Espacios tensoriales

1. Considere dos espacios vectoriales de polinomios de grado $\leq 2, \mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$. Se puede construir un espacio tensorial a partir de estos espacios vectoriales mediante el producto exterior $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$ de tal manera que cualquier polinomio de dos variables puede ser escrito como $\mathcal{T}_2(xy) = c^{ij}|e_i^{\mathcal{P}}, e_j^{\mathcal{G}}\rangle$. Donde $\{|e_i^{\mathcal{P}}|\rangle$ y $\{|e_j^{\mathcal{G}}\rangle\}$ corresponden a bases ortogonales para los espacios vectoriales $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$, respectivamente.

a) Cosidere el polimonio $p^{\mathcal{P}}(x) = x^2 + x + 3$ y expréselo en términos de la base de polinomios de Legendre $\{|e_i^{\mathcal{P}}\rangle\} \leftrightarrow \{|P_i(x)\rangle\}$ (2 ptos)

Polinomios de Legendre: $\{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\}$

$$\begin{aligned} c_0(1) + c_1(x) + c_2(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)) &= x^2 + x + 3 \\ c_0 + c_1 x + \frac{3}{2}c_2 x^2 - \frac{1}{2}c_2 &= x^2 + x + 3 \\ c_0 - \frac{1}{2}c_2 &= 3 \\ c_1 x &= x \\ \frac{3}{2}c_2 x^2 &= x^2 \end{aligned}$$

Luego, $c_0 = \frac{10}{3}, c_1 = 1, c_2 = \frac{2}{3}$

b) Seleccione ahora dos polinomios $p^{\mathcal{P}}(x) = x^2 + x + 3$ y $p^{\mathcal{G}}(y) = y + 1$. Construya el tensor, $p^{\mathcal{P}\otimes\mathcal{G}}(x, y) = p^{\mathcal{P}}(x) \otimes p^{\mathcal{G}}(y)$, mediante el producto exterior de esos polinomios. (2ptos)

$$p^{\mathcal{P}}(x) \otimes p^{\mathcal{G}}(y) = \begin{bmatrix} 3 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3y & 0 \\ x & xy & 0 \\ x^2 & x^2 y & 0 \end{bmatrix}$$

c) Elija las bases de monomios $\{1, x, x^2\}$ y $\{1, y, y^2\}$ e identifique las componentes c^{ij} del tensor $p^{\mathcal{P}\otimes\mathcal{G}}(x, y)$ al expandir ese tensor respecto a estas bases en el espacio tensorial $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$. (2pts)

$$p^{\mathcal{P}}(x) = x^2 + x + 3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$p^{\mathcal{G}}(y) = y + 1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix}$$

$$p^{\mathcal{P}\otimes\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 3 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3y & 0 \\ x & xy & 0 \\ x^2 & x^2y & 0 \end{bmatrix}$$

$$c^{ij} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|e_i^{\mathcal{P}}, e_j^{\mathcal{G}}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & y^2 \\ x & xy & xy^2 \\ x^2 & x^2y & x^2y^2 \end{bmatrix}$$

d) Ahora suponga las bases de polinomios de Legendre, $\{|e_i^{\mathcal{P}}\rangle\} \leftrightarrow \{|P_i(x)\rangle\}$ y $\{|e_j^{\mathcal{G}}\rangle\} \leftrightarrow \{|P_j(y)\rangle\}$, para $\mathcal{P}_2(x)$ y $\mathcal{G}_2(y)$. Calcule las componentes $\hat{c}^{ij}$ del tensor $p^{\mathcal{P}\otimes\mathcal{G}}(x, y)$ respecto a estas bases en el espacio tensorial $\mathcal{T}_2(xy) = \mathcal{P}_2(x) \otimes \mathcal{G}_2(y)$. (4pts)

$$p^{\mathcal{P}\otimes\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} 3 & 3y & 0 \\ x & xy & 0 \\ x^2 & x^2y & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}_x = \{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\}$$

$$p^{\mathcal{P}}(x) = \begin{bmatrix} 10/3 & 1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ (1/2)(3x^2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$p^{\mathcal{G}}(y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ (1/2)(3y^2 - 1) \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}^{ij} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 & 10/3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|e_i^{\mathcal{P}}, e_j^{\mathcal{G}}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ (1/2)(3x^2 - 1) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & y & (1/2)(3y^2 - 1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & y & (1/2)(3y^2 - 1) \\ x & xy & (x/2)(3y^2 - 1) \\ (1/2)(3x^2 - 1) & (y/2)(3y^2 - 1) & (1/4)(3x^2 - 1)(3y^2 - 1) \end{bmatrix}$$