

Desarrollo Punto 5

Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostramos con rigor en la sección 4.3.2.2 y lo detallamos en la sección 4.4.9, una matriz hermetica (o autoadjunta) será igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su transpuesta conjugada $(A^\dagger)_j^i \rightarrow (A^*)_j^i \equiv A_j^i$.

$$A \iff \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \equiv A^\dagger = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \text{ es decir } \begin{cases} z_1^* = z_1 \text{ real} \\ z_4^* = z_4 \text{ real} \\ z_2^* = z_3 \text{ complejo} \end{cases}$$

Entonces

(a). Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial.

Condiciones

1. Todos las matrices de Pauli pertenecen al espacio vectorial? Si

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_0 \equiv \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Son linealmente independientes?

$$\begin{aligned} & a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_2 + c \cdot \sigma_3 + d \cdot \sigma_0 = 0 \\ & = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ & = \begin{pmatrix} c+d & a-bi \\ a+bi & -c+d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con esto tenemos que

$$\begin{aligned} c+d &= 0 \\ -c+d &= 0 \\ a+bi &= 0 \\ a-bi &= 0 \end{aligned}$$

Luego, $a = b = c = d = 0$

3. Todo elemento del espacio vectorial se puede escribir como una combinación lineal de las matrices de Pauli?

Dada una matriz hermetica A

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_2 + c \cdot \sigma_3 + d \cdot \sigma_0$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que,

$$z_1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d \cdot 1 = c + d \quad \text{real}$$

$$z_4 = a \cdot 0 + b \cdot 0 - c \cdot 1 + d \cdot 1 = -c + d \quad \text{real}$$

$$z_2 = a - bi \quad \text{complejo}$$

$$z_3 = a + bi \quad \text{complejo}$$

$$z_2^* = (a - bi)^* = a + bi = z_3 \quad \blacksquare$$

(b). Compruebe que una base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a|b \rangle \Leftrightarrow \text{Tr}(A^\dagger B)$ que introducimos en los ejercicios de la misma sección

Productos internos $\langle \sigma^i | \sigma_j \rangle, i \neq j$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_0 \rangle = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_0 \rangle = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\langle \sigma_3 | \sigma_0 \rangle = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Productos internos $\langle \sigma^i | \sigma_i \rangle$

$$\langle \sigma_1 | \sigma_1 \rangle = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (1)$$

$$\langle \sigma_2 | \sigma_2 \rangle = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (2)$$

$$\langle \sigma_3 | \sigma_3 \rangle = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (3)$$

$$\langle \sigma_0 | \sigma_0 \rangle = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (4)$$

Algebra matrices de Pauli

$$\langle \sigma^i | \sigma_j \rangle = i\epsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\sigma_0, \quad \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

en donde ϵ_{ijk} is the Levi-Civita symbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is an even permutation of } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{if } (i, j, k) \text{ is an odd permutation of } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(c). Explore si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarias puras.

Tomando hasta 3 elementos del conjunto de matrices $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y junto con el campo K de los numeros reales, es posible conformar un subespacio vectorial de matrices reales puras. Analogamente, se puede realizar el mismo procedimiento para un subespacio de matrices imaginarias puras, tomando hasta 3 elementos donde el conjunto de matrices son,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$