

Ejercicios de la clase 6

Brayan Monroy* Emmanuel Martinez
Universidad Industrial de Santander
Dirección de la Institución

22 de marzo de 2022

Índice

1. Sección 2.2.4	1
1.1. Ejercicio 6	1

1. Sección 2.2.4

1.1. Ejercicio 6

1. **Solution:** Para la suma de cuaterniones, tenemos que $|c\rangle = |a\rangle + |b\rangle = (a^0 + b^0)|q_0\rangle + (a^1 + b^1)|q_1\rangle + (a^2 + b^2)|q_2\rangle + (a^3 + b^3)|q_3\rangle = c^0|q_0\rangle + c^1|q_1\rangle + c^2|q_2\rangle + c^3|q_3\rangle$.

Similarmente, para la multiplicación por escalares se tiene que $\alpha|c\rangle = \alpha|a\rangle + \alpha|b\rangle = \alpha(a^0 + b^0)|q_0\rangle + \alpha(a^1 + b^1)|q_1\rangle + \alpha(a^2 + b^2)|q_2\rangle + \alpha(a^3 + b^3)|q_3\rangle = \alpha c^0|q_0\rangle + \alpha c^1|q_1\rangle + \alpha c^2|q_2\rangle + \alpha c^3|q_3\rangle$

Si hacemos $a^0 = b^0 = 0$, lo que implica que $c^0 = 0$, entonces el cuaternión $|c\rangle$ puede ser reescrito como $|c\rangle = c^1|q_1\rangle + c^2|q_2\rangle + c^3|q_3\rangle$ para la suma como $\alpha|c\rangle = \alpha c^1|q_1\rangle + \alpha c^2|q_2\rangle + \alpha c^3|q_3\rangle$ para la multiplicación por escalares.

Entonces, si tomamos $|q_i\rangle = |e_i\rangle$, para $i = 1, \dots, 3$, tenemos que $|c\rangle = c^1|e_1\rangle + c^2|e_2\rangle + c^3|e_3\rangle = c^1\hat{\mathbf{i}} + c^2\hat{\mathbf{j}} + c^3\hat{\mathbf{k}}$ para la suma y siguiendo la misma analogía, $\alpha|c\rangle = \alpha c^1\hat{\mathbf{i}} + \alpha c^2\hat{\mathbf{j}} + \alpha c^3\hat{\mathbf{k}}$, siendo ambas operaciones analogas a la de los vectores en \mathbb{R}^3 en coordenadas cartesianas.

2. **Solution:**

$$\begin{aligned} |b\rangle &= b_0 + b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}} & |r\rangle &= r_0 + r_1\hat{\mathbf{i}} + r_2\hat{\mathbf{j}} + r_3\hat{\mathbf{k}} \\ |b\rangle \odot |r\rangle &= (b_0 + b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}})(r_0 + r_1\hat{\mathbf{i}} + r_2\hat{\mathbf{j}} + r_3\hat{\mathbf{k}}) \end{aligned}$$

* e-mail: brayan2180032@correo.uis.edu.co

$$\begin{aligned}
|b\rangle \odot |r\rangle &= b_0 r_0 + b_0 r_1 \hat{\mathbf{i}} + b_0 r_2 \hat{\mathbf{j}} + b_0 r_3 \hat{\mathbf{k}} \\
&\quad b_1 r_0 \hat{\mathbf{i}} - b_1 r_1 \hat{\mathbf{i}}^2 + b_1 r_2 \hat{\mathbf{i}} \hat{\mathbf{j}} + b_1 r_3 \hat{\mathbf{i}} \hat{\mathbf{k}} \\
&\quad b_2 r_0 \hat{\mathbf{j}} + b_2 r_1 \hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{i}} - b_2 r_2 \hat{\mathbf{j}}^2 + b_2 r_3 \hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{k}} \\
&\quad b_3 r_0 \hat{\mathbf{k}} + b_3 r_1 \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{i}} + b_3 r_2 \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{j}} - b_3 r_3 \hat{\mathbf{k}}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|b\rangle \odot |r\rangle &= b_0 r_0 + b_0 r_1 \hat{\mathbf{i}} + b_0 r_2 \hat{\mathbf{j}} + b_0 r_3 \hat{\mathbf{k}} \\
&\quad b_1 r_0 \hat{\mathbf{i}} - b_1 r_1 + b_1 r_2 \hat{\mathbf{k}} + b_1 r_3 (-\hat{\mathbf{j}}) \\
&\quad b_2 r_0 \hat{\mathbf{j}} + b_2 r_1 (-\hat{\mathbf{k}}) - b_2 r_2 + b_2 r_3 \hat{\mathbf{i}} \\
&\quad b_3 r_0 \hat{\mathbf{k}} + b_3 r_1 \hat{\mathbf{j}} + b_3 r_2 (-\hat{\mathbf{i}}) - b_3 r_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|b\rangle \odot |r\rangle &= b_0 r_0 - b_1 r_1 - b_2 r_2 - b_3 r_3 \\
&\quad b_0 (r_1 \hat{\mathbf{i}} + r_2 \hat{\mathbf{j}} + r_3 \hat{\mathbf{k}}) \\
&\quad r_0 (b_1 \hat{\mathbf{i}} + b_2 \hat{\mathbf{j}} + b_3 \hat{\mathbf{k}}) \\
&\quad (b_2 r_3 - b_3 r_2) \hat{\mathbf{i}} \\
&\quad (b_3 r_1 - b_1 r_3) \hat{\mathbf{j}} \\
&\quad (b_1 r_2 - b_2 r_1) \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$|b\rangle \odot |r\rangle = b_0 r_0 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{r} + r_0 \mathbf{b} + b_0 \mathbf{r} + \mathbf{b} \times \mathbf{r}$$

3. Solution:**4. Solution:****5. Solution:**

Sea $|q_i\rangle = \sigma_i$, para $i = 0, \dots, 3$, se pueden volver una base de cuaterniones si

$$a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Resolviendo tenemos que

$$\begin{pmatrix} c + d & a - bi \\ a + bi & -c + d \end{pmatrix} = 0,$$

de esta matriz observamos que la única solución posible es $a = b = c = d = 0$, por lo que los cuaterniones $|q_i\rangle$ representados por las matrices de Pauli y la identidad son linealmente independientes y generan una base para un espacio.

Sea

$$|b\rangle \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x + iy & a + ib \\ -a + ib & x - iy \end{pmatrix},$$

6. Solution:

Similar al inciso anterior, se tiene que

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Resolviendo tenemos que

$$\begin{pmatrix} a & b & -d & -c \\ -b & a & -c & d \\ d & c & a & b \\ c & -d & -b & a \end{pmatrix} = 0,$$

Este es igual a

$$\begin{pmatrix} a + b - c - d = 0 \\ a - b - c + d = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ a - b + c - d = 0 \end{pmatrix}$$