Ejercicios de la clase 6

Brayan Monroy* **Emmanuel Martinez**
Universidad Industrial de Santander
Dirección de la Institución

22 de marzo de 2022

Índice

1. Sección 2.2.4 **1**
1.1. Ejercicio 6 1

1. Sección 2.2.4

1.1. Ejercicio 6

1. **Solution:** Para la suma de cuaterniones, tenemos que $|c\rangle = |a\rangle + |b\rangle = (a^0 + b^0)|q_0\rangle + (a^1 + b^1)|q_1\rangle + (a^2 + b^2)|q_2\rangle + (a^3 + b^3)|q_3\rangle = c^0|q_0\rangle + c^1|q_1\rangle + c^2|q_2\rangle + c^3|q_3\rangle$.

   Similarmente, para la multiplicación por escalares se tiene que $\alpha|c\rangle = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle = \alpha(a^0 + b^0)|q_0\rangle + \alpha(a^1 + b^1)|q_1\rangle + \alpha(a^2 + b^2)|q_2\rangle + \alpha(a^3 + b^3)|q_3\rangle = \alpha c^0|q_0\rangle + \alpha c^1|q_1\rangle + \alpha c^2|q_2\rangle + \alpha c^3|q_3\rangle$

   Si hacemos $a^0 = b^0 = 0$, lo que implica que $c^0 = 0$, entonces el cuaternión $|c\rangle$ puede ser reescrito como $|c\rangle = c^1|q_1\rangle + c^2|q_2\rangle + c^3|q_3\rangle$ para la suma como $\alpha|c\rangle = \alpha c^1|q_1\rangle + \alpha c^2|q_2\rangle + \alpha c^3|q_3\rangle$ para la multiplicación por escalares.

   Entonces, si tomamos $|q_i\rangle = |e_i\rangle$, para $i = 1, \ldots, 3$, tenemos que $|c\rangle = c^1|e_1\rangle + c^2|e_2\rangle + c^3|e_3\rangle = c^1\hat{\mathbf{i}} + c^2\hat{\mathbf{j}} + c^3\hat{\mathbf{k}}$ para la suma y siguiendo la misma analogía, $\alpha|c\rangle = \alpha c^1\hat{\mathbf{i}} + \alpha c^2\hat{\mathbf{j}} + \alpha c^3\hat{\mathbf{k}}$, siendo ambas operaciones analogas a la de los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas.

2. **Solution:**

$$|b\rangle = b_0 + b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}} \qquad |r\rangle = r_0 + r_1\hat{\mathbf{i}} + r_2\hat{\mathbf{j}} + r_3\hat{\mathbf{k}}$$

$$|b\rangle \odot |r\rangle = (b_0 + b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}})(r_0 + r_1\hat{\mathbf{i}} + r_2\hat{\mathbf{j}} + r_3\hat{\mathbf{k}})$$

*e-mail: `brayan2180032@correo.uis.edu.co`

$$
\begin{aligned}
|b\rangle \odot |r\rangle = {} & b_0r_0 + b_0r_1\hat{\mathbf{i}} + b_0r_2\hat{\mathbf{j}} + b_0r_3\hat{\mathbf{k}} \\
& b_1r_0\hat{\mathbf{i}} - b_1r_1\hat{\mathbf{i}}^2 + b_1r_2\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{j}} + b_1r_3\hat{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{k}} \\
& b_2r_0\hat{\mathbf{j}} + b_2r_1\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{i}} - b_2r_2\hat{\mathbf{j}}^2 + b_2r_3\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{k}} \\
& b_3r_0\hat{\mathbf{k}} + b_3r_1\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{i}} + b_3r_2\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{j}} - b_3r_3\hat{\mathbf{k}}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|b\rangle \odot |r\rangle = {} & b_0r_0 + b_0r_1\hat{\mathbf{i}} + b_0r_2\hat{\mathbf{j}} + b_0r_3\hat{\mathbf{k}} \\
& b_1r_0\hat{\mathbf{i}} - b_1r_1 + b_1r_2\hat{\mathbf{k}} + b_1r_3(-\hat{\mathbf{j}}) \\
& b_2r_0\hat{\mathbf{j}} + b_2r_1(-\hat{\mathbf{k}}) - b_2r_2 + b_2r_3\hat{\mathbf{i}} \\
& b_3r_0\hat{\mathbf{k}} + b_3r_1\hat{\mathbf{j}} + b_3r_2(-\hat{\mathbf{i}}) - b_3r_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|b\rangle \odot |r\rangle = {} & b_0r_0 - b_1r_1 - b_2r_2 - b_3r_3 \\
& b_0(r_1\hat{\mathbf{i}} + r_2\hat{\mathbf{j}} + r_3\hat{\mathbf{k}}) \\
& r_0(b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}) \\
& (b_2r_3 - b_3r_2)\hat{\mathbf{i}} \\
& (b_3r_1 - b_1r_3)\hat{\mathbf{j}} \\
& (b_1r_2 - b_2r_1)\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}
$$

$$
|b\rangle \odot |r\rangle = b_0r_0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} + r_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}
$$

3. **Solution:**

4. **Solution:**

5. **Solution:**

   Sea $|q_i\rangle = \sigma_i$, para $i = 0, \ldots, 3$, se pueden volver una base de cuaterniones si

$$
a\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0,
$$

   donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Resolviendo tenemos que

$$
\begin{pmatrix}c+d & a-bi\\ a+bi & -c+d\end{pmatrix} = 0,
$$

   de esta matriz observamos que la única solución posible es $a = b = c = d = 0$, por lo que los quaterniones $|q_i\rangle$ representados por las matrices de Pauli y la identidad son linealmente independientes y generan una base para un espacio.

   Sea

$$
|b\rangle \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x+iy & a+ib\\ -a+ib & x-iy\end{pmatrix},
$$

6. **Solution:**

Similar al inciso anterior, se tiene que

$$a\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=0,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Resolviendo tenemos que

$$\begin{pmatrix}a&b&-d&-c\\-b&a&-c&d\\d&c&a&b\\c&-d&-b&a\end{pmatrix}=0,$$

Este es igual a

$$\begin{aligned}a+b-c-d&=0\\a-b-c+d&=0\\a+b+c+d&=0\\a-b+c-d&=0\end{aligned}$$

donde se observa que tiene única solución $a = b = c = d = 0$, siendo cada cuaternión linealmente independiente y por lo tanto, una base.