

# Asignación de Transformadas Discretas de Fourier

## Calentamiento

1. Considere las siguientes señales

$$y_1(t) = 3\cos(\omega t) + 5\cos(5\omega t) + 8\cos(7\omega t) \text{ y } y_2(t) = 3\sin(\omega t) + 2\sin(3\omega t) + 3\sin(8\omega t)$$

a) Implemente en cada caso la transformada analítica y discreta de Fourier. Compárelas.

b) Muestre para cuales casos recupera una transformada real o imaginaria.

Caso 1  $y_1(t) = 3\cos(\omega t) + 5\cos(5\omega t) + 8\cos(7\omega t)$

```
clear;
clc;

T = 2*pi;           % Período
medT = T/2;         % Medio período
Amp = 1;            % Amplitud
Nterm = 10;         % Número de términos en la serie de fourier
kMax = floor(2*Nterm*pi/T); % máxima frecuencia

y = @(t) 3*cos(1*t) + 5*cos(5*1*t) + 8*cos(7*1*t);

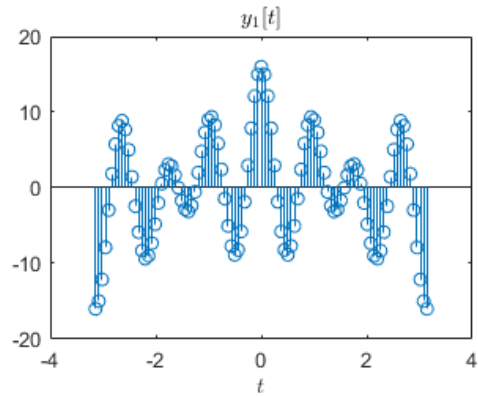
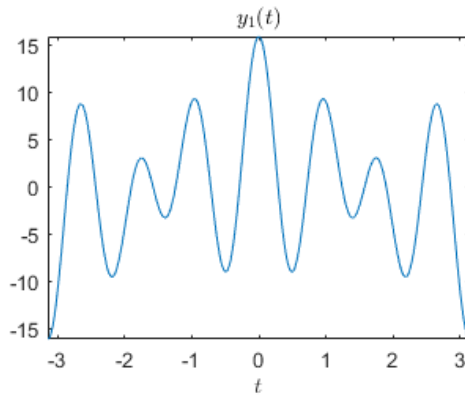
figure();
x0=0;
y0=0;
width=800;
height=250;
set(gcf, 'position', [x0,y0,width,height])

subplot(1, 2, 1);
fplot(y, [-pi pi]);
xlabel("$t$", "Interpreter", "latex");
title("$y_1(t)$", "Interpreter", "latex")

subplot(1, 2, 2);

intervals = 0.02;
t_axis = -1:intervals:1;
t_axis = t_axis*pi;

y_eval = double(y(t_axis));
stem(t_axis, y_eval);
xlabel("$t$", "Interpreter", "latex");
title("$y_1[t]$", "Interpreter", "latex");
```



```
syms t k

y_sym = 3*cos(1*t) + 5*cos(5*1*t) + 8*cos(7*1*t);
Fy(k) = fourier(y_sym, k);

delta = @(x) 1.*(x == 0);
display(Fy);

Fy(k) = 3*pi*(delta(k-1) + delta(k+1)) + 5*pi*(delta(k-5) + delta(k+5)) + 8*pi*(delta(k-7) + delta(k+7))

Fy = @(x) 3*pi*( delta(x-1) + delta(x+1) ) + ...
        5*pi*( delta(x-5) + delta(x+5) ) + ...
        8*pi*( delta(x-7) + delta(x+7) );

k_axis = 0:1:Nterm;

Fy_eval = Fy(k_axis);

figure();
x0=0;
y0=0;
width=800;
height=500;
set(gcf, 'position', [x0,y0,width,height])

subplot(2,2, 1);
stem(k_axis, real(Fy_eval));
title("\mathcal{R}\{ Y_1(k) \} - Analitica", "Interpreter", "latex");

subplot(2,2, 3);
stem(k_axis, imag(Fy_eval));
title("\mathcal{I}\{ Y_1(k) \} - Analitica", "Interpreter", "latex");

N = 1000;

C = custom_dft(y, T, N, Nterm);

subplot(2,2, 2);

stem(k_axis, real(C));
```

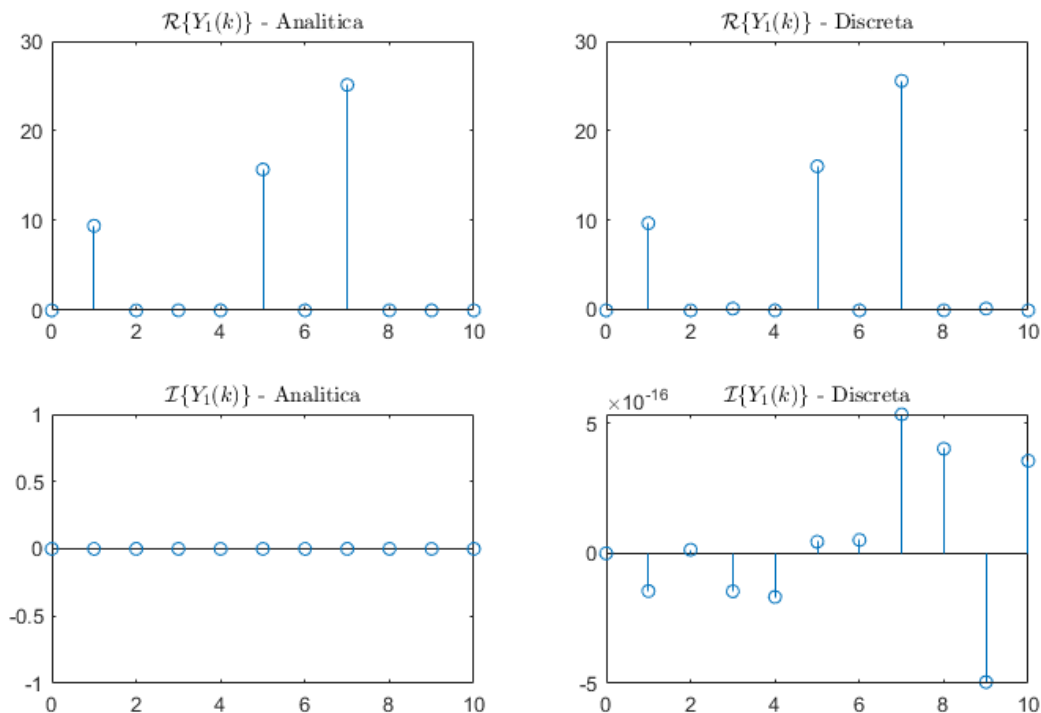
```

title("\mathcal{R}\{ Y_1(k) \} - Discreta", "Interpreter","latex");

subplot(2,2, 4);

stem(k_axis, imag(C));
title("\mathcal{I}\{ Y_1(k) \} - Discreta", "Interpreter","latex");

```



**Comentarios:** Como podemos intuir al analizar los componentes que conforman la señal  $y_1(t)$ , dicha serie al estar compuesta por funciones coseno  $\cos(x)$  centradas en el origen, es decir únicamente funciones par, esto se traduce en una respuesta en la frecuencia de la señal con únicamente componentes reales, como se puede observar al realizar la transformada analítica de la señal, la cual da como resultado los pares de deltas de Dirac ubicados en los puntos que caracterizan las frecuencias que componen cada término coseno. Sin embargo, al compararlo con la transformada discreta de Fourier, encontramos un comportamiento similar en el caso de la parte real, pero además hay presencia de coeficiente en la parte imaginaria, lo cual puede deberse a errores de precisión numérica dado que la presencia de dichos coeficientes en comparación a su parte real es despreciable.

Caso 2  $y_2(t) = 3\sin(\omega t) + 2\sin(3\omega t) + 3\sin(8\omega t)$

```

clear;
clc;

T = 2*pi;           % Período
medT = T/2;         % Medio período
Amp = 1;            % Amplitud
Nterm = 10;         % Número de términos en la serie de Fourier
kMax = floor(2*Nterm*pi/T); % máxima frecuencia

```

```
y = @(t) 3*sin(1*t) + 2*sin(3*1*t) + 3*sin(8*1*t);
```

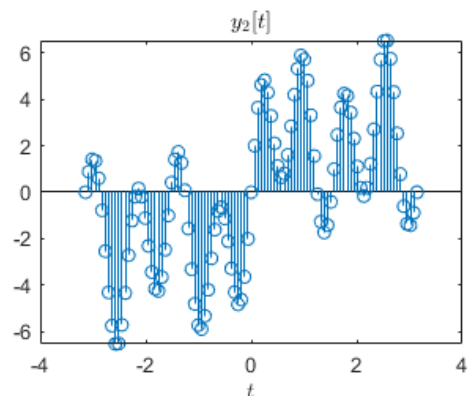
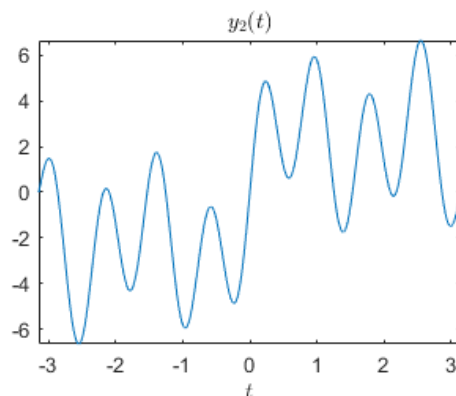
```
figure();
x0=0;
y0=0;
width=800;
height=250;
set(gcf, 'position', [x0,y0,width,height])
```

```
subplot(1, 2, 1);
fplot(y, [-pi pi]);
xlabel("$t$", "Interpreter","latex");
title("$y_2(t)$", "Interpreter","latex")
```

```
subplot(1, 2, 2);
```

```
intervals = 0.02;
t_axis = -1:intervals:1;
t_axis = t_axis*pi;
```

```
y_eval = double(y(t_axis));
stem(t_axis, y_eval);
xlabel("$t$", "Interpreter","latex");
title("$y_2[t]$", "Interpreter","latex");
```



```
syms t k
```

```
y_sym = 3*sin(1*t) + 2*sin(3*1*t) + 3*sin(8*1*t);
Fy(k) = fourier(y_sym, k);
```

```
delta = @(x) 1.*(x == 0);
display(Fy);
```

$$Fy(k) = -3\pi (\delta(k-1) - \delta(k+1))i - 2\pi (\delta(k-3) - \delta(k+3))i - 3\pi (\delta(k-8) - \delta(k+8))i$$

```
Fy = @(x) -3*pi*( delta(x-1) + delta(x+1) ).*1j + ...
          -2*pi*( delta(x-3) + delta(x+3) ).*1j + ...
          -3*pi*( delta(x-8) + delta(x+8) ).*1j;
```

```
k_axis = 0:1:Nterm;
```

```

Fy_eval = Fy(k_axis);

figure();
x0=0;
y0=0;
width=800;
height=500;
set(gcf, 'position', [x0,y0,width,height])

subplot(2,2, 1);
stem(k_axis, real(Fy_eval));
title("$\mathcal{R}\{ Y_2(k) \}$ - Analitica", "Interpreter","latex");

subplot(2,2, 3);
stem(k_axis, imag(Fy_eval));
title("$\mathcal{I}\{ Y_2(k) \}$ - Analitica", "Interpreter","latex");

N = 1000;
h = T/N;

C = custom_dft(y, T, N, Nterm);

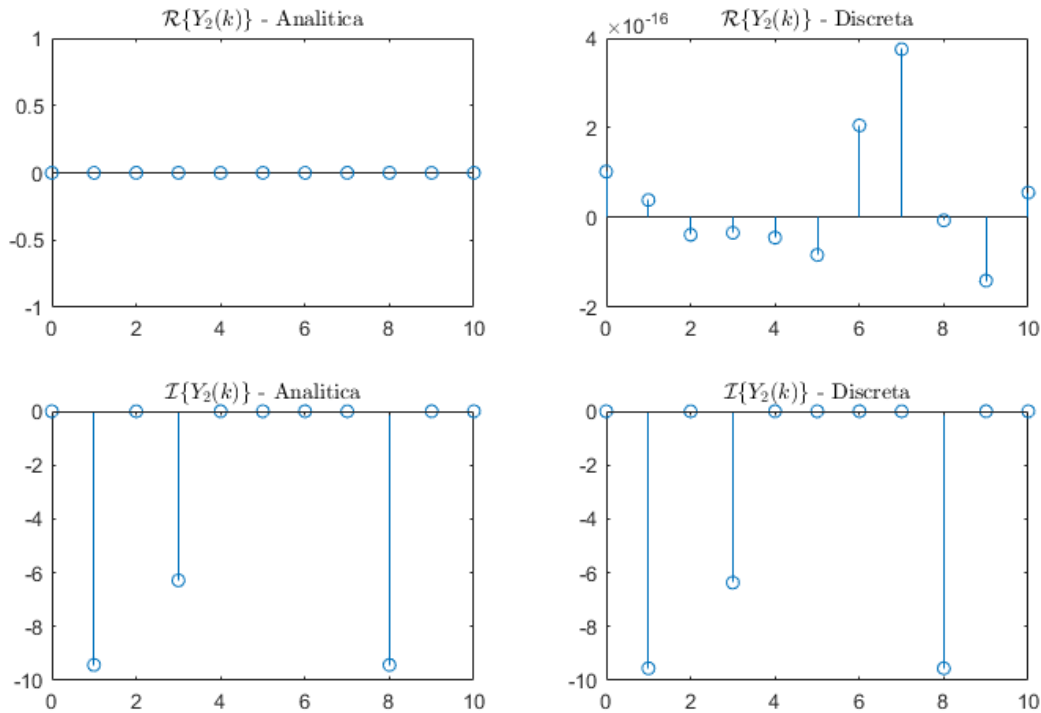
subplot(2,2, 2);

stem(k_axis, real(C));
title("$\mathcal{R}\{ Y_2(k) \}$ - Discreta", "Interpreter","latex");

subplot(2,2, 4);

stem(k_axis, imag(C));
title("$\mathcal{I}\{ Y_2(k) \}$ - Discreta", "Interpreter","latex");

```



**Comentarios:** Como podemos intuir al analizar los componentes que conforman la señal  $y_2(t)$ , dicha serie al estar compuesta por funciones seno  $\sin(x)$  centradas en el origen, es decir únicamente funciones impares, esto se traduce en una respuesta en la frecuencia de la señal con únicamente componentes imaginarias, como se puede observar al realizarla transformada analítica de la señal, la cual da como resultado los pares de deltas de Dirac ubicados en los puntos que caracterizan las frecuencias que componen cada término seno. Sin embargo, al compararlo con la transformada discreta de Fourier, encontramos un comportamiento similar en el caso de la parte imaginaria, pero además hay presencia de coeficiente en la parte real, lo cual puede deberse a errores de precisión numérica dado que la presencia de dichos coeficientes en comparación a su parte imaginaria es depreciable.

c) Encuentre las distintas componentes para el espectro de potencias y muestre que las frecuencias tienen los valores esperados (no sólo las proporciones)

```

y1 = @(t) 3*cos(1*t) + 5*cos(5*1*t) + 8*cos(7*1*t);
y2 = @(t) 3*sin(1*t) + 2*sin(3*1*t) + 3*sin(8*1*t);

T = 2*pi;
Nterm = 10;
N = 100;

figure();
x0=0;
y0=0;

```

```

width=900;
height=300;
set(gcf, 'position', [x0,y0,width,height])

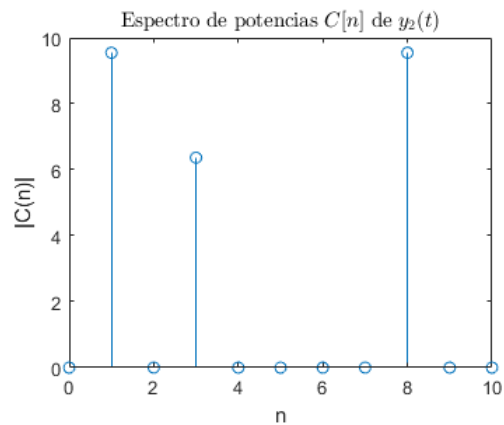
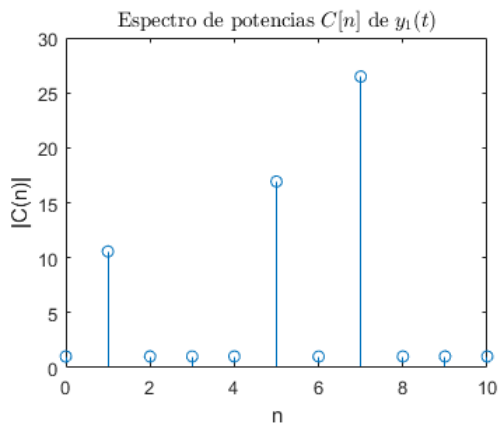
subplot(1, 2, 1);

C = custom_coef(y1, T, N, Nterm);
stem(0:Nterm, abs(C));
title("Espectro de potencias  $C[n]$  de  $y_1(t)$ ", "Interpreter", "latex");
xlabel("n");
ylabel(" $|C(n)|$ ")

subplot(1, 2, 2);

C = custom_coef(y2, T, N, Nterm);
stem(0:Nterm, abs(C));
title("Espectro de potencias  $C[n]$  de  $y_2(t)$ ", "Interpreter", "latex");
xlabel("n");
ylabel(" $|C(n)|$ ")

```



d) Experimente los efectos de elegir diferentes valores de tamaño de paso  $h$  y de ampliar el período de medicion  $T = Nh$

Diferentes tamaños  $h$

```

clear;
clc;

y = @(t) 3*cos(1*t) + 5*cos(5*1*t) + 8*cos(7*1*t);

T = 2*pi;
Nterm = 10;

hs = [10 20 50 100];

figure();

```

```

x0=0;
y0=0;
width=1400;
height=200;
set(gcf, 'position', [x0,y0,width,height])

```

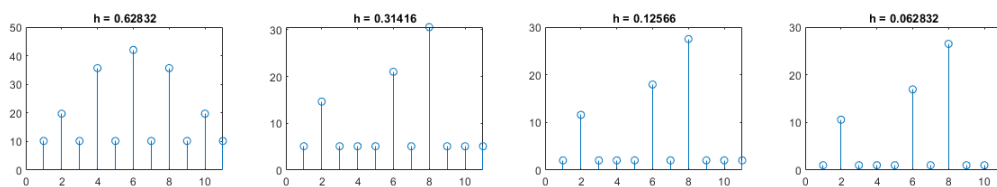
```

for i=1:length(hs)

    subplot(1, length(hs), i)
    N = hs(i);
    C = custom_dft(y, T, N, Nterm);
    stem(abs(C));
    title("h = " + num2str(T/N));

end

```



**Comentarios:** Como podemos observar, conforme disminuimos el tamaño del paso  $h$ , se puede observar una mejor aproximación a resultado obtenido mediante la transformada analítica de Fourier, dado que estamos aumentando la cantidad de términos involucrados en la sumatoria y por ende aproximamos mejor al resultado obtenido mediante la integración.

Diferentes periodos de medición  $T$

```

clear;
clc;

y = @(t) 3*cos(1*t) + 5*cos(5*1*t) + 8*cos(7*1*t);

Nterm = 10;

Ts = [1 2 4 8];
Ts = Ts*pi;

N = 500;

figure();

x0=0;
y0=0;
width=1400;
height=200;
set(gcf, 'position', [x0,y0,width,height])

```



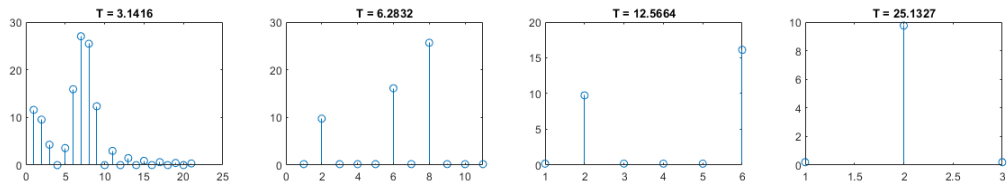
```

for i=1:length(Ts)

    subplot(1, length(Ts), i)
    T = Ts(i);
    C = custom_dft(y, T, N, Nterm);
    stem(abs(C));
    title("T = " + num2str(T));

end

```



**Comentarios:** Como podemos observar, conforme aumentamos el periodo de medición, vemos como disminuye la cantidad de terminos que podemos calcular en la expansión de la serie de fourier, permitiendo solo estimar las frecuencias mas bajas de la señal  $y_1(t)$ , cuando el periodo de medición es propocional a la maxima frecuencia de la señal, obtenemos una buena aproximación de la transformada analitica. En el caso en el que el periodo de medición es menor al periodo de la señal  $y_1(t)$ , estamos realizando una estimación con mayor variedad en la expación de la serie de fourier.

2. Considere ahora la siguiente señal

$$y(t_i) = \frac{10}{10 - 9\sin(t_i)} + \alpha(3R_i - 1) \text{ con } 0 \leq R_i \leq 1$$

a) Grafique su señal ruidosa, su transformada de fourier (analítica) y su espectro de potencia.

```

syms t k

y_sym = 10/(10 - 9*sin(t));
Fy(k) = fourier(y_sym, k);

display(Fy);

```

$$Fy(k) = -10 \text{ fourier}\left(\frac{1}{9 \sin(t) - 10}, t, k\right)$$

```

Fs = 8;                % Sampling frequency
T = 1/Fs;              % Sampling period
L = Fs*17;             % Length of signal
t = (0:L-1)*T;         % Time vector
N = length(t);
R = rand(1, N);
f = Fs*(0:(L/2))/L;

y = @(alpha) 10./(10 - 9*sin(t)) + alpha.*(3.*R - 1);

figure();
x0=0;
y0=0;
width=800;
height=800;
set(gcf, 'position', [x0,y0,width,height])

alphas = [0 1 3 6];
n_plots = length(alphas);

for i = 1:n_plots

    alpha = alphas(i);
    y_seq = y(alpha);

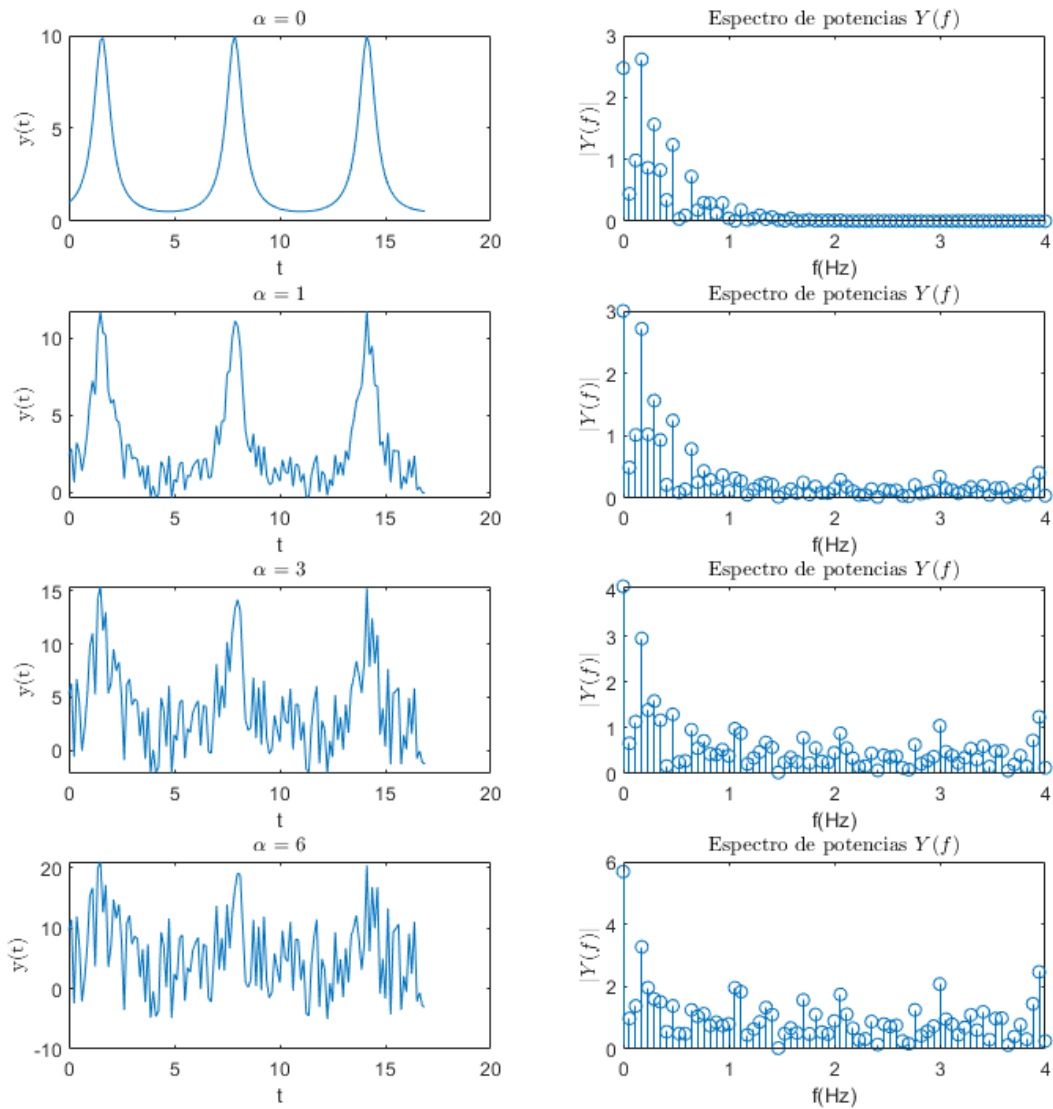
    subplot(n_plots,2,i*2 - 1);
    plot(t, y_seq);
    title("\alpha$ = " + num2str(alpha), "Interpreter", "latex");
    xlabel("t");
    ylabel("y(t)", "Interpreter", "latex");

    subplot(n_plots,2, i*2);

    Y = fft(y_seq);
    P2 = abs(Y/L);
    P1 = P2(1:L/2+1);
    P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
    stem(f, P1);
    title("Espectro de potencias $Y(f)$", "Interpreter", "latex");
    xlabel("f(Hz)")
    ylabel("$|Y(f)|$", "Interpreter", "latex");

end

```



Calcule la función de autocorrelación  $A(\tau)$  y su transformada de Fourier  $A(\omega)$

```
y = @(alpha) 10./(10 - 9*sin(t)) + alpha.*(3.*R - 1);
```

```
figure();
x0=0;
y0=0;
width=1000;
height=800;
set(gcf,'position',[x0,y0,width,height])
```

```
alphas = [0 1 3 6];
n_plots = length(alphas);
```

```

for i = 1:n_plots

    alpha = alphas(i);
    y_seq = y(alpha);
    y_seq = autocorr(y_seq, NumLags=L-1);

    subplot(n_plots,2,i*2 - 1);
    plot(t, y_seq);
    title("\alpha$ = " + num2str(alpha), "Interpreter","latex");
    xlabel("t");
    ylabel("$A(\tau)$", "Interpreter","latex");

    subplot(n_plots,2, i*2);

    Y = fft(y_seq);
    P2 = abs(Y/L);
    P1 = P2(1:L/2+1);
    P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
    stem(f, P1);
    title("Espectro de potencias $A(f)$", "Interpreter","latex");
    xlabel("f(Hz)")
    ylabel("$|Y(f)|$", "Interpreter","latex");

end

```

