Desarrollo Punto 5

Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermíticas. Tal y como demostramos con rigor en la sección 4.3.2.2 y lo detallamos en la sección 4.4.9, una matriz hermetíca (o autoadjunta) séra igual a su adjunta. Esto es, una matriz será igual a su transpuesta conjugada $(A^{\dagger})^i_j \to (A^*)^i_j \equiv A^i_j$.

$$A \iff \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \equiv A^{\dagger} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \begin{cases} z_1^* = z_1 \text{ real} \\ z_4^* = z_4 \text{ real} \\ z_2^* = z_3 \text{ complejo} \end{cases}$$

Entonces

(a). Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ presentadas en los ejercicios de la sección 2.2.4 forman una base para ese espacio vectorial.

Condiciones

1. Todos las matrices de Pauli pertenencen al espacio vectorial? Si

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_0 \equiv \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Son linealmente independientes?

$$\begin{gathered} a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_2 + c \cdot \sigma_3 + d \cdot \sigma_0 = 0 \\ = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \\ = \begin{pmatrix} c+d & a-bi \\ a+bi & -c+d \end{pmatrix} \end{gathered}$$

con esto tenemos que

$$\begin{gathered} c + d = 0 \\ -c + d = 0 \\ a + bi = 0 \\ a - bi = 0 \end{gathered}$$

Luego, $a = b = c = d = 0$

3. Todo elemento del espacio vectorial se puede escribir como una combinación lineal de las matrices de Pauli?

Dada una matriz hermetica A

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_2 + c \cdot \sigma_3 + d \cdot \sigma_0$$
$$= a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que,

$$\begin{gathered} z_1 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 + d \cdot 1 = c + d \quad \text{real} \\ z_4 = a \cdot 0 + b \cdot 0 - c \cdot 1 + d \cdot 1 = -c + d \quad \text{real} \\ z_2 = a - bi \quad \text{complejo} \\ z_3 = a + bi \quad \text{complejo} \\ z_2^* = (a - bi)^* = a + bi = z_3 \qquad \blacksquare \end{gathered}$$

(b). Compruebe que una base es ortogonal bajo la definición de producto interno $\langle a|b\rangle \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(A^\dagger B)$ que introducimos en los ejercicios de la misma sección

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle &= (0)(0) + (0)(0) &&= 0 && (1) \\ \langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle &= (0)(1) + (0)(-1) &&= 0 && (2) \\ \langle \sigma_1 | \sigma_0 \rangle &= (0)(1) + (0)(1) &&= 0 && (3) \\ \langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle &= (0)(1) + (0)(-1) &&= 0 && (4) \\ \langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle &= (0)(1) + (0)(1) &&= 0 && (5) \\ \langle \sigma_3 | \sigma_0 \rangle &= (1)(1) + (-1)(1) &&= 0 && (6) \end{aligned}$$