Ejercicios de la clase 6

Brayan Monroy* **Emmanuel Martinez**
Universidad Industrial de Santander
Dirección de la Institución

4 de abril de 2022

Índice

1. Sección 2.2.4

1.1. Ejercicio 5

(a) <u>**Solución:**</u> Sea $|r_n\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in \mathcal{P}_n$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se verfican las propiedades de producto interno:

$$\langle \mathbf{0}|p_n\rangle = a_0(0) + a_1(0) + \cdots + a_{n-1}(0) = 0$$

$$\langle p_n|p_n\rangle = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 > 0, \qquad \langle p_n|p_n\rangle = 0 \text{ if } |p_n\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i, \;\; a_i = 0$$

$$\begin{aligned}
\langle q_n|\alpha p_n + \beta r_n\rangle &= b_0(\alpha a_0 + \beta c_0) + \cdots + b_{n-1}(\alpha a_{n-1} + \beta c_{n-1}) \\
&= (\alpha a_0 b_0 + \beta b_0 c_0) + \cdots + (\alpha a_{n-1} b_{n-1} + \beta b_{n-1} c_{n-1}) \\
&= \alpha(a_0 b_0 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1}) + \beta(b_0 c_0 + \cdots + b_{n-1} c_{n-1}) \\
&= \alpha|q_n\rangle|p_n\rangle + \beta|q_n\rangle|r_n\rangle
\end{aligned}$$

$$\langle q_n|p_n\rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} = b_0 a_0 + b_1 a_1 + \cdots + b_{n-1} a_{n-1} = \langle p_n|q_n\rangle$$

Finalmente,

*e-mail: `brayan2180032@correo.uis.edu.co`

$$
\begin{aligned}
|\langle q_n|p_n\rangle|^2 &= |a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1}|^2 \\
&= (a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1})(a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1}) \\
&= (a_0^2b_0^2 + a_1^2b_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2b_{n-1}^2) + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle q_n|q_n\rangle\langle p_n|p_n\rangle &= (a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2)(b_0^2 + b_1^2 + \cdots + b_{n-1}^2) \\
&= (a_0^2b_0^2 + a_1^2b_1^2 + \cdots a_{n-1}^2b_{n-1}^2) + \cdots
\end{aligned}
$$

Como se observa en las dos últimas ecuaciones, $a_i^2 > 0$ y $b_i^2 > 0$ para todo $i = 1, ..., n-1$, por lo que se concluye que

$$|\langle q_n|p_n\rangle|^2 \leq \langle q_n|q_n\rangle\langle p_n|p_n\rangle$$

Como $\langle q_n|p_n\rangle$ cumple con las propiedades del producto interno, entonces es valido.

(b) **Solución:** Sea $|g_n\rangle = g(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i \in \mathcal{C}_{[a,b]}$. Este tipo de función puede ser reescrito como

$$|g_n\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_ix^i + a_nx^n = |p_n\rangle + a_nx^n$$

Por lo tanto, $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{C}_{[a,b]}$.

1.2. Ejercicio 6

(a) **Solución:** Para la suma de cuaterniones, tenemos que $|c\rangle = |a\rangle + |b\rangle = (a^0 + b^0)|q_0\rangle + (a^1 + b^1)|q_1\rangle + (a^2 + b^2)|q_2\rangle + (a^3 + b^3)|q_3\rangle = c^0|q_0\rangle + c^1|q_1\rangle + c^2|q_2\rangle + c^3|q_3\rangle$.

Similarmente, para la multiplicación por escalares se tiene que $\alpha|c\rangle = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle = \alpha(a^0 + b^0)|q_0\rangle + \alpha(a^1 + b^1)|q_1\rangle + \alpha(a^2 + b^2)|q_2\rangle + \alpha(a^3 + b^3)|q_3\rangle = \alpha c^0|q_0\rangle + \alpha c^1|q_1\rangle + \alpha c^2|q_2\rangle + \alpha c^3|q_3\rangle$

Si hacemos $a^0 = b^0 = 0$, lo que implica que $c^0 = 0$, entonces el cuaternión $|c\rangle$ puede ser reescrito como $|c\rangle = c^1|q_1\rangle + c^2|q_2\rangle + c^3|q_3\rangle$ para la suma como $\alpha|c\rangle = \alpha c^1|q_1\rangle + \alpha c^2|q_2\rangle + \alpha c^3|q_3\rangle$ para la multiplicación por escalares.

Entonces, si tomamos $|q_i\rangle = |e_i\rangle$, para $i = 1, \ldots, 3$, tenemos que $|c\rangle = c^1|e_1\rangle + c^2|e_2\rangle + c^3|e_3\rangle = c^1|q_1\rangle + c^2|q_2\rangle + c^3|q_3\rangle$ para la suma y siguiendo la misma analogía, $\alpha|c\rangle = \alpha c^1|q_1\rangle + \alpha c^2|q_2\rangle + \alpha c^3|q_3\rangle$, siendo ambas operaciones analogas a la de los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas.

(b) **Solución:**

$$|b\rangle = b_0 + b_1|q_1\rangle + b_2|q_2\rangle + b_3|q_3\rangle \qquad |r\rangle = r_0 + r_1|q_1\rangle + r_2|q_2\rangle + r_3|q_3\rangle$$

$$|b\rangle \odot |r\rangle = (b_0 + b_1|q_1\rangle + b_2|q_2\rangle + b_3|q_3\rangle)(r_0 + r_1|q_1\rangle + r_2|q_2\rangle + r_3|q_3\rangle)$$

$$
\begin{aligned}
|b\rangle \odot |r\rangle = b_0r_0 &+ b_0r_1|q_1\rangle + b_0r_2|q_2\rangle + b_0r_3|q_3\rangle \\
&+ b_1r_0|q_1\rangle + b_1r_1|q_1\rangle^2 + b_1r_2|q_1\rangle|q_2\rangle + b_1r_3|q_1\rangle|q_3\rangle \\
&+ b_2r_0|q_2\rangle + b_2r_1|q_2\rangle|q_1\rangle + b_2r_2|q_2\rangle^2 + b_2r_3|q_2\rangle|q_3\rangle \\
&+ b_3r_0|q_3\rangle + b_3r_1|q_3\rangle|q_1\rangle + b_3r_2|q_3\rangle|q_2\rangle + b_3r_3|q_3\rangle^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|b\rangle \odot |r\rangle = b_0r_0 &+ b_0r_1|q_1\rangle + b_0r_2|q_2\rangle + b_0r_3|q_3\rangle \\
&+ b_1r_0|q_1\rangle - b_1r_1 + b_1r_2|q_3\rangle + b_1r_3(-|q_2\rangle) \\
&+ b_2r_0|q_2\rangle + b_2r_1(-|q_3\rangle) - b_2r_2 + b_2r_3|q_1\rangle \\
&+ b_3r_0|q_3\rangle + b_3r_1|q_2\rangle + b_3r_2(-|q_1\rangle) - b_3r_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|b\rangle \odot |r\rangle = b_0r_0 &- b_1r_1 - b_2r_2 - a_3r_3 \\
&+ b_0(r_1|q_1\rangle + r_2|q_2\rangle + r_3|q_3\rangle) \\
&+ r_0(b_1|q_1\rangle + b_2|q_2\rangle + a_3|q_3\rangle) \\
&+ (b_2r_3 - b_3r_2)|q_1\rangle \\
&+ (b_3r_1 - b_1r_3)|q_2\rangle \\
&+ (b_1r_2 - b_2r_1)|q_3\rangle
\end{aligned}
$$

$$
|b\rangle \odot |r\rangle = b_0r_0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} + r_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r}
$$

(c) **Solución:** Sea

$$
|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = b_0r_0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} + r_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r} = \alpha|q_0\rangle + \mathbf{S}^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha|q_j\rangle + \mathbf{A}^{[jk]i}b_jr_k|q_i\rangle,
$$

descomponiendo está expresión tenemos que

$$
\alpha|q_0\rangle = b_0r_0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r} = (b_0r_0 - b_jr_j)|q_0\rangle = b_0r_0 - b_jr_j
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha|q_j\rangle &= r_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{r} \\
&= r_0b_1|q_1\rangle + r_0b_2|q_2\rangle + r_0b_3|q_3\rangle + b_0r_1|q_1\rangle + b_0r_2|q_2\rangle + b_0r_3|q_3\rangle \\
&= (r_0b_1 + b_0r_1)|q_1\rangle + (r_0b_2 + b_0r_2)|q_2\rangle + (r_0b_3 + b_0r_3)|q_3\rangle
\end{aligned}
$$

donde

$$
\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},
$$

$$
\mathbf{S}^{(\alpha 1)}\delta^0_\alpha = r_0b_1 + b_0r_1,
$$

$$\mathbf{S}^{(\alpha 2)}\delta^0_\alpha = r_0 b_2 + b_0 r_2,$$
$$\mathbf{S}^{(\alpha 3)}\delta^0_\alpha = r_0 b_3 + b_0 r_3.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle &= \mathbf{b}\times\mathbf{r}\\ &= (b_2 r_3 - b_3 r_2)|q_1\rangle - (b_1 r_3 - b_3 r_1)|q_2\rangle + (b_1 r_2 - b_2 r_1)|q_3\rangle\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{A}^{[jk]1} b_j r_k = b_2 r_3 - b_3 r_2,$$
$$\mathbf{A}^{[jk]2} b_j r_k = b_1 r_3 - b_3 r_1,$$
$$\mathbf{A}^{[jk]3} b_j r_k = b_1 r_2 - b_2 r_1.$$

(d) **Solución:** Dada la forma en la que se definieron los componentes del producto, tenemos que $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{S}^{(ij)} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $\mathbf{A}^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Y debido a que el producto de cuaterniones no cambia de definición, sino su forma de escribir, entonces continua siendo un vector.

(e) **Solución:**

Sea $|q_i\rangle = \sigma_i$, para $i = 0, \ldots, 3$, se pueden volver una base de cuaterniones si

$$a\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Resolviendo tenemos que

$$\begin{pmatrix}c+d & a-bi\\ a+bi & -c+d\end{pmatrix} = 0,$$

de esta matriz observamos que la única solución posible es $a = b = c = d = 0$, por lo que los quaterniones $|q_i\rangle$ representados por las matrices de Pauli y la identidad son linealmente independientes y generan una base para un espacio.

Sea

$$|b\rangle \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x+iy & a+ib\\ -a+ib & x-iy\end{pmatrix},$$

por inspección, se observa que cumple con las caracteristicas de los cuaterniones únicamente si $y = 0$. Por otra parte, si $y \neq 0$, entonces el cuaternión no tendría ningún elemento real, por lo que ya no podría ser considerado un cuaternión.

(f) **Solución:**

Similar al inciso anterior, se tiene que

$$a\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}=0,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Resolviendo tenemos que

$$\begin{pmatrix}a&b&-d&-c\\-b&a&-c&d\\d&c&a&b\\c&-d&-b&a\end{pmatrix}=0,$$

Este es igual a

$$\begin{aligned}a+b-c-d=0\\a-b-c+d=0\\a+b+c+d=0\\a-b+c-d=0\end{aligned}$$

donde se observa que tiene única solución $a = b = c = d = 0$, siendo cada cuaternión linealmente independiente y por lo tanto, una base.

(g) **Solución:** Debido a que el espacio de producto interno está definido como $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to F$, donde $F \in \mathbb{R} \vee F \in \mathbb{C}$, entonces $|a\rangle^{\maltese} \odot |b\rangle$ no es una buena definición de producto interno.

(h) **Solución:** Resolviendo el producto para cada uno de los componentes (a mano) se observa que

$$\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \widetilde{a|b}\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widetilde{a|b}\rangle \odot |q_1\rangle\right] = a_0b_0 + (a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2)|q_1\rangle$$

Lo cual es un número complejo convencional.

Ahora verificamos cada una de las propiedades de producto interno:

$$\langle a|0\rangle = a_0(0) + (a_0(0) - a_1(0) - a_2(0) + a_3(0))|q_1\rangle = 0$$

$$\langle 0|a\rangle = (0)a_0 + ((0)a_1 - (0)a_0 - (0)a_3 + (0)a_2)|q_1\rangle = 0$$

$$\langle a|b\rangle = a_0b_0 + (a_0b_1 - a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2)|q_1\rangle = a_0b_0 + (b_0a_1 - b_1a_0 - b_2a_3 + b_3a_2)|q_1\rangle = \langle b|a\rangle^*$$

$$\langle a|a\rangle = a_0a_0 + (a_0a_1 - a_1a_0 - a_2a_3 + a_3a_2)|q_1\rangle = a_0^2 + (0)|q_1\rangle = a_0^2$$

$$|||a\rangle||^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Como $\langle a|a\rangle \neq |||a\rangle||^2$, no se satisfacen con todas las propiedades de producto interno.

(i) **Solución:** Sea

$$n(|b\rangle) = |a\rangle^{\maltese} \odot |a\rangle = a_0^2 + \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + a_0\mathbf{a} - a_0\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\mathbf{a} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^3,$$

entonces

$$|||a\rangle|| = \sqrt{|a\rangle^{\maltese} \odot |a\rangle} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Verificando la desigualdad de Chuchy-Schwarz:

$$|||a\rangle + |b\rangle||^2 = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$
$$|||a\rangle||^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$
$$|||b\rangle||^2 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$|||a\rangle||^2 + |||b\rangle||^2 = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

De esto se observa que $|||a\rangle + |b\rangle||^2 = |||a\rangle||^2 + |||b\rangle||^2$, por lo tanto se cumple la desigualdad triangular haciendo que $n(|b\rangle)$ sea una buena definición de norma para los cuaterniones.

(j) **Solución:** La multiplicación sería

$$|a\rangle \odot |\bar{a}\rangle = |a\rangle \odot \frac{|a\rangle^{\maltese}}{|||a\rangle||^2} = \frac{1}{|||a\rangle||^2}\left(|a\rangle \odot |a\rangle^{\maltese}\right) = \frac{1}{|||a\rangle||^2}\left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) = \frac{|||a\rangle||^2}{|||a\rangle||^2} = 1.$$

Por lo tanto, $|\bar{a}\rangle$ si puede ser considerado como el inverso de $|a\rangle$, respecto a la multiplicación $\odot$.