

Asignación de Transformadas Discretas de Fourier

Brayan Monroy* **Emmanuel Martinez****
Universidad Industrial de Santander
Cra 27 Calle 9 Ciudad Universitaria

1 de mayo de 2022

Índice

1. Etapa 1	1
1.1. Calentamiento	1
2. Etapa 2	6
2.1. Análisis de las señales adquiridas por las antenas	7
2.2. Autocorrelación de las señales captadas por las antenas	8
3. Conclusiones y Recomendaciones	10

Resumen

En el presente informe se desarrollaron dos etapas de estudio relacionadas con las series y transformadas de Fourier. La primera etapa consistió en un entrenamiento para comprender y aplicar los conceptos relacionados a las series de Fourier, como el calculo de sus coeficientes. También analizó e implementó la transformada de Fourier analítica y discreta. Se observaron los diferentes espectros de potencia y diversos parámetros asociados a las series y transformadas de Fourier. En la segunda etapa se realizó un trabajo de campo en el que se adquirieron señales electro atmosféricas mediante el uso de diversas antenas, por lo que se analizaron las señales y sus diferentes relaciones.

1. Etapa 1

1.1. Calentamiento

1. Considere las siguientes señales

$$y_1(t) = 3 \cos(\omega t) + 5 \cos(5\omega t) + 8 \cos(7\omega t) \quad (1)$$

* e-mail: brayan2180032@correo.uis.edu.co

** e-mail: emmanuel2162134@correo.uis.edu.co

$$y_2(t) = 3 \sin(\omega t) + 2 \sin(3\omega t) + 3 \sin(8\omega t) \quad (2)$$

1. Implemente en cada caso la transformada analítica y discreta de Fourier. Compárelas.
2. Muestre para cuáles casos recupera una transformada real o imaginaria.
3. Encuentre las distintas componentes para el espectro de potencias y muestre que las frecuencias tienen los valores esperados (no sólo las proporciones).
4. Experimente los efectos de elegir diferentes valores de tamaño de paso h y de ampliar el período de muestreo $T = Nh$.

Caso 1: Señal $y_1(t)$

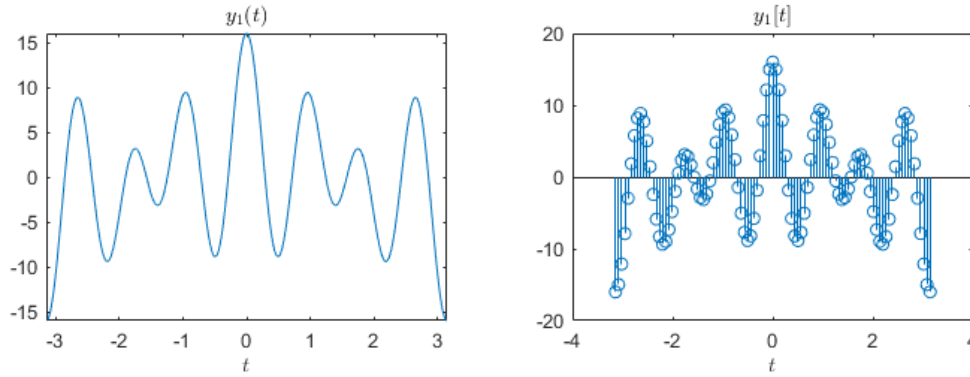


Figura 1: Señal $y_1(t)$. Primera columna señal continua. Segunda columna señal discreta.

Para la señal $y_1(t)$ la cual se muestra en la Figura 1, su transformada de Fourier analítica está dada por

$$Y_1(k) = 3\pi(\delta(k-1) + \delta(k+1)) + 5\pi(\delta(k-5) + \delta(k+5)) + 8\pi(\delta(k-7) + \delta(k+7)), \quad (3)$$

Su transformada de Fourier discreta está dada por la expansión de los coeficientes de la forma

$$C_j = \sum_{t=t_0}^{t_n} y_1(t) \exp(-ik_j t), \quad (4)$$

A continuación se muestran en la Figura 3 la parte real e imaginaria, tanto para la transformada analítica como discreta para la señal $y_1(t)$.

Comentarios: Como podemos intuir al analizar los componentes que conforman la señal $y_1(t)$, dicha serie al estar compuesta por funciones coseno centradas en el origen, es decir únicamente funciones par, esto se traducirá en una respuesta en la frecuencia de la señal con únicamente componentes reales, como se puede observar al realizar la transformada analítica de la señal, la cual

da como resultado los pares de deltas de dirac ubicados en los puntos de caracterizan las frecuencias que componen cada termino coseno. Sin embargo, al cómpralo con la transformada discreta de Fourier, encontramos un comportamiento similar en el caso de la parte real, pero además hay presencia de coeficiente en la parte imaginaria, lo cual puede deberse a errores de precisión numérica dado que la presencia de dichos coeficientes en comparación a su parte real es despreciable.

Caso 2: Señal $y_2(t)$

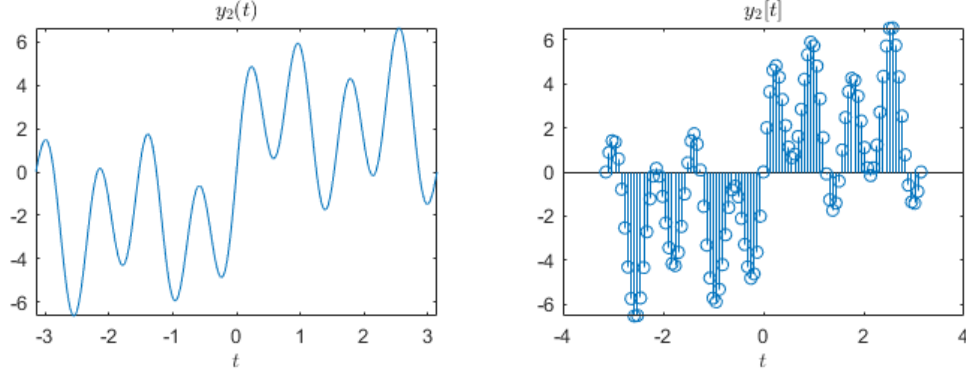


Figura 2: Señal $y_2(t)$. Primera columna señal continua. Segunda columna señal discreta.

Para la señal $y_2(t)$ la cual se muestra en la Figura 2, su transformada de Fourier analítica esta dada por

$$Y_1(k) = -3\pi(\delta(k-1) + \delta(k+1)) - 2\pi(\delta(k-3) + \delta(k+3)) - 3\pi(\delta(k-8) + \delta(k+8)), \quad (5)$$

Su transformada de fourier discreta esta dada por la expansión de los coeficientes de la forma

$$C_j = \sum_{t=t_0}^{t_n} y_1(t) \exp(-ik_j t), \quad (6)$$

A continuación se muestran en la Figura 4 la parte real e imaginaria, tanto para las transformada analítica como discreta para la señal $y_2(t)$.

Comentarios: Como podemos intuir al analizar los componentes que conformar la señal, dicha serie al estar compuesta por funciones seno centradas en el origen, es decir únicamente funciones impares, esto se traducirá en una respuesta en la frecuencia de la señal con únicamente componentes imaginarias, como se puede observar al realizar la transformada analítica de la señal, la cual da como resultado los pares de deltas de dirac ubicados en los puntos de caracterizan las frecuencias que componen cada termino seno. Sin embargo, al cómpralo con la transformada discreta de Fourier, encontramos un comportamiento similar en el caso de la parte imaginaria, pero además hay presencia de coeficiente en la parte real, lo cual puede deberse a errores de precisión numérica dado que la presencia de dichos coeficientes en comparación a su parte imaginaria es despreciable.

Caso 3: Componentes espectro de potencias

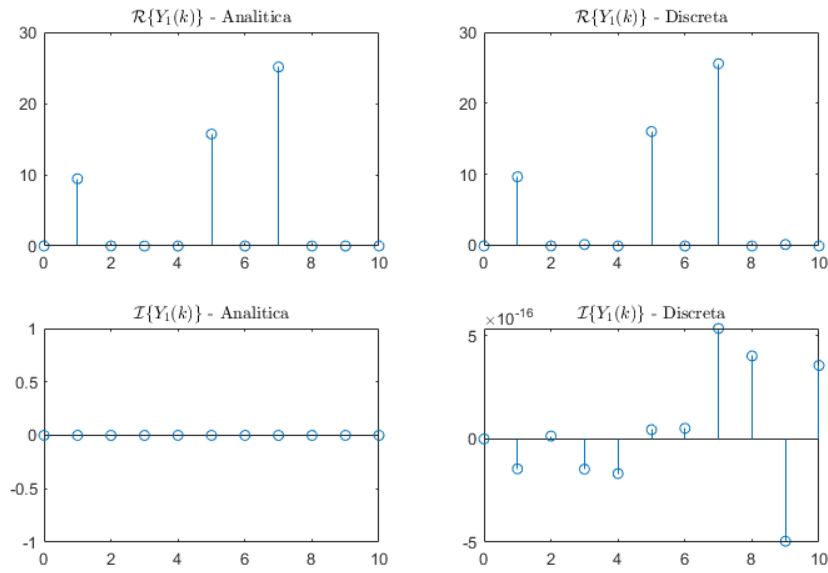


Figura 3: Transformada analítica y discreta de Fourier. Primera columna, parte real de la transformada. Segunda columna, parte imaginaria de la transformada.

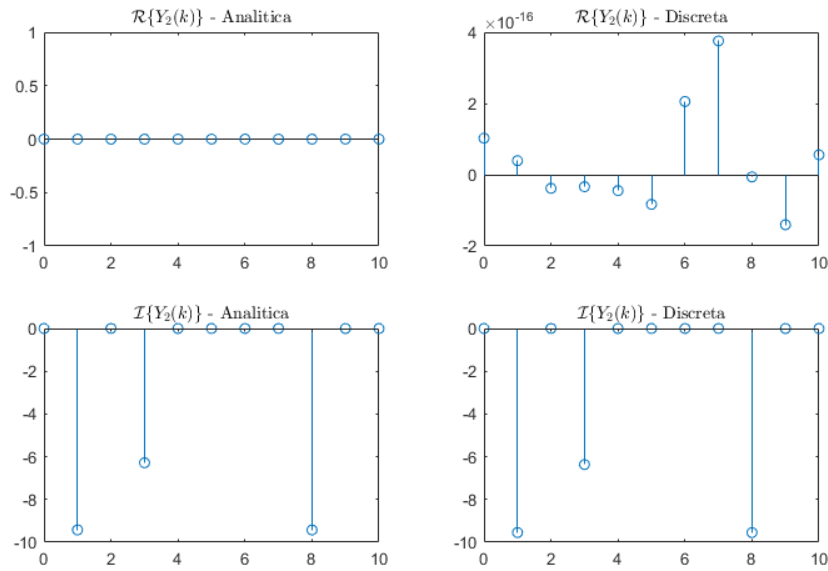


Figura 4: Transformada analítica y discreta de Fourier. Primera columna, parte real de la transformada. Segunda columna, parte imaginaria de la transformada.

En la Figura 5, se muestra el espectro de potencias para las señales $y_1(t)$ y $y_2(t)$, como se puede

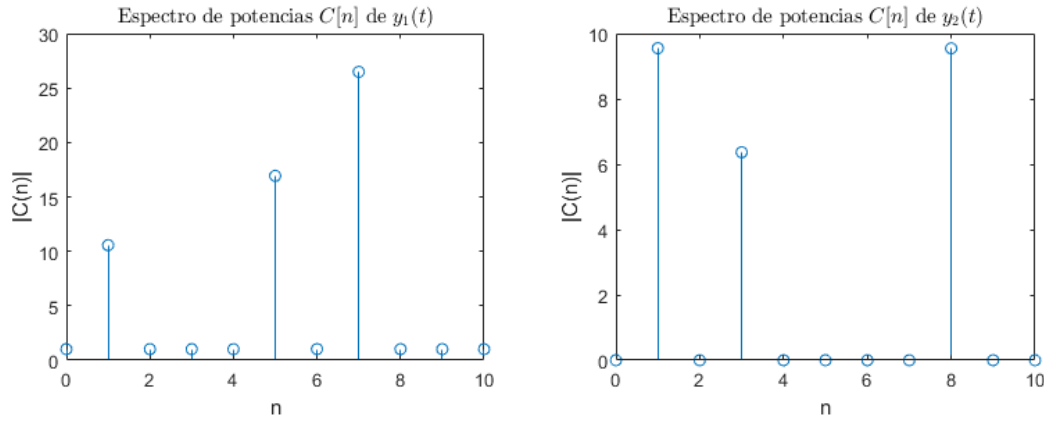


Figura 5: Componentes del espectro de potencias. Primera columna señal $y_1(t)$. Segunda columna señal $y_2(t)$.

observar dicho espectro coincide con la magnitud de las componentes reales e imaginarias para cada señal respectivamente, esto se debe al hecho de que $y_1(t)$ es una señal par y $y_2(t)$ es una señal impar.

Caso 4: Diferentes tamaños de h

Para este caso, se tomo la señal $y_1(t)$ y se realizo el calculo de los coeficientes C_j para distintos tamaños de h que comprenden la suma, conservando el mismo periodo de muestreo. Los resultados obtenidos distintos h s se muestran en la Figura 6.

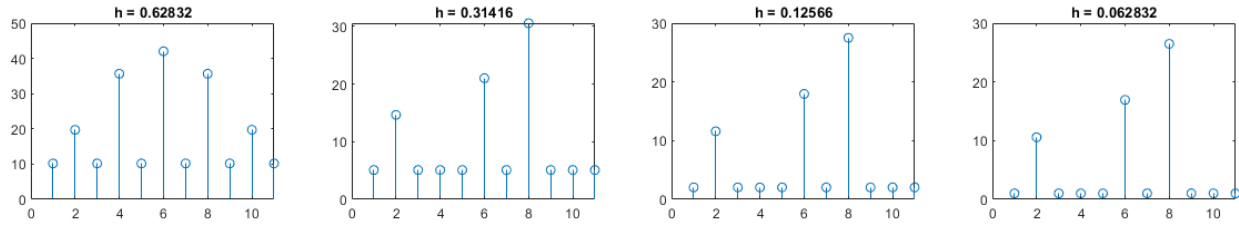


Figura 6: Transformada discreta de Fourier para la señal $y_1(t)$ con distintos tamaño de paso h

Comentarios: Como podemos observar, conforma disminuimos el tamaño del paso , se puede observar una mejor aproximación a resultado obtenido mediante la transformada analítica de Fourier, dado que estamos aumentando las cantidad de términos involucrados en la suma y por ende aproximamos mejor al resultado obtenido mediante la integración.

Caso 5: Diferentes periodos de medición de T Para este caso, se tomo la señal $y_1(t)$ y se realizo el calculo de los coeficientes C_j para distintos periodos de T que comprenden la suma. Los resultados obtenidos distintos h s se muestran en la Figura 7.

Comentarios: Como podemos observar, conforme aumentamos el periodo de medición, vemos como disminuye la cantidad de términos que podemos calcular en la expansión de la serie de Fourier, permitiendo solo estimar las frecuencias mas bajas de la señal , cuando el periodo de medición es proporcional a la máxima frecuencia de la señal, obtenemos una buena aproximación de la

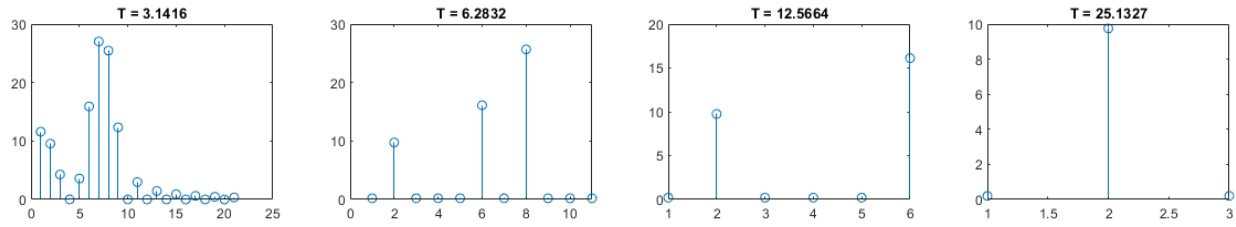


Figura 7: Transformada discreta de Fourier para la señal $y_1(t)$ con distintos periodos de medición T

transformada analítica. En el caso en el que el periodo de medición es menor al periodo de la señal, estamos realizando una estimación con mayor variedad en la expansión de la serie de Fourier.

2. Considere ahora la siguiente señal

$$y(t_i) = \frac{10}{10 - 9 \sin(t_i)} + \alpha(3R_i - 1) \text{ con } 0 \leq R_i \leq 1 \quad (7)$$

- Grafique su señal ruidosa, su transformada de Fourier (analítica) y su espectro de potencia.
- Calcule la función de auto-correlación $A(\tau)$ y su transformada de Fourier $A(\omega)$.

Comentarios: La autocorrelación nos indica la relación temporal de cada uno de las muestras de la señal. En la figura 9 se observa las diferentes variaciones de la autocorrelación de la señal modificando la cantidad de ruido mediante el parámetro α . Debido a que temporamente la autocorrelación decae debido al ruido, se observa que su transformada de fourier ya no adquiere el espectro de potencias de la señal pura, sino del ruido mismo.

- Compare la transformada discreta de Fourier de $A(\tau)$ con el verdadero espectro de potencia y discuta la eficacia de la reducción del ruido mediante el uso de la función de autocorrelación.
- ¿Para cuáles valores de α se pierde toda la información en la entrada?

Comentarios: Como podemos observar en la figura 8, conforme aumentamos el valor de α , la señal comienza a deformarse debido al que se le está dando más peso al ruido introducido a la señal. De esta manera observamos que con $\alpha = 0$ la señal no ha sufrido ninguna alteración, pero apenas comenzamos a modificar $\alpha > 0$, se comienza a observar el ruido en la señal. Para este caso se observa que cuando $\alpha \geq 3$, la señal ha degradado gran parte de su información excepto en algunas de las bajas frecuencias.

2. Etapa 2

El trabajo de campo realizado consistió en adquirir señales de eventos electro atmosféricos con diferentes antenas, específicamente 6 antenas. De tal manera que la información captada por una de estas antenas se puede observar en la figura 12.

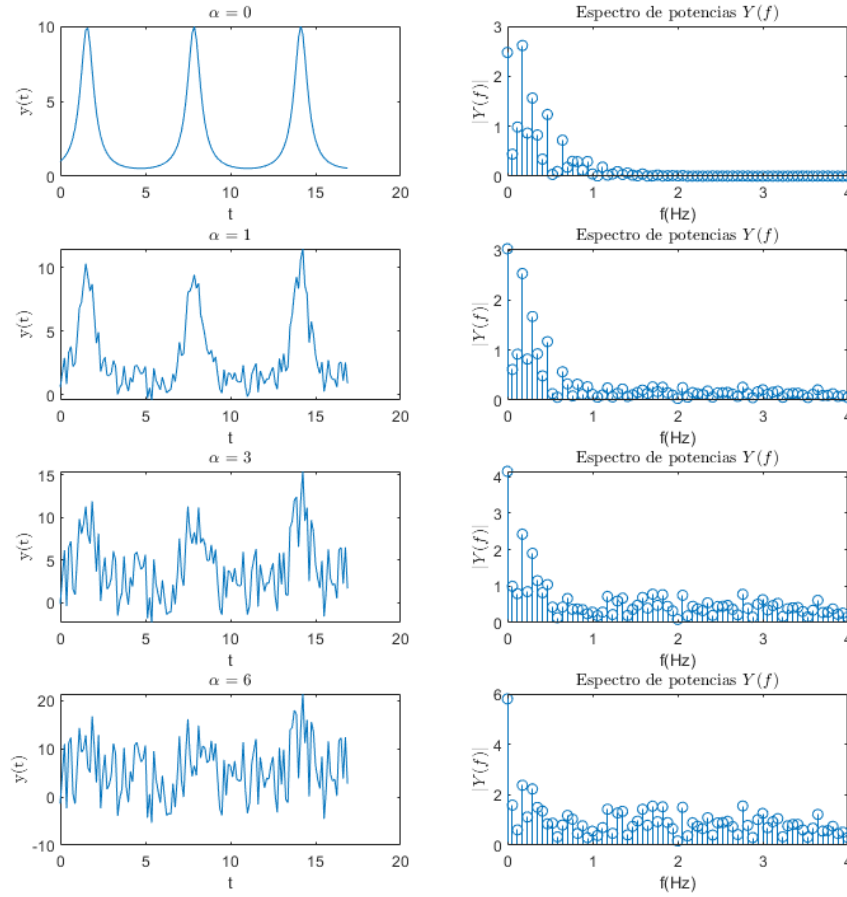


Figura 8: Primera columna señal ruidos. Segunda columna transformada de Fourier. Cada fila corresponde para un caso con distinto valor de α .

2.1. Análisis de las señales adquiridas por las antenas

Primero, visualizaremos la información adquirida por las antenas como series de tiempo en la figura 13.

De esta figura se observa que la señal captada por todas las antenas fluctúa bastante, pero para mayor precisión, visualizaremos la información adquirida por las antenas mediante espectrogramas, que se observan en la figura 14.

Lo que se observa es que la amplitud de la señal es bastante uniforme en todo el espectro de la frecuencia normalizada, lo que nos podría indicar que contiene mucho ruido o demasiada información. Para poder visualizar mejor dicha información procederemos a calcular el espectro de la potencia de cada una de las señales. Para esto hacemos uso de la ecuación 6 y obtenemos las señales transformadas, como se observa en la figura 15.

De esta figura se puede concluir que la mayoría de las antenas adquieren información semejante

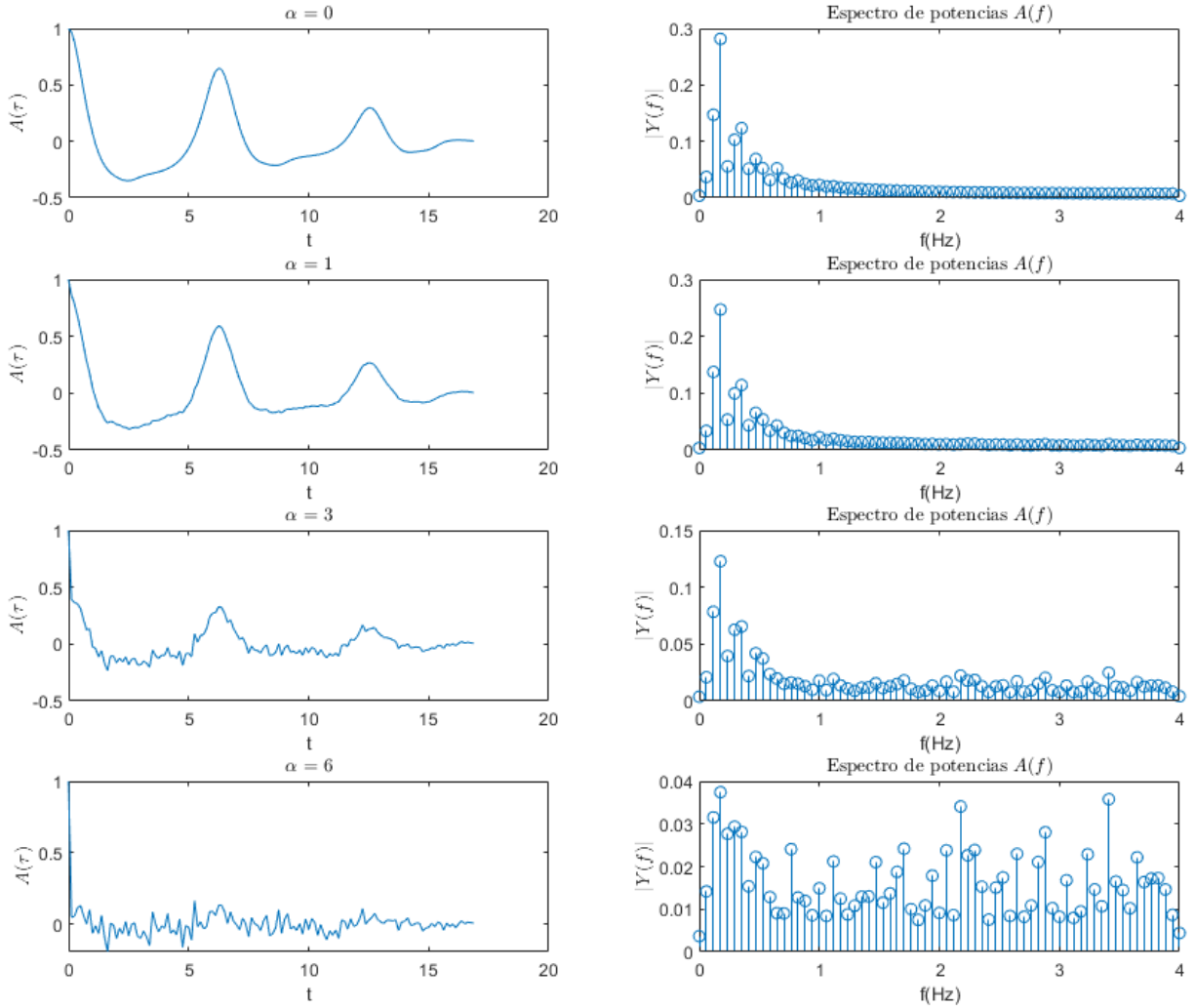


Figura 9: Primera columna función de auto-correlación $A(\tau)$. Segunda columna transformada de Fourier $A(f)$. Cada fila corresponde para un caso con distinto valor de α .

de baja frecuencia con una potencia espectral de aproximadamente a excepción de dos antenas que logran obtener una potencia mucho más alta de aproximadamente .

2.2. Autocorrelación de las señales captadas por las antenas

Para un análisis más exhaustivo, observaremos cuan correlacionados están los elementos de cada una de las señales entre si a través del tiempo [16](#), y por lo tanto, observar la fluctuación generada por las mismas.

Ahora, estimaremos la transformada de fourier de la correlación de las señales captadas por las

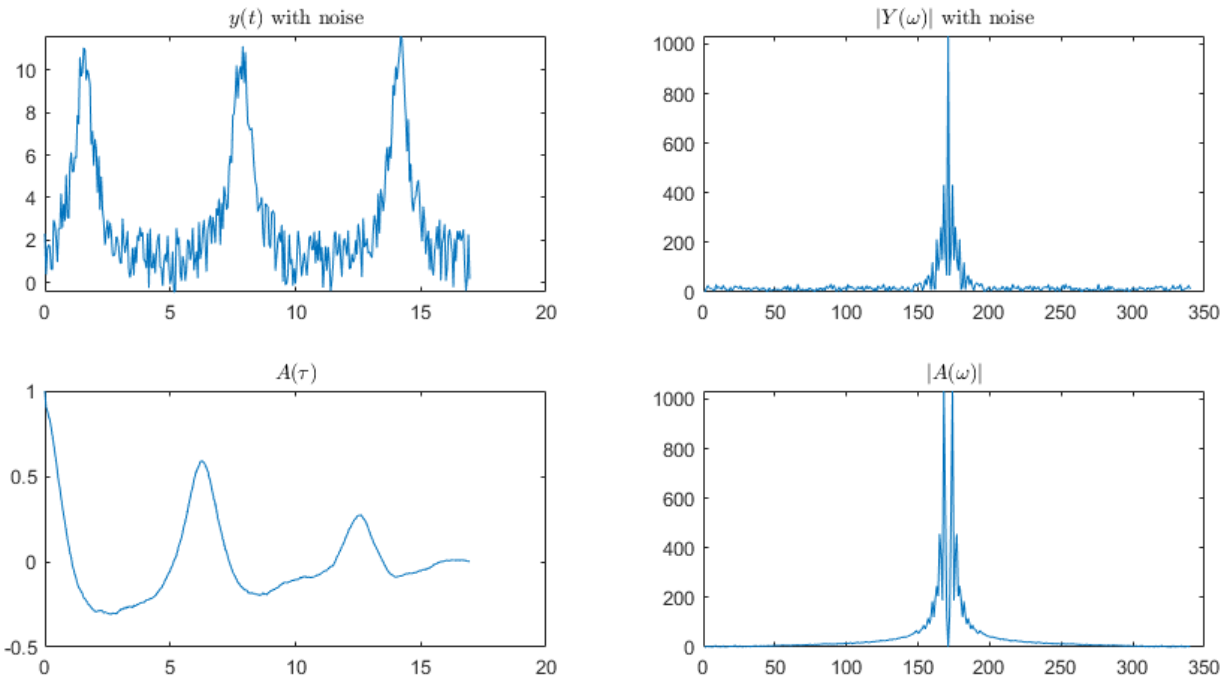


Figura 10: Primera fila señal con ruido $y(t)$ y su transformada de Fourier $Y(\omega)$. Segunda Fila función de auto-correlación de la señal $A(\tau)$ y su transformada de Fourier $A(\omega)$.

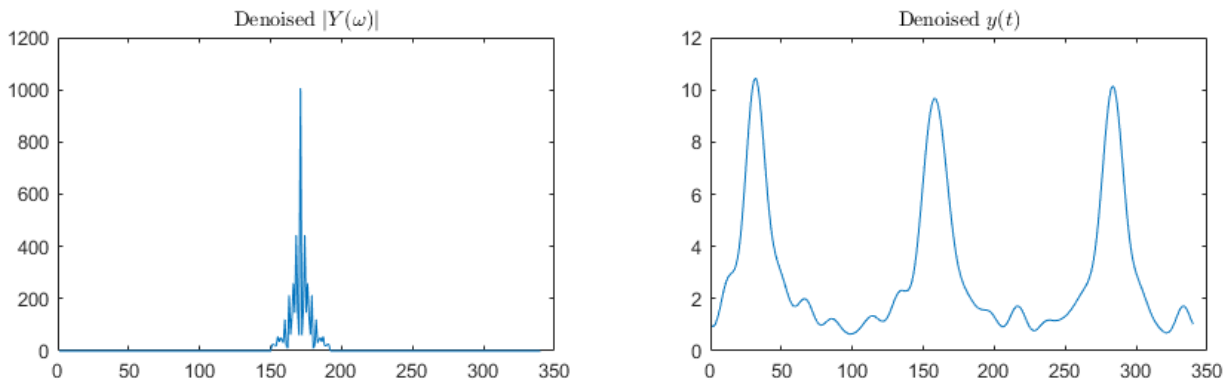


Figura 11: Primera columna espectro de potencias con ruido removido de $Y(\omega)$. Segunda columna, señal reconstruida $y(t)$ mediante la reducción de ruido dado el espectro de potencias de la función de auto-correlación.

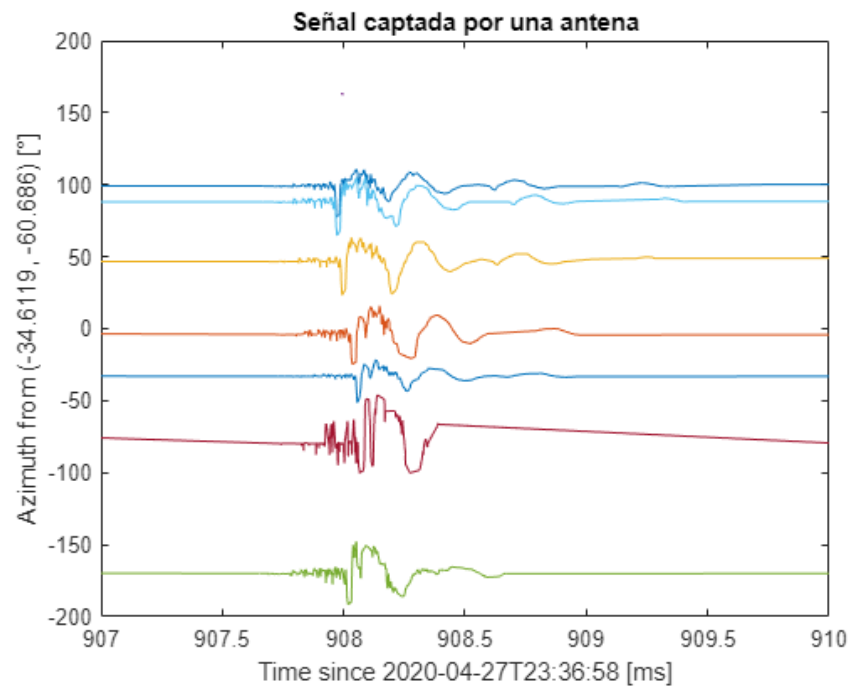


Figura 12: Muestra de señal captada por una de las antenas.

antenas, en la figura 17.

Finalmente, al aplicar la transformada de fourier a la correlación de los datos observamos que las señales de 3 de las antenas son idénticas, y las otras 3 señales fluctúan en amplitud y también en sus coeficientes.

3. Conclusiones y Recomendaciones

En el desarrollo de la etapa 2, se observaron y analizaron las señales electro atmosféricas captadas por diversas antenas concluyendo, que todas las antenas captaron información de baja frecuencia, donde para dos antenas el espectro de potencia en fourier fueron mucho mayores a las demás cuando la frecuencia es aproximadamente cero.

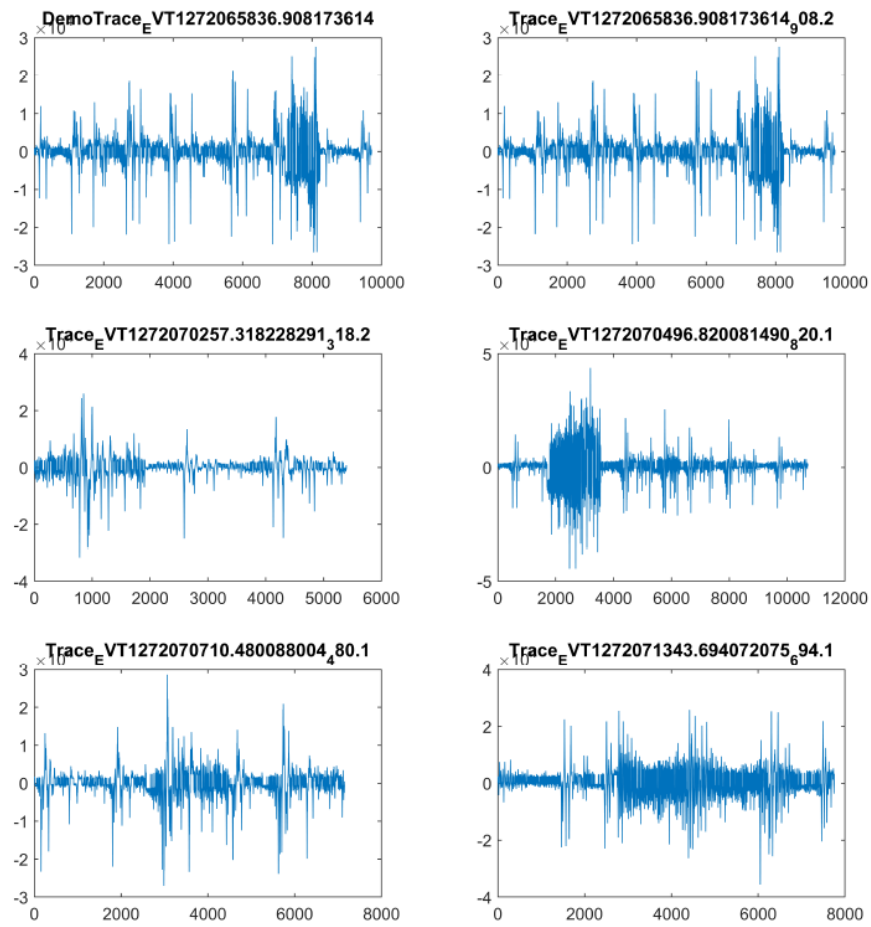


Figura 13: Espectrogramas de cada una de las señales captadas.

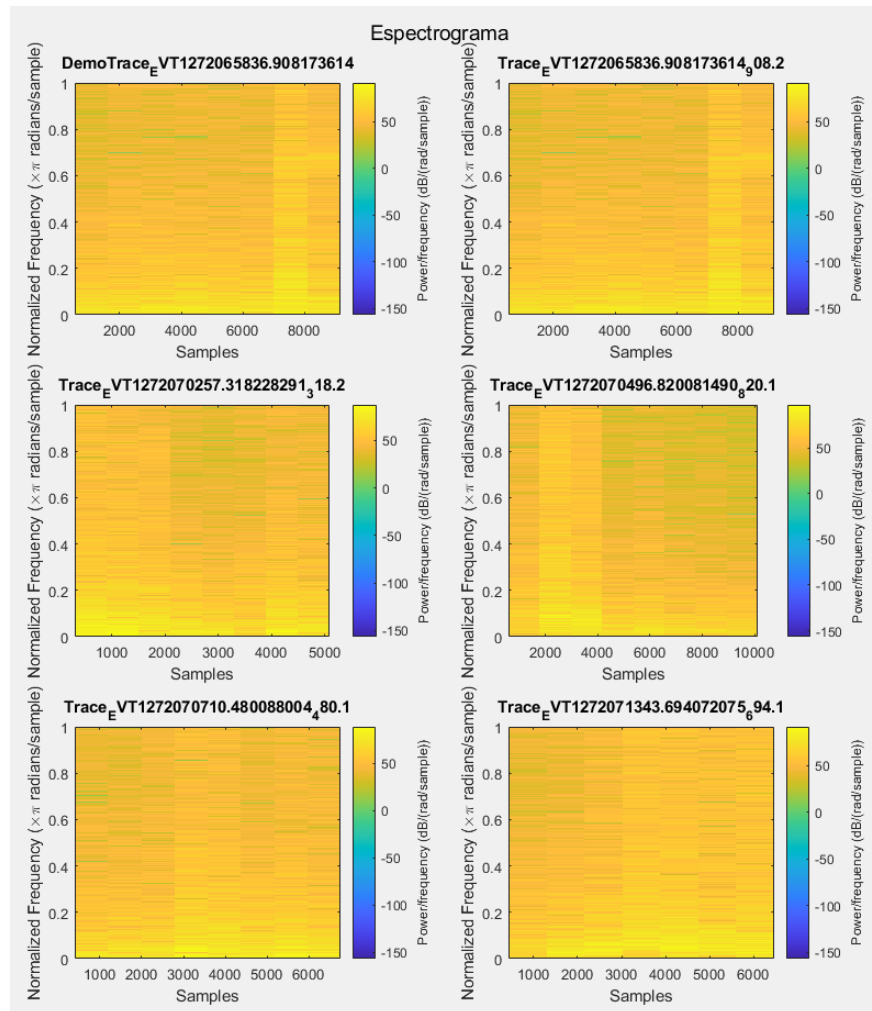


Figura 14: Espectrogramas de cada una de las señales captadas.

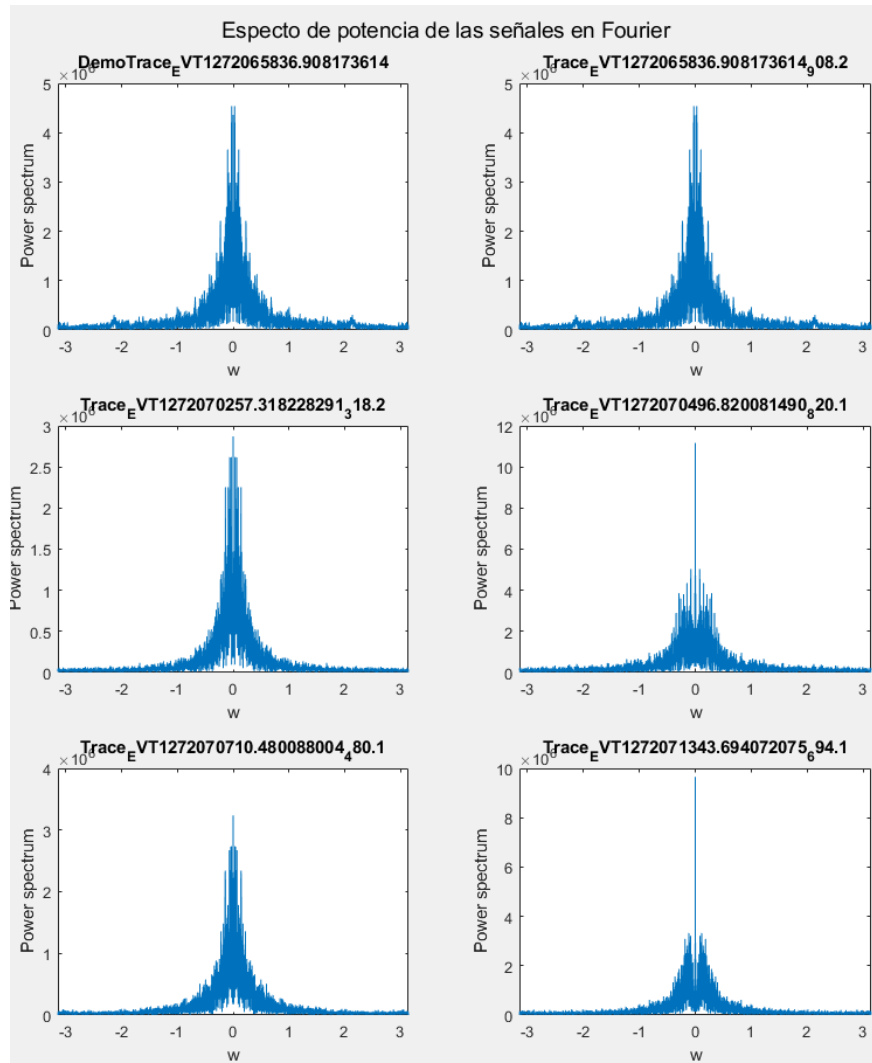


Figura 15: Potencia espectral en fourier de las señales captadas.

Vectores de autocorrelación de las señales captadas por la antena

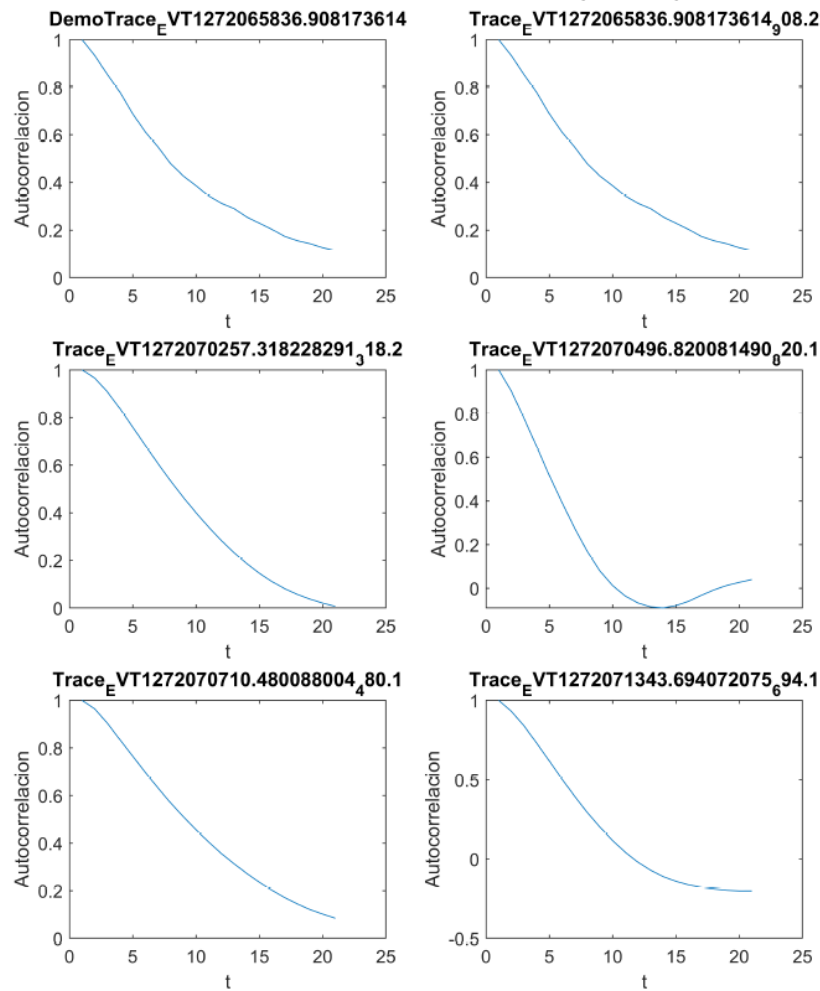


Figura 16: Potencia espectral en fourier de las señales captadas.

Vectores de autocorrelación de las señales captadas por la antena

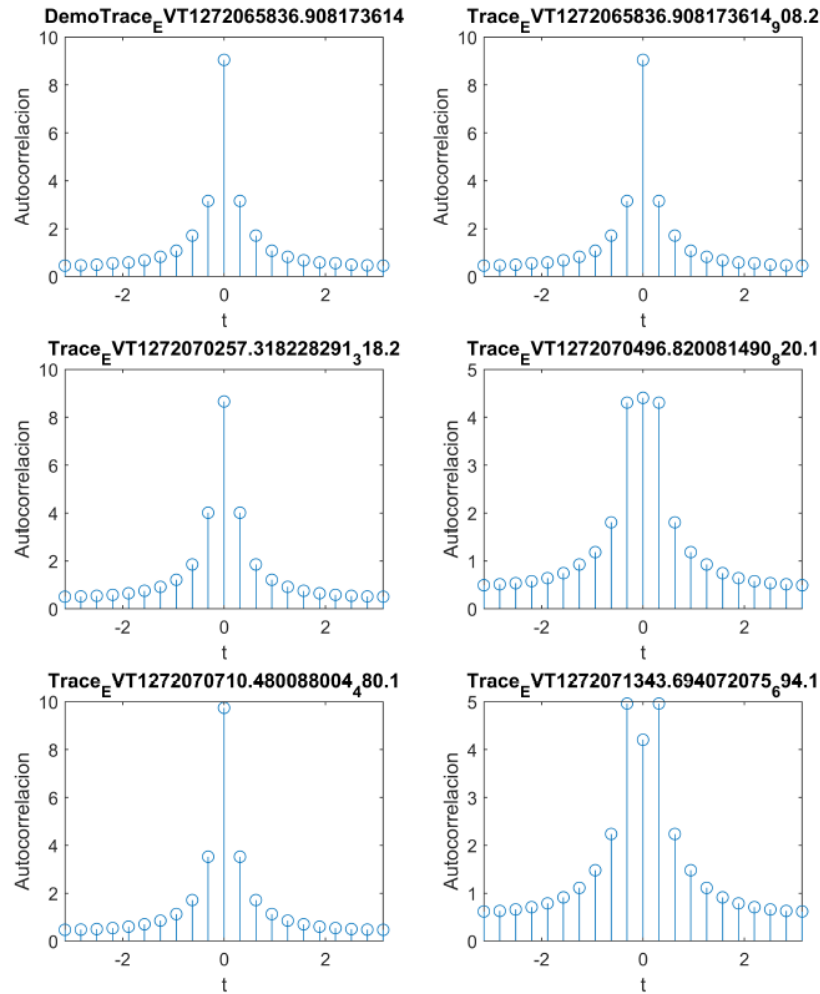


Figura 17: Potencia espectral en fourier de las señales captadas.