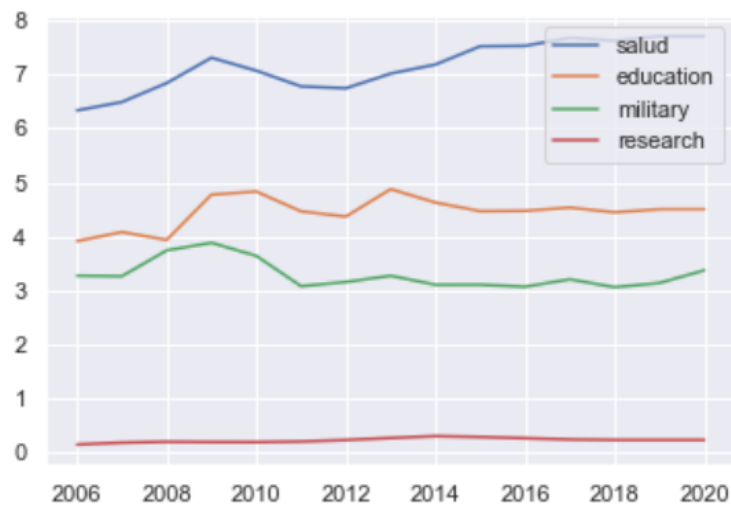


Figura 9

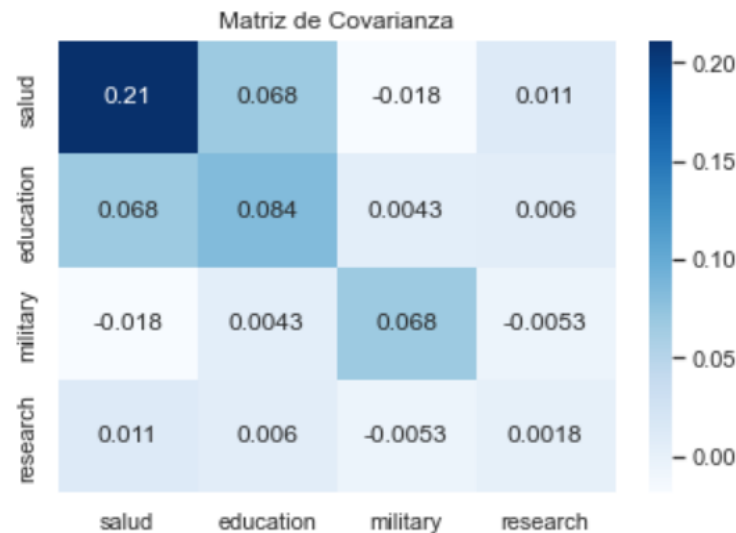


Figura 10

La matriz de covarianza: es el mismo segundo momento para estos nuevos datos, como se observa en la figura 10.

La matriz de correlación: es un escalamiento que se aplica a la matriz de covarianza dividiendo cada uno de sus elementos por la varianza relacionada a dichos datos de tal manera que los resultados obtenidos se observan en la figura 11.

Autovalores y autovectores de la matriz de covarianza: Mediante el uso de librerías de Python se realizan los respectivos cálculos que se observan en la figura 12.

Matriz de transformación: Similar a los casos de partículas 2D y 3D, se obtiene la transformación

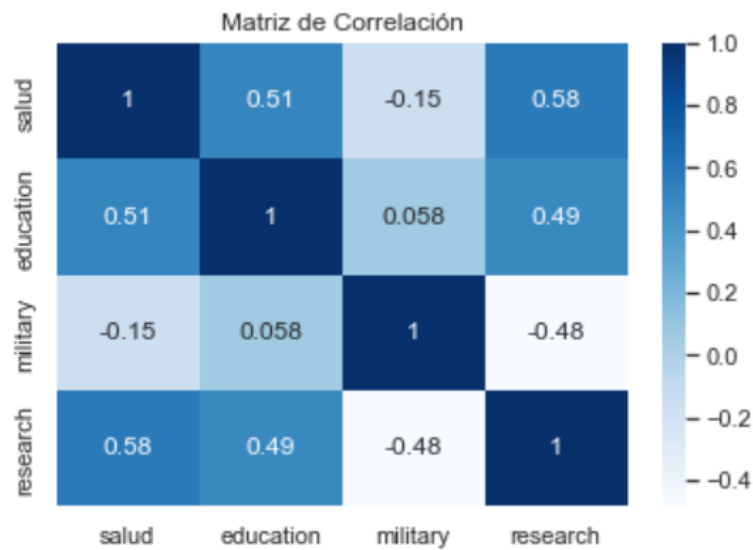


Figura 11

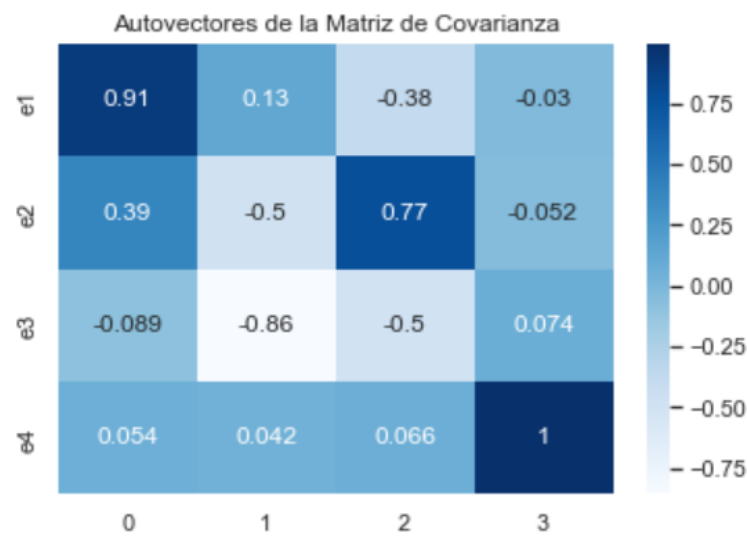


Figura 12

de los datos del banco mundial al considerar a los autovectores como la matriz de transformación, como se observa en la figura 13. Finalmente, graficamos la distribución del GDP aplicando la matriz de transformación, como se observa en la figura 14.

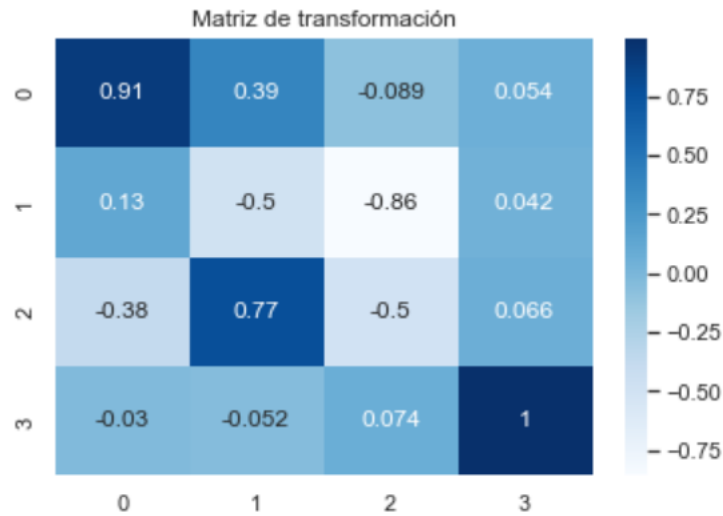


Figura 13

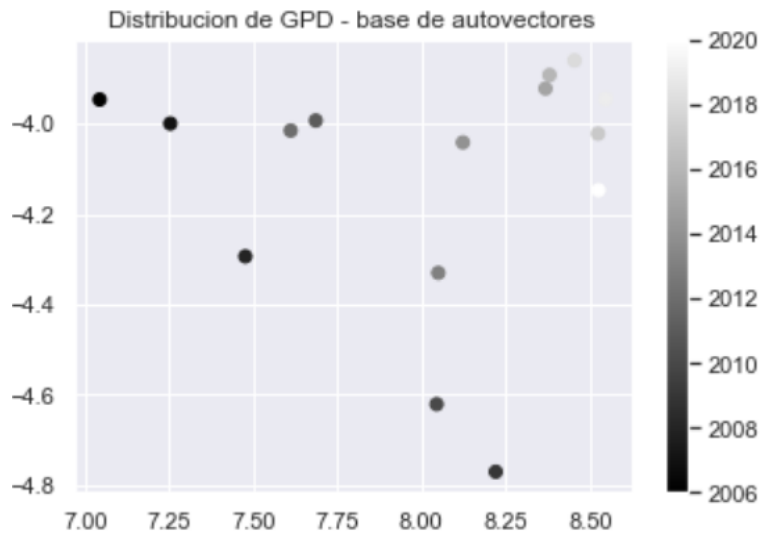


Figura 14

3. Conclusiones y Recomendaciones

En el presente informe se emplearon los conceptos aprendidos de operadores lineales, mediante el calculo de diferentes momentos junto con matrices de covarianza, correlación y transformaciones de bases cartesianas a bases de autovectores y autovalores. Durante el desarrollo de este informe se observó y analizó el comportamiento tanto de partículas 2D y 3D como el GDP del país, de aquí se concluyó que los diferentes cálculos realizados permiten extraer información cuantitativa y cualitativa de forma fácil y eficiente permitiendo realizar análisis a mayor profundidad. Por ejemplo,

de los análisis de las partículas se observó que éstas tienen una distribución aleatoria pero con una media y varianza bastante estable, por lo que fue posible realizar un cambio de base y observar esto de mejor manera. Para el caso del GDP se observó que la salud y la educación están altamente relacionadas a comparación de lo militar e investigación.