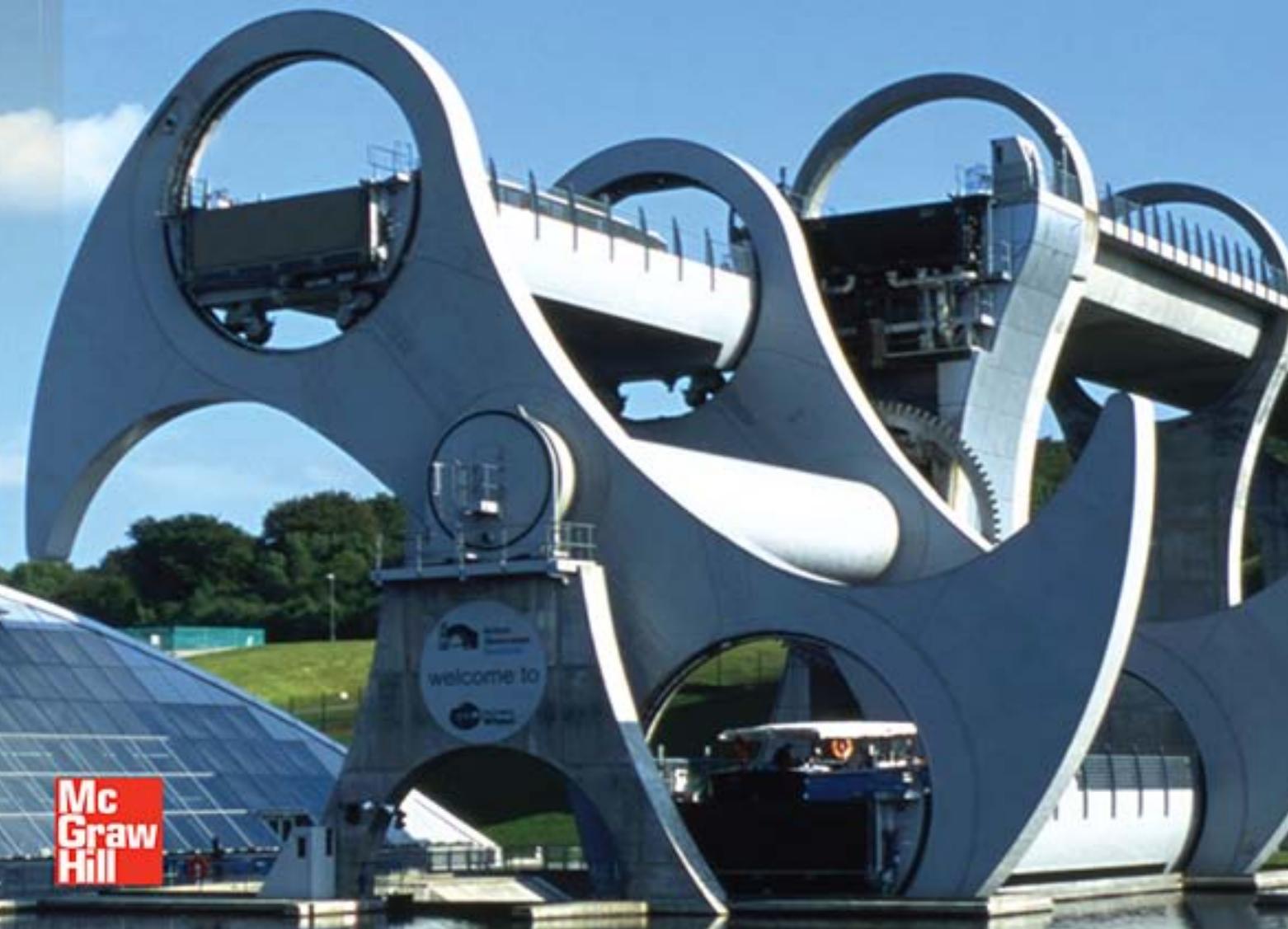
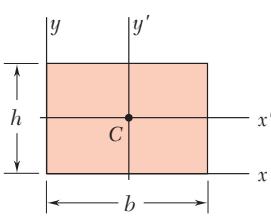
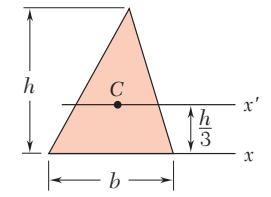
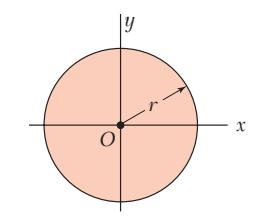
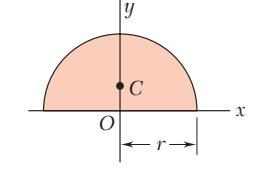
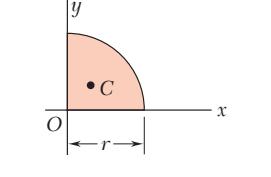
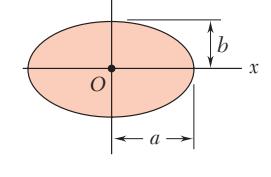


MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS **DINÁMICA**

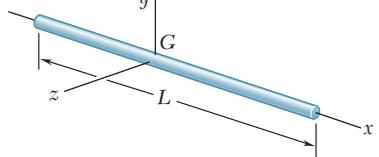
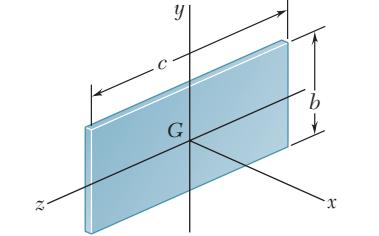
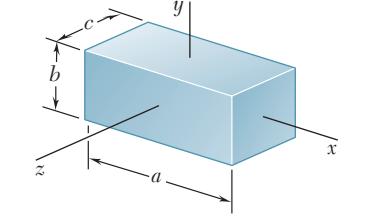
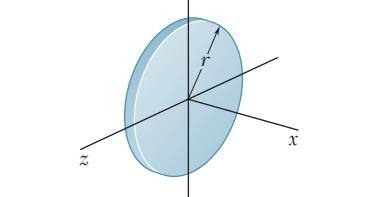
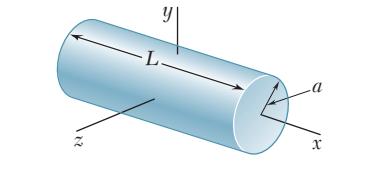
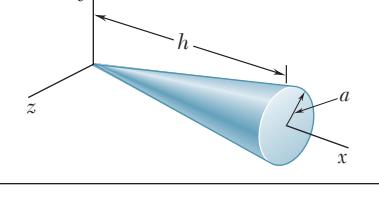
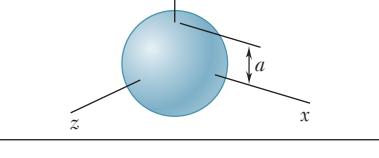
BEER | JOHNSTON | CORNWELL NOVENA EDICIÓN



Momentos de inercia de formas geométricas comunes

Rectángulo	
	$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $I_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
Triángulo	
	$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Círculo	
	$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicírculo	
	$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Cuarto de círculo	
	$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Elipse	
	$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Momentos de inercia de formas geométricas comunes

Barra delgada	
	$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$
Placa rectangular delgada	
	$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$
Prisma rectangular	
	$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Disco delgado	
	$I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$
Cilindro circular	
	$I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$
Cono circular	
	$I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$
Esfera	
	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Dinámica

REVISIÓN TÉCNICA

ARGENTINA

Ricardo Bosco

Universidad Tecnológica Nacional, Buenos Aires

COLOMBIA

Carlos Eduardo Muñoz Rodríguez
Jaime Guillermo Guerrero Casadiego
Rubén Darío Arboleda Vélez
Wilson Rodríguez Calderón

*Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá
Universidad Nacional de Colombia
Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín
Universidad de la Salle, Bogotá*

MÉXICO

Antonio Rubén Benítez Gasca
Danelia Hernández Suárez

*Universidad Veracruzana
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
campus Ciudad Obregón
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
campus La Marina*

Carlos Mellado Osuna
Eduardo Soberanes Lugo
Enrique Zamora Gallardo
Francisco Terán Arévalo
Gladys Karina Ruiz Vargas
Ignacio Arrioja Cárdenas
Ignacio Ramírez Vargas

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Sinaloa
Universidad Anáhuac, campus Norte
Instituto Tecnológico Regional de Chihuahua
Universidad Anáhuac, campus Norte
Instituto Tecnológico de Tuxtla Gutiérrez, Chis.
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
campus Hidalgo*

José Antonio Corona López
José Luis Carranza Santana

*Instituto Tecnológico de Veracruz
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Instituto Politécnico Nacional
Universidad Nacional Autónoma de México
Universidad Iberoamericana, campus León
Centro Interdisciplinario de Investigación y Docencia en Educación Técnica,
Santiago de Querétaro*

Juan Abugaber Francis

*Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Instituto Politécnico Nacional
Universidad Nacional Autónoma de México
Universidad de Occidente, campus Culiacán*

Juan Ocáriz Castelazo
Luis Adolfo Torres González
Luis G. Cabral Rosetti

Martín Darío Castillo Sánchez
Raúl Escalante Rosas
Raúl Soto López

Novena edición

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Dinámica

FERDINAND P. BEER (fallecido)

Late of Lehigh University

E. RUSSELL JOHNSTON, JR.

University of Connecticut

PHILLIP J. CORNWELL

Rose-Hulman Institute of Technology

Revisión técnica:

Miguel Ángel Ríos Sánchez

Instituto Tecnológico y de Estudios

Superiores de Monterrey, campus Estado de México

Felipe de Jesús Hidalgo Cavazos

Instituto Tecnológico y de Estudios

Superiores de Monterrey, campus Monterrey



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos

Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez

Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha M.

Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez

Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductores: Jesús Elmer Murrieta Murrieta

Gabriel Nagore Cazares

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

DINÁMICA

Novena edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.



DERECHOS RESERVADOS © 2010 respecto a la novena edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

A Subsidiary of *The McGraw-Hill Companies, Inc.*

Edificio Punta Santa Fe

Prolongación Paseo de la Reforma Núm. 1015, Torre A

Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,

Delegación Álvaro Obregón

C.P. 01376, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN-13: 978-607-15-0261-2

(ISBN: 970-10-6102-0 edición anterior)

Traducido de la novena edición en inglés de: Vector mechanics for engineers. Dynamics.

Copyright © 2010 by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

ISBN: 0-07-724916-8

1234567890

109876543210

Impreso en México

Printed in Mexico

Acerca de los autores

Los autores de esta obra con frecuencia son cuestionados acerca de cómo fue que, estando uno en Lehigh y otro en la University of Connecticut, empezaron a escribir sus libros juntos.

La respuesta a esta pregunta es sencilla. Russ Johnston inició su carrera académica en el departamento de ingeniería civil y mecánica de Lehigh University y allí conoció a Ferd Beer, quien había comenzado a trabajar en ese departamento dos años antes y estaba a cargo de los cursos de mecánica.

Ferd se sintió muy complacido al descubrir que el joven contratado para impartir cursos de ingeniería estructural en posgrado no sólo estaba dispuesto, sino también ansioso por ayudarlo a reorganizar los cursos de mecánica. Ambos creían que dichos cursos deberían enseñarse a partir de unos cuantos principios básicos, y que los distintos conceptos involucrados serían mejor comprendidos y recordados por los estudiantes si les eran presentados en forma gráfica. Juntos escribieron apuntes para las clases de estática y dinámica, a los cuales posteriormente les agregaron problemas que supusieron interesantes para los futuros ingenieros, y poco después produjeron el manuscrito de la primera edición de *Mecánica para ingenieros*, el cual se publicó en junio de 1956.

Al publicarse la segunda edición de *Mecánica para ingenieros* y la primera de *Mecánica vectorial para ingenieros*, Russ Johnston estaba en el Worcester Polytechnic Institute, y en las ediciones subsecuentes en la University of Connecticut. Mientras tanto, Ferd y Russ habían asumido funciones administrativas en sus respectivos departamentos y ambos se dedicaban a la investigación, la consultoría, y a asesorar estudiantes de posgrado —Ferd en el área de procesos estocásticos y vibraciones aleatorias, y Russ en el área de estabilidad elástica y en diseño y análisis estructurales—. Sin embargo, su interés por mejorar la enseñanza de los cursos básicos de mecánica no había disminuido, y continuaron impariéndolos mientras revisaban sus libros y comenzaban a preparar el manuscrito de la primera edición de *Mecánica de materiales*.

La colaboración entre estos dos autores ha abarcado muchos años y muchas revisiones exitosas de todos sus libros, y las contribuciones de Ferd y Russ a la educación en ingeniería los han hecho acreedores de numerosas distinciones y reconocimientos. Recibieron el Western Electric Fund Award por parte de sus respectivas secciones regionales de la American Society for Engineering Education por su excelencia en la instrucción de estudiantes de ingeniería y, además, el Distinguished Educator Award de la

división de mecánica de esa misma asociación. A partir de 2001, el reconocimiento denominado New Mechanics Educator Award de la división de mecánica ha sido nombrado en honor de Beer y Johnston.

Ferdinand P. Beer. Nacido en Francia y educado en Francia y Suiza, Ferd obtuvo una maestría en la Sorbona y un doctorado en ciencias en el área de mecánica teórica en la Universidad de Ginebra. Emigró a Estados Unidos después de servir en el ejército francés durante la primera parte de la Segunda Guerra Mundial e impartió clases por cuatro años en el Williams College en el programa conjunto de ingeniería y artes Williams-MIT. Después de su servicio en esta institución, Ferd ingresó al profesorado de Lehigh University, donde enseñó durante treinta y siete años. Ocupó varios puestos, incluyendo el de profesor distinguido de la universidad y director del departamento de Mecánica e Ingeniería Mecánica. En 1995 recibió el grado de Doctor *honoris causa* en Ingeniería por la Lehigh University.

E. Russell Johnston, Jr. Nacido en Filadelfia, Russ posee un título de ingeniero civil de la Universidad de Delaware y un doctorado en ciencias en el área de ingeniería estructural del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT). Impartió clases en Lehigh University y en el Worcester Polytechnic Institute antes de ingresar al profesorado de la Universidad de Connecticut, donde ocupó el puesto de director del departamento de Ingeniería Civil y enseñó durante veintiséis años. En 1991 recibió el Outstanding Civil Engineer Award, sección Connecticut, que otorga la American Society of Civil Engineers.

Phillip J. Cornwell. Phil posee un título en Ingeniería Mecánica de la Texas Tech University, y grados de maestría y doctorado en Ingeniería Mecánica y aeroespacial por la Universidad de Princeton. En la actualidad es profesor de Ingeniería Mecánica en el Instituto Rose-Hulman de Tecnología, donde ha impartido clases desde 1989. Sus intereses actuales incluyen dinámica estructural, monitoreo de la salud estructural, y educación en ingeniería a nivel de licenciatura. En los veranos, Phil trabaja en el Laboratorio Nacional de Los Álamos, donde es responsable de la escuela de verano de dinámica, y realiza investigación en el área de monitoreo de la salud estructural. Recibió un premio en educación SAE Ralph R. Teetor en 1992, el premio escolar por impartición de clases en Rose-Hulman en 2000, y el premio por impartición de clases del profesorado de Rose-Hulman en 2001.

Contenido

Prefacio xiv

Agradecimientos xx

Lista de símbolos xxi

11

CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS

601

11.1	Introducción a la dinámica	602
	Movimiento rectilíneo de partículas	603
11.2	Posición, velocidad y aceleración	603
11.3	Determinación del movimiento de una partícula	607
11.4	Movimiento rectilíneo uniforme	616
11.5	Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado	617
11.6	Movimiento de varias partículas	618
*11.7	Solución gráfica de problemas de movimiento rectilíneo	630
*11.8	Otros métodos gráficos	631
	Movimiento curvilíneo de partículas	641
11.9	Vector de posición, velocidad y aceleración	641
11.10	Derivadas de funciones vectoriales	643
11.11	Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración	645
11.12	Movimiento relativo a un sistema de referencia en traslación	646
11.13	Componentes tangencial y normal	665
11.14	Componentes radial y transversal	668
	Repaso y resumen del capítulo 11	682
	Problemas de repaso	686
	Problemas de computadora	688

12

CINÉTICA DE PARTÍCULAS: SEGUNDA LEY DE NEWTON

691

12.1	Introducción	692
12.2	Segunda ley de movimiento de Newton	693
12.3	Cantidad de movimiento lineal de una partícula. Razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal	694

12.4	Sistemas de unidades	695
12.5	Ecuaciones de movimiento	697
12.6	Equilibrio dinámico	699
12.7	Cantidad de movimiento angular de una partícula. Razón de cambio de la cantidad de movimiento angular	721
12.8	Ecuaciones de movimiento en términos de las componentes radial y transversal	723
12.9	Movimiento bajo una fuerza central. Conservación de la cantidad de movimiento angular	724
12.10	Ley de gravitación de Newton	725
*12.11	Trayectoria de una partícula bajo la acción de una fuerza central	736
*12.12	Aplicación en mecánica celeste	737
*12.13	Leyes de Kepler del movimiento planetario	740
Repaso y resumen del capítulo 12		749
Problemas de repaso		753
Problemas de computadora		756

13

CINÉTICA DE PARTÍCULAS: MÉTODOS DE LA ENERGÍA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

759

13.1	Introducción	760
13.2	Trabajo de una fuerza	760
13.3	Energía cinética de una partícula. Principio del trabajo y la energía	764
13.4	Aplicaciones del principio del trabajo y la energía	766
13.5	Potencia y eficiencia	767
13.6	Energía potencial	786
*13.7	Fuerzas conservativas	788
13.8	Conservación de la energía	789
13.9	Movimiento bajo una fuerza central conservativa. Aplicación a la mecánica celeste	791
13.10	Principio del impulso y la cantidad de movimiento	810
13.11	Movimiento impulsivo	813
13.12	Impacto	825
13.13	Impacto central directo	825
13.14	Impacto central oblicuo	828
13.15	Problemas en los que interviene la energía y la cantidad de movimiento	831
Repaso y resumen del capítulo 13		847
Problemas de repaso		853
Problemas de computadora		856

14

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

859

14.1	Introducción	860
14.2	Aplicación de las leyes de Newton al movimiento de un sistema de partículas. Fuerzas efectivas	860
14.3	Cantidad de movimiento lineal y angular de un sistema de partículas	863

14.4	Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas	864
14.5	Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas alrededor de su centro de masa	866
14.6	Conservación de la cantidad de movimiento para sistemas de partículas	868
14.7	Energía cinética de un sistema de partículas	877
14.8	Principio del trabajo y la energía. Conservación de la energía para un sistema de partículas	879
14.9	Principio del impulso y la cantidad de movimiento de un sistema de partículas	879
*14.10	Sistemas variables de partículas	890
*14.11	Corriente estacionaria de partículas	890
*14.12	Sistemas que ganan o pierden masa	893
Repaso y resumen del capítulo 14		908
Problemas de repaso		912
Problemas de computadora		916

15

CINEMÁTICA DE CUERPOS RÍGIDOS

919

15.1	Introducción	920
15.2	Traslación	922
15.3	Rotación alrededor de un eje fijo	923
15.4	Ecuaciones que definen la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo	926
15.5	Movimiento plano general	936
15.6	Velocidad absoluta y velocidad relativa en el movimiento plano	938
15.7	Centro instantáneo de rotación en el movimiento plano	950
15.8	Aceleraciones absoluta y relativa en el movimiento plano	961
*15.9	Análisis del movimiento plano en términos de un parámetro	963
15.10	Razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia en rotación	975
15.11	Movimiento plano de una partícula relativa a un sistema de referencia en rotación. Aceleración de Coriolis	977
*15.12	Movimiento alrededor de un punto fijo	988
*15.13	Movimiento general	991
*15.14	Movimiento tridimensional de una partícula con respecto a un sistema de referencia en rotación. Aceleración de Coriolis	1002
*15.15	Sistema de referencia en movimiento general	1003
Repaso y resumen del capítulo 15		1015
Problemas de repaso		1022
Problemas de computadora		1025

16

MOVIMIENTO PLANO DE CUERPOS RÍGIDOS: FUERZAS Y ACELERACIONES

1029

16.1	Introducción	1030
16.2	Ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido	1031

16.3	Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en movimiento plano	1032
16.4	Movimiento plano de un cuerpo rígido. Principio de d'Alembert	1033
*16.5	Observación acerca de los axiomas de la mecánica de cuerpos rígidos	1034
16.6	Solución de problemas que implican el movimiento de un cuerpo rígido	1035
16.7	Sistemas de cuerpos rígidos	1036
16.8	Movimiento plano restringido o vinculado	1055
Repaso y resumen del capítulo 16		1077
Problemas de repaso		1079
Problemas de computadora		1082

17

**MOVIMIENTO PLANO DE CUERPOS RÍGIDOS:
MÉTODOS DE LA ENERGÍA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO**
1085

17.1	Introducción	1086
17.2	Principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido	1086
17.3	Trabajo de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido	1087
17.4	Energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano	1088
17.5	Sistemas de cuerpos rígidos	1089
17.6	Conservación de la energía	1090
17.7	Potencia	1091
17.8	Principio del impulso y la cantidad de movimiento para el movimiento plano de un cuerpo rígido	1107
17.9	Sistemas de cuerpos rígidos	1110
17.10	Conservación de la cantidad de movimiento angular	1110
17.11	Movimiento impulsivo	1124
17.12	Impacto excéntrico	1124
Repaso y resumen del capítulo 17		1140
Problemas de repaso		1144
Problemas de computadora		1146

18

CINÉTICA DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES
1149

*18.1	Introducción	1150
*18.2	Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones	1151
*18.3	Aplicación del principio del impulso y la cantidad de movimiento al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido	1155
*18.4	Energía cinética de un cuerpo rígido en tres dimensiones	1156
*18.5	Movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones	1169
*18.6	Ecuaciones de movimiento de Euler. Extensión del principio de d'Alembert al movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones	1170
*18.7	Movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo	1171
*18.8	Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo	1172
*18.9	Movimiento de un giroscopio. Ángulos de Euler	1187
*18.10	Precesión estable de un giroscopio	1189

***18.11** Movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje y que no se somete a ninguna fuerza 1190

Repaso y resumen del capítulo 18 1203

Problemas de repaso 1208

Problemas de computadora 1211

19

VIBRACIONES MECÁNICAS

1215

19.1 Introducción 1216

Vibraciones sin amortiguamiento 1216

19.2 Vibraciones libres de partículas.

Movimiento armónico simple 1216

19.3 Péndulo simple (solución aproximada) 1220

***19.4** Péndulo simple (solución exacta) 1221

19.5 Vibraciones libres de cuerpos rígidos 1230

19.6 Aplicación del principio de la conservación de la energía 1242

19.7 Vibraciones forzadas 1253

Vibraciones amortiguadas 1263

***19.8** Vibraciones libres amortiguadas 1263

***19.9** Vibraciones forzadas amortiguadas 1266

***19.10** Analogías eléctricas 1267

Repaso y resumen del capítulo 19 1279

Problemas de repaso 1284

Problemas de computadora 1288

Apéndice A

ALGUNAS DEFINICIONES Y PROPIEDADES ÚTILES DEL ÁLGEBRA VECTORIAL

1291

Apéndice B

MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS

1297

Apéndice C

FUNDAMENTOS PARA LA CERTIFICACIÓN EN INGENIERÍA EN ESTADOS UNIDOS

1337

Créditos de fotografías 1339

Índice analítico 1341

Respuestas a problemas 1351

Prefacio

OBJETIVOS

El objetivo principal de un primer curso de mecánica debe ser desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y sencilla, y la de aplicar para su solución unos cuantos principios básicos perfectamente comprendidos. Se espera que este texto y el tomo complementario, *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*, permitirán que el profesor alcance este objetivo.

ENFOQUE GENERAL

En la parte inicial del primer tomo se introdujo el análisis vectorial, el cual se utiliza en la presentación y exposición de los principios fundamentales de la estática, así como en la solución de muchos problemas. De manera similar, el concepto de diferenciación vectorial se introduce al inicio de este volumen, y el análisis vectorial se utiliza a lo largo de la presentación de la dinámica. Este planteamiento conduce a una especificación más concisa de los principios fundamentales de la mecánica. También hace posible analizar muchos problemas en cinemática y cinética que no podrían resolverse mediante métodos escalares. Sin embargo, se mantiene el énfasis en el correcto aprendizaje de los principios de la mecánica y en su aplicación para resolver problemas de ingeniería, por lo que el análisis vectorial se presenta, primordialmente, como una herramienta útil.

Se introducen aplicaciones prácticas desde una etapa inicial.

Una de las características del enfoque usado en estos tomos es que la mecánica de *partículas* se ha separado en forma clara de la mecánica de *cuerpos rígidos*. Este enfoque hace posible considerar aplicaciones prácticas simples en una etapa inicial y posponer la introducción de los conceptos más avanzados. Por ejemplo:

- En *Estática*, la estática de partículas se estudia primero, y el principio de equilibrio de una partícula se aplica inmediatamente a situaciones prácticas que involucran sólo fuerzas concurrentes. La estática de cuerpos rígidos se considera posteriormente, cuando ya se ha hecho la presentación de los productos escalar y vectorial de dos vectores; estos conceptos se utilizan para definir el momento de una fuerza con respecto a un punto y a un eje.

- En *Dinámica* se observa la misma división. Se introducen los conceptos básicos de fuerza, masa y aceleración, de trabajo y energía, y de impulso y cantidad de movimiento, y se aplican en primera instancia a la solución de problemas que involucran sólo partículas. De esta forma, los estudiantes pueden familiarizarse por sí mismos con los tres métodos básicos utilizados en dinámica y aprender sus respectivas ventajas antes de enfrentar las dificultades asociadas con el movimiento de cuerpos rígidos.

Los conceptos nuevos se presentan en términos simples.

Como este texto está diseñado para un primer curso sobre dinámica, los conceptos nuevos se presentan en términos simples y cada paso se explica en forma detallada. Por otro lado, este enfoque alcanza una madurez definitiva al analizar los aspectos más relevantes de los problemas considerados, y al ampliar los métodos de aplicabilidad general. Por ejemplo, el concepto de energía potencial se analiza para el caso general de una fuerza conservativa. Además, el estudio del movimiento plano de cuerpos rígidos está ideado para conducir de manera natural al estudio de su movimiento general en el espacio. Lo anterior se cumple tanto en cinemática como en cinética, donde el principio de equivalencia de fuerzas externas y efectivas se aplica de manera directa al análisis de movimiento plano, lo que facilita la transición al estudio del movimiento tridimensional.

Los principios fundamentales se utilizan en el contexto de aplicaciones simples. Se enfatiza el hecho de que la mecánica es, esencialmente, una ciencia *deductiva* que se basa en algunos principios fundamentales. Las derivaciones se presentan siguiendo su secuencia lógica y con todo el rigor requerido a este nivel. Sin embargo, en virtud de que el proceso de aprendizaje es primordialmente *inductivo*, se consideran primero las aplicaciones más simples. Por ejemplo:

- La cinemática de partículas (capítulo 11) antecede a la cinemática de cuerpos rígidos (capítulo 15).
- Los principios fundamentales de la cinética de cuerpos rígidos se aplican primero a la solución de problemas bidimensionales (capítulos 16 y 17), los cuales pueden ser visualizados con mayor facilidad por los estudiantes, mientras que los problemas tridimensionales se posponen hasta el capítulo 18.

La presentación de los principios de la cinética se unifica.

La octava edición de *Mecánica vectorial para ingenieros* tiene la presentación unificada de los principios de la cinética que caracterizaron a las siete ediciones anteriores. Los conceptos de cantidad de movimiento lineal y angular se presentan en el capítulo 12, de modo que la segunda ley de Newton para el movimiento pueda presentarse no sólo en su forma convencional $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, sino también como una ley que relaciona, respectivamente, la suma de fuerzas que actúan sobre una partícula y la suma de sus momentos con las razones de cambio de la cantidad de movimiento lineal y angular de la partícula. Esto hace posible una introducción temprana del principio de conservación de la cantidad de movimiento angular, y un análisis más lógico del movimiento de una partícula bajo una fuerza central (sección 12.9). Aún más importante, este planteamiento puede extenderse sin dificultad al movimiento de un sistema de partículas (capítulo 14) y efectuar un trata-

miento más conciso y unificado de la cinética de cuerpos rígidos en dos y tres dimensiones (capítulos 16 a 18).

Se emplean diagramas de cuerpo libre para resolver problemas de equilibrio y expresar la equivalencia de sistemas de fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se introdujeron al principio del libro de estática, y su importancia se enfatizó a lo largo de todo el texto. Estos diagramas se emplean no sólo para resolver problemas de equilibrio, sino también para expresar la equivalencia de dos sistemas de fuerzas o, de modo más general, de dos sistemas de vectores. La ventaja de este enfoque se vuelve evidente en el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos, donde se utiliza para resolver problemas tridimensionales y bidimensionales. Se pudo lograr una comprensión más intuitiva y completa de los principios fundamentales de la dinámica al poner mayor énfasis en las “ecuaciones de los diagramas de cuerpo libre” en lugar de en las ecuaciones algebraicas estándar de movimiento. Este enfoque, introducido en 1962 en la primera edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, ha obtenido a la fecha una amplia aceptación en Estados Unidos entre los profesores de mecánica. Por lo tanto, en la resolución de todos los problemas resueltos de este libro, se prefiere su utilización en lugar del método de equilibrio dinámico y de las ecuaciones de movimiento.

Se utilizan presentaciones en cuatro colores para distinguir los vectores. El color se ha usado no sólo para mejorar la calidad de las ilustraciones, sino también para ayudar a los estudiantes a distinguir entre los diversos tipos de vectores que pueden encontrar. En virtud de que no había intención de colorear por completo este texto, en un capítulo dado se utiliza el mismo color para representar el mismo tipo de vector. Por ejemplo, a lo largo del tomo de estática, el rojo se utiliza en forma exclusiva para representar fuerzas y pares, mientras que los vectores de posición se muestran en azul y las dimensiones en negro. Esto vuelve más fácil para los estudiantes la identificación de las fuerzas que actúan sobre una partícula o un cuerpo rígido dado y la comprensión de los problemas resueltos y de otros ejemplos proporcionados en el libro. En *Dinámica*, para los capítulos de cinética, el rojo se usa de nuevo para fuerzas y pares, así como para fuerzas efectivas. El rojo también se utiliza para representar impulsos y cantidades de movimiento en ecuaciones de diagramas de cuerpo libre, mientras que el verde es utilizado para velocidades, y el azul en aceleraciones. En los dos capítulos de cinemática, donde no se involucra ninguna fuerza, se usan azul, verde y rojo, respectivamente, para indicar desplazamientos, velocidades y aceleraciones.

Se mantiene, en forma consistente, un cuidadoso balance entre las unidades del SI y las unidades del sistema inglés. Debido a la tendencia que existe en la actualidad en el gobierno y la industria estadounidenses de adoptar el Sistema Internacional de unidades (unidades métricas SI), las unidades SI que se usan con mayor frecuencia en mecánica se introducen en el capítulo 1 y se emplean en todo el libro. Aproximadamente la mitad de los problemas resueltos y un 60 por ciento de los problemas de tarea están planteados en este sistema de unidades, mientras que el resto se proporciona en las unidades de uso común en Estados Unidos. Los autores creen que este enfoque es el que

se adecuará mejor a las necesidades de los estudiantes, quienes, como ingenieros, tendrán que dominar los dos sistemas de unidades.

También se debe reconocer que el uso de ambos sistemas de unidades significa algo más que aplicar factores de conversión. Como el sistema de unidades SI es absoluto basado en el tiempo, la longitud y la masa, mientras el sistema inglés es gravitacional basado en el tiempo, la longitud y la fuerza, se requieren diferentes enfoques en la solución de muchos problemas. Por ejemplo, cuando se usan las unidades SI, por lo general, un cuerpo se especifica mediante su masa expresada en kilogramos; en la mayoría de los problemas de estática será necesario determinar el peso del cuerpo en newtons, para lo cual se requiere un cálculo adicional. Por otro lado, cuando se aplican las unidades del sistema inglés, un cuerpo se especifica mediante su peso en libras y, en problemas de dinámica, se requerirá un cálculo adicional para determinar su masa en slugs ($0 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$). Por tanto, los autores creen que los problemas asignados a los estudiantes deben incluir ambos sistemas de unidades.

En las secciones opcionales se tratan temas avanzados o especializados. En el libro se incluye un gran número de secciones opcionales identificadas mediante asteriscos y, por tanto, se distinguen fácilmente de aquellas que constituyen la parte fundamental de un curso básico de dinámica. Estas secciones pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del resto del texto.

Entre los temas cubiertos en las seccionesopcionales se encuentran los métodos gráficos para la resolución de problemas de movimiento rectilíneo, trayectoria de una partícula bajo una fuerza central, desviación de corrientes de fluido, problemas que implican propulsión a chorro y cohetes, la cinemática y la cinética de cuerpos rígidos en tres dimensiones, vibraciones mecánicas amortiguadas, y analogías eléctricas. Estos temas adquirirán un interés particular cuando el curso de dinámica se imparta durante el primer año de estudios.

El material presentado en el libro y la mayor parte de los problemas no requieren conocimiento matemático previo superior al álgebra, la trigonometría y el cálculo elementales; todos los conocimientos de álgebra elemental necesarios para comprender el texto se presentan con detalle en los capítulos 2 y 3 del volumen de estática.[†] Sin embargo, se incluyen problemas especiales que requieren un conocimiento más avanzado de cálculo, y ciertas secciones, como las 19.8 y 19.9 sobre vibraciones amortiguadas, sólo deben asignarse cuando los estudiantes posean los fundamentos matemáticos adecuados. En las partes del texto que utilizan el cálculo elemental, se pone mayor énfasis en la apropiada comprensión de los conceptos matemáticos básicos incluidos que en la manipulación de las fórmulas matemáticas. Al respecto, se debe mencionar que la determinación de los centroides de áreas compuestas precede al cálculo de centroides por integración, lo cual posibilita establecer firmemente el concepto de momento de un área antes de introducir el uso de integrales.

[†]Algunas definiciones y propiedades útiles de álgebra se resumen en el apéndice A al final del libro, para comodidad del lector. Asimismo, las secciones 9.11 a 9.18 del volumen de estática, donde se estudian los momentos de inercia de masas, se reproducen en el apéndice B.

ORGANIZACIÓN DE LOS CAPÍTULOS Y CARACTERÍSTICAS PEDAGÓGICAS

Introducción del capítulo. Cada capítulo comienza con una introducción que establece el propósito y los objetivos del mismo, y en la que se describe en términos sencillos el material que será cubierto y sus aplicaciones en la resolución de problemas de ingeniería. Los nuevos lineamientos del capítulo proporcionan a los estudiantes una visión previa de los temas que éste incluye.

Lecciones en el capítulo. El cuerpo del texto está dividido en unidades, cada una de las cuales consiste en una o más secciones de teoría, uno o varios problemas resueltos, y una gran cantidad de problemas de tarea. Cada unidad corresponde a un tema bien definido que, por lo general, puede ser cubierto en una lección. Sin embargo, en ciertos casos el profesor encontrará que es deseable dedicar más de una lección a un tema en particular.

Problemas resueltos. Los problemas resueltos se plantean de manera muy similar a la que usarán los estudiantes cuando resuelvan los problemas que se les asignen. Por tanto, estos problemas cumplen el doble propósito de ampliar el texto y demostrar la forma de trabajo clara y ordenada que los estudiantes deben cultivar en sus propias soluciones.

Resolución de problemas en forma independiente. Entre los problemas resueltos y los de tarea, cada lección incluye una sección titulada *Resolución de problemas en forma independiente*. El propósito de estas secciones es ayudar a los estudiantes a organizar mentalmente la teoría ya cubierta en el texto y los métodos de resolución de los problemas resueltos, de manera que puedan resolver con mayor éxito los problemas de tarea. Además, en estas secciones también se incluyen sugerencias y estrategias específicas que les permitirán enfrentar de manera más eficiente cualquier problema asignado.

Series de problemas de tarea. La mayoría de los problemas son de naturaleza práctica y deben llamar la atención del estudiante de ingeniería. Sin embargo, están diseñados para ilustrar el material presentado en el texto y ayudar a los estudiantes a comprender los principios de la mecánica. Los problemas se han agrupado de acuerdo con las partes del material que ilustran y se presentan en orden de dificultad creciente. Los problemas que requieren atención especial están señalados mediante asteriscos. Al final del texto se proporcionan las respuestas correspondientes a 70 por ciento de los problemas propuestos; y aquellos para los cuales no se da respuesta se indican en el libro escribiendo su número en cursivas.

Repaso y resumen del capítulo. Cada capítulo finaliza con un repaso y un resumen del material cubierto en el mismo. Las notas al margen se utilizan para ayudar al estudiante a organizar su trabajo de revisión, además se han incluido referencias cruzadas para ayudarlos a encontrar las partes de material que requieren atención especial.

Problemas de repaso. Al final de cada capítulo se incluye un grupo de problemas de repaso. Estos problemas proporcionan a los estudiantes una oportunidad adicional de aplicar los conceptos más importantes presentados en el capítulo.

Problemas de computadora. Cada capítulo incluye un grupo de problemas diseñados para ser resueltos mediante programas de computadora. Muchos de estos problemas son importantes para el proceso de diseño. Por ejemplo, pueden involucrar la determinación del movimiento de una partícula bajo condiciones iniciales, el análisis cinemático o cinético de mecanismos en posiciones sucesivas, o la integración numérica de diferentes ecuaciones de movimiento. El desarrollo del algoritmo requerido para resolver un problema de mecánica dado beneficiará a los estudiantes en dos formas diferentes: 1) les ayudará a lograr una mejor comprensión de los principios de la mecánica involucrados; 2) les proporcionará la oportunidad de aplicar sus habilidades con la computadora a la resolución de un problema relevante de ingeniería.

MATERIALES DE APOYO

Esta obra cuenta con interesantes complementos que fortalecen los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como la evaluación de los mismos, los cuales se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información y conocer la política de entrega de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill o envíe un correo electrónico a marketinghe@mcgraw-hill.com.

CONEXIÓN CON LA INGENIERÍA DE MCGRAW-HILL

La Conexión de McGraw-Hill con la Ingeniería (*McGraw-Hill Connect Engineering*) es una plataforma de tareas y evaluación que proporciona a los estudiantes los medios para conectarse de mejor manera con su curso, sus profesores y los conceptos importantes que necesitarán conocer para su éxito en la actualidad y en el futuro. Mediante la Conexión con la Ingeniería, los profesores pueden entregar con facilidad tareas, tests y exámenes en línea. Los estudiantes pueden practicar habilidades importantes a su propio ritmo y de acuerdo con su propio programa.

La Conexión con la Ingeniería de *Mecánica vectorial para ingenieros* está disponible en www.mhhe.com/beerjohnston e incluye problemas algorítmicos del texto, presentaciones en PowerPoint, un banco de imágenes y animaciones.

OPCIONES DE LIBRO ELECTRÓNICO

Los libros electrónicos son una forma innovadora de ahorrarle dinero a los estudiantes y al mismo tiempo crear un medio ambiente más verde. Un libro electrónico puede ahorrarle a los estudiantes cerca de la mitad del costo de un libro de texto tradicional y ofrece características únicas como un poderoso dispositivo de búsqueda, texto resaltado y la capacidad de compartir notas con compañeros de clase que usan libros electrónicos.

McGraw-Hill ofrece dos opciones de libros electrónicos: la compra de un libro descargable de VitalSource o una suscripción al libro de CourseSmart. Para conocer más acerca de las opciones de libros electrónicos, contacte a su distribuidor McGraw-Hill o visite los sitios de manera directa en www.vitalsource.com y www.coursesmart.com.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer de manera especial a Dean Updike, de Lehigh University, quien verificó completamente las soluciones y respuestas de todos los problemas de esta edición, y después preparó las soluciones del *Manual para el instructor y de soluciones* adicional al texto.

Es un placer reconocer el trabajo de Dennis Ormond de Fine Line Illustrations por las artísticas ilustraciones que contribuyen en gran medida a la efectividad del texto.

Los autores agradecen a las diferentes empresas que proporcionaron fotografías para esta edición. También desean reconocer el esfuerzo determinado y la paciencia de Sabina Dowell, quien seleccionó las fotografías.

Un agradecimiento adicional para los miembros de la organización McGraw-Hill por su apoyo y dedicación en preparar esta nueva edición.

Por último, los autores expresan su gratitud por los numerosos comentarios y sugerencias proporcionados por los usuarios de las ediciones anteriores de *Mecánica vectorial para ingenieros*.

E. Russell Johnston, Jr.

Phillip J. Cornwell

Lista de símbolos

\mathbf{a}, \mathbf{a}	Aceleración
a	Constante; radio; distancia; eje semimayor de la elipse
$\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}$	Aceleración del centro de masa
$\mathbf{a}_{B/A}$	Aceleración de B relativa al sistema de referencia en traslación con A
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$	Aceleración de P relativa al sistema de referencia en rotación \mathcal{F}
\mathbf{a}_c	Aceleración de Coriolis
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$	Reacciones en soportes y conexiones
A, B, C, \dots	Puntos
A	Área
b	Ancho; distancia; eje semimenor de la elipse
c	Constante; coeficiente de amortiguamiento viscoso
C	Centroide; centro instantáneo de rotación; capacitancia
d	Distancia
$\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t$	Vectores unitarios a lo largo de la normal y la tangente
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$	Vectores unitarios en las direcciones radial y transversal
e	Coeficiente de restitución; base de los logaritmos naturales
E	Energía mecánica total; voltaje
f	Función escalar
f_f	Frecuencia de vibración forzada
f_n	Frecuencia natural
\mathbf{F}	Fuerza; fuerza de fricción
g	Aceleración de la gravedad
G	Centro de gravedad; centro de masa; constante de gravitación
h	Momento angular por masa unitaria
H_O	Momento angular alrededor del punto O
$\dot{\mathbf{H}}_G$	Razón de cambio de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G con respecto a un sistema de referencia de orientación fija
$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$	Razón de cambio de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G con respecto a un sistema de referencia en rotación $Gxyz$
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas
i	Corriente
I, I_x, \dots	Momentos de inercia
\bar{I}	Momento centroidal de inercia
I_{xy}, \dots	Productos de inercia
J	Momento polar de inercia
k	Constante de resorte
k_x, k_y, k_Q	Radio de giro
k	Radio de giro centroidal
l	Longitud
L	Cantidad de movimiento lineal
L	Longitud; inductancia
m	Masa
m'	Masa por unidad de longitud
\mathbf{M}	Par; momento
\mathbf{M}_O	Momento alrededor del punto O
\mathbf{M}_O^R	Momento resultante alrededor del punto O
M	Magnitud de par o momento; masa de la Tierra
M_{OL}	Momento alrededor del eje OL
n	Dirección normal

N	Componente normal de la reacción
O	Origen de coordenadas
P	Fuerza; vector
Ṗ	Razón de cambio del vector P con respecto a un sistema de referencia de orientación fija
q	Razón de flujo de masa; carga eléctrica
Q	Fuerza; vector
Q̇	Razón de cambio del vector Q con respecto a un sistema de referencia de orientación fija
(Q̇)Oxyz	Razón de cambio del vector Q con respecto al sistema de referencia Oxyz
r	Vector de posición
r_{B/A}	Vector de posición de <i>B</i> relativo a <i>A</i>
r	Radio; distancia; coordenada polar
R	Fuerza resultante; vector resultante; reacción
R	Radio de la Tierra; resistencia
s	Vector de posición
s	Longitud de arco
t	Tiempo; espesor; dirección tangencial
T	Fuerza
T	Tensión; energía cinética
u	Velocidad
u	Variable
U	Trabajo
v, v	Velocidad
v	Rapidez
ȳ, ȳ	Velocidad del centro de masa
v_{B/A}	Velocidad de <i>B</i> relativa al sistema de transferencia en traslación con <i>A</i>
v_{P/F}	Velocidad de <i>P</i> relativa al sistema de referencia en rotación <i>F</i>
V	Producto vectorial
V	Volumen; energía potencial
w	Carga por unidad de longitud
W, W	Peso; carga
x, y, z	Coordenadas rectangulares; distancias
᷇, ᷈, ᷉	Derivadas temporales de las coordenadas <i>x, y, z</i>
᷇, ᷈, ᷉	Coordenadas rectangulares del centroide, centro de gravedad o centro de masa
α, α	Aceleración angular
α, β, γ	Ángulos
γ	Peso específico
δ	Elongación
ε	Excentricidad de sección cónica o de órbita
λ	Vector unitario a lo largo de una línea
η	Eficiencia
θ	Coordenada angular; ángulo euleriano; ángulo; coordenada polar
μ	Coeficiente de fricción
ρ	Densidad; radio de curvatura
τ	Periodo
τ_n	Periodo de vibración libre
ϕ	Ángulo de fricción; ángulo euleriano; ángulo de fase; ángulo
φ	Diferencia de fase
ψ	Ángulo euleriano
ω, ω	Velocidad angular
ω_f	Frecuencia circular de vibración forzada
ω_n	Frecuencia circular natural
Ω	Velocidad angular del sistema de referencia



El movimiento del transbordador espacial se describe en términos de su *posición, velocidad y aceleración*. Al aterrizar, el piloto debe considerar la velocidad del viento y el movimiento *relativo* del transbordador con respecto al viento. El estudio del movimiento se conoce como *cinemática* y es el objeto de estudio en este capítulo.

CAPÍTULO 11

Cinemática de partículas



CAPÍTULO 11 CINEMÁTICA DE PARTÍCULAS

- 11.1 Introducción a la dinámica
- 11.2 Posición, velocidad y aceleración
- 11.3 Determinación del movimiento de una partícula
- 11.4 Movimiento rectilíneo uniforme
- 11.5 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado
- 11.6 Movimiento de varias partículas
- 11.7 Solución gráfica de problemas de movimiento rectilíneo
- 11.8 Otros métodos gráficos
- 11.9 Vector de posición, velocidad y aceleración
- 11.10 Derivadas de funciones vectoriales
- 11.11 Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración
- 11.12 Movimiento relativo a un sistema de referencia en traslación
- 11.13 Componentes tangencial y normal
- 11.14 Componentes radial y transversal

11.1. INTRODUCCIÓN A LA DINÁMICA

Los capítulos 1 al 10 se dedicaron a la *estática*, esto es, al análisis de los cuerpos en reposo. Ahora se inicia el estudio de la *dinámica*, parte de la mecánica que se refiere al análisis de los cuerpos en movimiento.

En tanto que el estudio de la estática se remonta al tiempo de los filósofos griegos, la primera contribución importante a la dinámica la realizó Galileo (1564-1642). Los experimentos de Galileo en cuerpos uniformemente acelerados llevaron a Newton (1642-1727) a formular sus leyes de movimiento fundamentales.

La dinámica incluye:

1. La *cinemática*, la cual corresponde al estudio de la geometría del movimiento. Se utiliza para relacionar el desplazamiento, la velocidad, la aceleración y el tiempo, sin hacer referencia a la causa del movimiento.
2. La *cinética*, que es el estudio de la relación que existe entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, su masa y el movimiento de este mismo. La cinética se utiliza para predecir el movimiento ocasionado por fuerzas dadas, o para determinar las fuerzas que se requieren para producir un movimiento específico.

Los capítulos 11 al 14 abordan la *dinámica de partículas*; en el capítulo 11 se considera la *cinemática de partículas*. El uso de la palabra *partículas* no significa que el estudio se restringirá a pequeños corpúsculos, sino que en estos primeros capítulos el movimiento de cuerpos —posiblemente tan grandes como automóviles, cohetes o aviones— será considerado sin tomar en cuenta su tamaño. Al afirmar que los cuerpos se analizan como partículas, se entiende que sólo se va a considerar su movimiento como una unidad completa, y se ignora cualquier rotación alrededor de su propio centro de masa. Sin embargo, hay casos en los que dicha rotación no es despreciable; entonces no pueden considerarse como partículas. Este tipo de movimiento se analiza en los capítulos finales, en los que se trata la *dinámica de cuerpos rígidos*.

En la primera parte del capítulo 11 se estudia el movimiento rectilíneo de una partícula; esto es, se determina la posición, velocidad y aceleración de una partícula en todo instante conforme ésta se mueve a lo largo de una línea recta. Primero, se emplean métodos generales de análisis para estudiar el movimiento de una partícula; después se consideran dos casos particulares importantes, a saber, el movimiento uniforme y el movimiento uniformemente acelerado de una partícula (secciones 11.4 y 11.5). En la sección 11.6, se aborda el movimiento simultáneo de varias partículas, y se presenta el concepto de movimiento relativo de una partícula con respecto a otra. La primera parte de este capítulo concluye con un estudio de métodos gráficos de análisis y su aplicación en la solución de diversos problemas que implican el movimiento rectilíneo de partículas (secciones 11.7 y 11.8).

En la segunda parte de este capítulo se analiza el movimiento de una partícula cuando ésta se mueve a lo largo de una trayectoria curva. Puesto que la posición, velocidad y aceleración de una partícula se definen como cantidades vectoriales, el concepto de la derivada de una función vectorial se presenta en la sección 11.10 y se añade a las herramientas matemáticas. Después se estudian las apli-

caciones en las que el movimiento de una partícula se define mediante las componentes rectangulares de su velocidad y aceleración; en este punto se analiza el movimiento de un proyectil (sección 11.11).

En la sección 11.12 se estudia el movimiento de una partícula en relación con el sistema de referencia en traslación. Por último, se analiza el movimiento curvilíneo de una partícula en términos de componentes que no sean las rectangulares. Las componentes tangencial y normal de la velocidad y la aceleración de una partícula se presentan en la sección 11.13 y las componentes radial y transversal de su velocidad y aceleración en la sección 11.14.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO DE PARTÍCULAS

11.2. POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACCELERACIÓN

Una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta se dice que se encuentra en *movimiento rectilíneo*. En cualquier instante dado t , la partícula ocupará cierta posición sobre la línea recta. Para definir la posición P de la partícula se elige un origen fijo O sobre la dirección positiva a lo largo de la línea. Se mide la distancia x desde O hasta P , y se marca con un signo más o menos, dependiendo de si P se alcanza desde O al moverse a lo largo de la línea en la dirección positiva o en la negativa, respectivamente. La distancia x , con el signo apropiado, define por completo la posición de la partícula, y se denomina como la *coordenada de la posición* de la partícula. Por ejemplo, la coordenada de la posición correspondiente a P en la figura 11.1a) es $x = +5$ m; la coordenada correspondiente a P' en la figura 11.1b) es $x' = -2$ m.

Cuando se conoce la coordenada de la posición x de una partícula para cualquier valor de tiempo t , se afirma que se conoce el movimiento de la partícula. El “itinerario” del movimiento puede expresarse en forma de una ecuación en x y t , tal como $x = 6t^2 - t^3$, o en una gráfica de x en función de t , como se indica en la figura 11.6. Las unidades que se usan con mayor frecuencia para medir la coordenada de la posición x son el metro (m) en el sistema de unidades SI[†] y el pie (ft) en el sistema de unidades inglés. El tiempo t suele medirse en segundos (s).

Considere la posición P ocupada por la partícula en el tiempo t y la coordenada correspondiente x (figura 11.2). Considere también la posición P' ocupada por la partícula en un tiempo posterior $t + \Delta t$; la coordenada de la posición P' puede obtenerse sumando a la coordenada x de P el pequeño desplazamiento Δx , el cual será positivo o negativo según si P' está a la derecha o a la izquierda de P . La *velocidad promedio* de la partícula sobre el intervalo de tiempo Δt se define como el cociente entre el desplazamiento Δx y el intervalo de tiempo Δt :

$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

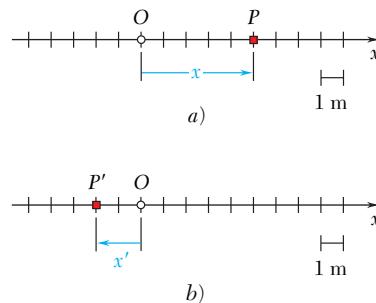


Figura 11.1

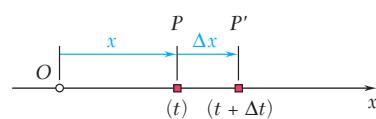
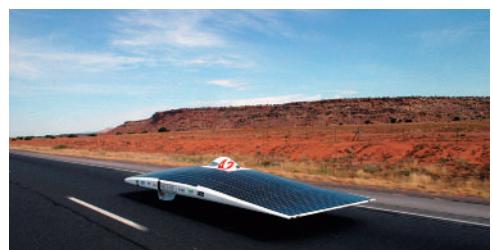


Figura 11.2



Fotografía 11.1 El movimiento de este vehículo solar se describe mediante su posición, velocidad y aceleración.

[†]Cf. Sección 1.3.

Si se usan unidades del SI, Δx se expresa en metros y Δt en segundos, la velocidad promedio se expresa consecuentemente en metros por segundo (m/s). Si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos, Δx se expresa en pies y Δt en segundos; la velocidad promedio se expresará entonces en pies por segundo (ft/s).

La *velocidad instantánea* v de la partícula en el instante t se obtiene de la velocidad promedio al elegir intervalos Δt y desplazamientos Δx cada vez más cortos:

$$\text{Velocidad instantánea} = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea se expresa también en m/s o ft/s . Observando que el límite del cociente es igual, por definición, a la derivada de x con respecto a t , se escribe

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (11.1)$$

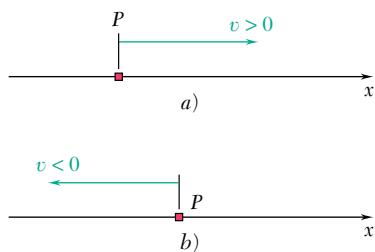


Figura 11.3

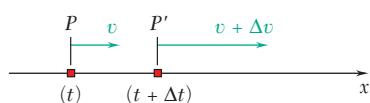


Figura 11.4

La velocidad v se representa mediante un número algebraico que puede ser positivo o negativo.[†] Un valor positivo de v indica que x aumenta, esto es, que la partícula se mueve en la dirección positiva (figura 11.3a); un valor negativo de v indica que x disminuye, es decir, que la partícula se mueve en dirección negativa (figura 11.3b). La magnitud de v se conoce como la *rapidez* de la partícula.

Considere la velocidad v de la partícula en el tiempo t y también su velocidad $v + \Delta v$ en un tiempo posterior $t + \Delta t$ (figura 11.4). La *aceleración promedio* de la partícula sobre el intervalo de tiempo Δt se refiere como el cociente de Δv y Δt :

$$\text{Aceleración promedio} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Si se utilizan las unidades del SI, Δv se expresa en m/s y Δt en segundos; la aceleración promedio se expresará entonces en m/s^2 . Si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos, Δv se expresa en ft/s y Δt en segundos; la aceleración promedio se expresa entonces en ft/s^2 .

La *aceleración instantánea* a de la partícula en el instante t se obtiene de la aceleración promedio al escoger valores de Δt y Δv cada vez más pequeños:

$$\text{Aceleración instantánea} = a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

[†]Como se verá en la sección 11.9, la velocidad es en realidad una cantidad vectorial. Sin embargo, puesto que aquí se considera el movimiento rectilíneo de una partícula, en el cual la velocidad de la misma tiene una dirección conocida y fija, sólo es necesario especificar el sentido y la magnitud de la velocidad; esto puede llevarse a cabo de manera conveniente utilizando una cantidad escalar con un signo más o menos. Lo mismo se cumple para la aceleración de una partícula en movimiento rectilíneo.

La aceleración instantánea se expresa también en m/s^2 o ft/s^2 . El límite del cociente, el cual es por definición la derivada de v con respecto a t , mide la razón de cambio de la velocidad. Se escribe

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (11.2)$$

o, con la sustitución de v de (11.1),

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (11.3)$$

La aceleración a se representa mediante un número algebraico que puede ser positivo o negativo.[†] Un valor positivo de a indica que la velocidad (es decir, el número algebraico v) aumenta. Esto puede significar que la partícula se está moviendo más rápido en la dirección positiva (figura 11.5a) o que se mueve más lentamente en la dirección negativa (figura 11.5b); en ambos casos, Δv es positiva. Un valor negativo de a indica que disminuye la velocidad; ya sea que la partícula se esté moviendo más lentamente en la dirección positiva (figura 11.5c) o que se esté moviendo más rápido en la dirección negativa (figura 11.5d).

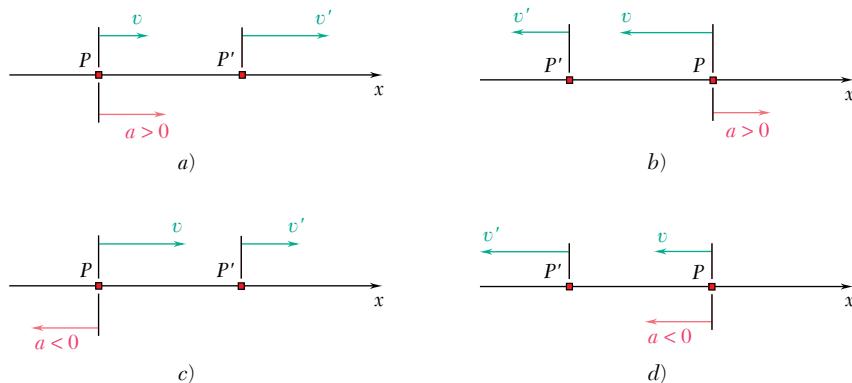


Figura 11.5

El término *desaceleración* se utiliza en algunas ocasiones para referirse a a cuando la rapidez de la partícula (esto es, la magnitud de v) disminuye; la partícula se mueve entonces con mayor lentitud. Por ejemplo, la partícula de la figura 11.5 se desacelera en las partes b y c; en verdad se acelera (es decir, se mueve más rápido) en las partes a y d.

Es posible obtener otra expresión para la aceleración eliminando la diferencial dt en las ecuaciones (11.1) y (11.2). Al resolver (11.1) para dt , se obtiene $dt = dx/v$; al sustituir en (11.2), se escribe

$$a = v \frac{dv}{dx} \quad (11.4)$$

[†]Véase la nota al pie, página 604.

Ejemplo. Considere la partícula que se mueve en una línea recta y suponga que su posición está definida por la ecuación

$$x = 6t^2 - t^3$$

donde t se expresa en segundos y x en metros. La velocidad de v en cualquier tiempo t se obtiene al diferenciar x con respecto a t

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

La aceleración a se obtiene al diferenciar otra vez con respecto a t :

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$

La coordenada de la posición, la velocidad y la aceleración se han graficado contra t en la figura 11.6. Las curvas obtenidas se conocen como *curvas de movimiento*. Recuérdese, sin embargo, que la partícula no se mueve a lo largo de ninguna de estas curvas; la partícula se mueve en una línea recta. Puesto que la derivada de una función mide la pendiente de la curva correspondiente, la pendiente de la curva $x-t$ en cualquier tiempo dado es igual al valor de v en ese tiempo y la pendiente de la curva $v-t$ es igual al valor de a . Puesto que $a = 0$ en $t = 2$ s, la pendiente de la curva $v-t$ debe ser cero en $t = 2$ s; la velocidad alcanza un máximo en este instante. Además, puesto que $v = 0$ en $t = 0$ y $t = 4$ s la tangente a la curva $x-t$ debe ser horizontal para ambos de estos valores de t .

Un estudio de las tres curvas de movimiento de la figura 11.6 muestra que el movimiento de la partícula desde $t = 0$ hasta $t = \infty$ puede dividirse en cuatro etapas:

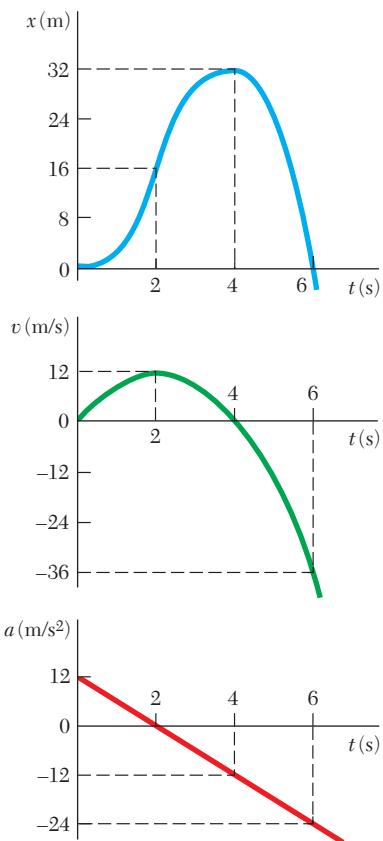


Figura 11.6

1. La partícula inicia desde el origen, $x = 0$, sin velocidad pero con una aceleración positiva. Bajo esta aceleración, gana una velocidad positiva y se mueve en la dirección positiva. De $t = 0$ a $t = 2$ s, x , v y a son todas positivas.
2. En $t = 2$ s, la aceleración es cero; la velocidad ha alcanzado su valor máximo. De $t = 2$ s a $t = 4$ s, v es positiva, pero a es negativa. La partícula aún se mueve en dirección positiva, pero cada vez más lentamente; la partícula se está desacelerando.
3. En $t = 4$ s, la velocidad es cero; la coordenada de la posición x ha alcanzado su valor máximo. A partir de ahí, tanto v como a son negativas; la partícula se está acelerando y se mueve en la dirección negativa con rapidez creciente.
4. En $t = 6$ s, la partícula pasa por el origen; su coordenada x es en ese caso cero, en tanto que la distancia total recorrida desde el principio del movimiento es de 64 m. Para valores mayores de t que 6 s, x , v y a serán todas negativas. La partícula continúa moviéndose en la dirección negativa, alejándose de O , cada vez más rápido. ■

11.3. DETERMINACIÓN DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA

11.3. Determinación del movimiento de una partícula

607

En la sección anterior se afirma que el movimiento de una partícula es conocido si se sabe la posición de la partícula para todo valor del tiempo t . En la práctica, sin embargo, un movimiento rara vez se define por medio de una relación entre x y t . Con mayor frecuencia, las condiciones del movimiento se especificarán por el tipo de aceleración que posee la partícula. Por ejemplo, un cuerpo en caída libre tendrá una aceleración constante, dirigida hacia abajo e igual a 9.81 m/s^2 , o 32.2 ft/s^2 ; una masa unida a un resorte que se ha estirado tendrá una aceleración proporcional a la elongación instantánea del resorte, medida desde la posición de equilibrio, etc. En general, la aceleración de la partícula puede expresarse como una función de una o más de las variables x , v y t . Para determinar la coordenada de la posición x en términos de t , será necesario efectuar dos integraciones sucesivas.

Se considerarán tres clases comunes de movimiento:

1. $a = f(t)$. La aceleración es una función dada de t . Al resolver (11.2) para dv y sustituir $f(t)$ por a , se escribe

$$\begin{aligned} dv &= a dt \\ dv &= f(t) dt \end{aligned}$$

Al integrar ambos miembros, se obtiene la ecuación

$$\int dv = \int f(t) dt$$

que define v en términos de t . Sin embargo, debe notarse que una constante arbitraria se introduciría como resultado de la integración. Esto se debe al hecho de que hay muchos movimientos que corresponden a la aceleración dada $a = f(t)$. Para definir en forma única el movimiento de la partícula, es necesario especificar las *condiciones iniciales* del movimiento, esto es, el valor de v_0 de la velocidad y el valor x_0 de la coordenada de la posición en $t = 0$. Al sustituir las integrales indefinidas por *integrales definidas* con los límites inferiores correspondientes a las condiciones iniciales $t = 0$ y $v = v_0$ y los límites superiores correspondientes a $t = t$ y $v = v$, se escribe

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v dv &= \int_0^t f(t) dt \\ v - v_0 &= \int_0^t f(t) dt \end{aligned}$$

lo cual produce v en términos de t .

La ecuación (11.1) puede resolverse ahora para dx ,

$$dx = v dt$$

y la expresión que se acaba de obtener sea sustituida por v . Ambos miembros se integran después, el miembro izquierdo con respecto a x desde $x = x_0$ hasta $x = x$, y el miembro de-

recho respecto a t desde $t = 0$ hasta $t = t$. La coordenada de la posición x se obtiene de ese modo en términos de t ; el movimiento está completamente determinado.

Dos casos particulares importantes se estudiarán con gran detalle en las secciones 11.4 y 11.5: el caso en el que $a = 0$, que corresponde a un *movimiento uniforme*, y en el que $a = \text{constante}$, que corresponde a un *movimiento uniformemente acelerado*.

2. $a = f(x)$. La aceleración se da en función de x . Al reordenar la ecuación (11.4) y sustituir $f(x)$ para a , se escribe

$$\begin{aligned} v \, dv &= a \, dx \\ v \, dv &= f(x) \, dx \end{aligned}$$

Puesto que cada miembro contiene sólo una variable, se puede integrar la ecuación. Denotando de nuevo mediante v_0 y x_0 , respectivamente, los valores iniciales de la velocidad y la coordenada de la posición, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v v \, dv &= \int_{x_0}^x f(x) \, dx \\ \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 &= \int_{x_0}^x f(x) \, dx \end{aligned}$$

la cual produce v en términos de x . A continuación se resuelve (11.1) para dt ,

$$dt = \frac{dx}{v}$$

y se sustituye por v la expresión que acaba de obtenerse. Ambos miembros pueden integrarse entonces para obtener la relación deseada entre x y t . Sin embargo, en muchos casos esta última integración no puede llevarse a cabo de manera analítica y debe recurrirse a un método de integración numérico.

3. $a = f(v)$. La aceleración es una función dada de v . Es posible sustituir $f(v)$ por a en (11.2) u (11.4) para obtener cualquiera de las relaciones siguientes:

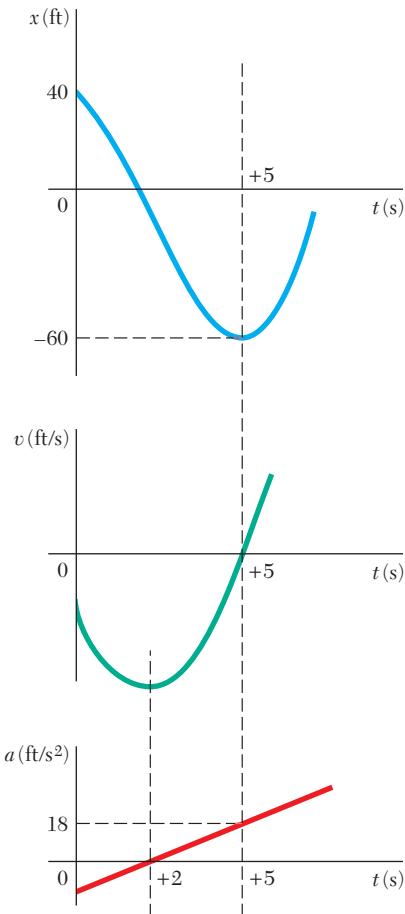
$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{dv}{dt} & f(v) &= v \frac{dv}{dx} \\ dt &= \frac{dv}{f(v)} & dx &= \frac{v \, dv}{f(v)} \end{aligned}$$

La integración de la primera ecuación producirá una relación entre v y t ; la integración de la segunda ecuación originará una relación entre v y x . Cualquiera de estas relaciones puede utilizarse junto con la ecuación (11.1) para obtener la relación entre x y t que caracteriza el movimiento de la partícula.

PROBLEMA RESUELTO 11.1

La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está definida por la relación $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$, donde x se expresa en pies y t en segundos. Determine *a)* el tiempo al cual la velocidad será cero, *b)* la posición y la distancia recorrida por la partícula en ese tiempo, *c)* la aceleración de la partícula en ese tiempo, *d)* la distancia recorrida por la partícula desde $t = 4$ s hasta $t = 6$ s.

SOLUCIÓN



Las ecuaciones de movimiento son

$$x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40 \quad (1)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 15 \quad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \quad (3)$$

a) Tiempo en el cual $v = 0$. Se fija $v = 0$ en (2):

$$3t^2 - 12t - 15 = 0 \quad t = -1 \text{ s} \quad \text{y} \quad t = +5 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$

Sólo la raíz $t = +5$ s corresponde a un tiempo después de que el movimiento se ha iniciado: para $t < 5$ s, $v < 0$, la partícula se mueve en dirección negativa; para $t > 5$ s, $v > 0$, la partícula se mueve en dirección positiva.

b) Posición y distancia recorrida cuando $v = 0$. Al sustituir $t = +5$ s en (1), se tiene

$$x_5 = (5)^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 40 \quad x_5 = -60 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft$$

La posición inicial en $t = 0$ fue $x_0 = +40$ ft. Puesto que $v \neq 0$ durante el intervalo $t = 0$ a $t = 5$ s se tiene

$$\text{Distancia recorrida} = x_5 - x_0 = -60 \text{ ft} - 40 \text{ ft} = -100 \text{ ft}$$

Distancia recorrida = 100 ft en la dirección negativa \blacktriangleleft

c) Aceleración cuando $v = 0$. Se sustituye $t = +5$ s en (3):

$$a_5 = 6(5) - 12 \quad a_5 = +18 \text{ ft/s}^2 \quad \blacktriangleleft$$

d) Distancia recorrida desde $t = 4$ s hasta $t = 6$ s. La partícula se mueve en la dirección negativa desde $t = 4$ s hasta $t = 5$ s y en dirección positiva desde $t = 5$ s hasta $t = 6$ s; por lo tanto, la distancia recorrida durante cada uno de estos intervalos de tiempo se calculará por separado.

De $t = 4$ s a $t = 5$ s: $x_5 = -60$ ft

$$x_4 = (4)^3 - 6(4)^2 - 15(4) + 40 = -52 \text{ ft}$$

$$\begin{aligned} \text{Distancia recorrida} &= x_5 - x_4 = -60 \text{ ft} - (-52 \text{ ft}) = -8 \text{ ft} \\ &= 8 \text{ ft en la dirección negativa} \end{aligned}$$

De $t = 5$ s a $t = 6$ s: $x_5 = -60$ ft

$$x_6 = (6)^3 - 6(6)^2 - 15(6) + 40 = -50 \text{ ft}$$

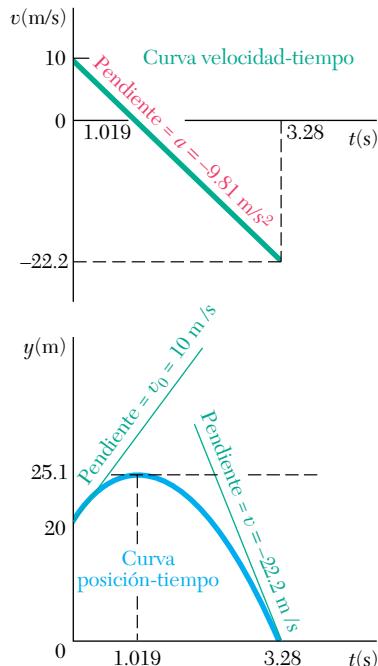
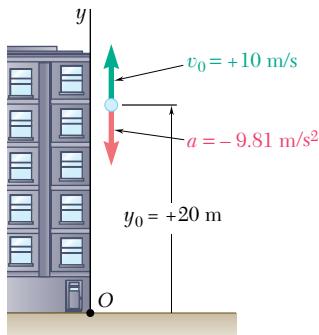
$$\begin{aligned} \text{Distancia recorrida} &= x_6 - x_5 = -50 \text{ ft} - (-60 \text{ ft}) = +10 \text{ ft} \\ &= 10 \text{ ft en la dirección positiva} \end{aligned}$$

La **distancia total recorrida** desde $t = 4$ s hasta $t = 6$ s es de $8 \text{ ft} + 10 \text{ ft} = 18 \text{ ft}$ \blacktriangleleft

PROBLEMA RESUELTO 11.2

Una pelota se lanza con una velocidad de 10 m/s dirigida verticalmente hacia arriba desde una ventana ubicada a 20 m sobre el suelo. Si se sabe que la aceleración de la pelota es constante e igual a 9.81 m/s^2 hacia abajo, determine a) la velocidad v y la elevación y de la pelota sobre el suelo en cualquier tiempo t , b) la elevación más alta que alcanza la pelota y el valor correspondiente de t , c) el tiempo en el que la pelota golpea el suelo y la velocidad correspondiente. Dibuje las curvas $v-t$ y $y-t$.

SOLUCIÓN



a) Velocidad y elevación. El eje y que mide la coordenada de la posición (o elevación) se elige con su origen O sobre el suelo y su sentido positivo hacia arriba. El valor de la aceleración y los valores iniciales de v y y son como se indica. Al sustituir a en $a = dv/dt$ y observar que en $t = 0$, $v_0 = +10 \text{ m/s}$, se tiene

$$\frac{dv}{dt} = a = -9.81 \text{ m/s}^2$$

$$\int_{v_0=10}^v dv = - \int_0^t 9.81 dt$$

$$[v]_{10}^v = -[9.81t]_0^t$$

$$v - 10 = -9.81t$$

$$v = 10 - 9.81t \quad (1)$$

Al sustituir v en $v = dy/dt$ y observar que en $t = 0$, $y_0 = 20 \text{ m}$, se tiene

$$\frac{dy}{dt} = v = 10 - 9.81t$$

$$\int_{y_0=20}^y dy = \int_0^t (10 - 9.81t) dt$$

$$[y]_{20}^y = [10t - 4.905t^2]_0^t$$

$$y - 20 = 10t - 4.905t^2$$

$$y = 20 + 10t - 4.905t^2 \quad (2)$$

b) Máxima elevación. Cuando la pelota alcanza su máxima elevación, se tiene $v = 0$. Al sustituir en (1), se obtiene

$$10 - 9.81t = 0$$

$$t = 1.019 \text{ s}$$

Al sustituir $t = 1.019 \text{ s}$ en (2), se tiene

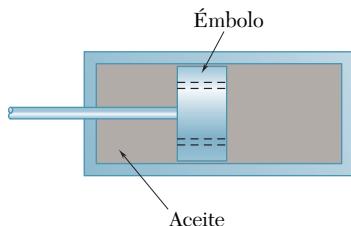
$$y = 20 + 10(1.019) - 4.905(1.019)^2 \quad y = 25.1 \text{ m}$$

c) La pelota golpea el suelo. Cuando la pelota golpea el suelo, se tiene $y = 0$. Al sustituir en (2), se obtiene

$$20 + 10t - 4.905t^2 = 0 \quad t = -1.243 \text{ s} \quad y \quad t = +3.28 \text{ s}$$

Sólo la raíz $t = +3.28 \text{ s}$ corresponde a un tiempo después de que el movimiento se ha iniciado. Al considerar este valor de t en (1), se tiene

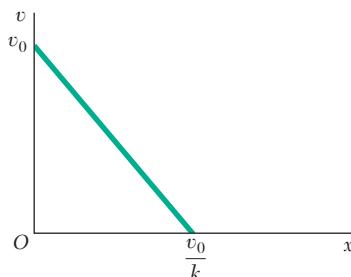
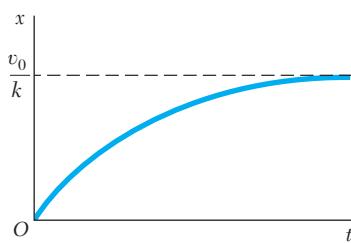
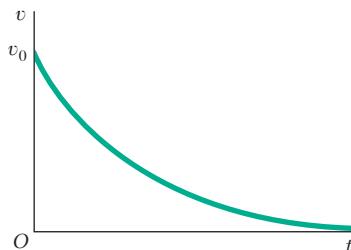
$$v = 10 - 9.81(3.28) = -22.2 \text{ m/s} \quad v = 22.2 \text{ m/s} \downarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 11.3

El mecanismo de freno que se usa para reducir el retroceso en ciertos tipos de cañones consiste esencialmente en un émbolo unido a un cañón que se mueve en un cilindro fijo lleno de aceite. Cuando el cañón retrocede con una velocidad inicial v_0 , el émbolo se mueve y el aceite es forzado a través de los orificios en el émbolo, provocando que este último y el cañón se desaceleren a una razón proporcional a su velocidad; esto es, $a = -kv$. Exprese *a)* v en términos de t , *b)* x en términos de t , *c)* v en términos de x . Dibuje las curvas del movimiento correspondiente.

SOLUCIÓN



a) v términos de t . Al sustituir $-kv$ por a en la expresión fundamental que define a la aceleración, $a = dv/dt$, se escribe

$$\begin{aligned} -kv &= \frac{dv}{dt} & \frac{dv}{v} &= -k dt & \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} &= -k \int_0^t dt \\ \ln \frac{v}{v_0} &= -kt & v &= v_0 e^{-kt} \end{aligned}$$

b) x en términos de t . Al sustituir la expresión que acaba de obtenerse para v en $v = dx/dt$, se escribe

$$\begin{aligned} v_0 e^{-kt} &= \frac{dx}{dt} & \int_0^x dx &= v_0 \int_0^t e^{-kt} dt \\ x &= -\frac{v_0}{k} [e^{-kt}]_0^t & x &= \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \end{aligned}$$

c) v en términos de x . Mediante la sustitución $-kv$ para a en $a = v dv/dx$, se escribe

$$\begin{aligned} -kv &= v \frac{dv}{dx} & dv &= -k dx \\ \int_{v_0}^v dv &= -k \int_0^x dx & v - v_0 &= -kx \\ v &= v_0 - kx & v &= v_0 - kx \end{aligned}$$

Comprobación. La parte *c)* podría haberse resuelto al eliminar t de las respuestas obtenidas para las partes *a)* y *b)*. Este método alternativo puede utilizarse como una comprobación. De la parte *a)* se obtiene $e^{-kt} = v/v_0$; al sustituir en la respuesta de la parte *b)*, se obtiene

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k} \left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \quad v = v_0 - kx \quad (\text{comprobación})$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas de esta lección se pide determinar la *posición*, la *velocidad* o la *aceleración* de una partícula en *movimiento rectilíneo*. En cada problema, es importante identificar tanto la variable independiente (por lo común t o x) y qué es lo que se pide (por ejemplo, la necesidad de expresar v como una función de x). Se recomienda empezar cada problema escribiendo tanto la información dada como un enunciado simple de lo que se va a determinar.

1. Obtención de $v(t)$ y $a(t)$ para una $x(t)$ dada. Como se explicó en la sección 11.2, la primera y segunda derivadas de x con respecto a t son respectivamente iguales a la velocidad v y a la aceleración de la partícula [ecuaciones (11.1) y (11.2)]. Si la velocidad y la aceleración tienen signos opuestos, la partícula puede llegar al reposo y después moverse en la dirección opuesta [problema resuelto 11.1]. Así, cuando se calcula la distancia total recorrida por una partícula, se debe determinar primero si la partícula llegó al reposo durante el intervalo de tiempo especificado. Al construir un diagrama similar al del problema resuelto 11.1 que muestra la posición y la velocidad de la partícula y cada instante crítico ($v = v_{\max}$, $v = 0$, etc.), se contará con una ayuda para visualizar el movimiento.

2. Obtención de $v(t)$ y $x(t)$ para una $a(t)$ dada. La solución de problemas de este tipo se analizó en la primera parte de la sección 11.3. Se recurre a las condiciones iniciales, $t = 0$ y $v = v_0$, como los límites inferiores de las integrales en t y v , pero es posible utilizar cualquier otro estado conocido (por ejemplo, $t = t_1$, $v = v_1$). Además, si la función $a(t)$ contiene una constante desconocida (por ejemplo, la constante k si $a = kt$), primero se debe determinar la constante al sustituir un conjunto de valores conocidos de t y a en la ecuación que define a $a(t)$.

3. Obtención de $v(x)$ y $x(t)$ para una $a(x)$ dada. Éste es el segundo caso considerado en la sección 11.3. Los límites inferiores de integración pueden ser los de cualquier estado conocido (por ejemplo, $x = x_1$, $v = v_1$). Además, puesto que $v = v_{\max}$ cuando $a = 0$, las posiciones donde ocurren los valores máximos de la velocidad se determinan con facilidad al escribir $a(x) = 0$ y al resolver para x .

4. Obtención de $v(x)$, $v(t)$ y $x(t)$ para una $a(v)$ dada. Éste es el último caso que se abordó en la sección 11.3; las técnicas de solución apropiadas para problemas de este tipo se ilustran en el problema resuelto 11.3. Todos los comentarios generales correspondientes a los casos anteriores también se aplican en esta situación. El problema resuelto 11.3 proporciona un resumen de cómo y cuándo utilizar las ecuaciones $v = dx/dt$, $a = dv/dt$ y $a = v \, dv/dx$.

Problemas[†]

11.1 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 1.5t^4 - 30t^2 + 5t + 10$, donde x y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 4$ s.

11.2 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 12t^3 - 18t^2 + 2t + 5$, donde x y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine la posición y la velocidad cuando la aceleración de la partícula es igual a cero.

11.3 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 30t + 8x$, donde x y t se expresan en pies y segundos, respectivamente. Determine el tiempo, la posición y la aceleración cuando $v = 0$.

11.4 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 6t^2 - 8 + 40 \cos \pi t$, donde x y t se expresan en pulgadas y segundos, respectivamente. Determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 6$ s.

11.5 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 6t^4 - 2t^3 - 12t^2 + 3t + 3$, donde x y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine el tiempo, la posición y la velocidad cuando $a = 0$.

11.6 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$, donde x se expresa en metros y t en segundos. Determine *a)* cuándo la velocidad es cero, *b)* la posición y la distancia total viajada hasta ese momento cuando la aceleración es cero.

11.7 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = t^3 - 6t^2 - 36t - 40$, donde x y t se expresan en pies y segundos, respectivamente. Determine *a)* cuándo la velocidad es cero, *b)* la velocidad, la aceleración y la distancia total viajada cuando $x = 0$.

11.8 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = t^3 - 9t^2 + 24t - 8$, donde x y t se expresan en pulgadas y segundos, respectivamente. Determine *a)* cuándo la velocidad es cero, *b)* la posición y la distancia total recorrida cuando la aceleración es cero.

11.9 La aceleración de una partícula se define mediante la relación $a = -8 \text{ m/s}^2$. Si se sabe que $x = 20$ m cuando $t = 4$ s y $x = 4$ m cuando $v = 16$ m/s, determine *a)* el tiempo cuando la velocidad es cero, *b)* la velocidad y la distancia total recorrida cuando $t = 11$ s.

[†]Las respuestas a todos los problemas cuyo número está en tipo recto (como en **11.1**) se presentan al final del libro. No se dan las respuestas a los problemas con números en itálicas (como en **11.7**).

11.10 La aceleración de una partícula es directamente proporcional al cuadrado del tiempo t . Cuando $t = 0$, la partícula está en $x = 24$ m. Si se sabe que en $t = 6$ s, $x = 96$ m y $v = 18$ m/s, exprese x y v en términos de t .

11.11 La aceleración de una partícula es directamente proporcional al tiempo t . Cuando $t = 0$, la velocidad de la partícula es $v = 16$ in./s. Si se sabe que $v = 15$ in./s, y que $x = 20$ in. cuando $t = 1$ s, determine la velocidad, la posición y la distancia total recorrida cuando $t = 7$ s.

11.12 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = kt^2$. *a)* Si se sabe que $v = -32$ ft/s cuando $t = 0$ y que $v = +32$ ft/s cuando $t = 4$ s, determine la constante k . *b)* Escriba las ecuaciones de movimiento, sabiendo también que $x = 0$ cuando $t = 4$ s.

11.13 La aceleración de una partícula se define mediante la relación $a = A - 6t^2$, donde A es constante. En $t = 0$, la partícula inicia en $x = 8$ m con $v = 0$. Si se sabe que $t = 1$ s y $v = 30$ m/s, determine *a)* los tiempos en los que la velocidad es cero, *b)* la distancia total recorrida por la partícula cuando $t = 5$ s.

11.14 Se sabe que desde $t = 2$ s hasta $t = 10$ s, la aceleración de una partícula es inversamente proporcional al cubo del tiempo t . Cuando $t = 2$ s, $v = -15$ m/s y cuando $t = 10$ s, $v = 0.36$ m/s. Si se sabe que la partícula está dos veces más lejos del origen cuando $t = 2$ s que cuando $t = 10$ s, determine *a)* la posición de la partícula cuando $t = 2$ s y cuando $t = 10$ s, *b)* la distancia total recorrida por la partícula desde $t = 2$ s hasta $t = 10$ s.

11.15 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -k/x$. Se ha determinado experimentalmente que $v = 15$ ft/s cuando $x = 0.6$ ft y que $v = 9$ ft/s cuando $x = 1.2$ ft. Determine *a)* la velocidad de la partícula cuando $x = 1.5$ ft, *b)* la posición de la partícula en la que su velocidad es cero.

11.16 Una partícula que inicia desde el reposo en $x = 1$ ft se acelera de forma que la magnitud de su velocidad se duplica entre $x = 2$ ft y $x = 8$ ft. Si se sabe que la aceleración de la partícula está definida por la relación $a = k[x - (A/x)]$, determine los valores de las constantes A y k si la partícula tiene una velocidad de 29 ft/s cuando $x = 16$ ft.

11.17 Una partícula oscila entre los puntos $x = 40$ mm y $x = 160$ mm con una aceleración $a = k(100 - x)$, donde a y x se expresan en mm/s^2 y mm, respectivamente, y k es una constante. La velocidad de la partícula es de 18 mm/s cuando $x = 100$ mm y es cero cuando $x = 40$ mm y cuando $x = 160$ mm. Determine *a)* el valor de k , *b)* la velocidad cuando $x = 120$ mm.

11.18 Una partícula parte desde el reposo en el origen y recibe una aceleración $a = k(x + 4)^2$, donde a y x se expresan en m/s^2 y m, respectivamente, y k es una constante. Si se sabe que la velocidad de la partícula es de 4 m/s cuando $x = 8$ m, determine *a)* el valor de k , *b)* la posición de la partícula cuando $v = 4.5$ m/s, *c)* la velocidad máxima de la partícula.

11.19 Una pieza de equipo electrónico que está rodeada por material de empaque se deja caer de manera que golpea el suelo con una velocidad de 4 m/s. Después del impacto, el equipo experimenta una aceleración de $a = -kx$, donde k es una constante y x es la compresión del material de empaque. Si dicho material experimenta una compresión máxima de 20 mm, determine la aceleración máxima del equipo.



Figura P11.19

11.20 Con base en observaciones experimentales, la aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -(0.1 + \operatorname{sen} x/b)$, donde a y x se expresan en m/s^2 y metros, respectivamente. Si se sabe que $b = 0.8 \text{ m}$ y que $v = 1 \text{ m/s}$ cuando $x = 0$, determine *a*) la velocidad de la partícula cuando $x = -1 \text{ m}$, *b*) la posición de la partícula en la que su velocidad es máxima, *c*) la velocidad máxima.

11.21 A partir de $x = 0$, sin velocidad inicial, la aceleración de una partícula está definida por la relación $a = 0.8\sqrt{v^2 + 49}$, donde a y v se expresan en m/s^2 y m/s , respectivamente. Determine *a*) la posición de la partícula cuando $v = 24 \text{ m/s}$, *b*) la rapidez de la partícula cuando $x = 40 \text{ m}$.

11.22 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -k\sqrt{v}$, donde k es una constante. Si se sabe que en $t = 0$, $x = 0$ y $v = 81 \text{ m/s}$ y que $v = 36 \text{ m/s}$ cuando $x = 18 \text{ m}$, determine *a*) la velocidad de la partícula cuando $x = 20 \text{ m}$, *b*) el tiempo requerido para que la partícula quede en reposo.

11.23 La aceleración de una partícula se define mediante la relación $a = -0.8v$, donde a se expresa en in./s^2 y v en in./s . Si se sabe que cuando $t = 0$ la velocidad es de 40 in./s , determine *a*) la distancia que recorrerá la partícula antes de quedar en reposo, *b*) el tiempo requerido para que la partícula quede en reposo, *c*) el tiempo requerido para que la velocidad de la partícula se reduzca a 50 por ciento de su valor inicial.

11.24 Una bola de boliche se deja caer desde una lancha, de manera que golpea la superficie del lago con una rapidez de 25 ft/s . Si se supone que la bola experimenta una aceleración hacia abajo $a = 10 - 0.9v^2$ cuando está en el agua, determine la velocidad de la bola cuando golpea el fondo del lago.

11.25 La aceleración de una partícula se define mediante la relación $a = 0.4(1 - kv)$, donde k es una constante. Si se sabe que en $t = 0$ la partícula parte desde el reposo con $x = 4 \text{ m}$, y que cuando $t = 15 \text{ s}$, $v = 4 \text{ m/s}$, determine *a*) la constante k , *b*) la posición de la partícula cuando $v = 6 \text{ m/s}$, *c*) la velocidad máxima de la partícula.

11.26 Una partícula se proyecta hacia la derecha desde la posición $x = 0$ con una velocidad inicial de 9 m/s . Si la aceleración de la partícula se define mediante la relación $a = -0.6v^{3/2}$, donde a y v se expresan en m/s^2 y m/s , respectivamente, determine *a*) la distancia que habrá recorrido la partícula cuando su velocidad sea de 4 m/s , *b*) el tiempo cuando $v = 1 \text{ m/s}$, *c*) el tiempo requerido para que la partícula recorra 6 m .

11.27 Con base en observaciones, la velocidad de un atleta puede aproximarse por medio de la relación $v = 7.5(1 - 0.04x)^{0.3}$, donde v y x se expresan en mi/h y millas, respectivamente. Si se sabe que $x = 0$ cuando $t = 0$, determine *a*) la distancia que ha recorrido el atleta cuando $t = 1 \text{ h}$, *b*) la aceleración del atleta en ft/s^2 cuando $t = 0$, *c*) el tiempo requerido para que el atleta recorra 6 mi .

11.28 Datos experimentales indican que en una región de la corriente de aire que sale por una rejilla de ventilación, la velocidad del aire emitido está definido por $v = 0.18v_0/x$, donde v y x se expresan en m/s y metros, respectivamente, y v_0 es la velocidad de descarga inicial del aire. Para $v_0 = 3.6 \text{ m/s}$, determine *a*) la aceleración del aire cuando $x = 2 \text{ m}$, *b*) el tiempo requerido para que el aire fluya de $x = 1$ a $x = 3 \text{ m}$.

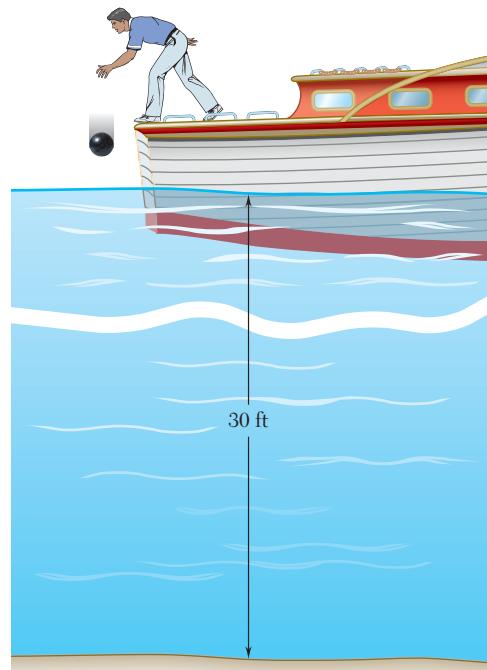


Figura P11.24

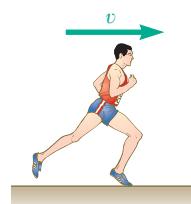


Figura P11.27

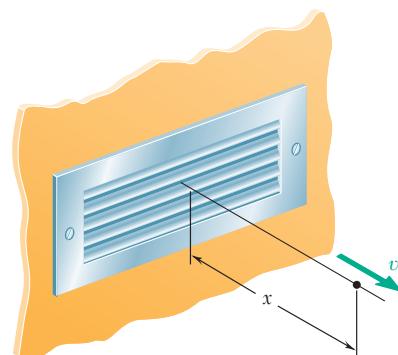


Figura P11.28

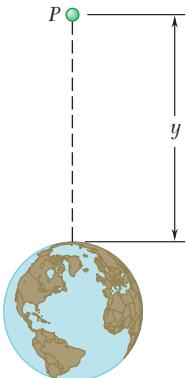


Figura P11.29

11.29 La aceleración debida a la gravedad a una altura y sobre la superficie de la Tierra puede expresarse como

$$a = \frac{-32.2}{[1 + (y/20.9 \times 10^6)]^2}$$

donde a y y se expresan en ft/s^2 y pies, respectivamente. Utilice esta expresión para calcular la altura que alcanza un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba desde la superficie terrestre si su velocidad inicial es a) 1 800 ft/s, b) 3 000 ft/s, c) 36 700 ft/s.

11.30 La aceleración debida a la gravedad de una partícula que cae hacia la Tierra es $a = -gR^2/r^2$, donde r es la distancia desde el *centro* de la Tierra a la partícula, R es el radio terrestre y g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra. Si $R = 3\ 960$ mi, calcule la *velocidad de escape*, esto es, la velocidad mínima con la cual una partícula debe proyectarse hacia arriba desde la superficie terrestre para no regresar a la Tierra. (*Sugerencia:* $v = 0$ para $r = \infty$.)

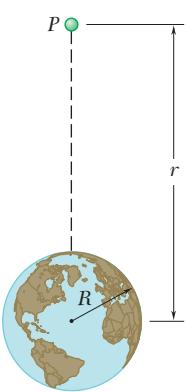


Figura P11.30

11.31 La velocidad de una partícula es $v = v_0[1 - \operatorname{sen}(\pi t/T)]$. Si se sabe que la partícula parte desde el origen con una velocidad inicial v_0 , determine a) su posición y su aceleración en $t = 3T$, b) su velocidad promedio durante el intervalo de $t = 0$ a $t = T$.

11.32 La velocidad de una corredera se define mediante la relación $v = v' \operatorname{sen}(w_n t + \phi)$. Si se denota la velocidad y la posición de la corredera en $t = 0$ con v_0 y x_0 , respectivamente, y se sabe que el desplazamiento máximo de la corredera es $2x_0$, demuestre que a) $v' = (v_0^2 + x_0^2 \omega_n^2)/2x_0 \omega_n$, b) el valor máximo de la velocidad ocurre cuando $x = x_0[3 - (v_0/x_0 \omega_n)^2]/2$.

11.4. MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

El movimiento rectilíneo uniforme es un tipo de movimiento en línea recta que a menudo se encuentra en las aplicaciones prácticas. En este movimiento, la aceleración a de una partícula es cero para todo valor de t . En consecuencia, la velocidad v es constante, y la ecuación (11.1) se transforma en

$$\frac{dx}{dt} = v = \text{constante}$$

La coordenada de posición x se obtiene cuando se integra esta ecuación. Al denotar mediante x_0 el valor inicial de x , se escribe

$$\int_{x_0}^x dx = v \int_0^t dt$$

$$x - x_0 = vt$$

$$x = x_0 + vt \quad (11.5)$$

Esta ecuación puede utilizarse sólo si la velocidad de la partícula es constante.

El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es otro tipo común de movimiento. En éste, la aceleración a de la partícula es constante, y la ecuación (11.2) se convierte en

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{constante}$$

La velocidad v de la partícula se obtiene al integrar esta ecuación:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v dv &= a \int_0^t dt \\ v - v_0 &= at \\ v &= v_0 + at \end{aligned} \quad (11.6)$$

donde v_0 es la velocidad inicial. Al sustituir por v en (11.1), se escribe

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

Al denotar mediante x_0 el valor inicial de x e integrar, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x dx &= \int_0^t (v_0 + at) dt \\ x - x_0 &= v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{aligned} \quad (11.7)$$

También se puede recurrir a la ecuación (11.4) y escribir

$$v \frac{dv}{dx} = a = \text{constante}$$

$$v \, dv = a \, dx$$

Al integrar ambos lados, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v v \, dv &= a \int_{x_0}^x dx \\ \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) &= a(x - x_0) \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned} \quad (11.8)$$

Las tres ecuaciones que se han deducido ofrecen relaciones útiles entre la coordenada de posición, la velocidad y el tiempo en el caso del movimiento uniformemente acelerado, al sustituir los valores apropiados de a , v_0 y x_0 . El origen O del eje x debe definirse primero y escogerse una dirección positiva a lo largo del eje; esta dirección se usará para determinar los signos de a , v_0 y x_0 . La ecuación (11.6) relaciona v y t y debe utilizarse cuando se desee que el valor de v corresponda a un valor determinado de t , o de manera inversa. La ecuación (11.7)

relaciona a x y t ; la ecuación (11.8) relaciona a v y x . Una aplicación importante del movimiento uniformemente acelerado es el movimiento de un *cuerpo en caída libre*. La aceleración de un cuerpo en caída libre (usualmente denotada mediante g) es igual a 9.81 m/s^2 o 32.2 ft/s^2 .

Es importante recordar que las tres ecuaciones anteriores pueden utilizarse sólo cuando se sabe que la aceleración de la partícula es constante. Si la aceleración de la partícula es variable, su movimiento se debe determinar a partir de las ecuaciones fundamentales (11.1) a (11.4) según los métodos señalados en la sección 11.3.

11.6. MOVIMIENTO DE VARIAS PARTÍCULAS

Cuando varias partículas se mueven de manera independiente a lo largo de la misma línea, es posible escribir ecuaciones de movimiento independientes para cada partícula. Siempre que sea factible, el tiempo debe registrarse a partir del mismo instante inicial para todas las partículas, y es necesario medir los desplazamientos desde el mismo origen y en la misma dirección. En otras palabras, deben usarse un solo reloj y una sola cinta métrica.

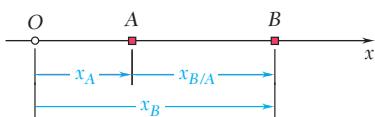


Figura 11.7



Fotografía 11.2 En esta grúa de embarcadero se utilizan múltiples cables y poleas.

Movimiento relativo de dos partículas. Consideré dos partículas A y B que se mueven a lo largo de la misma línea recta (figura 11.7). Si las coordenadas de posición x_A y x_B se miden desde el mismo origen, la diferencia $x_B - x_A$ define la *coordenada de posición relativa de B con respecto a A* y se denota por medio de $x_{B/A}$. Se escribe

$$x_{B/A} = x_B - x_A \quad \text{o} \quad x_B = x_A + x_{B/A} \quad (11.9)$$

De manera independiente de las posiciones de A y B con respecto al origen, un signo positivo para $x_{B/A}$ significa que B está a la derecha de A , y un signo negativo indica que B se encuentra a la izquierda de A .

La razón de cambio $x_{B/A}$ se conoce como la *velocidad relativa de B con respecto a A* y se denota por medio de $v_{B/A}$. Al diferenciar (11.9), se escribe

$$v_{B/A} = v_B - v_A \quad \text{o} \quad v_B = v_A + v_{B/A} \quad (11.10)$$

Un signo positivo de $v_{B/A}$ significa que *a partir de A se observa* que B se mueve en dirección positiva; un signo negativo indica, según se observa, que ésta se mueve en dirección negativa.

La razón de cambio de $v_{B/A}$ se conoce como la *aceleración relativa de B con respecto a A* y se denota mediante $a_{B/A}$. Al diferenciar (11.10), se obtiene[†]

$$a_{B/A} = a_B - a_A \quad \text{o} \quad a_B = a_A + a_{B/A} \quad (11.11)$$

Movimientos dependientes. Algunas veces, la posición de una partícula dependerá de la posición de otra o de varias partículas. En ese

[†]Advierta que el producto de los subíndices A y B/A que se usa en el miembro izquierdo de las ecuaciones (11.9), (11.10) y (11.11) es igual al subíndice B utilizado en el miembro del lado izquierdo.

caso se dice que los movimientos son *dependientes*. Por ejemplo, la posición del bloque *B* en la figura 11.8 depende de la posición del bloque *A*. Puesto que la cuerda *ACDEFG* es de longitud constante, y puesto que las longitudes de las porciones de cuerda *CD* y *EF* alrededor de las poleas permanecen constantes, se concluye que la suma de las longitudes de los segmentos *AC*, *DE* y *FG* es constante. Al observar que la longitud del segmento *AC* difiere de x_A sólo por una constante y que, de manera similar, las longitudes de los segmentos *DE* y *FG* difieren de x_B únicamente por una constante, se escribe

$$x_A + 2x_B = \text{constante}$$

la cual recibe el nombre de ecuación de ligadura.

Puesto que sólo una de las dos coordenadas x_A y x_B pueden elegirse de manera arbitraria, se afirma que el sistema que se presenta en la figura 11.8 tiene *un grado de libertad*. De la relación entre las coordenadas de posición x_A y x_B se deduce que x_A presenta un incremento Δx_A , esto es, si el bloque *A* desciende una cantidad Δx_A , la coordenada x_B recibirá un incremento $\Delta x_B = -\frac{1}{2}\Delta x_A$. En otras palabras, el bloque *B* ascenderá la mitad de la misma cantidad; lo anterior puede verificarse con facilidad de modo directo de la figura 11.8.

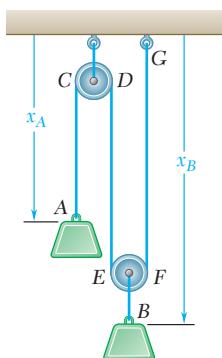


Figura 11.8

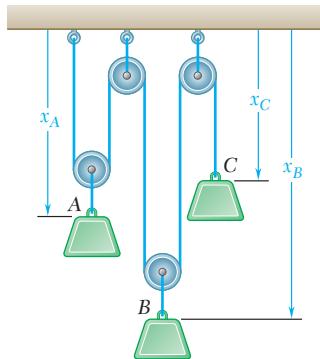


Figura 11.9

En el caso de los tres bloques de la figura 11.9, se puede observar de nuevo que la longitud de la cuerda que pasa por las poleas es constante y, en consecuencia, las coordenadas de posición de los tres bloques deben satisfacer la siguiente relación:

$$2x_A + 2x_B + x_C = \text{constante}$$

Puesto que es posible elegir de manera arbitraria dos de las coordenadas, se afirma que el sistema que se muestra en la figura 11.9 tiene *dos grados de libertad*.

Cuando la relación que existe entre las coordenadas de posición de varias partículas es *lineal*, se cumple una relación similar entre las velocidades y entre las aceleraciones de las partículas. En el caso de los bloques de la figura 11.9, por ejemplo, se diferencia dos veces la ecuación obtenida y se escribe

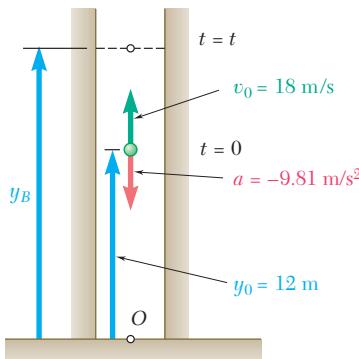
$$2\frac{dx_A}{dt} + 2\frac{dx_B}{dt} + \frac{dx_C}{dt} = 0 \quad \text{o} \quad 2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

$$2\frac{dv_A}{dt} + 2\frac{dv_B}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = 0 \quad \text{o} \quad 2a_A + 2a_B + a_C = 0$$

PROBLEMA RESUELTO 11.4

Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura de 12 metros en el pozo de un elevador con una velocidad inicial de 18 m/s. En el mismo instante un elevador de plataforma abierta pasa por el nivel de 5 m, moviéndose hacia arriba con una velocidad constante de 2 m/s. Determine *a*) cuándo y dónde golpea al elevador, *b*) la velocidad relativa de la pelota con respecto al elevador cuando ésta lo golpea.

SOLUCIÓN



Movimiento de la pelota. Puesto que la pelota tiene una aceleración constante, su movimiento es *uniformemente acelerado*. Al colocar el origen de *O* del eje *y* a nivel del suelo, es decir su dirección positiva hacia arriba, encontramos que la posición inicial es $y_0 = +12$ m, la velocidad inicial corresponde a $v_0 = +18$ m/s, y la aceleración equivale a $a = -9.81$ m/s². Sustituyendo estos valores en las ecuaciones para movimiento uniformemente acelerado, se escribe

$$v_B = v_0 + at \quad v_B = 18 - 9.81t \quad (1)$$

$$y_B = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad y_B = 12 + 18t - 4.905t^2 \quad (2)$$

Movimiento del elevador. Puesto que el elevador tiene una velocidad constante, su movimiento es *uniforme*. Al ubicar el origen *O* en el nivel del suelo y elegir la dirección positiva hacia arriba, se observa que $y_0 = +5$ m y se escribe

$$v_E = +2 \text{ m/s} \quad (3)$$

$$y_E = y_0 + v_E t \quad y_E = 5 + 2t \quad (4)$$

La pelota golpea el elevador. Se usaron el mismo tiempo *t* y el mismo origen *O* al escribir las ecuaciones de movimiento tanto de la pelota como del elevador. Se observa en la figura que cuando la pelota golpea el elevador,

$$y_E = y_B \quad (5)$$

Al sustituir para y_E y y_B en (2) y (4) en (5), se tiene

$$5 + 2t = 12 + 18t - 4.905t^2$$

$$t = -0.39 \text{ s} \quad y \quad t = 3.65 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$

Sólo la raíz $t = 3.65$ s corresponde a un tiempo después de que se ha iniciado el movimiento. Al sustituir este valor en (4), se obtiene

$$y_E = 5 + 2(3.65) = 12.30 \text{ m}$$

$$\text{Elevación desde el suelo} = 12.30 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

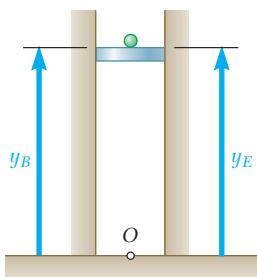
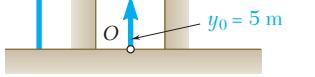
La velocidad relativa de la pelota con respecto al elevador es

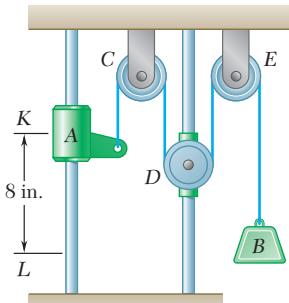
$$v_{B/E} = v_B - v_E = (18 - 9.81t) - 2 = 16 - 9.81t$$

Cuando la pelota golpea al elevador en el tiempo $t = 3.65$ s, se tiene

$$v_{B/E} = 16 - 9.81(3.65) \quad v_{B/E} = -19.81 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

El signo negativo significa que desde el elevador se observa que la pelota se mueve en el sentido negativo (hacia abajo).

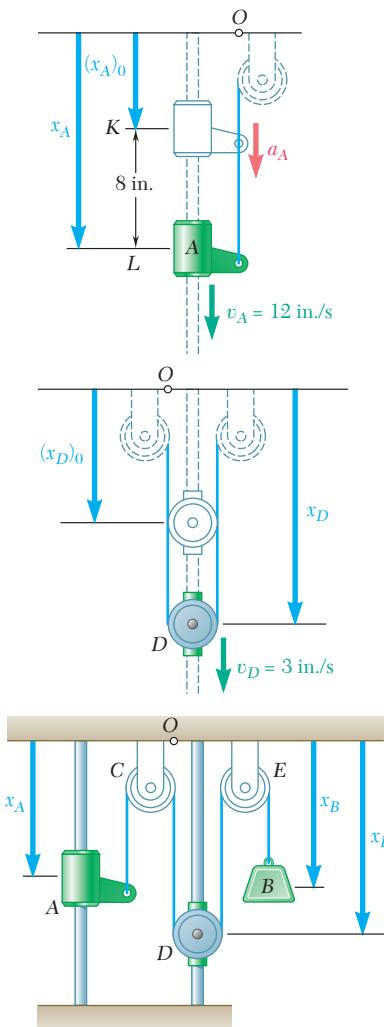




PROBLEMA RESUELTO 11.5

El collarín A y el bloque B están conectados por medio de un cable que pasa por tres poleas C, D y E, como se indica. Las poleas C y E se mantienen fijas, en tanto que B está unida a un collarín que se jala hacia abajo con una velocidad constante de 3 in./s. En $t = 0$, el collarín A empieza a moverse hacia abajo desde la posición K con una aceleración constante y sin velocidad inicial. Si se sabe que la velocidad del collarín A es 12 in./s cuando éste pasa por el punto L, determine el cambio de la elevación, la velocidad y la aceleración del bloque B cuando el collarín A pasa por L.

SOLUCIÓN



Movimiento del collarín A. Se sitúa el origen O en la superficie horizontal superior y se elige la dirección positiva hacia abajo. Se observa que cuando $t = 0$, el collarín A está en la posición K y $(v_A)_0 = 0$. Puesto que $v_A = 12 \text{ in./s}$ y $x_A - (x_A)_0 = 8 \text{ in.}$, cuando el collarín pasa por L, se escribe

$$v_A^2 = (v_A)_0^2 + 2a_A[x_A - (x_A)_0] \quad (12)^2 = 0 + 2a_A(8)$$

$$a_A = 9 \text{ in./s}^2$$

El tiempo en el cual el collarín A alcance el punto L se obtiene al escribir

$$v_A = (v_A)_0 + a_A t \quad 12 = 0 + 9t \quad t = 1.333 \text{ s}$$

Movimiento de la polea D. Recordando que la dirección positiva es hacia abajo, se escribe

$$a_D = 0 \quad v_D = 3 \text{ in./s} \quad x_D = (x_D)_0 + v_D t = (x_D)_0 + 3t$$

Cuando el collarín A llega a L, en $t = 1.333 \text{ s}$, se tiene

$$x_D = (x_D)_0 + 3(1.333) = (x_D)_0 + 4$$

En consecuencia,

$$x_D - (x_D)_0 = 4 \text{ in.}$$

Movimiento del bloque B. Hay que observar que la longitud total del cable ACDEB difiere de la cantidad $(x_A + 2x_D + x_B)$ sólo por una constante. Puesto que la longitud del cable es constante durante el movimiento, esta cantidad también debe permanecer constante. De tal modo, considerando los tiempos $t = 0$ y $t = 1.333 \text{ s}$, se escribe

$$x_A + 2x_D + x_B = (x_A)_0 + 2(x_D)_0 + (x_B)_0 \quad (1)$$

$$[x_A - (x_A)_0] + 2[x_D - (x_D)_0] + [x_B - (x_B)_0] = 0 \quad (2)$$

Sin embargo, se sabe que $x_A - (x_A)_0 = 8 \text{ in.}$ y $x_D - (x_D)_0 = 4 \text{ in.}$; al sustituir estos valores en (2), se obtiene

$$8 + 2(4) + [x_B - (x_B)_0] = 0 \quad x_B - (x_B)_0 = -16 \text{ in.}$$

De tal modo:

El cambio en la elevación de B = 16 in. ↑

Al diferenciar (1) dos veces, se obtienen ecuaciones que relacionan las velocidades y las aceleraciones de A, B y D. Al sustituir las velocidades y aceleraciones de A y D en $t = 1.333 \text{ s}$, se tiene

$$v_A + 2v_D + v_B = 0: \quad 12 + 2(3) + v_B = 0$$

$$v_B = -18 \text{ in./s} \quad v_B = 18 \text{ in./s} \uparrow$$

$$a_A + 2a_D + a_B = 0: \quad 9 + 2(0) + a_B = 0$$

$$a_B = -9 \text{ in./s}^2 \quad a_B = 9 \text{ in./s}^2 \uparrow$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se obtuvieron las ecuaciones que describen el *movimiento rectilíneo uniforme* (velocidad constante) y el *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* (aceleración constante). También se presentó el concepto de *movimiento relativo*. Las ecuaciones para el movimiento relativo [ecuaciones (11.9) a (11.11)] pueden aplicarse a los movimientos independientes o dependientes de cualesquiera de las partículas que se mueven a lo largo de la misma recta.

A. Movimiento independiente de una o más partículas. La solución de problemas de este tipo debe organizarse del modo siguiente:

1. Iniciar la solución listando la información proporcionada, elaborando un dibujo del sistema y seleccionando el origen y la dirección positiva del eje de coordenadas [problema resuelto 11.4]. Siempre es ventaja tener una representación visual de problemas de este tipo.

2. Escribir las ecuaciones que describen los movimientos de las diversas partículas, así como aquellas que describen cómo se relacionan estos movimientos [ecuación (5) del problema resuelto 11.4].

3. Definir las condiciones iniciales, esto es, especifique el estado del sistema correspondiente a $t = 0$. Esto es en especial importante si los movimientos de las partículas se inicián en tiempos diferentes. En tales casos, es posible recurrir a cualesquiera de los dos enfoques.

a) Sea $t = 0$ el tiempo cuando las partículas empiezan a moverse. Se debe determinar entonces la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0 de cada una de las demás partículas.

b) Sea $t = 0$ el tiempo en el que empieza a moverse la primera partícula. En ese caso, en cada una de las ecuaciones que describen el movimiento de otra partícula, se reemplaza t por $t - t_0$, donde t_0 es el tiempo en el cual esa partícula específica empieza a moverse. Es importante reconocer que las ecuaciones que se obtienen de esta manera sólo son válidas para $t \geq t_0$.

B. Movimiento dependiente de dos o más partículas. En problemas de este tipo las partículas del sistema están conectadas entre sí, por lo general mediante cuerdas o cables. El método de solución de estos problemas es similar al del grupo de problemas precedente, salvo que en este caso no será necesario describir las *conexiones físicas* entre las partículas. En los siguientes problemas, la conexión la proporciona uno o más cables. Para cada cable se tendrán que escribir ecuaciones similares a las últimas tres ecuaciones de la sección 11.6. Se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Hacer un bosquejo del sistema y seleccionar un sistema de coordenadas, indicando de manera clara el sentido positivo para cada uno de los ejes coordinados. Por ejemplo, en el problema resuelto 11.5 las longitudes se miden hacia abajo a partir del soporte horizontal superior. De tal modo, se concluye que estos desplazamientos, velocidades y aceleraciones, los cuales tienen valores positivos, están dirigidos hacia abajo.

2. Escribir la ecuación (de ligadura) que describe la represión impuesta por cada cable sobre el movimiento de las partículas implicadas. Al diferenciar dos veces esta ecuación, se obtendrán las relaciones correspondientes entre velocidades y aceleraciones.

3. Si varias direcciones de movimiento están implicadas, se debe seleccionar un eje de coordenadas y un sentido positivo para cada una de estas direcciones. También se debe intentar ubicar los orígenes de sus ejes de coordenadas, de modo que las ecuaciones de restricciones sean lo más simples posible. Por ejemplo, en el problema resuelto 11.5 es más fácil definir las diversas coordenadas, midiéndolas hacia abajo desde el soporte superior, que hacerlo hacia arriba desde el soporte inferior.

Por último, se debe recordar que el método de análisis que se describe en esta lección y las ecuaciones correspondientes únicamente pueden utilizarse para partículas que se mueven con *movimiento rectilíneo uniforme o uniformemente acelerado*.

Problemas

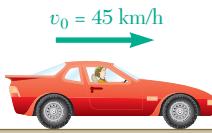


Figura P11.33

11.33 Una automovilista entra a una carretera a 45 km/h y acelera uniformemente hasta 99 km/h. De acuerdo con el odómetro del automóvil, la conductora sabe que recorrió 0.2 km mientras aceleraba. Determine *a*) la aceleración del automóvil, *b*) el tiempo que se requiere para alcanzar 99 km/h.

11.34 Un camión recorre 220 m en 10 s mientras se desacelera a una razón constante de 0.6 m/s^2 . Determine *a*) su velocidad inicial, *b*) su velocidad final, *c*) la distancia recorrida durante los primeros 1.5 s.

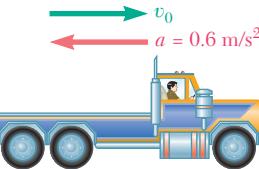


Figura P11.34

11.35 Si se supone una aceleración uniforme de 11 ft/s^2 y se sabe que la rapidez de un automóvil cuando pasa por *A* es de 30 mi/h, determine *a*) el tiempo requerido para que el automóvil llegue a *B*, *b*) la rapidez del automóvil cuando pasa por *B*.

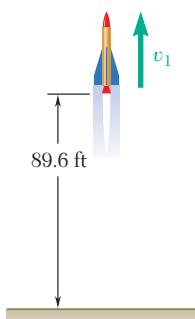


Figura P11.36

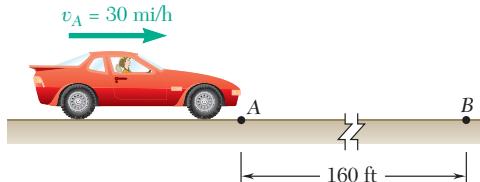


Figura P11.35

11.36 Un grupo de estudiantes lanza un cohete a escala en dirección vertical. Con base en los datos registrados, determinan que la altitud del cohete fue de 89.6 ft en la parte final del vuelo en la que el cohete aún tenía impulso, y que el cohete aterriza 16 s después. Si se sabe que el paracaídas de descenso no pudo abrir y que el cohete descendió en caída libre hasta el suelo después de alcanzar la altura máxima, y suponiendo que $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$, determine *a*) la rapidez v_1 del cohete al final del vuelo con impulso, *b*) la altura máxima alcanzada por el cohete.

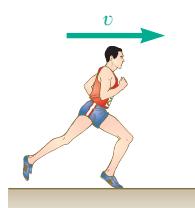


Figura P11.37

11.37 Un atleta en una carrera de 100 m acelera de manera uniforme durante los primeros 35 m y luego corre con una velocidad constante. Si el tiempo del atleta para los primeros 35 m es de 5.4 s, determine *a*) su aceleración, *b*) su velocidad final y *c*) el tiempo en que completa la carrera.

- 11.38** Un paquete pequeño se suelta desde el reposo en A y se mueve a lo largo del transportador ABCD formado por ruedas deslizantes. El paquete tiene una aceleración uniforme de 4.8 m/s^2 mientras desciende sobre las secciones AB y CD, y su velocidad es constante entre B y C. Si la velocidad del paquete en D es de 7.2 m/s, determine a) la distancia d entre C y D, b) el tiempo requerido para que el paquete llegue a D.

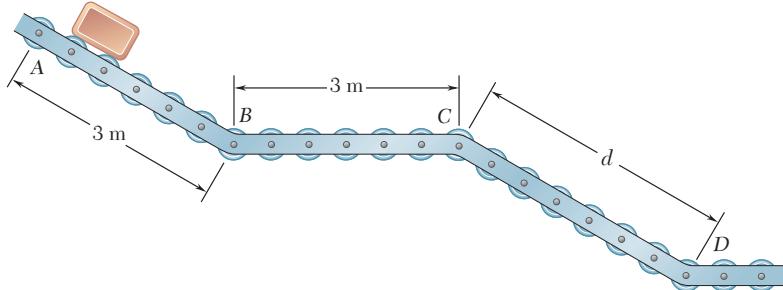


Figura P11.38

- 11.39** Un oficial de policía en una patrulla estacionada en una zona donde la rapidez es de 70 km/h observa el paso de un automóvil que marcha a una rapidez constante. Al oficial le parece que el conductor podría estar intoxicado y arranca la patrulla, acelera uniformemente hasta 90 km/h en 8 s y mantiene una velocidad constante de 90 km/h, alcanza al automovilista 42 s después. Si se sabe que transcurrieron 18 s antes de que el oficial empezara a perseguir al automovilista, determine a) la distancia que recorrió el oficial antes de alcanzar al automovilista, b) la rapidez del automovilista.

- 11.40** Cuando un corredor de relevos A ingresa a la zona de intercambio, de 20 m de largo, con una rapidez de 12.9 m/s empieza a desacelerar. Entrega la estafeta al corredor B 1.82 s después, y su compañero deja la zona de intercambio con la misma velocidad. Determine a) la aceleración uniforme de cada uno de los corredores, b) el momento en el que el corredor B debe empezar a correr.

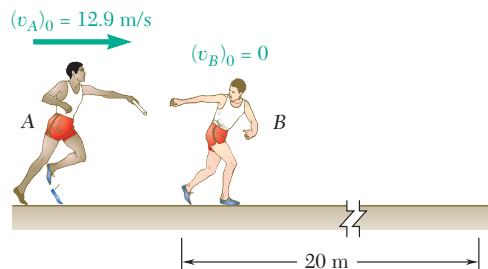


Figura P11.40

- 11.41** Los automóviles A y B viajan en carriles adyacentes de una carretera y en $t = 0$ tienen las posiciones y velocidades que se muestran en la figura. Si se sabe que el automóvil A tiene una aceleración constante de 1.8 ft/s^2 y que B tiene una desaceleración constante de 1.2 ft/s^2 , determine a) cuándo y dónde A alcanzará a B, b) la rapidez de cada automóvil en ese momento.

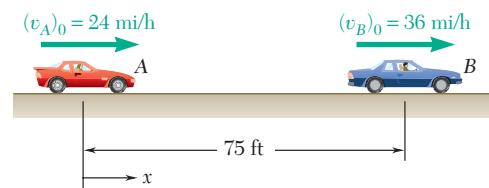


Figura P11.41

- 11.42** En una carrera de lanchas, la lancha A se adelanta a la lancha B por 120 ft y ambos botes viajan a una rapidez constante de 105 mi/h. En $t = 0$, las lanchas aceleran a tasas constantes. Si se sabe que cuando B rebasa a A, $t = 8$ s y $v_A = 135$ mi/h, determine *a)* la aceleración de A, *b)* la aceleración de B.

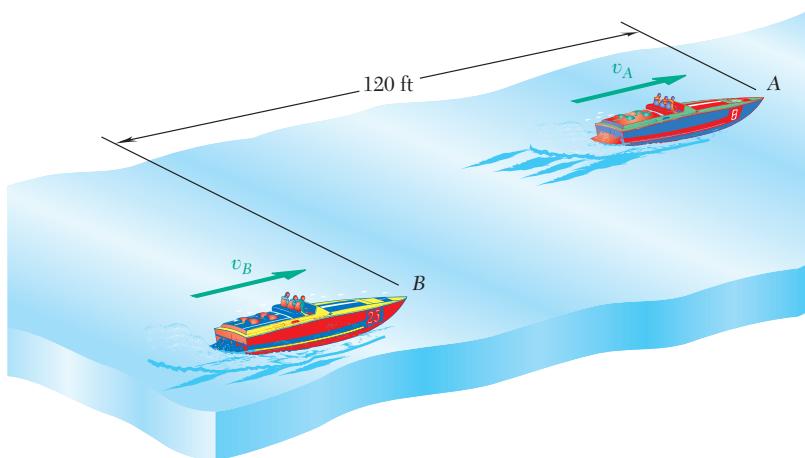


Figura P11.42

- 11.43** En una rampa se colocan cajas a intervalos uniformes de tiempo t_R y se deslizan hacia abajo de la rampa con aceleración uniforme. Si se sabe que cuando se suelta la caja B, la caja A ya se ha deslizado 6 m y que 1 s después están separadas por una distancia de 10 m, determine *a)* el valor de t_R , *b)* la aceleración de las cajas.

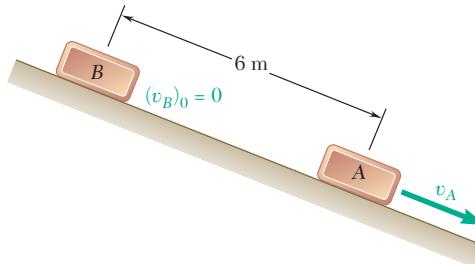


Figura P11.43

- 11.44** Dos automóviles A y B se aproximan uno al otro en los carriles adyacentes de una autopista. En $t = 0$, A y B están a 1 km de distancia, sus velocidades son $v_A = 108$ km/h y $v_B = 63$ km/h, y se encuentran en los puntos P y Q, respectivamente. Si se sabe que A pasa por el punto Q 40 segundos después que B, y que B pasa por el punto P 42 s después que A, determine *a)* las aceleraciones uniformes de A y B, *b)* cuándo los vehículos pasan uno al lado del otro, *c)* la rapidez de B en ese momento.

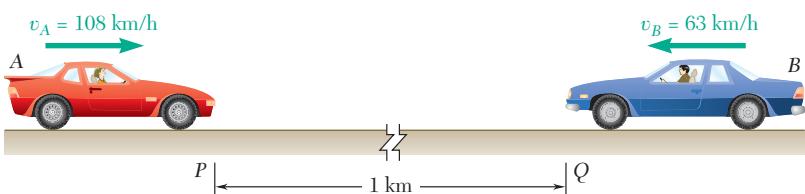


Figura P11.44

11.45 El automóvil A está estacionado en el carril con dirección al norte de una autopista y el automóvil B viaja en el carril con dirección al sur a una rapidez constante de 60 mi/h. En $t = 0$, A empieza a acelerar a una razón constante a_A , mientras que en $t = 5$ s, B empieza a frenar con una desaceleración constante de magnitud $a_A/6$. Si se sabe que cuando los automóviles pasan uno al lado del otro, $x = 294$ ft y $v_A = v_B$, determine a) la aceleración a_A , b) el momento en que los vehículos pasan uno al lado del otro, c) la distancia entre los automóviles en $t = 0$.

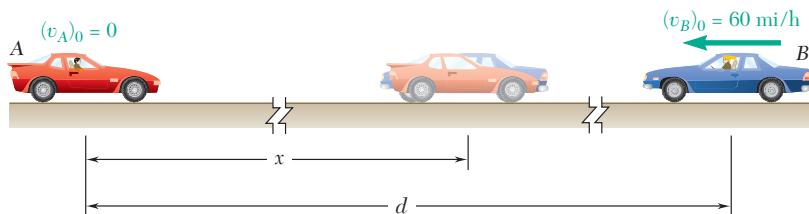


Figura P11.45

11.46 Dos bloques A y B se colocan sobre un plano inclinado, como se muestra en la figura. En $t = 0$, A se proyecta hacia arriba sobre el plano con una velocidad inicial de 27 ft/s y B se suelta desde el reposo. Los bloques pasan uno junto al otro 1 s después, y B llega a la parte baja del plano inclinado cuando $t = 3.4$ s. Si se sabe que la máxima distancia que alcanza el bloque A desde la base del plano es de 21 ft y que las aceleraciones de A y B (debidas a la gravedad y la fricción) son constantes y están dirigidas hacia abajo sobre el plano inclinado, determine a) las aceleraciones de A y B, b) la distancia d , c) la rapidez de A cuando los bloques pasan uno junto al otro.

11.47 El bloque deslizante A se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 6 m/s. Determine, a) la velocidad del bloque B, b) la velocidad de la parte D del cable, c) la velocidad relativa de la porción C del cable con respecto a la porción D.

11.48 El bloque B inicia su movimiento desde el reposo y desciende con una aceleración constante. Si se sabe que después de que el bloque A se ha movido 400 mm, su velocidad es de 4 m/s, determine a) las aceleraciones de A y B, b) la velocidad y el cambio en la posición del bloque B después de 2 s.

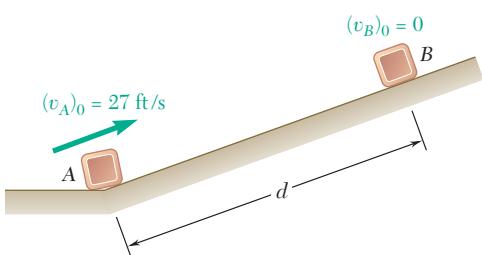


Figura P11.46

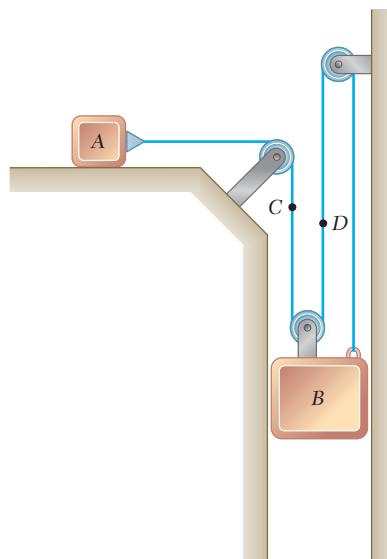
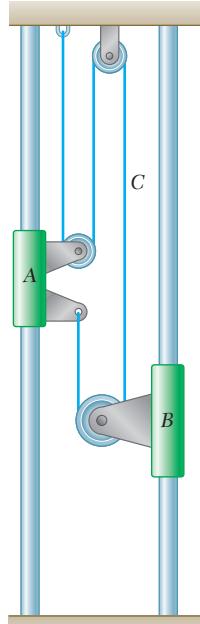


Figura P11.47 y P11.48

Figura P11.51
y P11.52

11.49 El elevador mostrado en la figura se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 15 ft/s. Determine *a)* la velocidad del cable C, *b)* la velocidad del contrapeso W, *c)* la velocidad relativa del cable C con respecto al elevador, *d)* la velocidad relativa del contrapeso W con respecto al elevador.

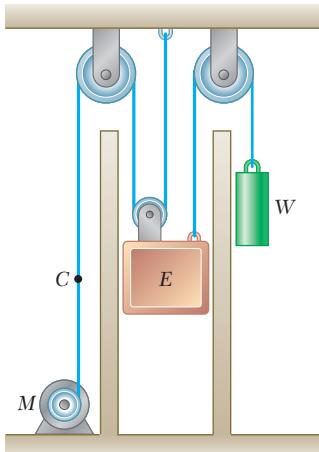


Figura P11.49 y P11.50

11.50 El elevador mostrado en la figura inicia su movimiento desde el reposo y se mueve hacia arriba con una aceleración constante. Si el contrapeso W recorre 30 ft en 5 s, determine *a)* la aceleración del elevador y el cable C, *b)* la velocidad del elevador después de 5 s.

11.51 El collarín A empieza a moverse desde el reposo y se desplaza hacia arriba con una aceleración constante. Si se sabe que después de 8 s la velocidad relativa del collarín B con respecto al collarín A es de 24 in./s, determine *a)* las aceleraciones de A y B, *b)* la velocidad y el cambio en la posición de B después de 6 s.

11.52 En la posición mostrada, el collarín B se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 12 in./s. Determine *a)* la velocidad del collarín A, *b)* la velocidad de la porción C del cable, *c)* la velocidad relativa de la porción C del cable con respecto al collarín B.

11.53 El bloque deslizante B se mueve hacia la derecha con una velocidad constante de 300 mm/s. Determine *a)* la velocidad del bloque deslizante A, *b)* la velocidad de la porción C del cable, *c)* la velocidad de la porción D del cable, *d)* la velocidad relativa de la porción C del cable con respecto al bloque deslizante A.

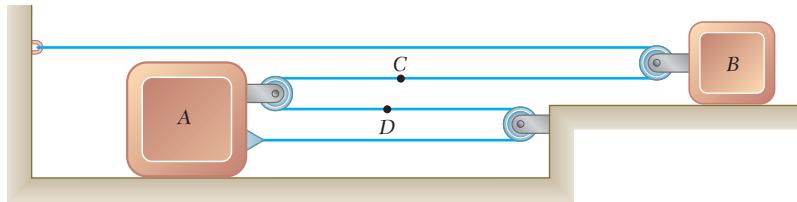


Figura P11.53 y P11.54

11.54 En el instante mostrado, el bloque deslizante B se está moviendo con una aceleración constante y su rapidez es de 150 mm/s. Si se sabe que después de que el bloque deslizante A se ha movido 240 mm hacia la derecha, su velocidad es de 60 mm/s, determine *a)* las aceleraciones de A y B, *b)* la aceleración de la porción D del cable, *c)* la velocidad y el cambio en la posición del bloque deslizante B luego de 4 s.

11.55 El bloque *B* se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 20 mm/s. En $t = 0$, el bloque *A* se mueve hacia arriba con una aceleración constante y su velocidad es de 30 mm/s. Si se sabe que en $t = 3$ s el bloque deslizante *C* se ha movido 57 mm a la derecha, determine *a)* la velocidad del bloque deslizante *C* en $t = 0$, *b)* las aceleraciones de *A* y *C*, *c)* el cambio en la posición del bloque *A* después de 5 s.

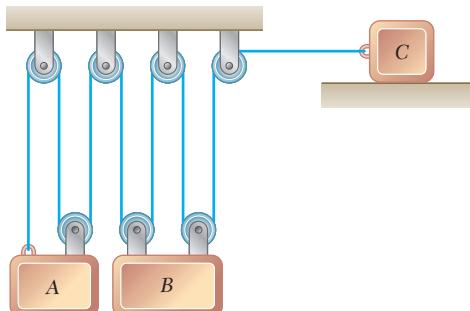


Figura P11.55 y P11.56

11.56 El bloque *B* empieza a moverse desde el reposo, el bloque *A* se mueve con una aceleración constante y el bloque deslizante *C* se desplaza hacia la derecha con una aceleración constante de 75 mm/s^2 . Si se sabe que en $t = 2$ s las velocidades de *B* y *C* son 480 mm/s hacia abajo y 280 mm/s hacia la derecha, respectivamente, determine *a)* las aceleraciones de *A* y *B*, *b)* las velocidades iniciales de *A* y *C*, *c)* el cambio en la posición del bloque deslizante *C* después de 3 s.

11.57 El collarín *A* inicia su movimiento desde el reposo en $t = 0$ y se mueve hacia abajo con una aceleración constante de 7 in./s^2 . El collarín *B* se desplaza hacia arriba con una aceleración constante y su velocidad inicial es de 8 in./s. Si se sabe que el collarín *B* se mueve 20 in. entre $t = 0$ y $t = 2$ s, determine *a)* las aceleraciones del collarín *B* y el bloque *C*, *b)* el tiempo en el cual la velocidad del bloque *C* es cero, *c)* la distancia que habrá recorrido el bloque *C* en ese tiempo.

11.58 Los collarines *A* y *B* inician su movimiento desde el reposo, el collarín *A* se mueve hacia arriba con una aceleración de $3t^2 \text{ in./s}^2$. Si se sabe que el collarín *B* se mueve hacia abajo con una aceleración constante y que su velocidad es de 8 in./s después de desplazarse 32 in., determine *a)* la aceleración del bloque *C*, *b)* la distancia que se habrá movido el bloque *C* luego de 3 s.

11.59 El sistema mostrado inicia su movimiento desde el reposo y cada componente se mueve con una aceleración constante. Si la aceleración relativa del bloque *C* con respecto al collarín *B* es de 60 mm/s^2 hacia arriba y la aceleración relativa del bloque *D* con respecto al bloque *A* es de 110 mm/s^2 hacia abajo, determine *a)* la velocidad del bloque *C* después de 3 s, *b)* el cambio en la posición de bloque *D* luego de 5 s.

***11.60** El sistema mostrado inicia su movimiento desde el reposo y la longitud del cordón superior se ajusta de manera que *A*, *B* y *C* se encuentren inicialmente al mismo nivel. Cada componente se mueve con una aceleración constante y después de 2 s el cambio relativo en la posición del bloque *C* con respecto al collarín *B* es de 280 mm hacia arriba. Si se sabe que cuando la velocidad relativa del collarín *B* con respecto al bloque *A* es de 80 mm/s hacia abajo, los desplazamientos de *A* y *B* son, respectivamente, de 160 mm y de 320 mm hacia abajo, determine *a)* las aceleraciones de *A* y *B* si $a_B > 10 \text{ mm/s}^2$, *b)* el cambio en la posición del bloque *D* cuando la velocidad del bloque *C* es de 600 mm/s hacia arriba.

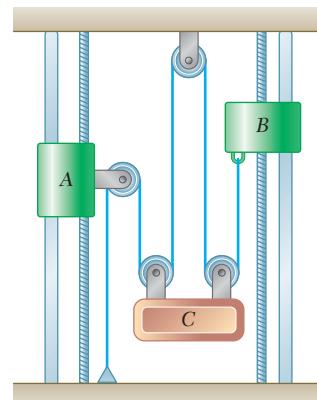


Figura P11.57 y P11.58

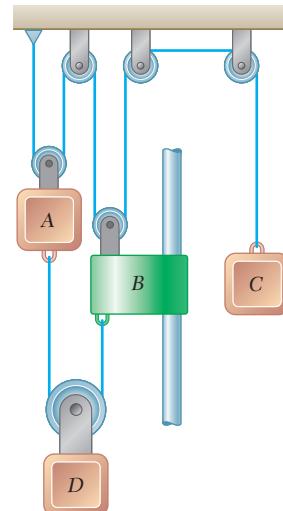


Figura P11.59 y P11.60

*11.7. SOLUCIÓN GRÁFICA DE PROBLEMAS DE MOVIMIENTO RECTILÍNEO

En la sección 11.2 se observó que las fórmulas fundamentales

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad a = \frac{dv}{dt}$$

tienen un significado geométrico. La primera fórmula expresa que la velocidad en cualquier instante es igual a la pendiente de la curva $x-t$ en el mismo instante (figura 11.10). La segunda indica que la acelera-

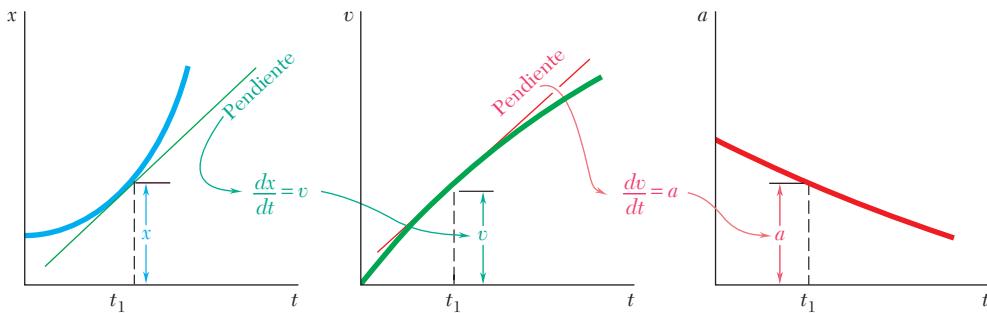


Figura 11.10

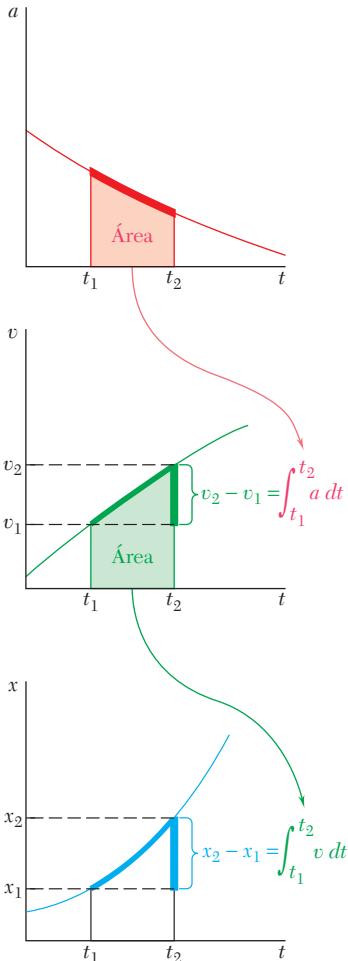


Figura 11.11

ción es igual a la pendiente de la curva $v-t$. Estas dos propiedades pueden utilizarse para determinar de manera gráfica las curvas de $v-t$ y $a-t$ de un movimiento cuando se conoce la curva $x-t$.

Al integrar las dos fórmulas fundamentales desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 , se escribe

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v \, dt \quad \text{y} \quad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a \, dt \quad (11.12)$$

La primera fórmula expresa que el área medida bajo la curva $v-t$ desde t_1 hasta t_2 es igual al cambio en x durante ese intervalo de tiempo (figura 11.11). De manera similar, la segunda fórmula expresa que el área medida bajo la curva $a-t$ desde t_1 hasta t_2 es igual al cambio en v durante ese intervalo de tiempo. Estas dos propiedades pueden utilizarse para determinar de manera gráfica la curva de movimiento $x-t$ cuando se conoce su curva $v-t$ o su curva $a-t$ (véase el problema 11.6).

Las soluciones gráficas resultan en particular útiles cuando el movimiento que se considera se define a partir de datos experimentales y cuando x , v y a no son funciones analíticas de t . También es posible utilizarlas de manera ventajosa cuando el movimiento consta de distintas partes, y cuando su análisis requiere escribir una ecuación diferente para cada una de sus partes. Sin embargo, al utilizar una solución gráfica debe tenerse el cuidado de notar que 1) el área bajo la curva $v-t$ mide el *cambio en x*, no la x misma, y de la misma forma, que el área bajo la curva $a-t$ mide el *cambio en v*; 2) un área sobre el eje t corresponde a un *incremento* en x o v , en tanto que un área ubicada debajo del eje t mide un *decremento* en x o v .

Será útil recordar al dibujar las curvas de movimiento que si la velocidad es constante, se representará mediante una línea recta horizontal; la coordenada de posición x será entonces una función lineal de t y se representará por medio de una línea recta oblicua. Si la aceleración es constante y diferente de cero, se representará mediante una línea recta horizontal; v será en ese caso una función lineal de t , repre-

sentada por una línea recta oblicua, y x se expresará como un polinomio de segundo grado en t , representado por una parábola. Si la aceleración es una función lineal de t , la velocidad y la coordenada de posición serán iguales, respectivamente, a polinomios de segundo y tercer grados; a se representará entonces mediante una línea recta oblicua, v por medio de una parábola y x por una función cúbica. En general, si la aceleración es un polinomio de grado n en t , la velocidad será un polinomio de grado $n + 1$ y la coordenada de posición un polinomio de grado $n + 2$; estos polinomios se representan mediante curvas de movimiento de un grado correspondiente.

*11.8. OTROS MÉTODOS GRÁFICOS

Para determinar la posición de una partícula en un instante dado a partir directamente de la curva $a-t$ puede emplearse una solución gráfica alternativa. Al denotar los valores de x y v en $t = 0$ como x_0 y v_0 y sus valores en $t = t_1$ como x_1 y v_1 y observar que es posible dividir el área bajo la curva $v-t$ en un rectángulo de área $v_0 t_1$ y elementos diferenciales horizontales de área $(t_1 - t) dv$ (figura 11.12a), se escribe

$$x_1 - x_0 = \text{área bajo la curva } v-t = v_0 t_1 + \int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t) dv$$

Al sustituir $dv = a dt$ en la integral, se obtiene

$$x_1 - x_0 = v_0 t_1 + \int_0^{t_1} (t_1 - t) a dt$$

Al referirse a la figura 11.12b), se advierte que la integral representa el primer momento del área bajo la curva $a-t$ con respecto a la línea $t = t_1$ que limita el área de la derecha. En consecuencia, este método de solución se conoce como el *método del momento-área*. Si se conoce la abscisa \bar{t} del centroide C del área, la coordenada de posición x_1 puede obtenerse al escribir

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + (\text{área bajo la curva } a-t)(t_1 - \bar{t}) \quad (11.13)$$

Si el área bajo la curva $a-t$ es un área compuesta, es posible obtener el último término en (11.13) al multiplicar cada área componente por la distancia desde su centroide hasta la línea $t = t_1$. Las áreas sobre el eje t deben considerarse como positivas y las áreas por debajo del eje t como negativas.

Otro tipo de curva de movimiento, la curva $v-x$, se utiliza en algunas ocasiones. Si se ha graficado una curva de estas características (figura 11.13), se puede obtener la aceleración a en cualquier tiempo dibujando la normal AC de la curva y midiendo la subnormal BC . En realidad, al observar que el ángulo entre AC y AB es igual al ángulo θ entre el horizontal y la tangente en A (cuya pendiente es $\tan \theta = dv/dx$), se escribe

$$BC = AB \tan \theta = v \frac{dv}{dx}$$

y en consecuencia, de la fórmula (11.4),

$$BC = a$$

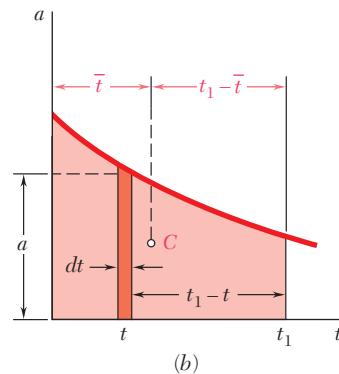
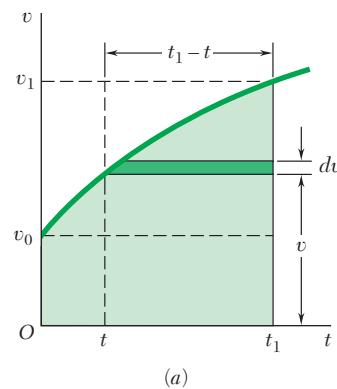


Figura 11.12

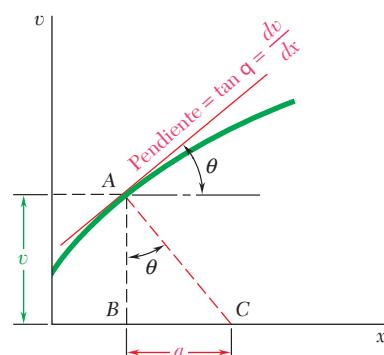
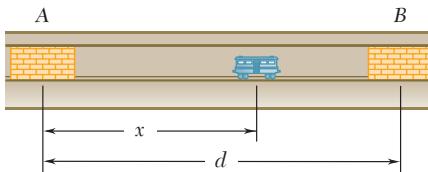


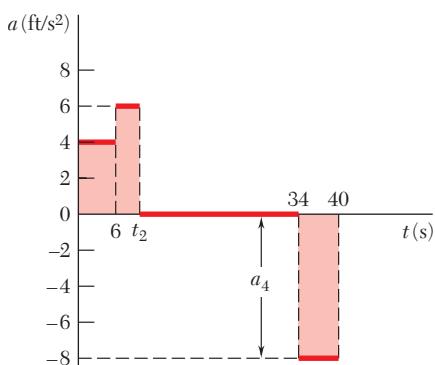
Figura 11.13

PROBLEMA RESUELTO 11.6



Un vagón de transporte subterráneo sale de la estación A; aumenta su rapidez a razón de 4 ft/s^2 durante 6 s y después a razón de 6 ft/s^2 hasta que llega a la rapidez de 48 ft/s. El vagón mantiene la misma rapidez hasta que se aproxima a la estación B; en ese momento se aplican los frenos, imponiéndole al vagón una desaceleración constante y provocando que se detenga en 6 s. El tiempo de recorrido total desde A hasta B es de 40 s. Dibuje las curvas $a-t$, $v-t$ y $x-t$ y determine la distancia entre las estaciones A y B.

SOLUCIÓN



Curva aceleración-tiempo. Puesto que la aceleración es constante o cero, la curva $a-t$ está conformada por segmentos de línea recta horizontales. Los valores de t_2 y a_4 se determinan de la manera siguiente:

$$0 < t < 6: \quad \text{Cambio en } v = \text{área bajo la curva } a-t \\ v_6 - 0 = (6 \text{ s})(4 \text{ ft/s}^2) = 24 \text{ ft/s}$$

$$6 < t < t_2: \quad \begin{aligned} &\text{Puesto que la velocidad se incrementa de 24 a 48 ft/s,} \\ &\text{Cambio en } v = \text{área bajo la curva } a-t \\ &48 \text{ ft/s} - 24 \text{ ft/s} = (t_2 - 6)(6 \text{ ft/s}^2) \quad t_2 = 10 \text{ s} \end{aligned}$$

$t_2 < t < 34: \quad$ Puesto que la velocidad es constante, la aceleración es cero.

$$34 < t < 40: \quad \begin{aligned} &\text{Cambio } v = \text{área bajo la curva } a-t \\ &0 - 48 \text{ ft/s} = (6 \text{ s})a_4 \quad a_4 = -8 \text{ ft/s}^2 \end{aligned}$$

Al ser negativa la aceleración, el área correspondiente está por debajo del eje t ; esta área representa una disminución en la velocidad.

Curva velocidad-tiempo. Puesto que la aceleración es constante o cero, la curva $v-t$ está conformada por segmentos de línea recta que conectan los puntos determinados antes.

Cambio en $x = \text{área bajo la curva } v-t$

$$0 < t < 6: \quad x_6 - 0 = \frac{1}{2}(6)(24) = 72 \text{ ft}$$

$$6 < t < 10: \quad x_{10} - x_6 = \frac{1}{2}(4)(24 + 48) = 144 \text{ ft}$$

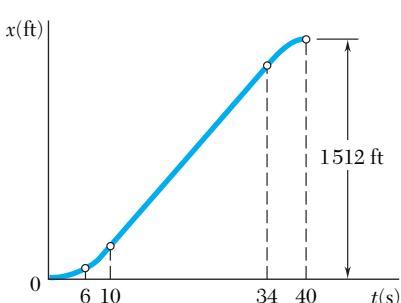
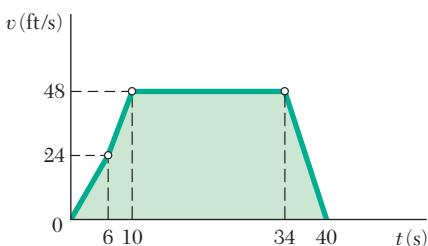
$$10 < t < 34: \quad x_{34} - x_{10} = (24)(48) = 1152 \text{ ft}$$

$$34 < t < 40: \quad x_{40} - x_{34} = \frac{1}{2}(6)(48) = 144 \text{ ft}$$

Al sumar los cambios en x , se obtiene la distancia de A a B:

$$d = x_{40} - 0 = 1512 \text{ ft}$$

$d = 1512 \text{ ft}$ ▶



Curva posición-tiempo. Los puntos determinados deben unirse mediante tres arcos de parábola y un segmento de línea recta. Al construir la curva $x-t$, se debe tener presente que para cualquier valor de t la pendiente de la tangente a la curva $x-t$ es igual al valor de v en ese instante.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección (secciones 11.7 y 11.8) se revisaron y desarrollaron varias *técnicas gráficas para la solución de problemas de movimiento rectilíneo*. Es posible utilizar estas técnicas para resolver problemas directamente o para complementar métodos de solución analíticos al proporcionar una descripción visual y, en consecuencia, una mejor comprensión del movimiento de un cuerpo determinado. Se sugiere dibujar una o más curvas de movimiento para varios de los problemas de esta lección, incluso si éstos no son parte de la tarea asignada.

1. Dibujo de curvas $x-t$, $v-t$ y $a-t$ y aplicación de métodos gráficos. Las siguientes propiedades se indicaron en la sección 11.7 y deben recordarse cuando se utilicen métodos de solución gráficos.

a) Las pendientes de las curvas $x-t$ y $v-t$ en el tiempo t_1 son respectivamente iguales a la *velocidad* y la *aceleración* en el tiempo t_1 .

b) Las áreas bajo las curvas $a-t$ y $v-t$ entre los tiempos t_1 y t_2 son respectivamente iguales al cambio Δv en la velocidad y al cambio Δx en la coordenada de posición durante ese intervalo de tiempo.

c) Si se conoce una bajo curvas de movimiento, las propiedades fundamentales que se han resumido en los párrafos *a* y *b* permitirán construir las otras dos curvas. Sin embargo, al usar las propiedades del párrafo *b*, es necesario conocer la velocidad y la coordenada de posición en el tiempo t_1 para determinar la velocidad y la coordenada de posición en el tiempo t_2 . Por lo tanto, en el problema resuelto 11.6, saber que el valor inicial de la velocidad era cero permite encontrar la velocidad en $t = 6 \text{ s}$: $v_6 = v_0 + \Delta v = 0 + 24 \text{ ft/s} = 24 \text{ ft/s}$.

Se han estudiado previamente los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante o flector para una viga, y se debe reconocer la analogía que existe entre las tres curvas de movimiento en los tres diagramas que representan respectivamente la carga distribuida, la fuerza cortante y el momento flector en una viga. De tal modo, todas las técnicas relativas a la construcción de estos diagramas pueden aplicarse cuando se dibujen las curvas de movimiento.

2. Empleo de métodos aproximados. Cuando las curvas $a-t$ y $v-t$ no se representan por medio de funciones analíticas o cuando se basan en datos experimentales, en ocasiones es necesario usar métodos aproximados para calcular las áreas bajo estas curvas. En esos casos, el área dada es aproximada por una serie de rectángulos de ancho Δt . Cuando más pequeño sea el valor de Δt , tanto menor sería el error introducido por la aproximación. La velocidad y la coordenada de posición se obtienen al escribir

$$v = v_0 + \sum a_{\text{prom}} \Delta t \quad x = x_0 + \sum v_{\text{prom}} \Delta t$$

donde a_{prom} y v_{prom} son las alturas de un rectángulo de aceleración y un rectángulo de velocidad, respectivamente.

(continúa)

3. Aplicación del método del momento-área. Esta técnica gráfica se emplea cuando se proporciona la curva $a-t$ y el cambio en la coordenada de posición se va a determinar. En la sección 11.8 se mostró que es posible expresar la coordenada de posición x_1 como

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + (\text{área bajo la curva } a-t)(t_1 - \bar{t}) \quad (11.13)$$

Hay que tener en cuenta que cuando el área bajo la curva $a-t$ es un área compuesta, es necesario usar el mismo valor de t_1 para calcular la contribución de cada una de las áreas componentes.

4. Determinación de la aceleración a partir de la curva $v-x$. En la sección 11.8 vimos que es posible determinar la aceleración de una curva $v-x$ mediante medición directa. Sin embargo, es importante advertir que este método resulta aplicable sólo si se usa la misma escala lineal para los ejes v y x (por ejemplo, 1 in. = 10 ft y 1 in. = 10 ft/s). Cuando no se satisface esta condición, la aceleración puede aun determinarse de la ecuación

$$a = v \frac{dv}{dx}$$

donde la pendiente dv/dx se obtiene como sigue: primero se dibuja la tangente a la curva en el punto de interés. Despues, mediante el empleo de las escalas apropiadas, se miden a lo largo de esa tangente incrementos correspondientes Δx y Δv . La pendiente deseada es igual a la razón $\Delta v/\Delta x$.

Problemas

11.61 Una partícula se mueve en línea recta con la aceleración que se muestra en la figura. Si se sabe que la partícula inicia desde el origen con $v_0 = -18 \text{ ft/s}$, a) construya las curvas $v-t$ y $x-t$ para $0 < t < 20 \text{ s}$, b) determine la posición y la velocidad de la partícula y la distancia total recorrida cuando $t = 12 \text{ s}$.

11.62 Para la partícula y el movimiento del problema 11.61 construya las curvas $v-t$ y $x-t$ para $0 < t < 20 \text{ s}$, y determine a) el máximo valor de la velocidad de la partícula, b) el valor máximo de la coordenada de posición.

11.63 Una partícula se mueve en línea recta con la velocidad que se muestra en la figura. Si se sabe que $x = -540 \text{ ft}$ en $t = 0$, a) construya las curvas $a-t$ y $x-t$ para $0 < t < 50 \text{ s}$, y determine b) la distancia total recorrida por la partícula cuando $t = 50 \text{ s}$, c) los dos tiempos en los cuales $x = 0$.

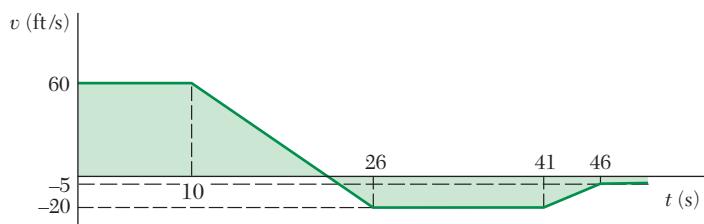


Figura P11.63

11.64 Una partícula se mueve a determinada velocidad en línea recta. Si se sabe que $x = -540 \text{ ft}$ en $t = 0$, a) construya las curvas $a-t$ y $x-t$ para $0 < t < 50 \text{ s}$ y determine b) el valor máximo de la coordenada de posición de la partícula, c) los valores de t para los cuales la partícula se encuentra en $x = 100 \text{ ft}$.

11.65 Un paracaidista cae libremente a razón de 200 km/h cuando abre su paracaídas a una altura de 600 m . Luego de una rápida y constante desaceleración, desciende a una razón constante de 50 km/h desde 586 m hasta 30 m , donde maniobra el paracaídas en el viento para frenar aún más su descenso. Si se sabe que el paracaidista aterriza con una velocidad descendente despreciable, determine a) el tiempo que requiere para aterrizar después de abrir su paracaídas, b) la desaceleración inicial.

11.66 El componente de una máquina se recubre con pintura de spray mientras se monta sobre una tarima que se desplaza a 4 m en 20 s . La tarima tiene una velocidad inicial de 80 mm/s y puede acelerarse a una razón máxima de 60 mm/s^2 . Si se sabe que el proceso de pintura requiere 15 s para terminarse y se lleva a cabo mientras la tarima se mueve a una velocidad constante, determine el valor más pequeño posible de la rapidez máxima de la tarima.

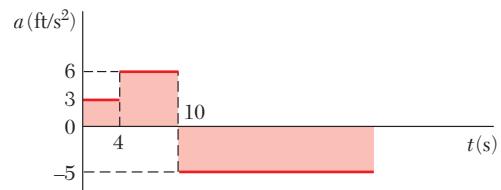


Figura P11.61

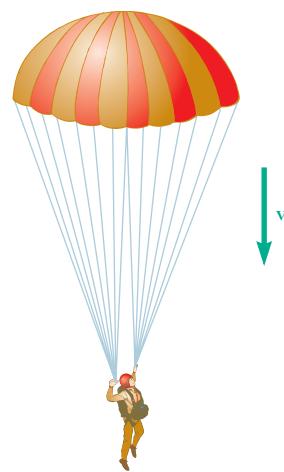


Figura P11.65

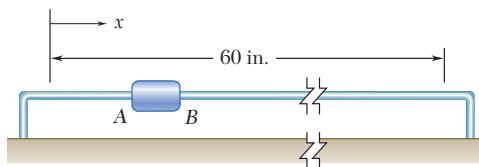


Figura P11.67

11.67 Un sensor de temperatura se conecta al deslizador *AB* que se mueve a lo largo de 60 in. hacia delante y hacia atrás. Las velocidades máximas del deslizador son 12 in./s hacia la derecha y 30 in./s hacia la izquierda. Cuando el deslizador se mueve a la derecha, acelera y desacelera a una razón constante de 6 in./s^2 ; cuando se desplaza a la izquierda, acelera y desacelera a razón constante de 20 in./s^2 . Determine el tiempo que se requiere para que el deslizador realice un ciclo completo, asimismo construya las curvas $v-t$ y $x-t$ de su movimiento.

11.68 Un tren que viaja a 40 mi/h se encuentra a 3 mi de una estación. El tren desacelera de modo que su rapidez es de 20 mi/h cuando se encuentra a 0.5 mi de la estación. Si el tren llega a la estación 7.5 min después de que empieza a desacelerar y suponiendo desaceleraciones constantes, determine *a*) el tiempo que se requiere para que recorra las primeras 2.5 mi, *b*) la velocidad del tren cuando llega a la estación, *c*) la desaceleración constante final del tren.

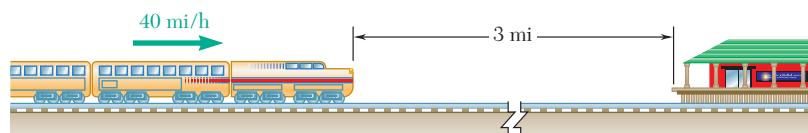


Figura P11.68

11.69 Dos puntos de revisión *A* y *B* en una carrera se ubican sobre la misma autopista con una separación de 12 km. Los límites de velocidad de los primeros 8 km y de los últimos 4 km de la sección son, respectivamente, 100 km/h y 70 km/h. Los conductores deben detenerse en cada punto de revisión, y el tiempo especificado entre los puntos *A* y *B* es de 8 min con 20 s. Si se sabe que el conductor acelera y desacelera a la misma tasa constante, determine la magnitud de su aceleración si viaja el mayor tiempo posible en el límite de velocidad.

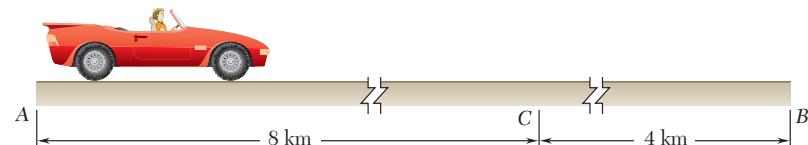


Figura P11.69

11.70 En una prueba realizada en un tanque de agua para la botadura de un pequeño bote a escala, la velocidad horizontal inicial del modelo es de 6 m/s y su aceleración horizontal varía linealmente de -12 m/s^2 en $t = 0$ a -2 m/s^2 en $t = t_1$ y después se mantiene igual a -2 m/s^2 hasta que $t = 1.4 \text{ s}$. Si se sabe que $v = 1.8 \text{ m/s}$ cuando $t = t_1$, determine *a*) el valor de t_1 , *b*) la velocidad y posición del modelo en $t = 1.4 \text{ s}$.

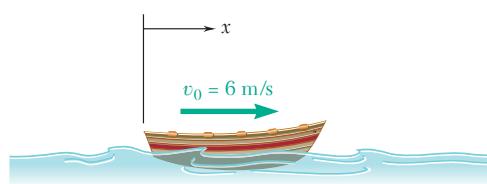


Figura P11.70

- 11.71** Un automóvil y un camión viajan a una rapidez constante de 35 mi/h; el automóvil está 40 ft detrás del camión. El conductor del auto quiere rebasar al camión, esto es, desea colocar su automóvil en *B*, 40 ft por delante del camión, y después regresar a la rapidez de 35 mi/h. La aceleración máxima del automóvil es de 5 ft/s^2 y la máxima desaceleración obtenida al aplicar los frenos es de 20 ft/s^2 . ¿Cuál es el tiempo más corto en el que el conductor del automóvil puede completar la operación de rebasar si en ningún momento sobrepasa la rapidez de 50 mi/h? Dibuje la curva *v-t*.

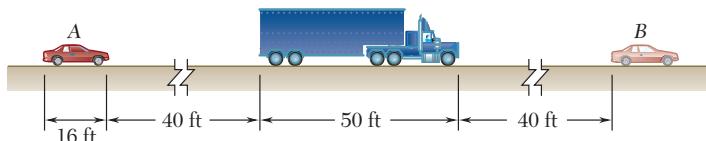


Figura P11.71

- 11.72** Retome el problema 11.71, y ahora suponga que el conductor del automóvil no presta ninguna atención al límite de rapidez mientras rebasa y se concentra en alcanzar la posición *B* y volver a tomar la velocidad de 35 mi/h en el menor tiempo posible. ¿Cuál es la máxima rapidez alcanzada? Dibuje la curva *v-t*.

- 11.73** Un elevador inicia desde el reposo y se mueve hacia arriba, acelerando a una razón de 1.2 m/s^2 , hasta que alcanza una rapidez de 7.8 m/s , la cual mantiene. Dos segundos después de que el elevador empieza a moverse, un hombre que se encuentra a 12 m por encima de la posición inicial del elevador lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s . Determine el momento en el que la pelota golpeará al elevador.

- 11.74** El registro de aceleración que se muestra en la figura se obtuvo de un pequeño avión que viajaba a lo largo de una trayectoria recta. Si se sabe que $x = 0$ y $v = 60 \text{ m/s}$ cuando $t = 0$, determine *a*) la velocidad y la posición del avión cuando $t = 20 \text{ s}$, *b*) su velocidad promedio durante el intervalo $6 \text{ s} < t < 14 \text{ s}$.

- 11.75** El automóvil *A* viaja sobre una autopista a una rapidez constante $(v_A)_0 = 60 \text{ mi/h}$ y se encuentra a 380 ft de la entrada de una rampa de acceso, cuando el automóvil *B* entra al carril de aceleración en ese punto a una rapidez $(v_B)_0 = 15 \text{ mi/h}$. El automóvil *B* acelera de manera uniforme y entra al carril de tráfico principal después de recorrer 200 ft en 5 s. Despues continúa acelerando a la misma tasa hasta que alcanza una rapidez de 60 mi/h, que mantiene. Determine la distancia final entre los dos automóviles.

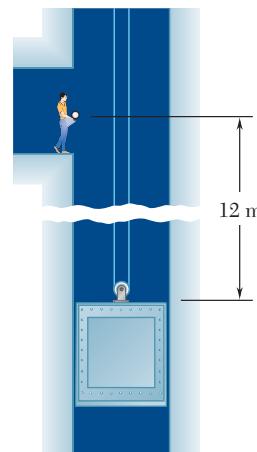


Figura P11.73

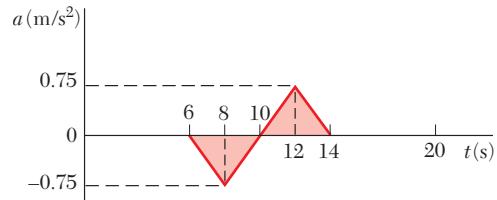


Figura P11.74

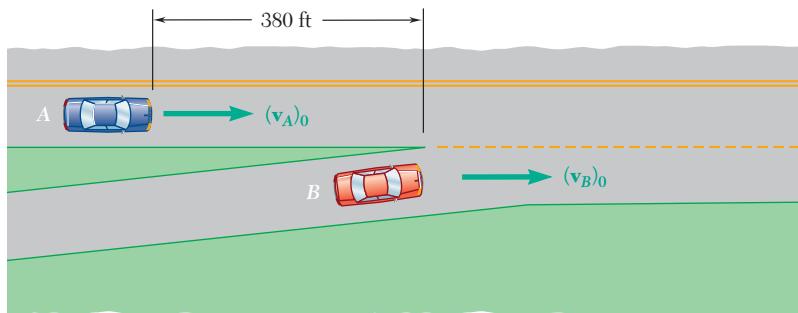


Figura P11.75

11.76 El automóvil A viaja a 40 mi/h cuando entra a una zona cuya rapidez máxima es de 30 mi/h. La conductora del automóvil A desacelera a una razón de 16 ft/s^2 hasta que alcanza una rapidez de 30 mi/h, la cual mantiene. Cuando el automóvil B, que se encontraba inicialmente a 60 ft detrás del automóvil A y viajaba a una rapidez constante de 45 mi/h, entra a la zona con el límite de velocidad indicado, su conductor desacelera a razón de 20 ft/s^2 , hasta que alcanza una velocidad de 28 mi/h. Si el conductor del automóvil B mantiene una velocidad de 28 mi/h, determine *a)* la distancia mínima a la que el automóvil B se acerca al automóvil A, *b)* el tiempo en el cual el automóvil A se encuentra a 70 ft enfrente del automóvil B.

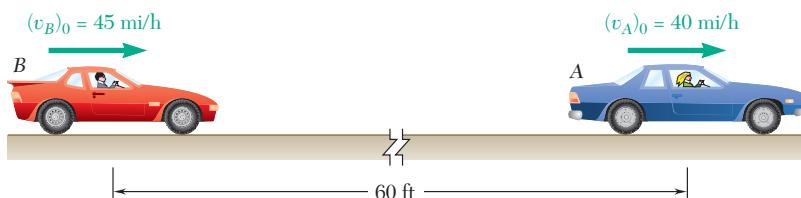


Figura P11.76

11.77 Un automóvil viaja a una rapidez constante de 54 km/h cuando su conductora ve a un niño corriendo sobre el camino. La conductora aplica los frenos hasta que el niño regresa a la acera y después acelera para recuperar su rapidez original de 54 km/h; en la figura se muestra el registro de la aceleración del automóvil. Si se supone que $x = 0$ cuando $t = 0$, determine *a)* el tiempo t_1 en el cual la velocidad es de nuevo de 54 km/h, *b)* la posición del automóvil en ese momento, *c)* la velocidad promedio del automóvil durante el intervalo $1 \text{ s} \leq t \leq t_1$.

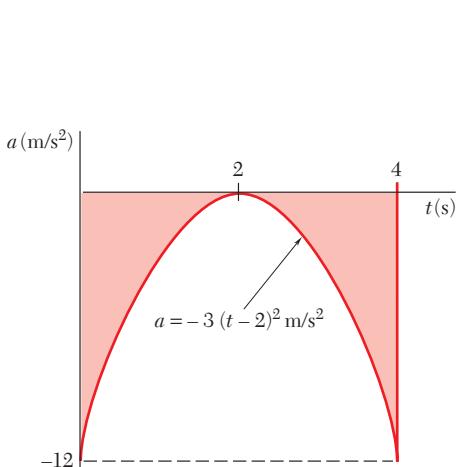


Figura P11.78

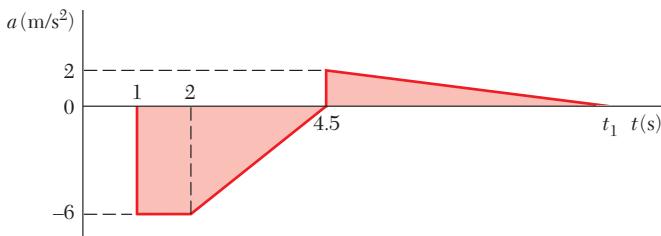


Figura P11.77

11.78 Como se muestra en la figura, desde $t = 0$ hasta $t = 4 \text{ s}$, la aceleración de una partícula dada puede representarse mediante una parábola. Si se sabe que $x = 0$ y $v = 8 \text{ m/s}$ cuando $t = 0$, *a)* construya las curvas $v-t$ y $x-t$ para $0 < t < 4 \text{ s}$, *b)* determine la posición de la partícula en $t = 3 \text{ s}$. (*Sugerencia:* Utilice la tabla que se presenta en las guardas posteriores del libro).

11.79 Durante un proceso de manufactura, una banda transportadora empieza a moverse desde el reposo y recorre un total de 1.2 ft antes de quedar temporalmente en reposo. Si se sabe que el tirón repentino, o tasa de cambio en la aceleración, se limita a $\pm 4.8 \text{ ft/s}^2$ por segundo, determine *a)* el tiempo más corto que se requiere para que la banda se mueva 1.2 ft, *b)* los valores máximo y el promedio de la velocidad de la banda durante ese tiempo.

11.80 Un tren de enlace en un aeropuerto viaja entre dos terminales que se encuentran a 1.6 mi de distancia. Para mantener el confort de los pasajeros, la aceleración del tren se limita a $\pm 4 \text{ ft/s}^2$, y el tirón repentino, o tasa de cambio en la aceleración, se limita a $\pm 0.8 \text{ ft/s}^2$ por segundo. Si el tren de enlace tiene una rapidez máxima de 20 mi/h, determine *a*) el tiempo más corto para que el tren viaje entre las dos terminales, *b*) su velocidad promedio correspondiente.

11.81 El registro de aceleración que se muestra en la figura se obtuvo durante las pruebas de rapidez de un automóvil deportivo. Si se sabe que el automóvil inicia desde el reposo, determine de manera aproximada *a*) la velocidad del automóvil en $t = 8 \text{ s}$, *b*) la distancia recorrida por el automóvil en $t = 20 \text{ s}$.

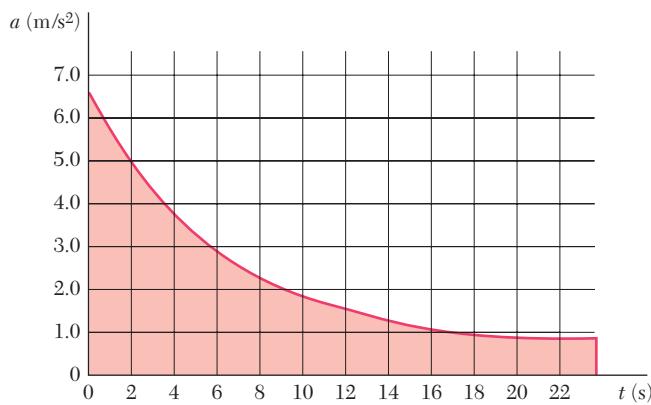


Figura P11.81

11.82 Se requieren dos segundos para dejar en reposo la varilla de un pistón neumático; el registro de aceleración de la varilla del pistón durante los 2 s es como se indica en la figura. Determine de manera aproximada *a*) la velocidad inicial de la varilla del pistón, *b*) la distancia recorrida por la varilla del pistón antes de quedar en reposo.

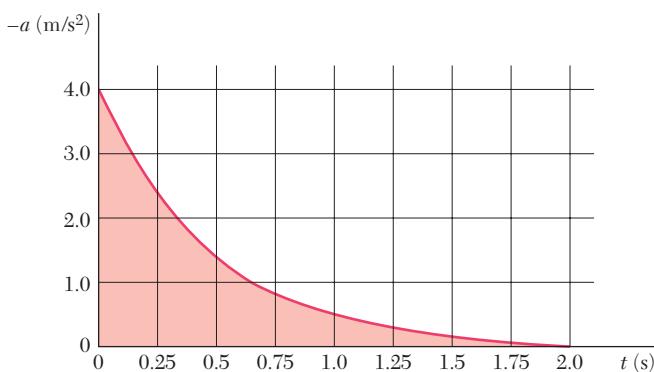


Figura P11.82

11.83 Un avión de entrenamiento tiene una velocidad de 126 ft/s cuando aterriza sobre un portaaviones. Conforme el mecanismo de retención del carguero detiene al avión, se registran la velocidad y la aceleración de este último; los resultados se representan en la figura (curva continua). Determine de manera aproximada *a*) el tiempo requerido para que el aeroplano se detenga, *b*) la distancia recorrida en ese tiempo.

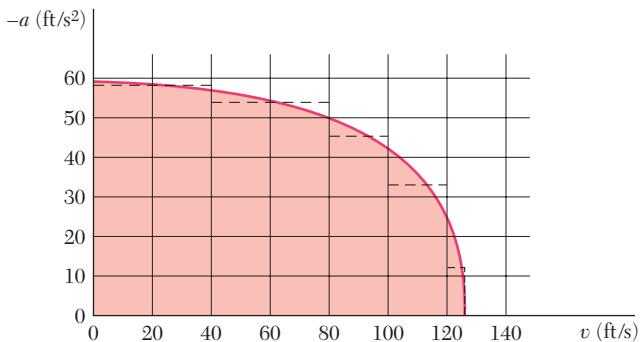


Figura P11.83

11.84 En la figura se muestra una parte de la curva $v-x$ determinada experimentalmente para el carro de un transbordador. Determine de manera aproximada la aceleración del carro *a*) cuando $x = 10$ in., *b*) cuando $v = 80$ in./s.

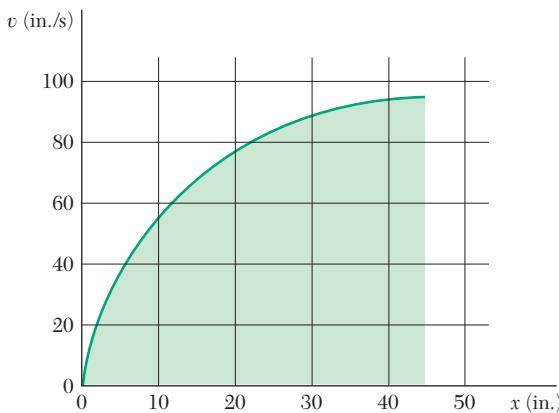


Figura P11.84

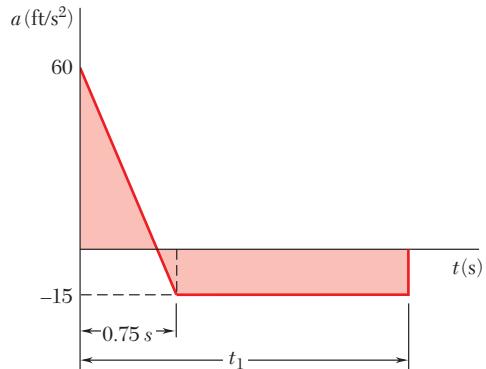


Figura P11.87

11.85 Utilice el método de la sección 11.8 a fin de deducir la fórmula $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ para la coordenada de posición de una partícula en movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

11.86 Utilice el método de la sección 11.8 para determinar la posición de la partícula del problema 11.61 cuando $t = 14$.

11.87 Durante las pruebas realizadas a una nueva lancha salvavidas, un acelerómetro adherido a la lancha proporciona el registro que se muestra en la figura. Si la lancha tiene una velocidad de 7.5 ft/s en $t = 0$ y llega al reposo en el tiempo t_1 , utilice el método de la sección 11.8 para determinar *a*) el tiempo t_1 , *b*) la distancia que recorre la lancha antes de quedar en reposo.

11.88 Para la partícula del problema 11.63, dibuje la curva $a-t$ y determine mediante el método de la sección 11.8, *a*) la posición de la partícula cuando $t = 52$ s, *b*) el valor máximo de su coordenada de posición.

11.9. VECTOR DE POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACCELERACIÓN

Cuando una partícula se mueve a lo largo de una curva diferente a una línea recta, se afirma que describe un *movimiento curvilíneo*. Para definir la posición P ocupada por la partícula en un tiempo determinado t , se elige un sistema de referencia fijo, tal como los ejes x , y , z que se muestran en la figura 11.14a), y se dibuja el vector \mathbf{r} que une al origen O y al punto P . Puesto que el vector \mathbf{r} está caracterizado por su magnitud r y su dirección con respecto a los ejes de referencia, éste define por completo la posición de la partícula con respecto a esos ejes; el vector \mathbf{r} se conoce como el *vector de posición* de la partícula en el tiempo t .

Considérese ahora el vector \mathbf{r}' que define la posición P' ocupada por la misma partícula en un tiempo posterior $t + \Delta t$. El vector $\Delta\mathbf{r}$ que une a P y a P' representa el cambio en el vector de posición durante el intervalo del tiempo Δt , pues, como se puede verificar fácilmente en la figura 11.14a), el vector \mathbf{r}' se obtiene al sumar los vectores \mathbf{r} y $\Delta\mathbf{r}$ de acuerdo con el método de triángulo. $\Delta\mathbf{r}$ representa un cambio de *dirección*, así como un cambio de *magnitud* del vector de posición \mathbf{r} . La *velocidad promedio* de la partícula sobre el intervalo de tiempo Δt se define como el cociente de $\Delta\mathbf{r}$ y Δt . Puesto que $\Delta\mathbf{r}$ es un vector y Δt es un escalar, el cociente de $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ es un vector unido a P , de la misma dirección que $\Delta\mathbf{r}$ y de magnitud igual a la magnitud de $\Delta\mathbf{r}$ dividida entre Δt (figura 11.14b).

La *velocidad instantánea* de la partícula en el tiempo t se obtiene al elegir intervalos de tiempo Δt cada vez más cortos y, de manera correspondiente, incrementos vectoriales $\Delta\mathbf{r}$ cada vez menores. La velocidad instantánea se representa en consecuencia mediante el vector

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \quad (11.14)$$

A medida que Δt y $\Delta\mathbf{r}$ disminuyen, las posiciones P y P' se acercan cada vez más entre sí; el vector \mathbf{v} obtenido en el límite debe, por lo tanto, ser tangente a la trayectoria de la partícula (figura 11.14c).

Puesto que el vector de posición \mathbf{r} depende del tiempo t , se conoce como una *función vectorial* de la variable escalar t y se denota mediante $\mathbf{r}(t)$. Extendiendo el concepto de derivada de una función escalar que se presenta en cálculo elemental, el límite del cociente $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ se conoce como la *derivada* de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Se escribe

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (11.15)$$

La magnitud v del vector \mathbf{v} se conoce como la *rapidez* de la partícula y es posible obtenerla al sustituir, en vez del vector $\Delta\mathbf{r}$ en la fórmula (11.14), la magnitud de este vector representado por el segmento de línea recta PP' . Sin embargo, la longitud del segmento PP' se acerca a la longitud Δs del arco PP' cuando Δt disminuye (figura 11.14a), por lo que se puede escribir

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{PP'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad v = \frac{ds}{dt} \quad (11.16)$$

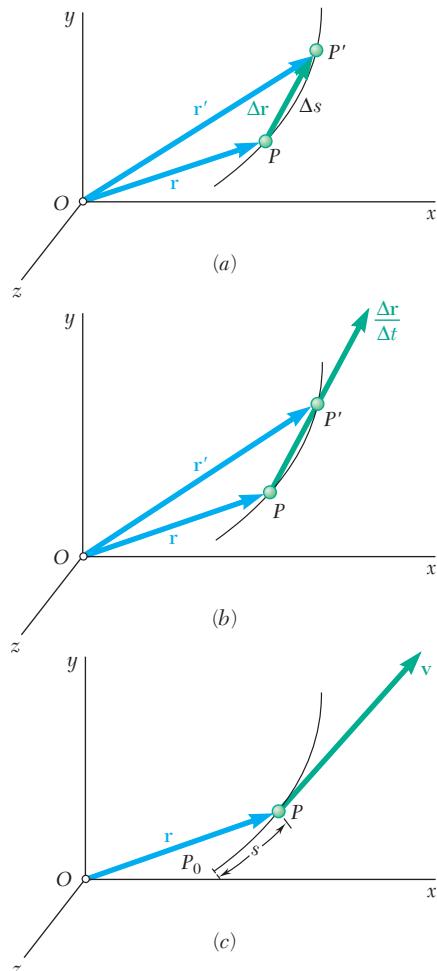
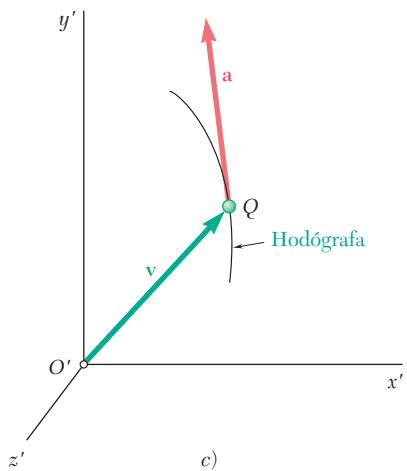
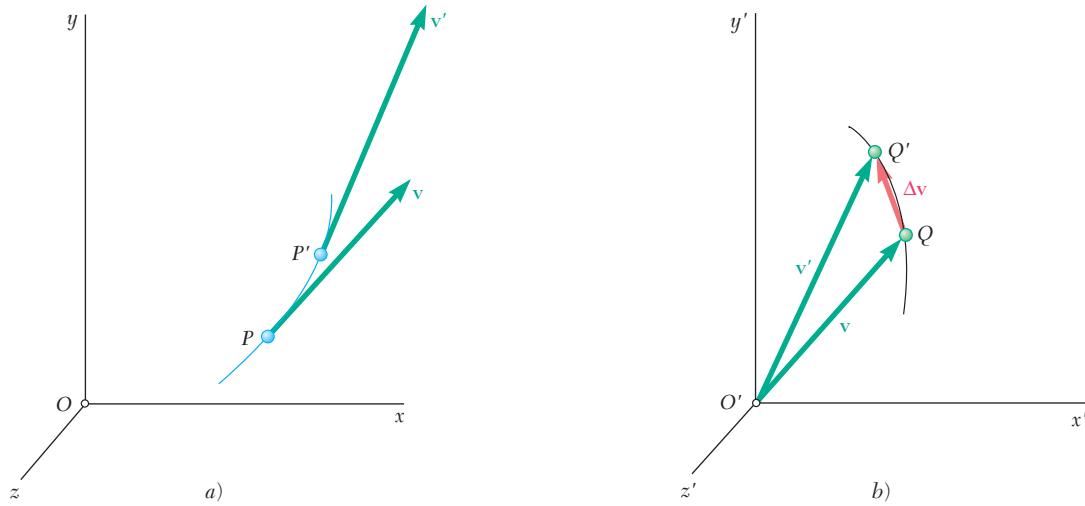


Figura 11.14

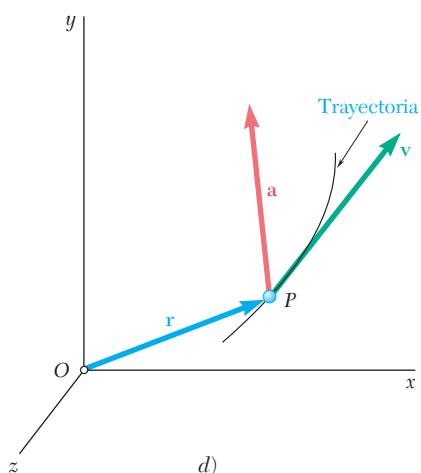


La rapidez v puede obtenerse entonces diferenciando con respecto a t la longitud s del arco que describe la partícula.

Considere la velocidad \mathbf{v} de la partícula en el tiempo t y su velocidad \mathbf{v}' en un tiempo posterior $t + \Delta t$ (figura 11.15a). Se dibujarán ambos vectores \mathbf{v} y \mathbf{v}' a partir del mismo origen O' (figura 11.15b). El vector $\Delta\mathbf{v}$ que une a Q y a Q' representa el cambio en la velocidad de la partícula durante el intervalo de tiempo Δt , ya que el vector \mathbf{v}' puede obtenerse al sumar los vectores \mathbf{v} y $\Delta\mathbf{v}$. Hay que advertir que $\Delta\mathbf{v}$ representa un cambio en la dirección de la velocidad, así como un cambio en la rapidez. La aceleración promedio de la partícula sobre el intervalo de tiempo Δt se define como el cociente entre $\Delta\mathbf{v}$ y Δt . Puesto que $\Delta\mathbf{v}$ es un vector y Δt un escalar, el cociente $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ es un vector de la misma dirección que $\Delta\mathbf{v}$.

La aceleración instantánea de la partícula en el tiempo t se obtiene al tomar valores cada vez más y más pequeños de Δt y $\Delta\mathbf{v}$. La aceleración instantánea se representa en consecuencia por medio del vector

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \quad (11.17)$$



Al advertir que la velocidad \mathbf{v} es una función vectorial $\mathbf{v}(t)$ del tiempo t , es posible referirse al límite del cociente $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ como la derivada de \mathbf{v} con respecto a t . Se escribe

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (11.18)$$

Se observa que la aceleración \mathbf{a} es tangente a la curva descrita por la punta Q del vector \mathbf{v} cuando este último se dibuja desde un origen fijo O' (figura 11.15c) y que, en general, la aceleración no es tangente a la trayectoria de la partícula (figura 11.15d). La curva descrita por la punta de \mathbf{v} e indicada en la figura 11.15c) se conoce como la *hodógrafa* del movimiento.

Figura 11.15

11.10. DERIVADAS DE FUNCIONES VECTORIALES

11.10. Derivadas de funciones vectoriales

643

En la sección anterior se estudió que la velocidad \mathbf{v} de una partícula en movimiento curvilíneo puede representarse mediante la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que caracteriza a la posición de la partícula. De manera similar, la aceleración \mathbf{a} de la partícula se representa mediante la derivada de una función vectorial $\mathbf{v}(t)$. Esta sección proporciona una definición formal de la derivada de una función vectorial y establece reglas que gobiernan la diferenciación de sumas y productos de funciones vectoriales.

Sea $\mathbf{P}(u)$ una función vectorial de la variable escalar u . Por lo anterior se entiende que el escalar u define por completo la magnitud y dirección del vector \mathbf{P} . Si el vector \mathbf{P} se dibuja desde un origen fijo O y se deja variar el escalar u , la punta de \mathbf{P} describirá una curva determinada en el espacio. Considerense los vectores \mathbf{P} que corresponden, respectivamente, a los valores u y $u + \Delta u$ de la variable escalar (figura 11.16a). Sea $\Delta\mathbf{P}$ el vector que une las puntas de los dos vectores dados, se escribe

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}(u + \Delta u) - \mathbf{P}(u)$$

Al dividir todo entre Δu y dejar que Δu tienda a cero, se define la derivada de la función vectorial $\mathbf{P}(u)$:

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(u + \Delta u) - \mathbf{P}(u)}{\Delta u} \quad (11.19)$$

Conforme Δu tiende a cero, la línea de acción de $\Delta\mathbf{P}$ vuelve tangente a la curva de la figura 11.16a). De este modo, la derivada $d\mathbf{P}/du$ de la función vectorial $\mathbf{P}(u)$ es tangente a la curva descrita por la punta $\mathbf{P}(u)$ (figura 11.16b).

Las reglas comunes para la diferenciación de sumas y productos de funciones escalares pueden extenderse a las funciones vectoriales. Considerese primero la suma de dos funciones vectoriales $\mathbf{P}(u)$ y $\mathbf{Q}(u)$ de la misma variable escalar u . De acuerdo con la definición dada en (11.19), la derivada del vector $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ es

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{Q}}{\Delta u} \right)$$

o, puesto que el límite de una suma es igual a la suma de los límites de sus términos,

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{Q}}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du} + \frac{d\mathbf{Q}}{du} \quad (11.20)$$

Hay que considerar ahora el producto de una función escalar $f(u)$ y una función vectorial $\mathbf{P}(u)$ de la misma variable. La derivada del vector $f\mathbf{P}$ es

$$\frac{d(f\mathbf{P})}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(f + \Delta f)(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) - f\mathbf{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta u} \mathbf{P} + f \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u} \right)$$

11.10. Derivadas de funciones vectoriales

643

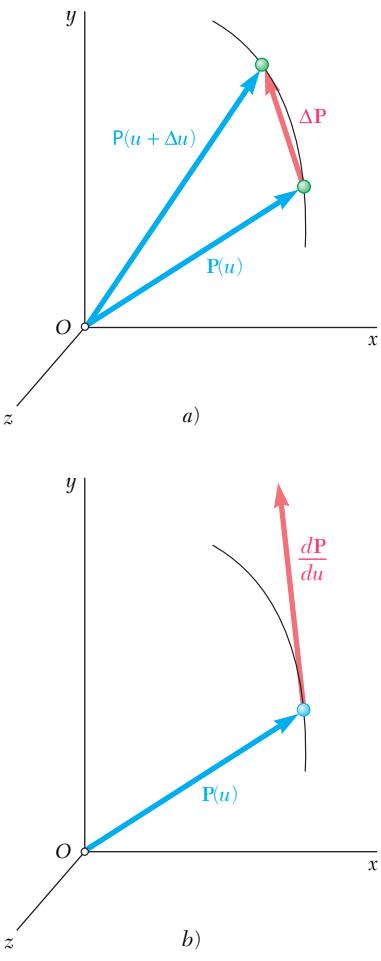


Figura 11.16

o al recordar las propiedades de los límites de sumas y productos,

$$\frac{d(f\mathbf{P})}{du} = \frac{df}{du}\mathbf{P} + f\frac{d\mathbf{P}}{du} \quad (11.21)$$

Las derivadas del *producto escalar* y el *producto vectorial* de dos funciones vectoriales $\mathbf{P}(u)$ y $\mathbf{Q}(u)$ pueden obtenerse de manera similar. Se tiene

$$\frac{d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{du} \quad (11.22)$$

$$\frac{d(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \frac{d\mathbf{Q}}{du} \quad (11.23)^{\dagger}$$

Las propiedades antes establecidas pueden emplearse para determinar las *componentes rectangulares de la derivada de una función vectorial* $\mathbf{P}(u)$. Descomponiendo \mathbf{P} en componentes a lo largo de los ejes rectangulares fijos x, y, z , se escribe

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k} \quad (11.24)$$

donde P_x, P_y, P_z son las componentes escalares rectangulares del vector \mathbf{P} , e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ los vectores unitarios correspondientes, respectivamente, a los ejes x, y y z (sección 2.12). De acuerdo con (11.20), la derivada de \mathbf{P} es igual a la suma de las derivadas de los términos en el miembro del lado derecho. Puesto que cada uno de estos términos es el producto de una escalar y una función vectorial, se debe usar (11.21). Pero los vectores unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tienen una magnitud constante (igual a 1) y en direcciones fijas. Por lo tanto, sus derivadas son cero, y se escriben

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \frac{dP_x}{du}\mathbf{i} + \frac{dP_y}{du}\mathbf{j} + \frac{dP_z}{du}\mathbf{k} \quad (11.25)$$

Si se advierte que los coeficientes de los vectores unitarios son, por definición, las componentes escalares del vector $d\mathbf{P}/du$, se concluye que las *componentes escalares rectangulares de la derivada dP/du de la función vectorial* $\mathbf{P}(u)$ se obtienen al diferenciar las componentes escalares correspondientes de \mathbf{P} .

Razón de cambio de un vector. Cuando el vector \mathbf{P} es una función del tiempo t , su derivada $d\mathbf{P}/dt$ representa la *razón de cambio* de \mathbf{P} con respecto al sistema de referencia $Oxyz$. Descomponiendo \mathbf{P} , en componentes rectangulares, se tiene, por (11.25),

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dP_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dP_z}{dt}\mathbf{k}$$

o, al utilizar puntos para indicar diferenciación con respecto a t ,

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x\mathbf{i} + \dot{P}_y\mathbf{j} + \dot{P}_z\mathbf{k} \quad (11.25')$$

[†]Puesto que el producto vectorial no es commutativo (sección 3.4), debe mantenerse el orden de los factores en la ecuación (11.23).

Como se estudiará en la sección 15.10, la razón de cambio de un vector cuando se observa desde un *sistema de referencia móvil* es, en general, diferente de su razón de cambio cuando se observa desde un sistema de referencia fijo. Sin embargo, si el sistema de referencia móvil $O'x'y'z'$ está en *traslación*, esto es, si sus ejes permanecen paralelos a los ejes correspondientes del sistema fijo $Oxyz$ (figura 11.17), se usan los mismos vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} en ambos sistemas de referencia, y en un instante determinado el vector \mathbf{P} tiene las mismas componentes P_x , P_y , P_z en ambos sistemas de referencia. Se concluye de (11.25') que la razón de cambio \mathbf{P} es la misma con respecto a los sistemas de referencia $Oxyz$ y $O'x'y'z'$. En consecuencia, se establece que *la razón de cambio de un vector es la misma con respecto a un sistema de referencia fijo y con respecto a un sistema de referencia en traslación*. Esta propiedad simplificará en gran medida el trabajo, ya que se tratará muchas veces con sistemas de referencia en traslación.

11.11. Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración

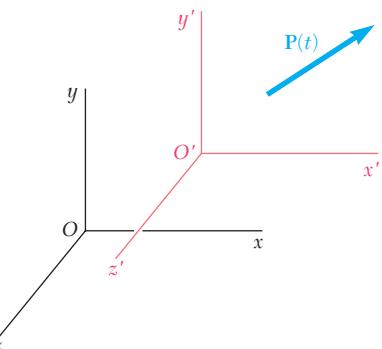


Figura 11.17

11.11. COMPONENTES RECTANGULARES DE LA VELOCIDAD Y LA ACELERACIÓN

Cuando la posición de una partícula P se define en cualquier instante mediante sus coordenadas rectangulares x , y y z , resulta conveniente descomponer la velocidad \mathbf{v} y la aceleración \mathbf{a} de la partícula en componentes rectangulares (figura 11.18).

Al descomponer el vector de posición \mathbf{r} de la partícula en componentes rectangulares, se escribe

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk \quad (11.26)$$

donde las coordenadas x , y , z son funciones de t . Al diferenciar dos veces, se obtiene

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad (11.27)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \quad (11.28)$$

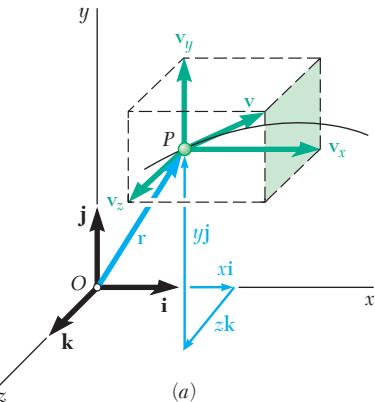
donde \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} y \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} representan, respectivamente, la primera y la segunda derivadas de x , y y z con respecto a t . Se tiene de (11.27) y (11.28) que las componentes escalares de la velocidad y la aceleración son

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \quad (11.29)$$

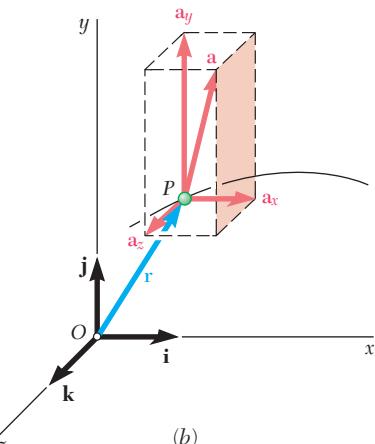
$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z} \quad (11.30)$$

Un valor positivo de v_x indica que el componente vectorial \mathbf{v}_x está dirigido hacia la derecha, y un valor negativo, que se dirige hacia la izquierda. El sentido de cada uno de los otros componentes vectoriales puede determinarse de manera similar a partir del signo de la componente escalar correspondiente. Si se desea, es posible obtener las magnitudes y direcciones de la velocidad y la aceleración de sus componentes escalares mediante los métodos de las secciones 2.7 y 2.12.

El uso de las componentes rectangulares para describir la posición, la velocidad y la aceleración de una partícula es en particular efectivo cuando la componente a_x de la aceleración sólo depende de t , x , y o v_x , y cuando, en forma similar, a_y depende únicamente de t , y y/o v_y , y a_z de t , z y/o v_z . Las ecuaciones (11.30) pueden integrarse en ese caso de



(a)

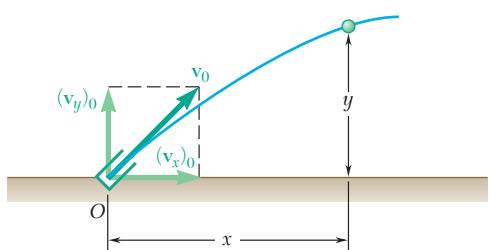


(b)

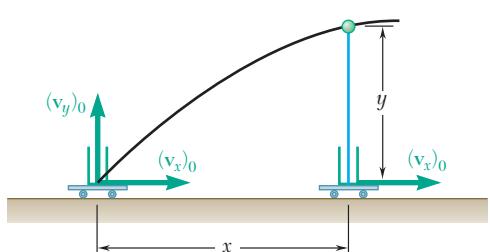
Figura 11.18



Fotografía 11.3 El movimiento en el aire de este patinador de nieve se describe como una parábola, suponiendo que es posible despreciar la resistencia del aire.



(a) Movimiento de un proyectil



(b) Movimientos rectilíneos equivalentes

Figura 11.19

manera independiente, y lo mismo sucede con las ecuaciones (11.29). En otras palabras, es posible considerar por separado el movimiento de la partícula en dirección x , su movimiento en la dirección y , y su movimiento en la dirección z .

En el caso del *movimiento de un proyectil*, por ejemplo, se demuestra (véase la sección 12.5) que las componentes de la aceleración son

$$a_x = \ddot{x} = 0 \quad a_y = \ddot{y} = -g \quad a_z = \ddot{z} = 0$$

si se ignora la resistencia del aire. Al denotar mediante x_0 , y_0 y z_0 las coordenadas del cañón y por medio de $(v_x)_0$, $(v_y)_0$ y $(v_z)_0$ las componentes de la velocidad inicial \mathbf{v}_0 del proyectil (una bala), se integra dos veces en t y se obtiene

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = (v_x)_0 & v_y &= \dot{y} = (v_y)_0 - gt & v_z &= \dot{z} = (v_z)_0 \\ x &= x_0 + (v_x)_0 t & y &= y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2}gt^2 & z &= z_0 + (v_z)_0 t \end{aligned}$$

Si el proyectil se lanza en el plano xy desde el origen O , se tiene $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ y $(v_z)_0 = 0$, y las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\begin{aligned} v_x &= (v_x)_0 & v_y &= (v_y)_0 - gt & v_z &= 0 \\ x &= (v_x)_0 t & y &= (v_y)_0 t - \frac{1}{2}gt^2 & z &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones muestran que el proyectil permanece en el plano xy , que su movimiento en la dirección horizontal es uniforme, y que su movimiento en la dirección vertical es uniformemente acelerado. El movimiento de un proyectil puede entonces sustituirse por dos movimientos rectilíneos independientes, los cuales se visualizan con facilidad si se supone que el proyectil se lanza verticalmente con una velocidad inicial $(\mathbf{v}_y)_0$ desde una plataforma que se mueve con una velocidad horizontal constante $(\mathbf{v}_x)_0$ (figura 11.19). La coordenada x del proyectil es igual en cualquier instante a la distancia recorrida por la plataforma, y es posible calcular su coordenada y como si el proyectil se moviera a lo largo de una línea vertical.

Se puede observar que las ecuaciones que definen las coordenadas x y y de un proyectil en cualquier instante son las ecuaciones paramétricas de una parábola. Por lo tanto, la trayectoria de un proyectil es *parabólica*. Sin embargo este resultado deja de ser válido cuando se toma en cuenta la resistencia del aire o la variación con la altura de la aceleración de la gravedad.

11.12. MOVIMIENTO RELATIVO A UN SISTEMA DE REFERENCIA EN TRASLACIÓN

En la sección anterior se utilizó un solo sistema de referencia para describir el movimiento de una partícula. En la mayoría de los casos este sistema de referencia estaba unido a la tierra y se consideró fijo. A continuación se analizarán situaciones en las que es conveniente utilizar de manera simultánea varios sistemas de referencia. Si uno de los sistemas de referencia está unido a la tierra, se denominará *sistema de referencia fijo*, y los otros sistemas de referencia *sistemas de referencia en movimiento*. No obstante, debe entenderse que la selección de un sistema de referencia fijo es puramente arbitraria. Cualquier sistema de referencia puede designarse como “fijo”; todos los demás sistemas de referencia que no se unan rígidamente a este sistema de referencia se describirán en ese caso como “móviles”.

Considere dos partículas A y B que se mueven en el espacio (figura 11.20); los vectores \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B definen sus posiciones en cualquier instante dado con respecto a un sistema de referencia fijo $Oxyz$. Considere ahora un sistema de ejes x' , y' , z' centrado en A y paralelo a los ejes x , y , z . Mientras el origen de estos ejes se mueve, su orientación permanece invariable; el sistema de referencia $Ax'y'z'$ está en *traslación* con respecto a $Oxyz$. El vector de posición $\mathbf{r}_{B/A}$ que une a A y B define la *posición de B relativa al sistema de referencia móvil Ax'y'z'* (o, en forma breve, la *posición de B relativa a A*).

En la figura 11.20 se advierte que el vector de posición \mathbf{r}_B de la partícula B es la suma del vector de posición \mathbf{r}_A de la partícula A y del vector de posición $\mathbf{r}_{B/A}$ de B relativa a A ; se escribe

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \quad (11.31)$$

Al diferenciar (11.31) con respecto a t dentro del sistema de referencia fijo, y utilizar puntos para indicar derivadas respectivo al tiempo, se tiene

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A} \quad (11.32)$$

Las derivadas $\dot{\mathbf{r}}_A$ y $\dot{\mathbf{r}}_B$ representan, respectivamente, las velocidades \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B de las partículas A y B . Como $Ax'y'z'$ está en traslación, la derivada $\dot{\mathbf{r}}_{B/A}$ representa la razón de cambio de $\mathbf{r}_{B/A}$ con respecto al sistema de referencia $Ax'y'z'$, así como con respecto al sistema de referencia fijo (sección 11.10). Por lo tanto, esta derivada define la *velocidad $\mathbf{v}_{B/A}$ de B relativa al sistema de referencia Ax'y'z'* (o en forma breve, la *velocidad $\mathbf{v}_{B/A}$ de B relativa a A*). Se escribe

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (11.33)$$

Al diferenciar la ecuación (11.33) con respecto a t , y utilizar la derivada $\dot{\mathbf{v}}_{B/A}$ para definir la *aceleración $\mathbf{a}_{B/A}$ de B relativa al sistema de referencia Ax'y'z'* (o, en forma breve, la *aceleración $\mathbf{a}_{B/A}$ de B relativa a A*), se escribe

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (11.34)$$

El movimiento de B con respecto al sistema de referencia fijo $Oxyz$ se denomina *movimiento absoluto de B*. Las ecuaciones que se obtuvieron en esta sección muestran que el *movimiento absoluto de B* puede obtenerse combinando el *movimiento de A* y el *movimiento relativo de B con respecto al sistema de referencia móvil unido a A*. La ecuación (11.33), por ejemplo, expresa que la velocidad absoluta \mathbf{v}_B de la partícula B puede obtenerse al sumar vectorialmente la velocidad de A y la velocidad de B relativa al sistema de referencia $Ax'y'z'$. La ecuación (11.34) expresa una propiedad similar en términos de las aceleraciones.[†] Sin embargo se debe recordar que el *sistema de referencia Ax'y'z'* está en *traslación*; esto es, mientras se mueve con A , mantiene la misma orientación. Como se verá después (sección 15.14), será necesario utilizar relaciones diferentes en el caso de un sistema de referencia en rotación.

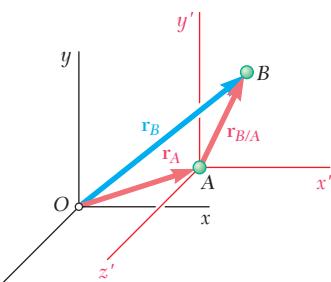
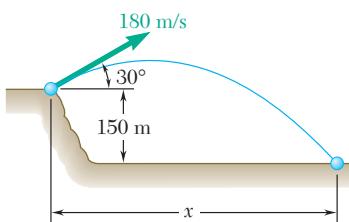


Figura 11.20



Fotografía 11.4 Al momento de aterrizar, el piloto de un helicóptero debe tomar en cuenta el movimiento relativo del barco.

[†]Note que el producto de los subíndices A y B/A que se usa en el miembro del lado derecho de las ecuaciones (11.31) a (11.34) es igual al subíndice B utilizado en el miembro del lado izquierdo.



PROBLEMA RESUELTO 11.7

Un proyectil se lanza desde el borde de un acantilado de 150 m con una velocidad inicial de 180 m/s a un ángulo de 30° con la horizontal. Si se ignora la resistencia del aire, encuentre *a)* la distancia horizontal desde el cañón hasta el punto en el que el proyectil golpea el suelo, *b)* la elevación máxima sobre el suelo que alcanza el proyectil.

SOLUCIÓN

Los movimientos vertical y horizontal se considerarán por separado.

Movimiento vertical. Movimiento uniformemente acelerado. Eliriendo el sentido positivo del eje y hacia arriba y situando el origen O en el cañón, se tiene

$$(v_y)_0 = (180 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 30^\circ = +90 \text{ m/s}$$

$$a = -9.81 \text{ m/s}^2$$

Al sustituir en las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado, se tiene

$$v_y = (v_y)_0 + at \quad v_y = 90 - 9.81t \quad (1)$$

$$y = (v_y)_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad y = 90t - 4.90t^2 \quad (2)$$

$$v_y^2 = (v_y)_0^2 + 2ay \quad v_y^2 = 8100 - 19.62y \quad (3)$$

Movimiento horizontal. Movimiento uniforme. Al elegir el sentido positivo del eje x hacia la derecha, se tiene

$$(v_x)_0 = (180 \text{ m/s}) \cos 30^\circ = +155.9 \text{ m/s}$$

Al sustituir en las ecuaciones del movimiento uniforme, se obtiene

$$x = (v_x)_0 t \quad x = 155.9t \quad (4)$$

a) Distancia horizontal. Cuando el proyectil choca con el suelo, se tiene

$$y = -150 \text{ m}$$

Al sustituir este valor en la ecuación (2) para el movimiento vertical, se escribe

$$-150 = 90t - 4.90t^2 \quad t^2 - 18.37t - 30.6 = 0 \quad t = 19.91 \text{ s}$$

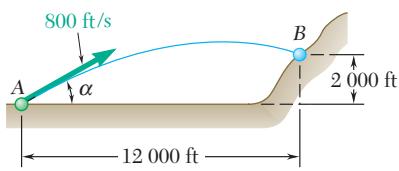
Si se sustituye $t = 19.91$ s en la ecuación (4) para el movimiento horizontal, se encuentra

$$x = 155.9(19.91) \quad x = 3100 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

b) Elevación máxima. Cuando el proyectil alcanza su máxima elevación, se tiene que $v_y = 0$; al considerar este valor en la ecuación (3) para el movimiento vertical, se escribe

$$0 = 8100 - 19.62y \quad y = 413 \text{ m}$$

$$\text{Máxima elevación sobre el suelo} = 150 \text{ m} + 413 \text{ m} = 563 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 11.8

Un proyectil se lanza con una velocidad inicial de 800 ft/s a un blanco ubicado a 2 000 ft por arriba del cañón A y a una distancia horizontal de 12 000 ft. Si se ignora la resistencia del aire, determine el valor del ángulo de disparo α .

SOLUCIÓN

Los movimientos horizontal y vertical se considerarán por separado.

Movimiento horizontal. Al ubicar el origen del eje de coordenadas en el cañón, se tiene

$$(v_x)_0 = 800 \cos \alpha$$

Al sustituir en la ecuación de movimiento horizontal uniforme, se obtiene

$$x = (v_x)_0 t \quad x = (800 \cos \alpha) t$$

El tiempo que se requiere para que el proyectil se mueva una distancia horizontal de 12 000 ft se obtiene al fijar x igual a 12 000 ft.

$$12\,000 = (800 \cos \alpha) t$$

$$t = \frac{12\,000}{800 \cos \alpha} = \frac{15}{\cos \alpha}$$

Movimiento vertical

$$(v_y)_0 = 800 \sin \alpha \quad a = -32.2 \text{ ft/s}^2$$

Al sustituir en la ecuación de movimiento vertical uniformemente acelerado, se obtiene

$$y = (v_y)_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad y = (800 \sin \alpha) t - 16.1 t^2$$

El proyectil da en el blanco. Cuando $x = 12\,000$ ft, se debe tener $y = 2\,000$ ft. Al sustituir el valor de y y dejando t igual al valor que acaba de encontrarse, se escribe

$$2\,000 = 800 \sin \alpha \frac{15}{\cos \alpha} - 16.1 \left(\frac{15}{\cos \alpha} \right)^2$$

Como $1/\cos^2 \alpha = \sec^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$, se tiene

$$2\,000 = 800(15) \tan \alpha - 16.1(15^2)(1 + \tan^2 \alpha)$$

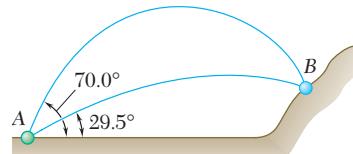
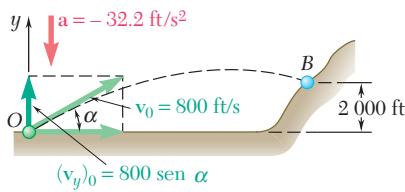
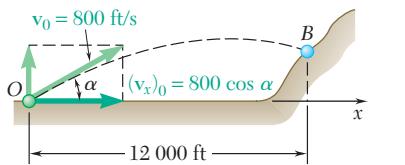
$$3\,622 \tan^2 \alpha - 12\,000 \tan \alpha + 5\,622 = 0$$

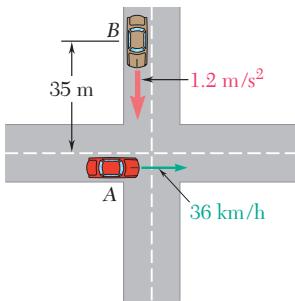
Al resolver esta ecuación cuadrática para $\tan \alpha$, se tiene

$$\tan \alpha = 0.565 \quad y \quad \tan \alpha = 2.75$$

$$\alpha = 29.5^\circ \quad y \quad \alpha = 70.0^\circ \quad \blacktriangleleft$$

El proyectil dará en el blanco si se usa cualquiera de estos dos ángulos de disparo (véase la figura).

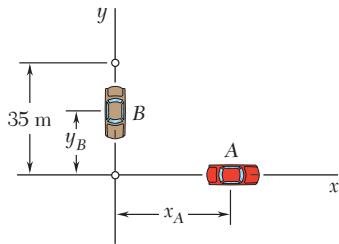




PROBLEMA RESUELTO 11.9

El automóvil A viaja hacia el este con una rapidez constante de 36 km/h. Cuando el automóvil A cruza la intersección que se muestra, el automóvil B parte del reposo desde una distancia de 35 m al norte de la intersección y se mueve hacia el sur con una aceleración constante de 1.2 m/s^2 . Determine la posición, velocidad y aceleración de B relativa a A 5 s después de que A cruza la intersección.

SOLUCIÓN



Se eligen los ejes x y y con el origen en la intersección de las dos calles y con los sentidos positivos dirigidos respectivamente al este y al norte.

Movimiento del automóvil A. Se expresa primero la rapidez en m/s:

$$v_A = \left(36 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 10 \text{ m/s}$$

Al notar que el movimiento de A es uniforme, se escribe, para cualquier tiempo t ,

$$\begin{aligned} a_A &= 0 \\ v_A &= +10 \text{ m/s} \\ x_A &= (x_A)_0 + v_A t = 0 + 10t \end{aligned}$$

Para $t = 5 \text{ s}$, se tiene

$$\begin{aligned} a_A &= 0 & \mathbf{a}_A &= 0 \\ v_A &= +10 \text{ m/s} & \mathbf{v}_A &= 10 \text{ m/s} \rightarrow \\ x_A &= +(10 \text{ m/s})(5 \text{ s}) = +50 \text{ m} & \mathbf{r}_A &= 50 \text{ m} \rightarrow \end{aligned}$$

Movimiento del automóvil B. El movimiento de B es uniformemente acelerado y se escribe

$$\begin{aligned} a_B &= -1.2 \text{ m/s}^2 \\ v_B &= (v_B)_0 + at = 0 - 1.2t \\ y_B &= (y_B)_0 + (v_B)_0 t + \frac{1}{2}a_B t^2 = 35 + 0 - \frac{1}{2}(1.2)t^2 \end{aligned}$$

Para $t = 5 \text{ s}$, se tiene

$$\begin{aligned} a_B &= -1.2 \text{ m/s}^2 & \mathbf{a}_B &= 1.2 \text{ m/s}^2 \downarrow \\ v_B &= -(1.2 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s}) = -6 \text{ m/s} & \mathbf{v}_B &= 6 \text{ m/s} \downarrow \\ y_B &= 35 - \frac{1}{2}(1.2 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s})^2 = +20 \text{ m} & \mathbf{r}_B &= 20 \text{ m} \uparrow \end{aligned}$$

Movimiento de B relativo a A. Se dibuja el triángulo que corresponde a la ecuación vectorial $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$ y se obtiene la magnitud de dirección del vector de posición de B relativo a A.

$$r_{B/A} = 53.9 \text{ m} \quad \alpha = 21.8^\circ \quad \mathbf{r}_{B/A} = 53.9 \text{ m} \angle 21.8^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Al proceder de manera similar, se encuentra la velocidad y la aceleración de B relativa a A.

$$\begin{aligned} v_{B/A} &= 11.66 \text{ m/s} & \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \\ \beta &= 31.0^\circ & \mathbf{v}_{B/A} &= 11.66 \text{ m/s} \angle 31.0^\circ \quad \blacktriangleleft \\ \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} & \mathbf{a}_{B/A} &= 1.2 \text{ m/s}^2 \downarrow \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas de esta sección se analiza el *movimiento bidimensional y tridimensional* de una partícula. En tanto que las interpretaciones físicas de la velocidad y la aceleración son las mismas que las primeras lecciones del capítulo, se debe recordar que estas cantidades son vectores. Además, hay que entender, a partir del conocimiento de vectores en estática, que a menudo será ventajoso expresar vectores de posición, velocidades y aceleraciones en términos de sus componentes escalares rectangulares [ecuaciones (11.27) y (11.28)]. Además, dados dos vectores **A** y **B**, recuérdese que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ si **A** y **B** son perpendiculares entre sí, en tanto que $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ si **A** y **B** son paralelos.

A. Análisis del movimiento de un proyectil. Muchos de los problemas que siguen a continuación tienen que ver con el movimiento bidimensional de un proyectil, donde es posible ignorar la resistencia del aire. En la sección 11.11 se formularon las ecuaciones que describen este tipo de movimiento, y se observó que la componente horizontal de la velocidad permanece constante (movimiento uniforme) en tanto que la componente vertical de la aceleración fue constante (movimiento uniformemente acelerado). Se consideraron por separado los movimientos horizontal y vertical de la partícula. Suponiendo que el proyectil se lanza desde el origen, se pueden escribir las dos ecuaciones

$$x = (v_x)_0 t \quad y = (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

1. Si se conoce la velocidad inicial y el ángulo de disparo, el valor de y correspondiente a cualquier valor dado de x (o el valor de x para cualquier valor de y) se obtiene resolviendo una de las ecuaciones anteriores para t y sustituyendo t en la otra ecuación [problema resuelto 11.7].

2. Si se conocen la velocidad inicial y las coordenadas de un punto de la trayectoria, y se desea determinar el ángulo de disparo α , la solución inicia expresando las componentes $(v_x)_0$ y $(v_y)_0$ de la velocidad inicial como funciones del ángulo α . Estas expresiones y los valores conocidos de x y y se sustituyen después en las ecuaciones anteriores. Por último, se resuelve la primera ecuación respecto a t y se sustituye ese valor de t en la segunda ecuación para obtener una ecuación trigonométrica en α , la cual se puede resolver para esa incógnita [problema resuelto 11.8].

(continúa)

B. Solución de problemas de movimiento relativo en traslación bidimensional.

En la sección 11.12 se vio que el movimiento absoluto de una partícula B puede obtenerse al combinar el movimiento de una partícula A y el *movimiento relativo* de B con respecto a un sistema de referencia unido a A que está en *traslación*. En ese caso es posible expresar la velocidad y la aceleración de B como se muestra en las ecuaciones (11.33) y (11.34), respectivamente.

1. Para visualizar el movimiento relativo de B con respecto a A , imagine que está usted unido a la partícula A cuando observa el movimiento de la partícula B . Por ejemplo, para un pasajero en el automóvil A del problema resuelto 11.9, el automóvil B parece dirigirse en dirección suroeste (el *sur* debe ser obvio; y el *oeste* se debe al hecho de que el automóvil A se mueve hacia el este; el automóvil B parece viajar entonces hacia el oeste). Esta conclusión es consistente con la dirección de $\mathbf{v}_{B/A}$.

2. Para resolver un problema de movimiento relativo primero se escriben las ecuaciones vectoriales (11.31), (11.33) y (11.34), las cuales relacionan los movimientos de las partículas A y B . Después debe usarse cualquiera de los siguientes métodos:

a) Construir los triángulos vectoriales correspondientes y resolverlos para el vector de posición, velocidad y aceleración deseados [problema resuelto 11.9].

b) Expresar todos los vectores en términos de sus componentes rectangulares y resolver los dos conjuntos independientes de ecuaciones escalares que se obtuvieron de ese modo. Si se decide por este método, asegúrese de elegir la misma dirección positiva para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de cada partícula.

Problemas

11.89 El movimiento de una partícula se define mediante las ecuaciones $x = 4t^3 - 5t^2 + 5t$ y $y = 5t^2 - 15t$, donde x y y se expresan en milímetros y t en segundos. Determine la velocidad y la aceleración cuando a) $t = 1$ s; b) $t = 2$ s.

11.90 El movimiento de una partícula se define mediante las ecuaciones $x = 2 \cos \pi t$ y $y = 1 - 4 \cos 2\pi t$, donde x y y se expresan en metros y t en segundos. Muestre que la trayectoria de la partícula es parte de la parábola que se muestra en la figura y determine la velocidad y la aceleración cuando a) $t = 0$, b) $t = 1.5$ s.

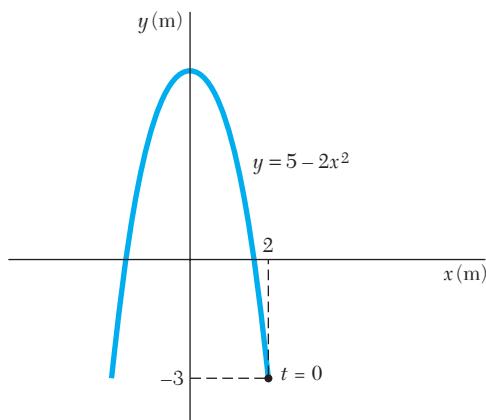


Figura P11.90

11.91 El movimiento de una partícula se define mediante las ecuaciones $x = t^2 - 8t + 7$ y $y = 0.5t^2 + 2t - 4$, donde x y y se expresan en metros y t en segundos. Determine a) la magnitud de la velocidad mínima alcanzada por la partícula, b) el tiempo, la posición y la dirección correspondientes a dicha velocidad.

11.92 El movimiento de una partícula se define mediante las ecuaciones $x = 4t - 2 \operatorname{sen} t$ y $y = 4 - 2 \cos t$, donde x y y se expresan en pulgadas y t en segundos. Bosqueje la trayectoria de la partícula y determine a) las magnitudes de las velocidades máxima y mínima alcanzadas por la partícula, b) los tiempos, las posiciones y las direcciones correspondientes a dichas velocidades.

11.93 El movimiento de una partícula se define mediante el vector de posición $\mathbf{r} = A(\cos t + t \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + A(\operatorname{sen} t - t \cos t)\mathbf{j}$, donde t se expresa en segundos. Determine los valores de t para los cuales el vector de posición y el vector de aceleración son a) perpendiculares, b) paralelos.

11.94 El movimiento amortiguado de una partícula que vibra se define mediante el vector de posición $\mathbf{r} = x_1(1 - 1/(t + 1))\mathbf{i} + (y_1 e^{-\pi t/2} \cos 2\pi t)\mathbf{j}$, donde t se expresa en segundos. Para $x_1 = 30$ mm y $y_1 = 20$ mm, determine la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula cuando a) $t = 0$, b) $t = 1.5$ s.

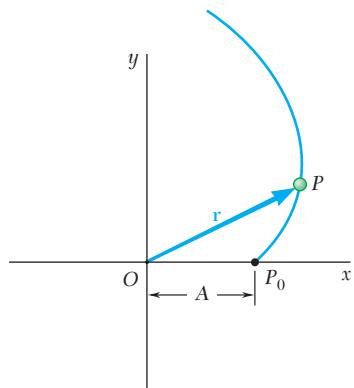


Figura P11.93

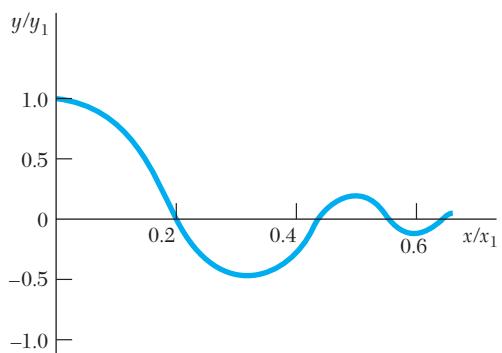


Figura P11.94

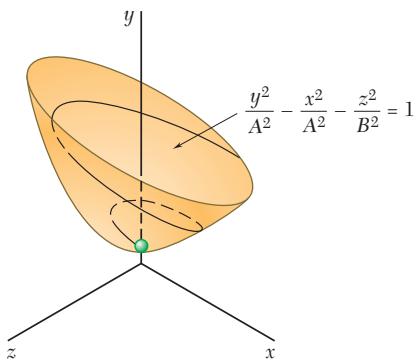


Figura P11.96

11.95 El movimiento tridimensional de una partícula se define mediante el vector de posición $\mathbf{r} = (Rt \cos \omega_n t)\mathbf{i} + ct\mathbf{j} + (Rt \sin \omega_n t)\mathbf{k}$. Determine las magnitudes de la velocidad y de la aceleración de la partícula. (La curva espacial que describe la partícula es una hélice cónica.)

***11.96** El movimiento tridimensional de una partícula se define mediante el vector de posición $\mathbf{r} = (At \cos t)\mathbf{i} + (A\sqrt{t^2 + 1})\mathbf{j} + (Bt \sin t)\mathbf{k}$, donde r y t se expresan en pies y segundos, respectivamente. Demuestre que la curva descrita por la partícula se encuentra sobre el hiperboloide $(y/A)^2 - (x/A)^2 - (z/B)^2 = 1$. Para $A = 3$ y $B = 1$, determine *a)* las magnitudes de la velocidad y de la aceleración cuando $t = 0$, *b)* el valor diferente de cero más pequeño de t para el cual el vector de posición y el vector de velocidad son perpendiculares entre sí.

11.97 Un avión diseñado para dejar caer agua sobre incendios forestales vuela sobre una línea recta horizontal a 315 km/h a una altura de 80 m. Determine la distancia d a la que el piloto debe soltar el agua de manera que caiga sobre el incendio en B .

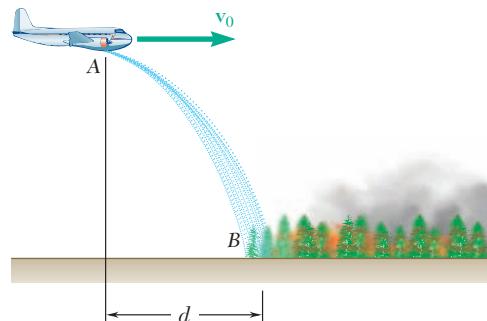


Figura P11.97

11.98 Tres niños se lanzan bolas de nieve entre sí. El niño A lanza una bola de nieve con una velocidad horizontal v_0 . Si la bola de nieve pasa justo sobre la cabeza del niño B y golpea al niño C , determine *a)* el valor de v_0 , *b)* la distancia d .

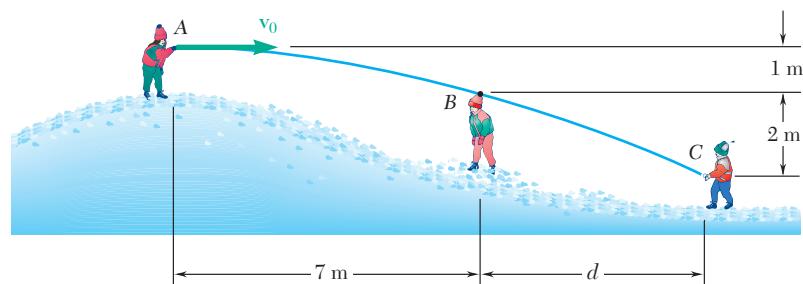


Figura P11.98

- 11.99** Mientras entrega periódicos, una joven lanza uno de ellos con velocidad horizontal v_0 . Determine el intervalo de valores de v_0 si el periódico debe caer entre los puntos *B* y *C*.

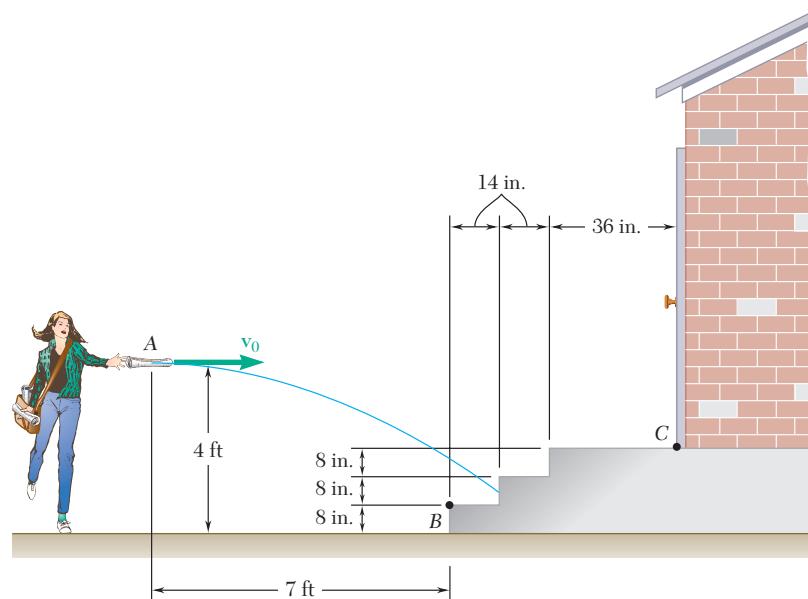


Figura P11.99

- 11.100** Una máquina lanzadora “dispara” pelotas de béisbol con una velocidad horizontal v_0 . Si se sabe que la altura h varía entre 31 in. y 42 in., determine *a*) el rango de valores de v_0 , *b*) los valores de α correspondientes a $h = 31$ in. y $h = 42$ in.

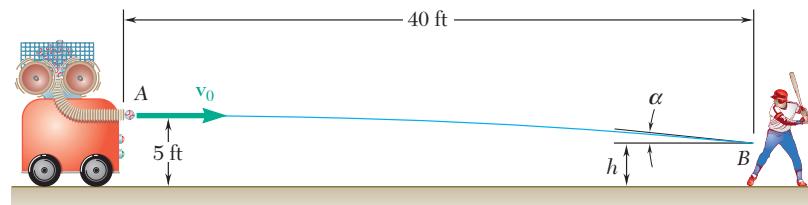


Figura P11.100

- 11.101** Un jugador de voleibol sirve la pelota con una velocidad inicial v_0 que tiene una magnitud 13.40 m/s y forma un ángulo de 20° con la horizontal. Determine *a*) si la pelota pasará sobre el borde superior de la red, *b*) a qué distancia de la red aterrizará la pelota.

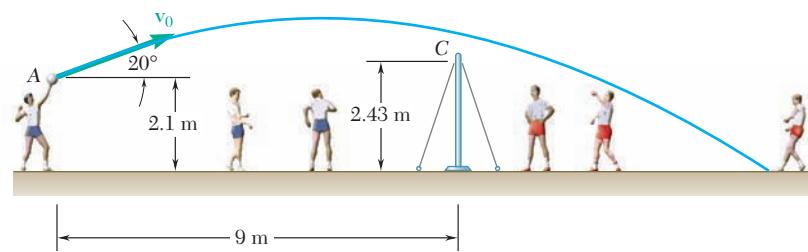


Figura P11.101

- 11.102** Se vierte leche dentro de un vaso que tiene una altura de 140 mm y un diámetro interior de 66 mm. Si la velocidad inicial de la leche es de 1.2 m/s a un ángulo de 40° con la horizontal, determine el rango de valores de la altura h para los cuales la leche entrará en el vaso.

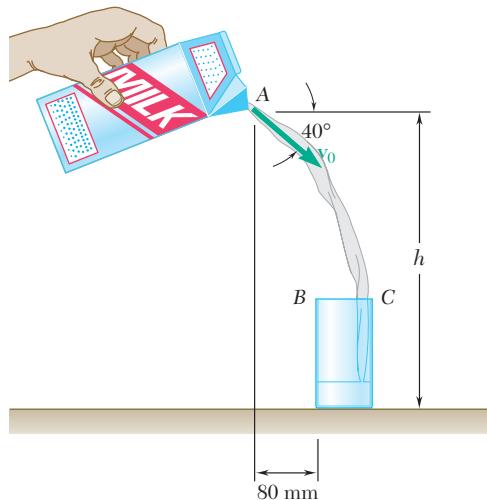


Figura P11.102

- 11.103** Un golfista golpea la pelota con una velocidad inicial de 160 ft/s, a un ángulo de 25° con la horizontal. Si el terreno de juego desciende con un ángulo promedio de 5° , determine la distancia d entre el golfista y el punto B donde la pelota toca el terreno por primera vez.

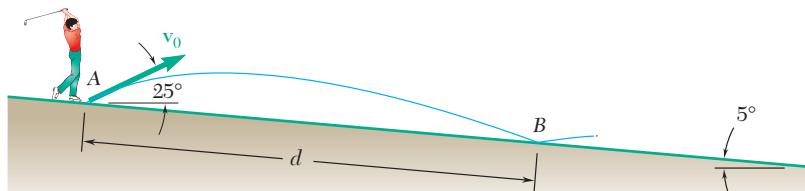


Figura P11.103

- 11.104** Por el cañón de un desagüe fluye agua con una velocidad inicial de 2.5 ft/s a un ángulo de 15° con la horizontal. Determine el rango de valores de la distancia d para los cuales el agua caerá dentro del recipiente BC .

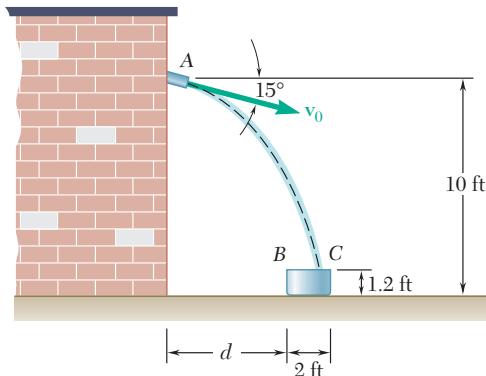


Figura P11.104

- 11.105** Mediante una banda transportadora se descarga arena en A y cae en la parte superior de un montículo en B. Si se sabe que la banda transportadora forma un ángulo $\alpha = 20^\circ$ con la horizontal, determine la velocidad inicial v_0 de la banda.

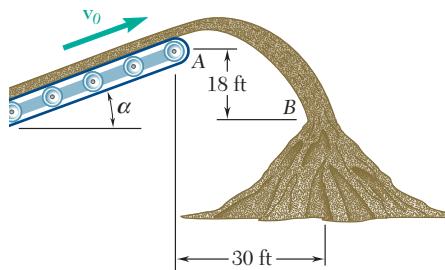


Figura P11.105

- 11.106** Una jugadora de basquetbol lanza un tiro cuando se encuentra a 16 ft del tablero. Si la pelota tiene una velocidad inicial v_0 a un ángulo de 30° con la horizontal, determine el valor de v_0 cuando d es igual a a) 9 in., b) 17 in.

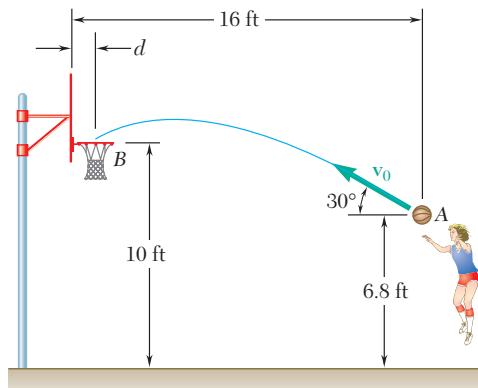


Figura P11.106

- 11.107** Un grupo de niños está lanzando pelotas a través de una llanta con 0.72 m de diámetro interior, la cual cuelga de un árbol. Un niño lanza una pelota con una velocidad inicial v_0 a un ángulo de 3° con la horizontal. Determine el intervalo de valores de v_0 para los cuales la pelota pasará a través de la llanta.

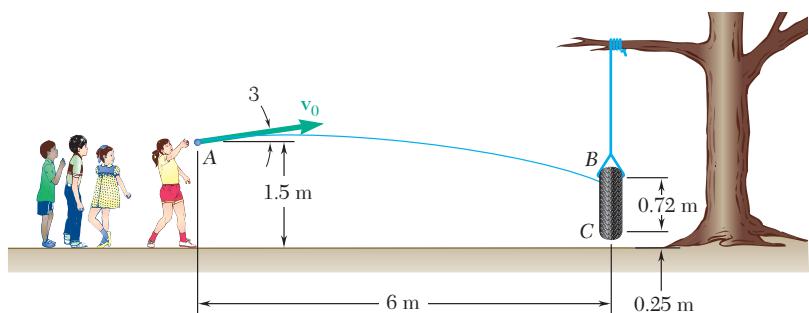


Figura P11.107

- 11.108** La boquilla en A descarga agua de enfriamiento con una velocidad inicial v_0 a un ángulo de 6° con la horizontal sobre una rueda rectificadora de 350 mm de diámetro. Determine el rango de valores de la velocidad inicial para la cual el agua caerá sobre la rueda entre los puntos B y C.

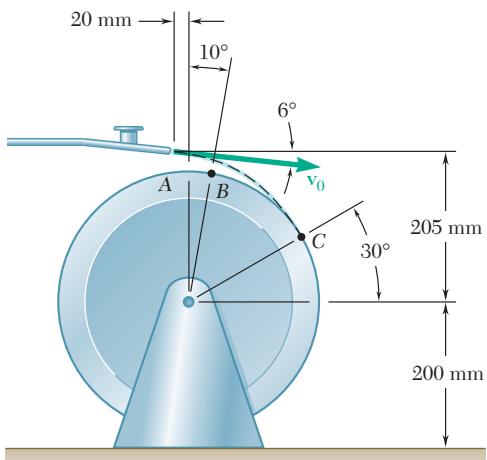


Figura P11.108

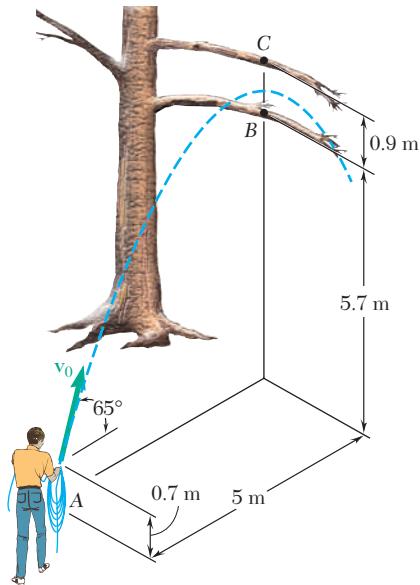


Figura P11.109

11.109 Mientras sostiene uno de sus extremos, un trabajador lanza un lazo de cuerda sobre la rama más baja de un árbol. Si lanza la cuerda con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 a un ángulo de 65° con la horizontal, determine el intervalo de valores de v_0 para los cuales la cuerda sólo sobrepasará a la rama más baja.

11.110 Una pelota se deja caer sobre un escalón en el punto A y rebota con una velocidad \mathbf{v}_0 a un ángulo de 15° con la vertical. Determine el valor de v_0 si se sabe que justo antes de que la pelota rebote en el punto B su velocidad \mathbf{v}_B forma un ángulo de 12° con la vertical.

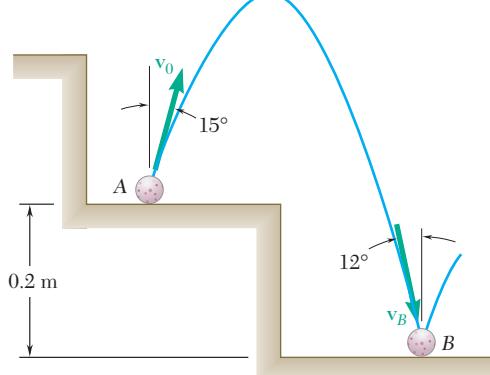


Figura P11.110

11.111 Un cohete a escala se lanza desde el punto A con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 de 250 ft/s . Si el paracaídas de descenso del cohete no se abre y éste aterriza a 400 ft de A , determine *a)* el ángulo α que \mathbf{v}_0 forma con la vertical, *b)* la máxima altura h que alcanza el cohete, *c)* la duración del vuelo.

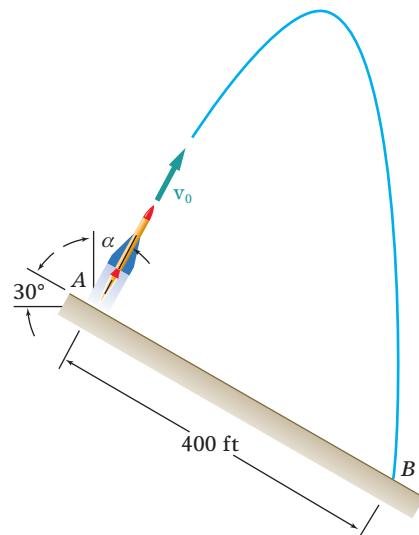


Figura P11.111

- 11.112** La velocidad inicial v_0 de un disco de hockey es de 105 mi/h. Determine *a)* el valor máximo (menor que 45°) del ángulo α para el cual el disco entra en la portería, *b)* el tiempo correspondiente que se requiere para que el disco llegue a la portería.

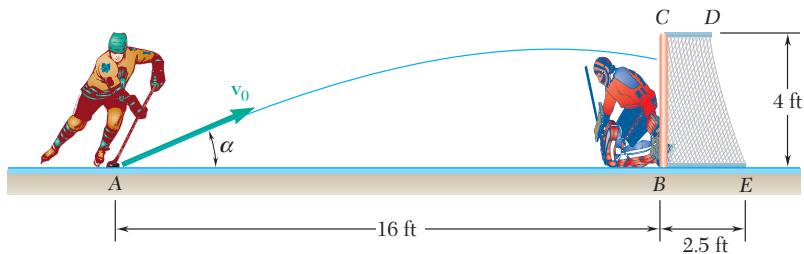


Figura P11.112

- 11.113** El lanzador en un juego de softbol lanza una pelota con una velocidad v_0 de 72 km/h a un ángulo α con la horizontal. Si la altura de la pelota en el punto *B* es de 0.68 m, determine *a)* el ángulo α , *b)* el ángulo θ que forma la velocidad de la pelota en el punto *B* con la horizontal.

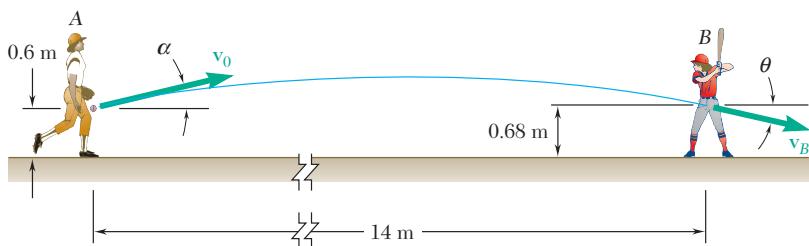


Figura P11.113

- *11.114** Un montañista planea saltar desde *A* hasta *B* por encima de un precipicio. Determine el valor mínimo de la velocidad inicial v_0 del montañista y el valor correspondiente del ángulo α para que pueda caer en el punto *B*.

- 11.115** Un rociador de jardín que descarga agua con una velocidad inicial v_0 de 8 m/s se usa para regar un jardín de vegetales. Determine la distancia d al punto *B* más lejano que será rociado y el ángulo α correspondiente cuando *a)* los vegetales apenas comienzan a crecer, *b)* la altura h de la planta de maíz es de 1.8 m.

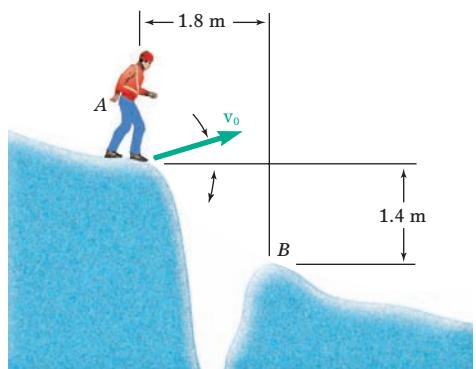


Figura P11.114

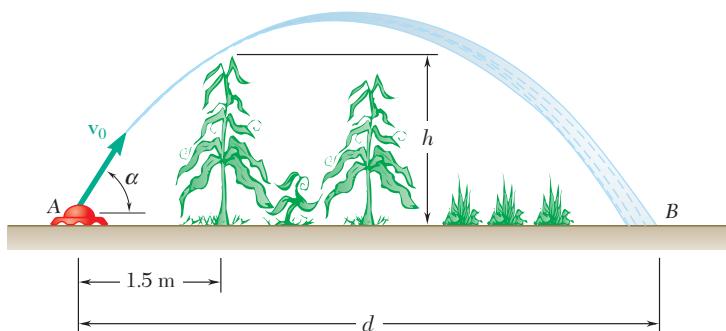


Figura P11.115

11.116 Un trabajador utiliza agua a alta presión para limpiar el interior de un largo tubo de desagüe. Si el agua se descarga con una velocidad inicial v_0 de 11.5 m/s, determine *a)* la distancia d hasta el punto B más lejano sobre la parte superior de la tubería que el agua puede limpiar desde la posición del trabajador en A , *b)* el ángulo α correspondiente.

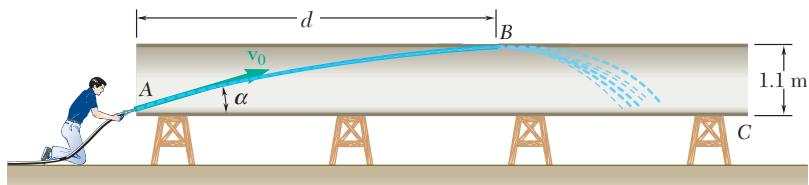


Figura P11.116

11.117 Un bloque deslizante A se mueve hacia abajo a una rapidez de 0.5 m/s, la velocidad con respecto a A de la porción B de la banda entre las poleas locas C y D es $v_{CD/A} = 2$ m/s $\angle \theta$. Determine la velocidad de la porción CD de la banda cuando *a)* $\theta = 45^\circ$, *b)* $\theta = 60^\circ$.

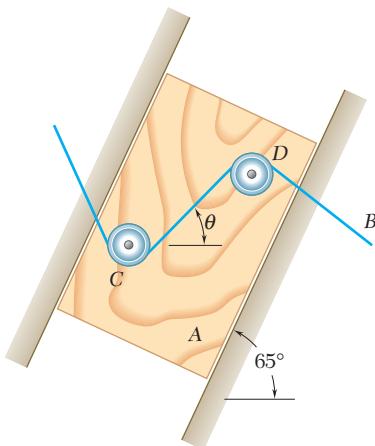


Figura P11.117

11.118 Las velocidades de los esquiadores A y B son las que se muestran en la figura. Determine la velocidad de A con respecto a B .



Figura P11.118

- 11.119** Un radar con base en tierra indica que un transbordador sale de su muelle a una velocidad $\mathbf{v} = 9.8$ nudos $\angle 70^\circ$, en tanto que los instrumentos a bordo del transbordador indican una velocidad de 10 nudos y una dirección de 30° hacia el suroeste con relación al río. Determine la velocidad de este último.

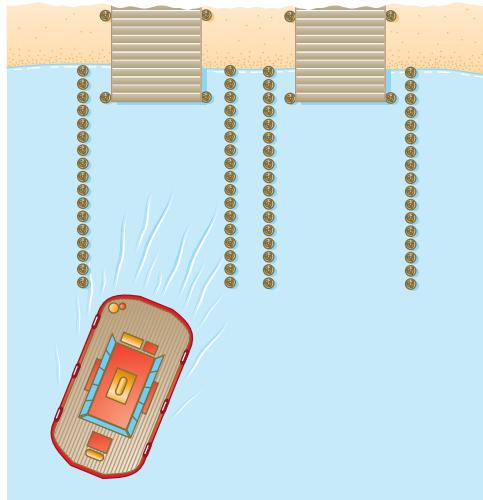


Figura P11.119

- 11.120** Los aviones A y B vuelan a la misma altura y rastrean el ojo del huracán C . La velocidad relativa de C con respecto a A es $\mathbf{v}_{C/A} = 235$ mi/h $\angle 75^\circ$ y la velocidad relativa de C con respecto a B es $\mathbf{v}_{C/B} = 260$ mi/h $\angle 40^\circ$. Determine *a)* la velocidad relativa de B con respecto a A , *b)* la velocidad de A si el radar ubicado en tierra indica que el huracán se mueve con una rapidez de 24 mi/h rumbo al norte, *c)* el cambio en la posición de C con respecto a B durante un intervalo de 15 minutos.

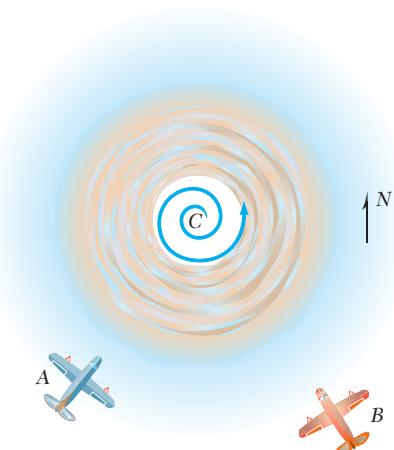


Figura P11.120

- 11.121** Las velocidades de los trenes A y B son las que se indican en la figura. Si se sabe que la rapidez de cada tren es constante y B alcanza el cruce 10 min después de que A lo hizo, determine *a)* la velocidad relativa de B con respecto a A , *b)* la distancia entre los frentes de las máquinas 3 min después de que A pasó por el crucero.

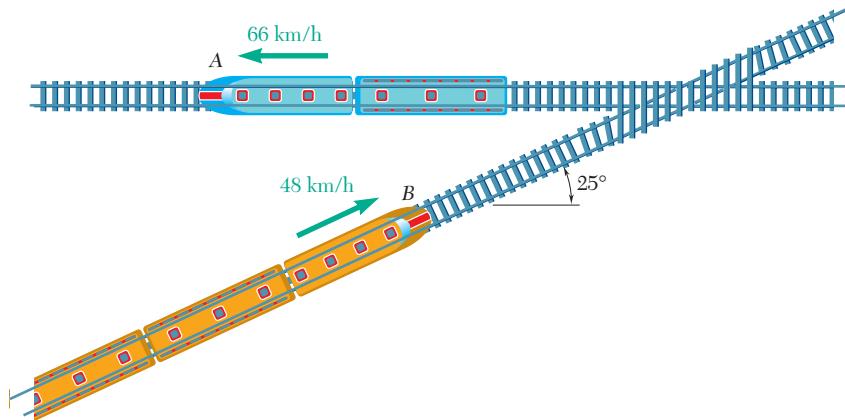


Figura P11.121

11.122 Si se sabe que la velocidad del bloque *B* con respecto al bloque *A* es $\mathbf{v}_{B/A} = 5.6 \text{ m/s}$ a 70° , determine las velocidades de *A* y *B*.

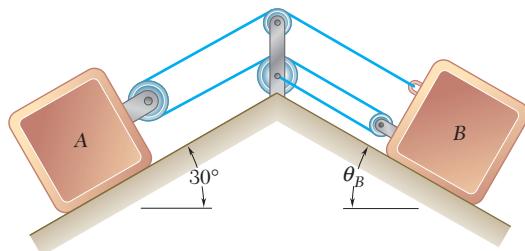


Figura P11.122

11.123 Si se sabe que en el instante mostrado el bloque *A* tiene una velocidad de 8 in./s y una aceleración de 6 in./s², ambas dirigidas hacia abajo sobre el plano inclinado, determine *a)* la velocidad del bloque *B*, *b)* la aceleración del bloque *B*.

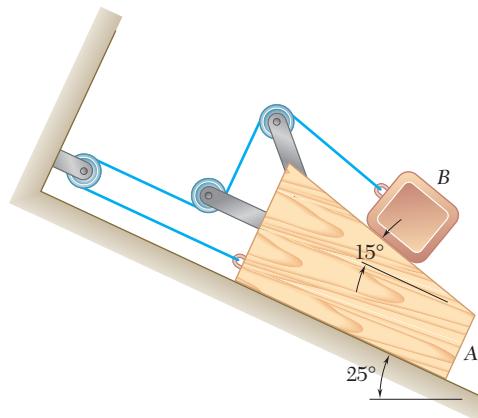


Figura P11.123

11.124 Si se sabe que en el instante mostrado el ensamblaje *A* tiene una velocidad de 9 in./s y una aceleración de 15 in./s², ambas dirigidas hacia abajo, determine *a)* la velocidad del bloque *B*, *b)* la aceleración del bloque *B*.

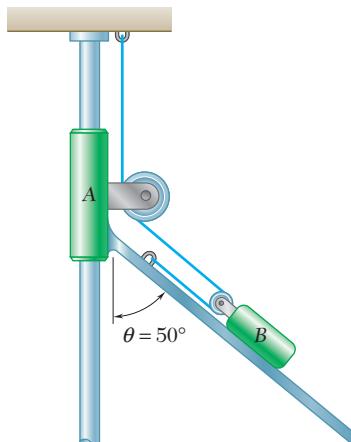


Figura P11.124

- 11.125** El ensamble de la barra A y la cuña B inicia su movimiento desde el reposo y se mueve hacia la derecha con una aceleración constante de 2 mm/s^2 . Determine *a*) la aceleración de la cuña C, *b*) la velocidad de la cuña C cuando $t = 10 \text{ s}$.

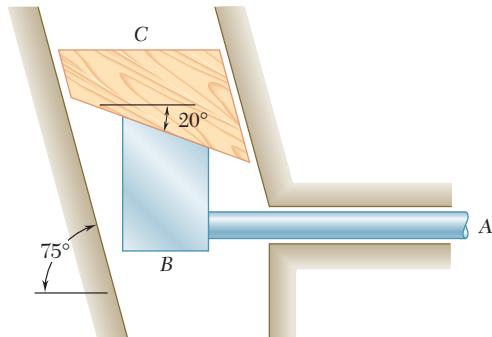


Figura P11.125

- 11.126** Cuando el camión que se muestra empieza a retroceder con una aceleración constante de 1.2 m/s^2 , la sección externa B de su brazo comienza a retraerse con una aceleración constante de 0.5 m/s^2 en relación con el camión. Determine *a*) la aceleración de la sección B, *b*) la velocidad de la sección B cuando $t = 2 \text{ s}$.

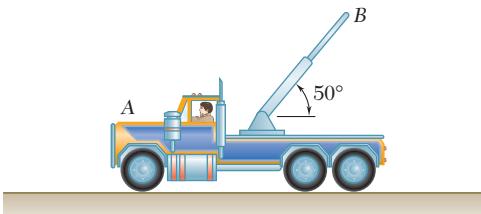


Figura P11.126

- 11.127** La banda transportadora A, que forma un ángulo de 20° con la horizontal, se mueve a una rapidez constante de 4 ft/s y se usa para cargar un avión. Si el trabajador lanza una bolsa de equipaje B con una velocidad inicial de 2.5 ft/s a un ángulo de 30° con la horizontal, determine la velocidad de la bolsa de equipaje relativa a la banda cuando cae sobre esta última.

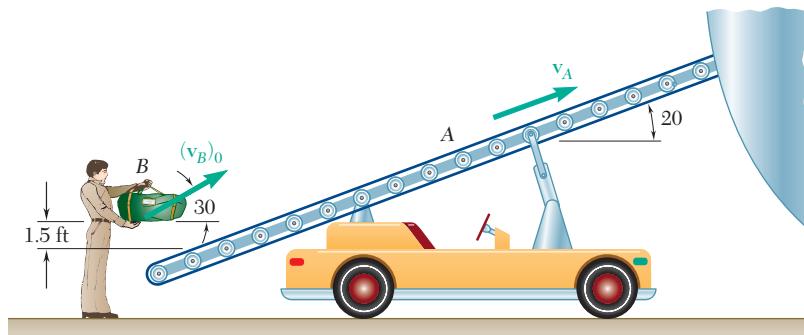


Figura P11.127

- 11.128** Determine la velocidad requerida de la banda B para que la velocidad relativa con la cual la arena golpea a dicha banda sea *a*) vertical, *b*) lo más pequeña posible.

- 11.129** Cuando se observa desde un barco que se mueve hacia el este a 9 km/h , el viento parece soplar desde el sur. Después de que el barco ha cambiado su curso y su rapidez, y se mueve hacia el norte a 6 km/h , el viento parece soplar desde el suroeste. Si se supone que la velocidad del viento es constante durante el periodo de observación, determine la magnitud y la dirección reales del viento.

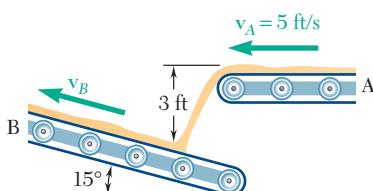


Figura P11.128

11.130 Cuando una pequeña lancha viaja hacia el norte a 5 km/h, una bandera montada sobre su popa forma un ángulo $\theta = 50^\circ$ con la línea central de la lancha en la forma que se indica en la figura. Un breve tiempo después, cuando el bote se desplaza hacia el este a 20 km/h, el ángulo θ es otra vez de 50° . Determine la rapidez y la dirección del viento.

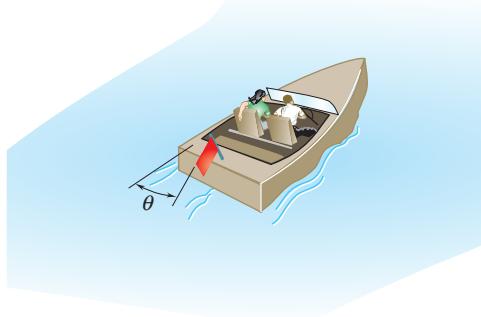


Figura P11.30

11.131 Como parte de una exhibición en una tienda departamental, un modelo de tren D corre sobre una vía ligeramente inclinada entre las escaleras eléctricas que suben y las que bajan. Cuando el tren y los compradores pasan por el punto A , el tren aparenta bajar a un ángulo de 22° con la horizontal desde la perspectiva de un comprador sobre la escalera B que sube, mientras que para un comprador sobre la escalera C que baja, el tren aparenta moverse hacia arriba a un ángulo de 23° con la horizontal y parece trasladarse hacia la izquierda. Si se sabe que la rapidez de las escaleras es de 3 ft/s, determine la rapidez y la dirección del tren.

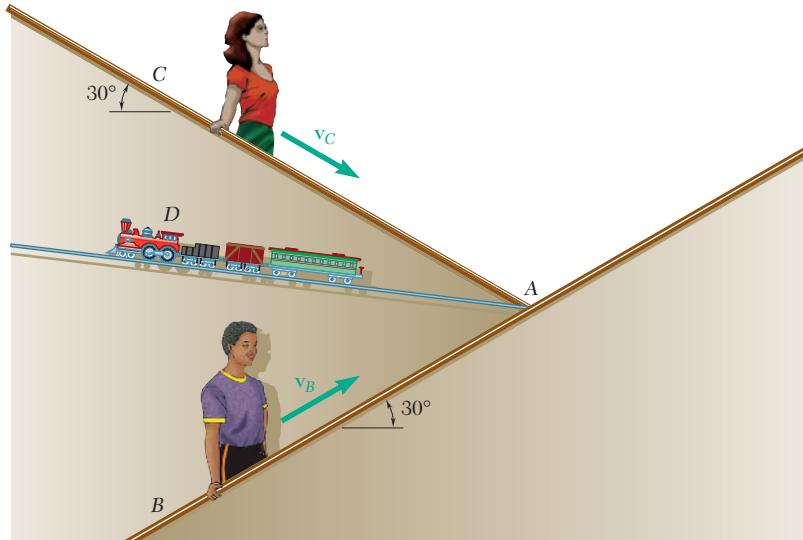


Figura P11.131

11.132 Las trayectorias de las gotas de lluvia durante una tormenta parecen formar un ángulo de 75° con la vertical y apuntar hacia la izquierda cuando se observan por la ventana del lado izquierdo de un automóvil que viaja hacia el norte a una rapidez de 40 mi/h. Cuando se observan por la ventana del lado derecho de un automóvil que viaja hacia el sur a una rapidez de 30 mi/h, las gotas de lluvia parecen formar un ángulo de 60° con la vertical. Si el conductor del automóvil que viaja hacia el norte se detuviera, ¿a qué ángulo y con qué rapidez observaría que caen las gotas?

11.13. COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL

11.13. Componentes tangencial y normal

665

En la sección 11.9 se indicó que la velocidad de una partícula es un vector tangente a la trayectoria de la misma, pero que, en general, la aceleración no es tangente a la trayectoria. En ocasiones resulta conveniente descomponer la aceleración en componentes dirigidas, respectivamente, a lo largo de la tangente y la normal de la trayectoria de la partícula.

Movimiento plano de una partícula. Primero considérese una partícula que se mueve a lo largo de una curva contenida en el plano de la figura. Sea P la posición de la partícula en un instante dado. Se une en P a un vector unitario \mathbf{e}_t tangente a la trayectoria de la partícula y que apunta en la dirección de movimiento (figura 11.21a). Sea \mathbf{e}'_t el vector unitario correspondiente a la posición P' de la partícula en un instante posterior. Si se dibujan ambos vectores desde el mismo origen O' , se define el vector $\Delta\mathbf{e}_t = \mathbf{e}'_t - \mathbf{e}_t$ (figura 11.21b). Puesto que \mathbf{e}_t y \mathbf{e}'_t son de longitud unitaria, sus puntas se encuentran sobre un círculo de radio 1. Si se denota por $\Delta\theta$ el ángulo formado por \mathbf{e}_t y \mathbf{e}'_t , se encuentra que la magnitud de $\Delta\mathbf{e}_t$ es $2 \sin(\Delta\theta/2)$. Al considerar ahora que el vector $\Delta\mathbf{e}_t/\Delta\theta$, se advierte que a medida que $\Delta\theta$ se approxima a cero, este vector se vuelve tangente al círculo unitario de la figura 11.21b), esto es, perpendicular a \mathbf{e}_t , y que su magnitud tiende a

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1$$

En consecuencia, el vector obtenido en el límite es un vector unitario a lo largo de la normal a la trayectoria de la partícula, en la dirección hacia la cual cambia \mathbf{e}_t . Al denominar este vector por \mathbf{e}_n , se escribe

$$\mathbf{e}_n = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{e}_t}{\Delta\theta}$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta} \quad (11.35)$$

Puesto que la velocidad \mathbf{v} de la partícula es tangente a la trayectoria, puede expresarse como el producto del escalar v y el vector unitario \mathbf{e}_t . Se tiene

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t \quad (11.36)$$

Para obtener la aceleración de la partícula, (11.36) se diferenciará con respecto a t . Al aplicar la regla de la diferenciación del producto de un escalar de una función escalar (sección 11.10), se escribe

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} \quad (11.37)$$

Pero

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt}$$

Al recordar de (11.16) que $ds/dt = v$, de (11.35) que $d\mathbf{e}_t/d\theta = \mathbf{e}_n$, y del cálculo elemental que $d\theta/ds$ es igual a $1/\rho$, donde ρ es el radio de curvatura de la trayectoria en P (figura 11.22), se tiene

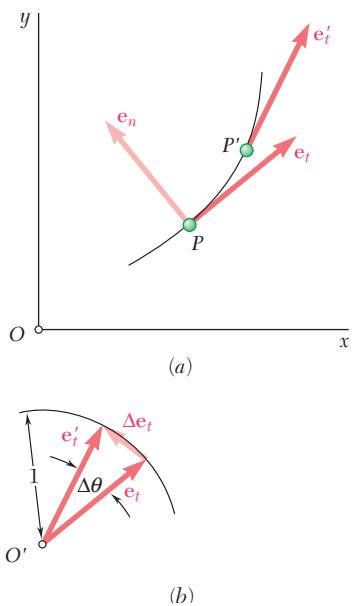


Figura 11.21

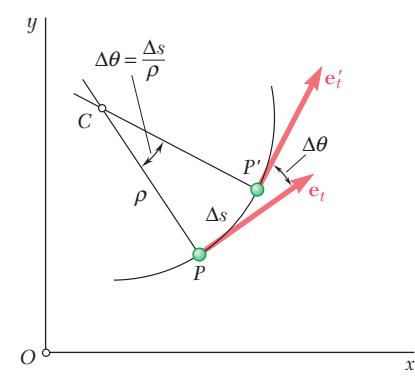


Figura 11.22



Fotografía 11.5 Los pasajeros de un tren que pasa por una curva experimentarán una aceleración normal hacia el centro de curvatura de la trayectoria.

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{v}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (11.38)$$

Si se sustituye en (11.37), se obtiene

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (11.39)$$

De tal modo, las componentes escalares de la aceleración son

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (11.40)$$

Las relaciones obtenidas expresan que la *magnitud de la componente tangencial de la aceleración* es igual a la *razón de cambio de la velocidad de la partícula*, en tanto que la *magnitud de la componente normal* es igual al *cuadrado de la velocidad dividida entre el radio de curvatura de la trayectoria en P*. Si aumenta la velocidad de la partícula, a_t es positiva y la componente vectorial \mathbf{a}_t apunta en la dirección de movimiento. Si disminuye la velocidad de la partícula, a_t es negativa y \mathbf{a}_t apunta contra la dirección del movimiento. La componente vectorial \mathbf{a}_n , por otro lado, *siempre se dirige hacia el centro de curvatura C de la trayectoria* (figura 11.23).

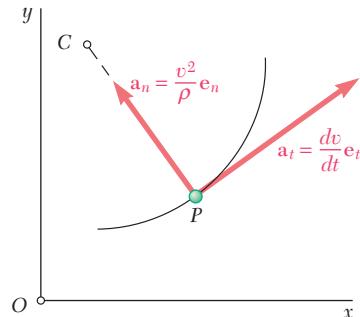


Figura 11.23

De lo anterior se concluye que la magnitud de la componente tangencial de la aceleración refleja un cambio en la magnitud de la velocidad de la partícula, mientras que su componente normal refleja un cambio en su dirección de movimiento. La aceleración de una partícula será cero sólo si ambas de sus componentes son cero. En consecuencia, la aceleración de una partícula que se mueve con velocidad constante a lo largo de una curva no será cero, a menos que la partícula pase por un punto de inflexión de la curva (donde el radio de curvatura es infinito) o a menos que la curva sea una línea recta.

El hecho de que la componente normal de la aceleración dependa del radio de curvatura de la trayectoria que sigue la partícula se toma en cuenta en el diseño de estructuras o mecanismos tan diferentes como las alas de los aviones, las vías de ferrocarril y las levas. Para evitar cambios repentinos en la aceleración de las partículas de aire que fluyen por las alas, los perfiles de éstas se diseñan sin ningún cambio brusco en la curvatura. Se tiene igual cuidado al diseñar curvas de vías de ferrocarril, para evitar cambios bruscos en la aceleración de los vagones (lo cual podría dañar el equipo y ser incómodo para los pasaje-

ros). Por ejemplo, a una sección recta de la vía nunca le sigue de inmediato una sección circular. Se recurre a secciones de transición especiales que ayudan a pasar de manera suave del radio de curvatura infinito de la sección recta al radio finito de la vía circular. Del mismo modo, en el diseño de levas de alta velocidad se evitan los cambios abruptos en la aceleración utilizando curvas de transición que producen un cambio continuo de aceleración.

Movimiento de una partícula en el espacio. Las relaciones (11.39) y (11.40) se cumplen en el caso de una partícula que se mueve a lo largo de una curva en el espacio. Sin embargo, puesto que hay un número infinito de líneas rectas que son perpendiculares a la tangente en un punto dado P de una curva en el espacio, es necesario definir con más precisión la dirección del vector unitario \mathbf{e}_n .

Se considerarán de nuevo los vectores unitarios \mathbf{e}_t y \mathbf{e}'_t tangentes a la trayectoria de la partícula en dos puntos vecinos P y P' (figura 11.24a) y el vector $\Delta\mathbf{e}_t$ que representa la diferencia entre \mathbf{e}_t y \mathbf{e}'_t (figura 11.24b). Imagine ahora un plano que pasa por P (figura 11.24a) paralelo al plano definido por los vectores \mathbf{e}_t , \mathbf{e}'_t y $\Delta\mathbf{e}_t$ (figura 11.24b). Este plano contiene la tangente a la curva en P y es paralelo a la tangente en P' . Si

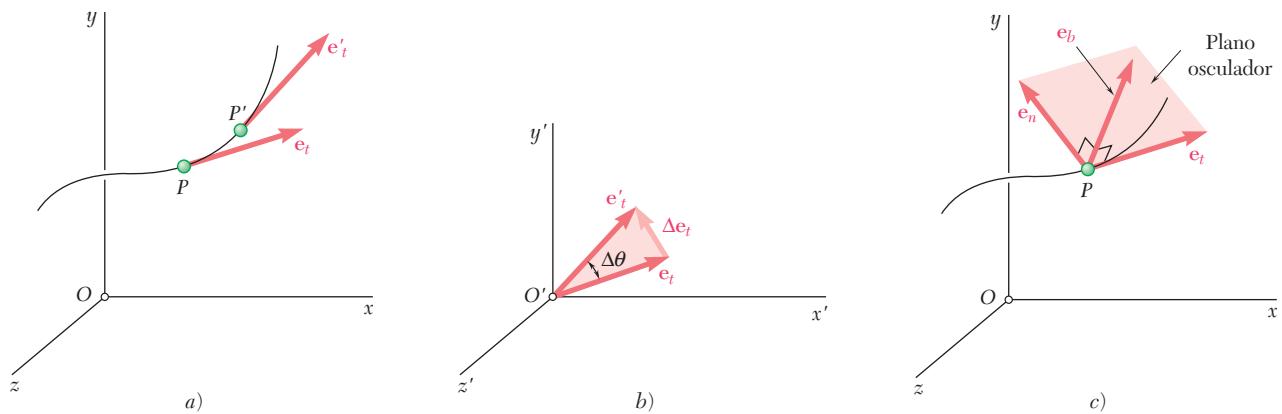


Figura 11.24

se deja que P' se acerque a P , se obtiene en el límite el plano que mejor se ajuste a la curva en la vecindad de P . Este plano recibe el nombre de *plano osculador* en P .[†] De esta definición se deduce que el plano osculador contiene al vector unitario \mathbf{e}_n , puesto que este vector representa el límite del vector $\Delta\mathbf{e}_t/\Delta\theta$. La normal definida por \mathbf{e}_n está consecuentemente contenida en el *plano osculador*; ésta recibe el nombre de *normal principal* en P . El vector unitario $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$, que completa la triada derecha \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n , \mathbf{e}_b (figura 11.24c) define la *binormal* en P . En consecuencia, la binormal es perpendicular al plano osculador. Se concluye que la aceleración de la partícula en P puede descomponerse en dos componentes, una a lo largo de la tangente, y la otra a lo largo de la normal principal en P , como se indica en la ecuación (11.39). Hay que observar que la aceleración no tiene componente a lo largo de la binormal.

[†]Del latín *osculari*, besar.

11.14. COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL

En ciertos problemas de movimiento plano, la posición de la partícula P se define mediante sus coordenadas polares r y θ (figura 11.25a). En ese caso es conveniente descomponer la velocidad y la aceleración de la partícula en componentes paralela y perpendicular, respectivamente, a la línea OP . Éstas se conocen como *componentes radial* y *transversal*.

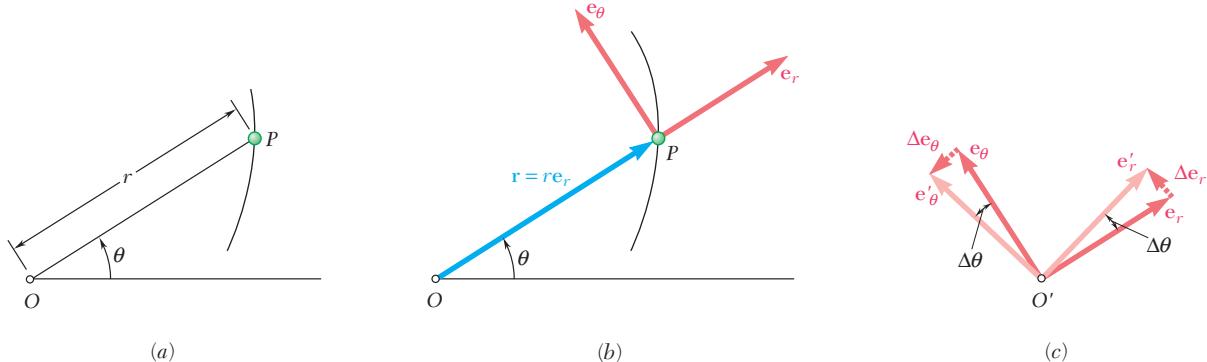


Figura 11.25



Fotografía 11.6 Los pedales de un aparato entrenador elíptico realizan un movimiento curvilíneo.

Se unen a P dos vectores unitarios, \mathbf{e}_r y \mathbf{e}_θ (figura 11.25b). El vector \mathbf{e}_r está dirigido a lo largo de OP y el vector \mathbf{e}_θ se obtiene al rotar \mathbf{e}_r 90° en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. El vector unitario \mathbf{e}_r define la dirección *radial*, esto es, la dirección en la cual P se movería si r aumentara y θ se mantuviera constante; el vector unitario \mathbf{e}_θ define la dirección *transversal*, es decir, la dirección en la que P se movería si θ aumentara y r se mantuviera constante. Una operación similar a la que se usó en la sección 11.13 para determinar la derivada del vector unitario \mathbf{e}_t produce las relaciones

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r \quad (11.41)$$

donde $-\mathbf{e}_r$ denota un vector unitario de sentido positivo respecto a \mathbf{e}_r (figura 11.25c). Mediante la regla de la cadena, se expresan las derivadas del tiempo de los vectores unitarios \mathbf{e}_r y \mathbf{e}_θ del modo siguiente:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r \frac{d\theta}{dt}$$

o, al utilizar puntos para indicar derivación con respecto a t ,

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r \quad (11.42)$$

Para obtener la velocidad \mathbf{v} de la partícula P , se expresa la posición del vector \mathbf{r} de P como el producto del escalar r y el vector unitario \mathbf{e}_r y se deriva con respecto a t :

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

o, al recordar la primera de las relaciones (11.42),

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (11.43)$$

Al derivar otra vez con respecto a t para obtener la aceleración, se escribe

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_\theta$$

o, al sustituir $\dot{\mathbf{e}}_r$ y $\dot{\mathbf{e}}_\theta$, de (11.42) y factorizar \mathbf{e}_r y \mathbf{e}_θ ,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (11.44)$$

Las componentes escalares de la velocidad y la aceleración en las variaciones radial y transversal son, por lo tanto,

$$v_r = \dot{r} \quad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (11.45)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta} \quad (11.46)$$

Es importante advertir que a_r no es igual a la derivada respecto al tiempo de v_r y que a_θ no es igual a la derivada en el tiempo de v_θ .

En el caso de una partícula que se mueve a lo largo de un círculo de centro O , se tiene $r = \text{constante}$ y $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, y las fórmulas (11.43) y (11.44) se reducen, respectivamente, a

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (11.47)$$

Extensión al movimiento de una partícula en el espacio: coordenadas cilíndricas. La posición de una partícula P en el espacio en algunas ocasiones se define mediante sus coordenadas cilíndricas R , θ y z (figura 11.26a). En ese caso es conveniente utilizar los vectores unitarios \mathbf{e}_R , \mathbf{e}_θ y \mathbf{k} que se indican en la figura 11.26b. Al descomponer el vector de posición \mathbf{r} de la partícula P en componentes a lo largo de los vectores unitarios, se escribe

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R + z\mathbf{k} \quad (11.48)$$

Al observar que \mathbf{e}_R y \mathbf{e}_θ definen, respectivamente, las direcciones radial y transversal en el plano horizontal xy , y que el vector \mathbf{k} , el cual define la dirección *axial*, es constante en dirección así como en magnitud, se verifica con facilidad que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + z\mathbf{k} \quad (11.49)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + z\mathbf{k} \quad (11.50)$$

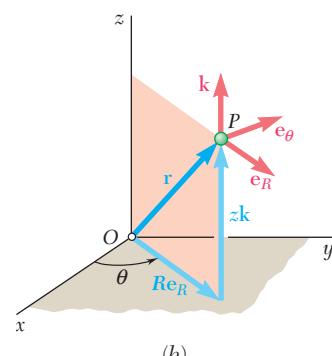
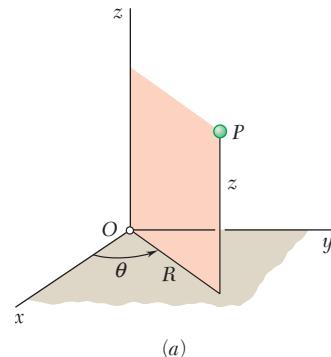
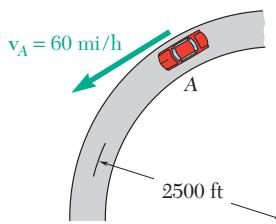


Figura 11.26



PROBLEMA RESUELTO 11.10

Un automovilista viaja sobre una sección curva de una autopista de 2 500 ft de radio a una rapidez de 60 mi/h. El automovilista aplica repentinamente los frenos, provocando que el automóvil se desacelere a una tasa constante. Si se sabe que después de 8 s la rapidez se ha reducido a 45 mi/h, determine la aceleración del automóvil inmediatamente después de que se han aplicado los frenos.

SOLUCIÓN

Componente tangencial de la aceleración. Primero se expresan las velocidades en ft/s.

$$60 \text{ mi/h} = \left(60 \frac{\text{mi}}{\text{h}}\right) \left(\frac{5280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 88 \text{ ft/s}$$

$$45 \text{ mi/h} = 66 \text{ ft/s}$$

Como el automóvil desacelera a una tasa constante, se tiene

$$a_t = \text{promedio } a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{66 \text{ ft/s} - 88 \text{ ft/s}}{8 \text{ s}} = -2.75 \text{ ft/s}^2$$

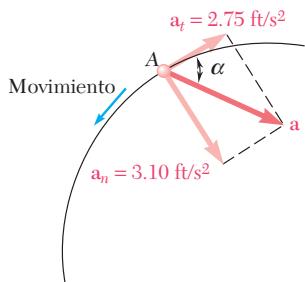
Componente normal de la aceleración. Inmediatamente después de que los frenos se han aplicado, la rapidez se mantiene en 88 ft/s, y se tiene

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(88 \text{ ft/s})^2}{2500 \text{ ft}} = 3.10 \text{ ft/s}^2$$

Magnitud y dirección de la aceleración. La magnitud y dirección de la resultante \mathbf{a} de las componentes \mathbf{a}_n y \mathbf{a}_t son

$$\tan \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{3.10 \text{ ft/s}^2}{2.75 \text{ ft/s}^2} \quad \alpha = 48.4^\circ$$

$$a = \frac{a_n}{\sin \alpha} = \frac{3.10 \text{ ft/s}^2}{\sin 48.4^\circ} \quad \mathbf{a} = 4.14 \text{ ft/s}^2$$



PROBLEMA RESUELTO 11.11

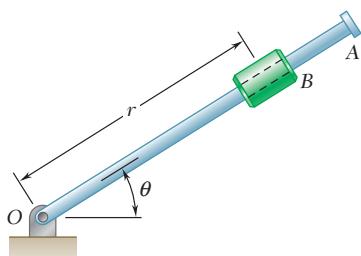
Determine el radio mínimo de curvatura de la trayectoria descrita por el proyectil considerado en el problema resuelto 11.7.

SOLUCIÓN

Puesto que $a_n = v^2/\rho$, tenemos que $\rho = v^2/a_n$. El radio será pequeño cuando v sea pequeño, o cuando a_n sea grande. La rapidez v es mínima en la parte superior de la trayectoria, pues $v_y = 0$ en ese punto; a_n es máxima en el mismo punto, ya que la dirección de la vertical coincide con la dirección de la normal. Por lo tanto, el radio mínimo de curvatura ocurre en la parte superior de la trayectoria. En este punto, se tiene

$$v = v_x = 155.9 \text{ m/s} \quad a_n = a = 9.81 \text{ m/s}^2$$

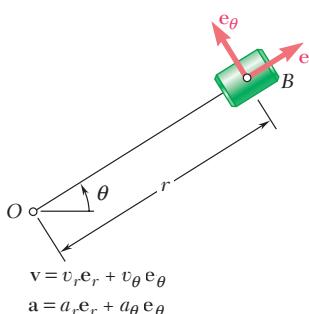
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(155.9 \text{ m/s})^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \quad \rho = 2480 \text{ m}$$



PROBLEMA RESUELTO 11.12

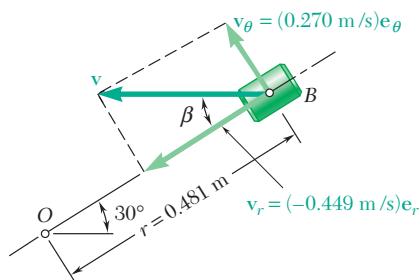
La rotación del brazo OA de 0.9 m alrededor de O se define mediante la relación $\theta = 0.15t^2$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. El collarín B desliza a lo largo del brazo de modo tal que su distancia desde O es $r = 0.9 - 0.12t^2$, donde r se expresa en metros y t en segundos. Despues de que el brazo OA ha girado 30° , determine *a)* la velocidad total del collarín, *b)* la aceleración total del collarín, *c)* la aceleración relativa del collarín con respecto al brazo.

SOLUCIÓN



$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta$$



Ecuaciones de movimiento. Si se sustituye $t = 1.869\text{ s}$ en las expresiones para r , θ y su primera y segunda derivadas, se tiene

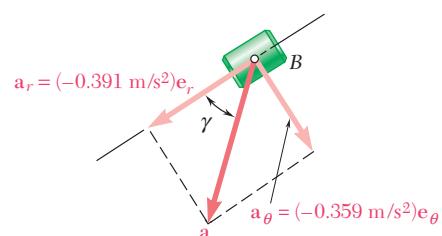
$$\begin{aligned} r &= 0.9 - 0.12t^2 = 0.481\text{ m} & \theta &= 0.15t^2 = 0.524\text{ rad} \\ \dot{r} &= -0.24t = -0.449\text{ m/s} & \dot{\theta} &= 0.30t = 0.561\text{ rad/s} \\ \ddot{r} &= -0.24 = -0.240\text{ m/s}^2 & \ddot{\theta} &= 0.30 = 0.300\text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

a) Velocidad de B . Mediante las ecuaciones (11.45) se obtienen los valores de v_r y v_θ cuando $t = 1.869\text{ s}$.

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = -0.449\text{ m/s} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} = 0.481(0.561) = 0.270\text{ m/s} \end{aligned}$$

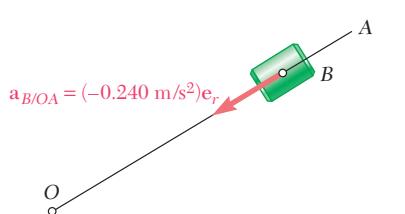
Al resolver el triángulo rectángulo que se muestra, se obtiene la magnitud y dirección de la velocidad.

$$v = 0.524\text{ m/s} \quad \beta = 31.0^\circ \quad \blacktriangleleft$$



b) Aceleración de B . Mediante las ecuaciones (11.46), se obtiene

$$\begin{aligned} a_r &= r - r\dot{\theta}^2 \\ &= -0.240 - 0.481(0.561)^2 = -0.391\text{ m/s}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ &= 0.481(0.300) + 2(-0.449)(0.561) = -0.359\text{ m/s}^2 \\ a &= 0.531\text{ m/s}^2 \quad \gamma = 42.6^\circ \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



c) Aceleración de B con respecto al brazo OA . Hay que observar que el movimiento del collarín con respecto al brazo es rectilíneo y está definido por la coordenada r . Se escribe

$$a_{B/OA} = \ddot{r} = -0.240\text{ m/s}^2$$

$$a_{B/OA} = 0.240\text{ m/s}^2 \text{ hacia } O. \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los siguientes problemas se pide expresar la velocidad y la aceleración de las partículas en términos de sus *componentes tangencial y normal*, o de sus *componentes radial y transversal*. Aunque es posible que esas componentes no le sean tan familiares como las rectangulares, descubrirá que aquellas componentes pueden simplificar la solución de muchos problemas, y que cierto tipo de movimiento se describe de manera más sencilla con ellas.

1. Empleo de componentes tangencial y normal. Estas componentes son las que se usan con mayor frecuencia cuando la partícula de interés viaja a lo largo de una trayectoria circular, o cuando se va a determinar el radio de curvatura. Hay que recordar que el vector unitario \mathbf{e}_t es tangente a la trayectoria de la partícula (y, en consecuencia, se alinea con la velocidad) mientras el vector unitario \mathbf{e}_n apunta a lo largo de la normal a la trayectoria y siempre está dirigido hacia su centro de curvatura. Se concluye que, cuando se mueve la partícula, las direcciones de los dos vectores unitarios están en constante cambio.

2. Expresión de la aceleración en términos de sus componentes tangencial y normal. En la sección 11.13 se obtuvo la siguiente ecuación, aplicable al movimiento tanto bidimensional como tridimensional de una partícula:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (11.39)$$

Las siguientes observaciones posiblemente ayuden a resolver los problemas de esta sección.

a) La componente tangencial de la aceleración mide la razón de cambio de la velocidad: $a_t = dv/dt$. Se deduce que cuando a_t es constante, es posible utilizar las ecuaciones para el movimiento uniformemente acelerado con la aceleración igual a a_t . Además, cuando una partícula se mueve a velocidad constante, se tiene que $a_t = 0$ y la aceleración de la partícula se reduce a su componente normal.

b) La componente normal de la aceleración siempre está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria de la partícula, y su magnitud es $a_n = v^2/\rho$. Por consiguiente, la componente normal se determina con facilidad si se conoce la velocidad de la partícula y el radio de curvatura ρ de la trayectoria. De manera inversa, cuando se conoce la velocidad y la aceleración normal de la partícula, es posible obtener el radio de curvatura de la trayectoria al resolver esta ecuación para ρ [problema resuelto 11.11].

c) En el movimiento tridimensional de una partícula, se recurre a un tercer vector unitario, $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$, el cual define la dirección de la *binormal*. En vista de que este vector es perpendicular tanto a la velocidad como a la aceleración, puede obtenerse al escribir

$$\mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}$$

3. Empleo de las componentes radial y transversal. Estas componentes se utilizan para analizar el movimiento plano de una partícula P , cuando la posición P se define mediante sus coordenadas polares r y θ . Como se muestra en la figura 11.25, el vector unitario \mathbf{e}_r , que define la dirección *radial*, se une al punto P y apunta alejándose del punto fijo O , en tanto que el vector unitario \mathbf{e}_θ , que define la dirección *transversal*, se obtiene al rotar 90° \mathbf{e}_r en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. La velocidad y la aceleración de la partícula se expresaron en términos de sus componentes radial y transversal en las ecuaciones (11.43) y (11.44), respectivamente. Se puede advertir que las expresiones obtenidas contienen la primera y segunda derivadas con respecto a t de ambas coordenadas r y θ .

En esta lección se encontrarán los siguientes tipos de problemas que implican a las componentes radial y transversal:

a) **Tanto r como θ son funciones conocidas de t .** En este caso se calcularán la primera y segunda derivadas de r y θ y se sustituyen las expresiones que se obtengan en las ecuaciones (11.43) y (11.44).

b) **Existe cierta relación entre r y θ .** Primero, es necesario que determine esta relación a partir de la geometría de un sistema dado, y utilizarla para expresar r como una función de θ . Una vez que se conoce la función $r = f(\theta)$, se puede aplicar la regla de la cadena para determinar \dot{r} en términos de θ y $\dot{\theta}$ y \ddot{r} en términos de θ , $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= f'(\theta)\dot{\theta} \\ \ddot{r} &= f''(\theta)\dot{\theta}^2 + f'(\theta)\ddot{\theta}\end{aligned}$$

Las expresiones que se obtienen se sustituyen entonces en las ecuaciones (11.43) y (11.44).

c) **El movimiento tridimensional de una partícula,** como se indicó al final de la sección 11.14, en muchos casos puede describirse de manera eficaz en términos de las *coordenadas cilíndricas* R , θ y z (figura 11.26). Los vectores unitarios deben consistir en \mathbf{e}_R , \mathbf{e}_θ y \mathbf{k} . Las componentes correspondientes de la velocidad y la aceleración se indican en las ecuaciones (11.49) y (11.50). Advierta que la distancia radial R siempre se mide en un plano paralelo al plano xy , y tenga cuidado de no confundir el vector de posición \mathbf{r} con su componente radial $R\mathbf{e}_R$.

Problemas

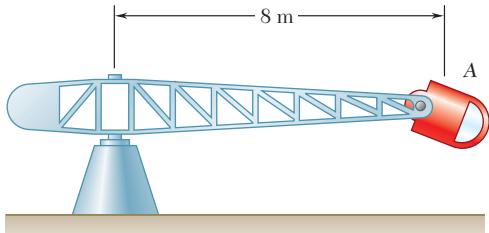


Figura P11.133

11.133 Determine la rapidez periférica de la cabina de pruebas centrífuga A, para la cual la componente normal de la aceleración es de $10g$.

11.134 A fin de probar el desempeño de un automóvil, éste es conducido alrededor de una pista de pruebas circular con diámetro d . Determine a) el valor de d si cuando la rapidez del automóvil es de 72 km/h , la componente normal de la aceleración es de 3.2 m/s^2 , b) la rapidez del automóvil si $d = 180 \text{ m}$ y se sabe que la componente normal de la aceleración es de $0.6g$.

11.135 Determine el radio mínimo que debe usarse para una carretera si la componente normal de la aceleración de un automóvil que viaja a 45 mi/h no debe ser mayor que 2.4 ft/s^2 .

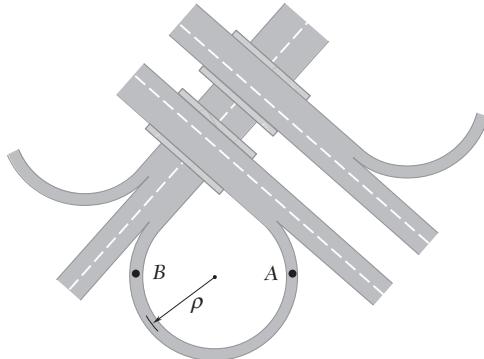


Figura P11.135

11.136 Determine la rapidez máxima que los carros de la montaña rusa pueden alcanzar a lo largo de la porción circular AB de la pista, si la componente normal de su aceleración no puede ser mayor que $3g$.

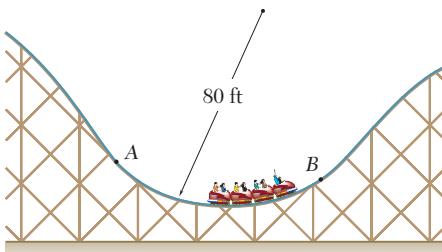


Figura P11.136

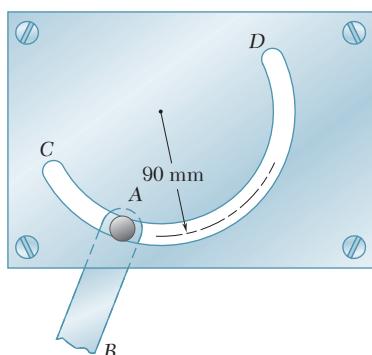


Figura P11.137

11.137 El pasador A, que se encuentra unido al eslabón AB, está restringido a moverse en la ranura circular CD. Si en $t = 0$ el pasador empieza a moverse del reposo de manera que su rapidez aumenta a razón constante de 20 mm/s^2 , determine la magnitud de su aceleración total cuando a) $t = 0$, b) $t = 2 \text{ s}$.

11.138 Un tren monorriel parte desde el reposo en una curva de 400 m de radio y acelera a una razón constante a_t . Si la aceleración total máxima del tren no debe exceder 1.5 m/s^2 , determine *a)* la distancia más corta en la que el tren puede alcanzar una rapidez de 72 km/h, *b)* la razón constante de aceleración a_t correspondiente.

11.139 Una pista al aire libre tiene un diámetro de 420 ft. Una corredora aumenta su rapidez a razón constante desde 14 hasta 24 ft/s en una distancia de 95 ft. Determine la aceleración total de la corredora 2 s después de que empieza a aumentar su rapidez.

11.140 En un instante dado en una carrera de aviones, el avión A vuela horizontalmente en línea recta, y su rapidez aumenta a razón de 8 m/s^2 . El avión B vuela a la misma altura que el avión A y, al rodear un pilar, sigue una trayectoria circular de 300 m de radio. Si se sabe que en un instante dado la rapidez de B está disminuyendo a razón de 3 m/s^2 , determine, para las posiciones mostradas, *a)* la velocidad de B relativa a A, *b)* la aceleración de B en relación con A.

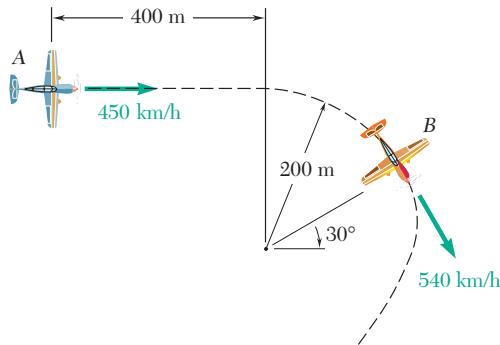


Figura P11.140

11.141 Un automovilista que viaja a lo largo de la parte recta de una carretera, está disminuyendo la rapidez de su automóvil a razón constante antes de salir de la carretera por una rampa circular con radio de 560 ft. Continúa desacelerando a la misma tasa constante de manera que 10 s después de entrar a la rampa, su rapidez ha bajado a 20 mi/h, a partir de entonces mantiene dicha rapidez. Si se sabe que a esta rapidez constante la aceleración total del automóvil es igual a un cuarto de su valor antes de entrar a la rampa, determine el valor máximo de la aceleración total del automóvil.

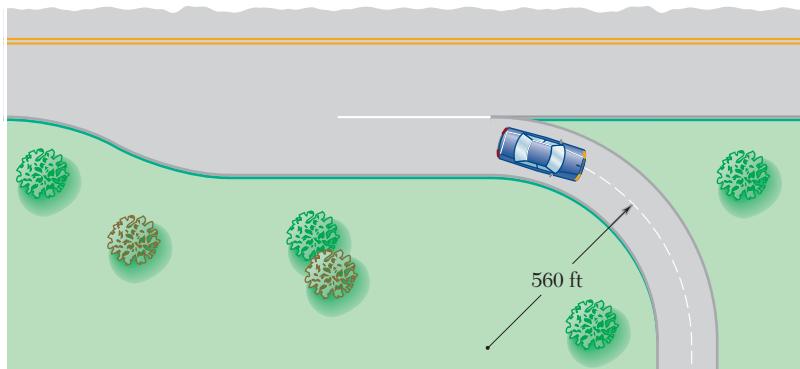


Figura P11.141



Figura P11.139

11.142 Los automóviles de carreras A y B se desplazan sobre porciones circulares de una pista de carreras. En el instante que se indica, la rapidez de A disminuye a razón de 7 m/s^2 y la rapidez de B se incrementa a una tasa de 2 m/s^2 . Para las posiciones mostradas, determine *a)* la velocidad de B relativa a A, *b)* la aceleración de B relativa a A.

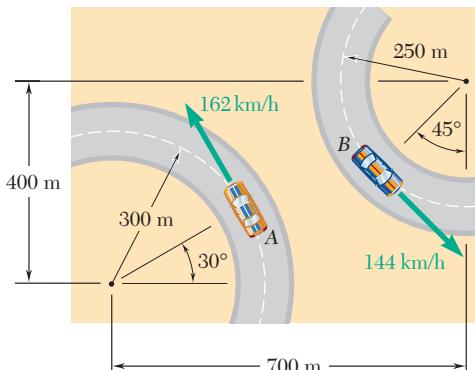


Figura P11.142

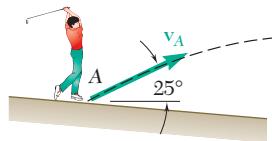


Figura P11.143

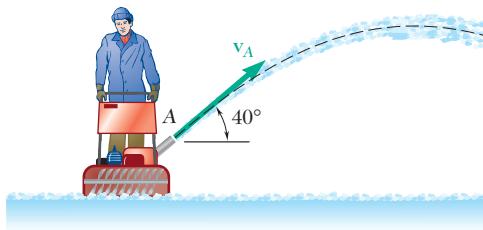


Figura P11.144

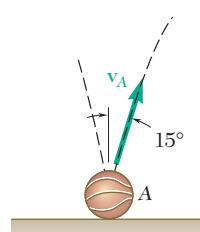


Figura P11.145

11.143 Un golfista golpea una pelota desde el punto A con una velocidad inicial de 50 m/s a un ángulo de 25° con la horizontal. Determine el radio de curvatura de la trayectoria descrita por la pelota *a)* en el punto A, *b)* en el punto más alto de la trayectoria.

11.144 Según la fotografía de un hombre que está utilizando una limpiadora de nieve, se determina que el radio de curvatura de la trayectoria de la nieve era de 8.5 m cuando la nieve salía del tubo de descarga en A. Determine, *a)* la velocidad de descarga \mathbf{v}_A de la nieve, *b)* el radio de curvatura de la trayectoria en su altura máxima.

11.145 Un balón de básquetbol es golpeado contra el suelo en el punto A y rebota con una velocidad \mathbf{v}_A de magnitud 7.5 ft/s , como se muestra en la figura. Determine el radio de curvatura de la trayectoria descrita por el balón *a)* en el punto A, *b)* en el punto más alto de la trayectoria.

11.146 Se descarga carbón desde la puerta trasera de un camión de volteo con una velocidad inicial de $\mathbf{v}_A = 6 \text{ ft/s}$ a 50° . Determine el radio de curvatura de la trayectoria descrita por el carbón *a)* en el punto A, *b)* en el punto de la trayectoria 3 ft por debajo del punto A.

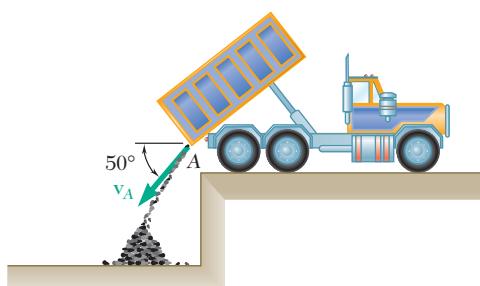


Figura P11.146

- 11.147** Un tubo horizontal descarga desde el punto A un chorro de agua en un estanque. Exprese el radio de curvatura del chorro en el punto B en términos de las velocidades v_A y v_B .

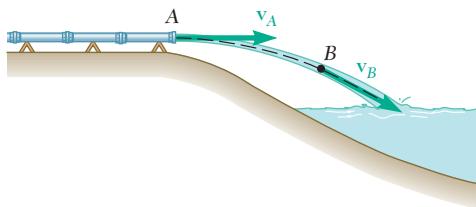


Figura P11.147

- 11.148** Un niño lanza una pelota desde el punto A con una velocidad inicial v_A de 20 m/s a un ángulo de 25° con la horizontal. Determine la velocidad de la pelota en los puntos de su trayectoria donde el radio de curvatura es igual a tres cuartos de su valor en A.

- 11.149** Se dispara un proyectil desde el punto A con una velocidad inicial v_0 . a) Muestre que el radio de curvatura de la trayectoria del proyectil alcanza su valor mínimo en el punto más alto de la trayectoria, B. b) Si se denota mediante θ el ángulo formado por la trayectoria y la horizontal en el punto dado C, muestre que el radio de curvatura de la trayectoria en C es $\rho = \rho_{\min}/\cos^3 \theta$.

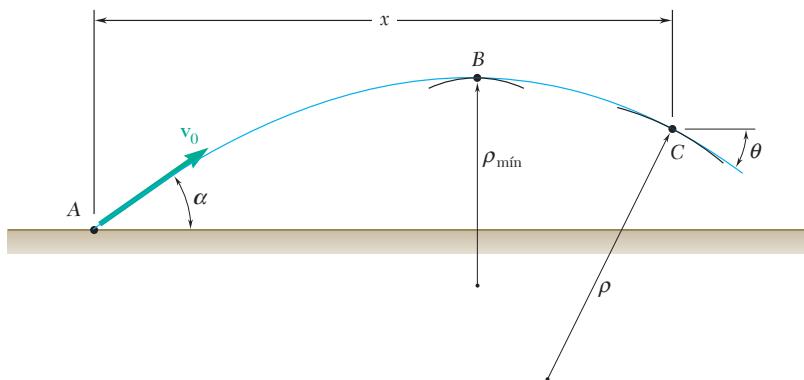


Figura P11.149 y P11.150

- 11.150** Se dispara un proyectil desde el punto A con una velocidad inicial v_0 , la cual forma un ángulo α con la horizontal. Exprese el radio de curvatura de la trayectoria del proyectil en el punto C en términos de x , v_0 , α y g .

- *11.151** Determine el radio de curvatura de la trayectoria que describe la partícula del problema 11.95 cuando $t = 0$.

- *11.152** Determine el radio de curvatura de la trayectoria que describe la partícula del problema 11.96 cuando $t = 0$, $A = 3$ y $B = 1$.

- 11.153 a 11.155** Un satélite viajará de manera indefinida en una órbita circular alrededor de un planeta si la componente normal de la aceleración del satélite es igual a $g(R/r)^2$, donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta, R es el radio del planeta, y r es la distancia desde el centro del planeta al satélite. Determine la rapidez de un satélite relativa al planeta indicado, si el satélite se desplaza de manera indefinida en una órbita circular a 160 km sobre la superficie del planeta.

11.153 Venus: $g = 8.53 \text{ m/s}^2$, $R = 6\,161 \text{ km}$.

11.154 Marte: $g = 3.83 \text{ m/s}^2$, $R = 3\,332 \text{ km}$.

11.155 Júpiter: $g = 26.0 \text{ m/s}^2$, $R = 69\,893 \text{ km}$.

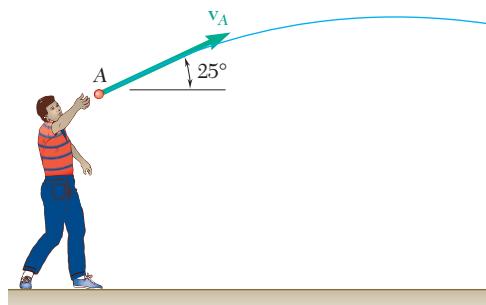


Figura P11.148

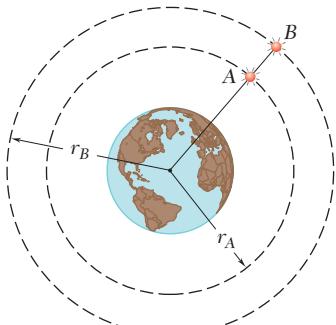


Figura P11.160

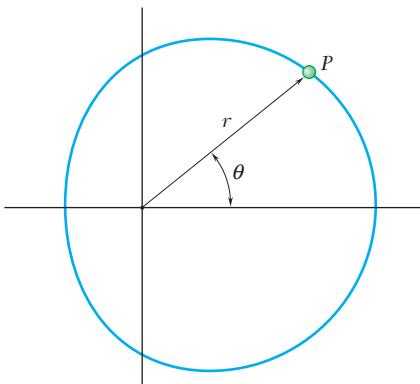
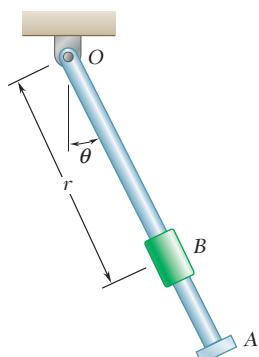


Figura P11.161

Figura P11.163
y P11.164

11.156 y 11.157 Si el diámetro del Sol es de 864 000 mi y la aceleración de la gravedad en su superficie es de 900 ft/s^2 , determine el radio de la órbita del planeta indicado alrededor del Sol suponiendo que la órbita es circular. (Vea la información dada en los problemas 11.153 a 11.155.)

11.156 Tierra: $(v_{\text{media}})_{\text{órbita}} = 66\,600 \text{ mi/h}$

11.157 Saturno: $(v_{\text{media}})_{\text{órbita}} = 21\,580 \text{ mi/h}$

11.158 Si se sabe que el radio terrestre es de 6 370 km, determine el tiempo en el que el Telescopio Espacial Hubble recorre una órbita si este instrumento viaja en una órbita circular a 590 km sobre la superficie de la Tierra. (Vea la información dada en los problemas 11.153 a 11.155.)

11.159 Un satélite viaja en una órbita circular alrededor de Marte a una altura de 180 mi. Después de que se ajusta la altura del satélite, se descubre que el tiempo de una órbita ha aumentado 10 por ciento. Si se sabe que el radio de Marte es 2 071 mi, determine la nueva altura del satélite. (Vea la información dada en los problemas 11.153 a 11.155.)

11.160 Los satélites *A* y *B* viajan en el mismo plano en órbitas circulares alrededor de la Tierra en alturas, respectivamente, de 120 y 200 mi. Si en $t = 0$ los satélites están alineados en la forma que se muestra, y se sabe que el radio terrestre es $R = 3\,960 \text{ mi}$, determine cuándo los satélites volverán a estar alineados radialmente. (Vea la información dada en los problemas 11.53 a 11.55.)

11.161 La trayectoria de una partícula *P* es un caracol. El movimiento de la partícula está definido por las relaciones $r = b(2 + \cos \pi t)$ y $\theta = \pi t$, donde t y θ se expresan en segundos y radianes, respectivamente. Determine *a*) la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 2 \text{ s}$, *b*) los valores de θ para los cuales la velocidad es máxima.

11.162 El movimiento en dos dimensiones de una partícula se define por medio de las relaciones $r = 2b \cos \omega t$ y $\theta = \omega t$, donde b y ω son constantes. Determine *a*) la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier instante, *b*) el radio de curvatura de su trayectoria. ¿A qué conclusión puede llegarse respecto a la trayectoria de la partícula?

11.163 La rotación de la varilla *OA* alrededor de *O* se define por medio de la relación $\theta = \pi(4t^2 - 8t)$, donde θ y t se expresan en radianes y segundos, respectivamente. El collarín *B* se desliza a lo largo de la varilla de manera que su distancia desde *O* es $r = 10 + 6 \operatorname{sen} \pi t$, donde r y t se expresan en pulgadas y segundos, respectivamente. Cuando $t = 1 \text{ s}$, determine *a*) la velocidad del collarín, *b*) la aceleración total del collarín, *c*) la aceleración del collarín relativa a la varilla.

11.164 La oscilación de la varilla *OA* alrededor de *O* se define por medio de la relación $\theta = (2/\pi)(\operatorname{sen} \pi t)$, donde θ y t se expresan en radianes y segundos, respectivamente. El collarín *B* se desliza a lo largo de la varilla de manera que su distancia desde *O* es $r = 25/(t + 4)$, donde r y t se expresan en pulgadas y segundos, respectivamente. Cuando $t = 1 \text{ s}$, determine *a*) la velocidad del collarín, *b*) la aceleración total del collarín, *c*) la aceleración del collarín relativa a la varilla.

11.165 El movimiento de la partícula P es la elipse definida por las relaciones $r = 2/(2 - \cos \pi t)$ y $\theta = \pi t$, donde r se expresa en metros, θ en radianes y t en segundos. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula cuando a) $t = 0$, b) $t = 0.5$ s.

11.166 El movimiento bidimensional de una partícula se define por las relaciones $r = 2a \cos \theta$ y $\theta = bt^2/2$, donde a y b son constantes. Determine a) las magnitudes de la velocidad y de la aceleración en cualquier instante, b) el radio de curvatura de la trayectoria. ¿A qué conclusión puede llegarse en cuanto a la trayectoria de la partícula?

11.167 Para estudiar el desempeño de un automóvil de carreras, una cámara de movimiento a alta velocidad se ubica en el punto A y se monta sobre un mecanismo que permite registrar el movimiento del automóvil cuando éste se desplaza en el tramo recto BC. Determine la rapidez del automóvil en términos de b , θ y $\dot{\theta}$.

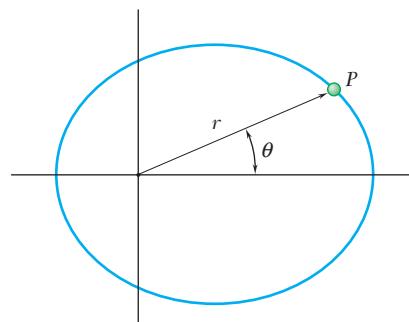


Figura P11.165

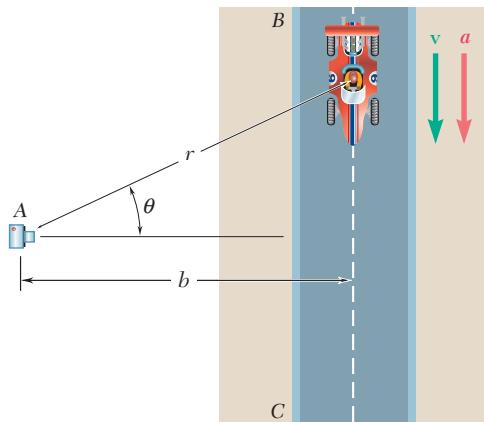


Figura P11.167

11.168 Determine la magnitud de la aceleración del automóvil de carreras del problema 11.167 en términos de b , θ , $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$.

11.169 Despues de despegar, un helicóptero asciende en línea recta en un ángulo constante β . Un radar sigue su vuelo desde el punto A. Determine la rapidez del helicóptero en términos de d , β , θ y $\dot{\theta}$.

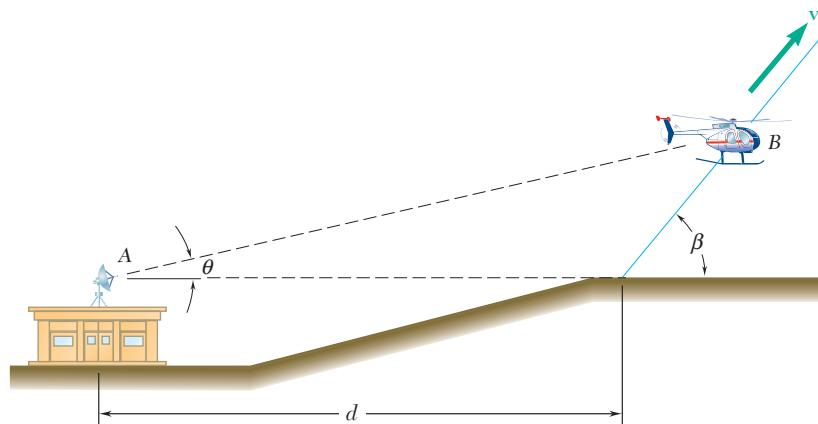


Figura P11.169

***11.170** El pasador P está unido a la varilla BC y se desliza libremente en la ranura de la varilla OA . Determine la razón de cambio $\dot{\theta}$ del ángulo θ , si se sabe que BC se mueve a una rapidez constante v_0 . Exprese su respuesta en términos de v_0 , h , β y θ .

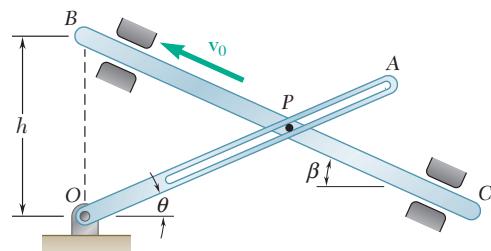


Figura P11.170

11.171 Para el automóvil de carreras del problema 11.167, se encontró que éste tardaba 0.5 s en pasar de la posición $\theta = 60^\circ$ a la posición $\theta = 35^\circ$. Si se sabe que $b = 25$ m, determine la rapidez promedio del carro durante el intervalo de 0.5 s.

11.172 Para el helicóptero del problema 11.169, se encontró que cuando éste se ubicaba en B , su distancia y ángulo de elevación era $r = 3\,000$ ft y $\theta = 20^\circ$, respectivamente. Cuatro segundos después, la estación del radar ubicó al helicóptero en $r = 3\,320$ ft y $\theta = 23.1^\circ$. Determine la rapidez promedio y el ángulo de ascenso β del helicóptero durante el intervalo de 4 s.

11.173 y 11.174 Una partícula se mueve a lo largo de la espiral que se muestra en las figuras; determine la magnitud de la velocidad de la partícula en términos de b , θ y $\dot{\theta}$.

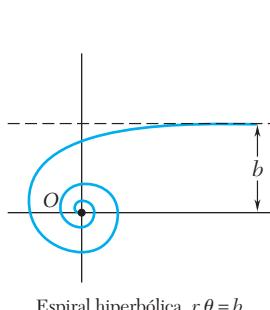


Figura P11.173 y P11.175

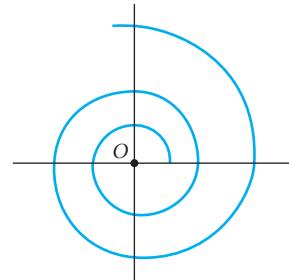


Figura P11.174 y P11.176

11.175 y 11.176 Una partícula se mueve a lo largo de la espiral que se muestra en la figura. Si se sabe que $\dot{\theta}$ es constante y se denota dicha constante mediante ω , determine la magnitud de la aceleración de la partícula en términos de b , θ y ω .

- 11.177** Muestre que $\dot{r} = h\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta$ si en el instante mostrado, el escalón AB de la escaladora está girando en sentido contrario al de las manecillas del reloj, a una razón constante $\dot{\phi}$.

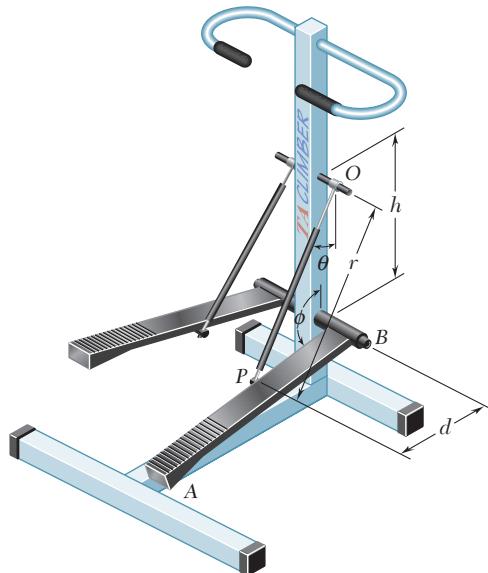


Figura P11.177

- 11.178** El movimiento de una partícula sobre la superficie de un cilindro circular se define por medio de las relaciones $R = A$, $\theta = 2\pi t$ y $z = At^2/4$, donde A es una constante. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo t .

- 11.179** El movimiento tridimensional de una partícula se define por medio de las coordenadas cilíndricas (vea la figura 11.26) $R = A/(t + 1)$, $\theta = Bt$ y $z = Ct/(t + 1)$. Determine las magnitudes de la velocidad y de la aceleración cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = \infty$.

- *11.180** Para la hélice cónica del problema 11.95, determine el ángulo que forma el plano oscilante con el eje y .

- *11.181** Determine la dirección de la binormal de la trayectoria descrita por la partícula del problema 11.96, cuando *a*) $t = 0$, *b*) $t = \pi/2$ s.

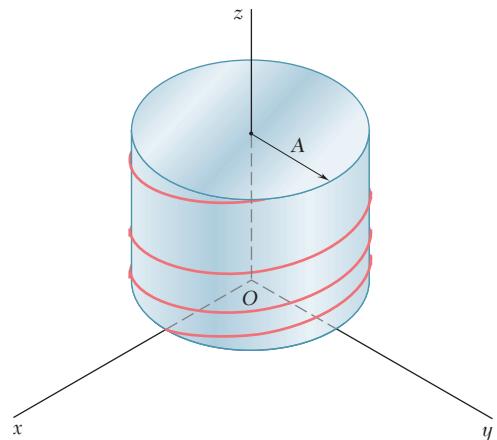


Figura P11.178

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 11

Coordenada de posición de una partícula en movimiento rectilíneo

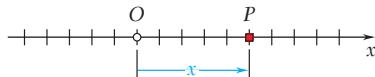


Figura 11.27

Velocidad y aceleración en movimiento rectilíneo

En la primera mitad del capítulo se analizó el *movimiento rectilíneo de una partícula*, esto es, el movimiento de la partícula a lo largo de una línea recta. Para definir la posición P de la partícula sobre esa línea se elige un origen fijo, O , y una dirección positiva (figura 11.27). La distancia x desde O hasta P , con el signo apropiado, define por completo la posición de la partícula sobre la línea y recibe el nombre de *coordenada de posición* de la partícula [sección 11.2].

Se demostró que la *velocidad* v de la partícula era igual a la derivada respecto al tiempo de la coordenada de posición x ,

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (11.1)$$

y la *aceleración* a se obtuvo diferenciando v con respecto a t ,

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (11.2)$$

o

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (11.3)$$

También se señaló que a podría expresarse como

$$a = v \frac{dv}{dx} \quad (11.4)$$

Se observó que la velocidad v y la aceleración a se representarán mediante números algebraicos que pueden ser positivos o negativos. Un valor positivo de v indica que la partícula se mueve en dirección positiva, y un valor negativo que lo hace en dirección negativa. Sin embargo, un valor positivo para a tal vez signifique que la partícula realmente está acelerada (esto es, se mueve más rápido) en dirección positiva, o que está desacelerada (esto es, que se mueve con mayor lentitud) en dirección negativa. Un valor negativo para a está sujeto a una interpretación similar [problema resuelto 11.1].

Determinación de la velocidad y la aceleración mediante integración

En la mayoría de los problemas, las condiciones de movimiento de una partícula se definen mediante el tipo de aceleración que ésta posee y por medio de las condiciones iniciales [sección 11.3]. La velocidad y posición de la partícula pueden obtenerse entonces integrando dos de las ecuaciones (11.1) a (11.4). Cuál de ellas seleccionar depende del tipo de aceleración implicada [problemas resueltos 11.2 y 11.3].

A menudo se encuentran dos tipos de movimiento: el *movimiento rectilíneo uniforme* [sección 11.4], en el cual la velocidad v de la partícula es constante y

$$x = x_0 + vt \quad (11.5)$$

y el *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado* [sección 11.5], en el cual la aceleración a de la partícula es constante y se tiene

$$v = v_0 + at \quad (11.6)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (11.7)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (11.8)$$

Cuando dos partículas A y B se mueven a lo largo de la misma línea recta, es probable que nos interese considerar el *movimiento relativo* de B con respecto a A

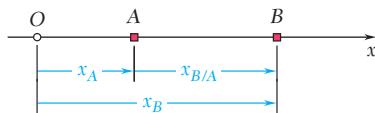


Figura 11.28

[sección 11.6]. Si se denota mediante $x_{B/A}$ la *coordenada de posición relativa* de B con respecto a A (figura 11.28), se tiene

$$x_B = x_A + x_{B/A} \quad (11.9)$$

Al diferenciar la ecuación (11.9) dos veces con respecto a t , se obtiene sucesivamente

$$v_B = v_A + v_{B/A} \quad (11.10)$$

$$a_B = a_A + a_{B/A} \quad (11.11)$$

donde $v_{B/A}$ y $a_{B/A}$ representan, respectivamente, la *velocidad relativa* y la *aceleración relativa* de B con respecto a A .

Cuando varios bloques se *conectan mediante cuerdas de longitud constante*, es posible escribir una *relación lineal* entre sus coordenadas de posición. Es posible escribir entonces relaciones similares entre sus velocidades y entre sus aceleraciones que se usan para analizar su movimiento [problema resuelto 11.5].

En ocasiones resulta conveniente utilizar una *solución gráfica* para problemas que implican el movimiento rectilíneo de una partícula [secciones 11.7 y 11.8]. La solución gráfica que se usa de manera más común incluye a las curvas $x-t$, $v-t$ y $a-t$ [sección 11.7; problema resuelto 11.6]. Se demostró que, a cualquier tiempo t ,

$$v = \text{pendiente de la curva } x-t$$

$$a = \text{pendiente de la curva } v-t$$

en tanto que, sobre cualquier intervalo de tiempo dado de t_1 a t_2 ,

$$v_2 - v_1 = \text{área bajo la curva } a-t$$

$$x_2 - x_1 = \text{área bajo la curva } v-t$$

En la segunda mitad del capítulo se estudió el *movimiento curvilíneo de una partícula*, es decir, el movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva. La posición P de la partícula en cualquier tiempo dado [sección 11.9] se definió por medio del *vector de posición* \mathbf{r} que une al origen O de las coordenadas y al punto P (fi-

Movimiento rectilíneo uniforme

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

Movimiento relativo de dos partículas

Bloques conectados mediante cuerdas de longitud constante

Soluciones gráficas

Vector de posición y velocidad en movimiento curvilíneo

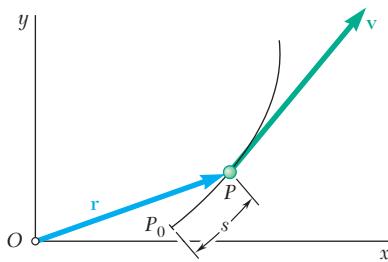


Figura 11.29

Aceleración en movimiento curvilíneo

Derivada de una función vectorial

Componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración

Movimientos de las componentes

Movimiento relativo de dos partículas

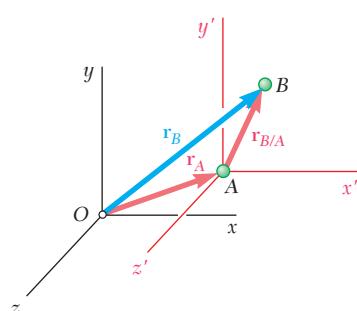


Figura 11.30

gura 11.29). La *velocidad* \mathbf{v} de la partícula se definió mediante la relación

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (11.15)$$

y se encontró que era un *vector tangente a la trayectoria de la partícula* y de magnitud v (denominada *rapidez* de la partícula) igual a la derivada en el tiempo de la longitud s del arco descrito por la partícula:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (11.16)$$

La *aceleración* \mathbf{a} de la partícula se definió mediante la relación

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (11.18)$$

y se señaló que, en general, *la aceleración no es tangente a la trayectoria de la partícula*.

Antes de proceder a la consideración de las componentes de velocidad y aceleración, se estudió la definición formal de la derivada de una función vectorial y se establecieron algunas reglas que gobernan la diferenciación de sumas y productos de funciones vectoriales. Después se mostró que la razón de cambio de un vector es la misma con respecto a un sistema de referencia fijo y con respecto a un sistema de referencia en traslación [sección 11.10].

Al denotar mediante x , y y z las coordenadas rectangulares de una partícula P , se encontró que las componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración de P resultan iguales, respectivamente, a la primera y segunda derivadas con respecto a t de las coordenadas correspondientes:

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \quad (11.29)$$

$$a_x = \ddot{x} \quad a_y = \ddot{y} \quad a_z = \ddot{z} \quad (11.30)$$

Cuando la componente a_x de la aceleración depende únicamente de t , x , y/o v_x , y cuando de manera similar a_y depende sólo de t y/o v_y , y a_z de t , z y/o v_z , las ecuaciones (11.30) se integran de forma independiente. El análisis del movimiento curvilíneo dado se reduce de ese modo al análisis de tres movimientos de componentes rectilíneas independientes [sección 11.11]. Este enfoque es en particular efectivo en el estudio del movimiento de proyectiles [problemas resueltos 11.7 y 11.8].

En el caso de dos partículas A y B que se mueven en el espacio (figura 11.30), consideraremos el movimiento relativo de B con respecto a A , o más precisamente, con respecto al sistema de referencia en movimiento unido A y en traslación con A [sección 11.12]. Al denotar mediante $\mathbf{r}_{B/A}$ el *vector de posición relativa* de B con respecto a A (figura 11.30), se obtuvo

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \quad (11.31)$$

Al denotar con $\mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{a}_{B/A}$, respectivamente, la *velocidad relativa* y la *aceleración relativa* de B con respecto a A , se demostró también que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (11.33)$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (11.34)$$

Algunas veces es conveniente descomponer la velocidad y la aceleración de una partícula P en componentes diferentes a las rectangulares x , y y z . En el caso de una partícula P que se mueve a lo largo de la trayectoria contenida en un plano, se unen a P los vectores unitarios \mathbf{e}_t tangente a la trayectoria y \mathbf{e}_n normal a la trayectoria y dirigido hacia el centro de curvatura de la misma [sección 11.13]. Se expresa entonces la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de las componentes tangencial y normal. Se escribe

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t \quad (11.36)$$

y

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \quad (11.39)$$

donde v es la rapidez de la partícula y ρ el radio de curvatura de su trayectoria [problemas resueltos 11.10 y 11.11]. Se observa que mientras la velocidad \mathbf{v} está dirigida a lo largo de la tangente a la trayectoria, la aceleración \mathbf{a} consta de una componente \mathbf{a}_t dirigida a lo largo de la tangente a la trayectoria y de una componente \mathbf{a}_n que apunta hacia el centro de curvatura de la trayectoria (figura 11.31).

Para una partícula P que se mueve a lo largo de una curva en el espacio, se definió el plano que se ajusta mejor a la curva en la vecindad de P como el *plano osculador*. Este plano contiene a los vectores unitarios \mathbf{e}_t y \mathbf{e}_n que define, respectivamente, la tangente y la normal principal a la curva. El vector unitario \mathbf{e}_b que es perpendicular al plano osculador define la *binormal*.

Cuando la posición de una partícula P que se mueve en un plano se define mediante sus coordenadas polares r y θ , es conveniente utilizar las componentes radial y transversal dirigidas, respectivamente, a lo largo del vector de posición \mathbf{r} de la partícula y en la dirección obtenida al rotar \mathbf{r} 90° en la dirección contraria a la de las manecillas del reloj [sección 11.14]. Se unen a P los vectores unitarios \mathbf{e}_r y \mathbf{e}_θ dirigidos, respectivamente, en las direcciones radial y transversal (figura 11.32). Despues se expresa la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de componentes radial y transversal

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (11.43)$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (11.44)$$

donde los puntos se usan para indicar diferenciación con respecto al tiempo. Las componentes escalares de la velocidad y la aceleración en las direcciones radial y transversal son en consecuencia

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \quad (11.45)$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \quad (11.46)$$

Es importante observar que a_r no es igual a la derivada en el tiempo de v_r , y que a_θ no es igual a la derivada en el tiempo de v_θ [problema resuelto 11.12].

El capítulo finaliza con el estudio del uso de las coordenadas cilíndricas para definir la posición y el movimiento de una partícula en el espacio.

Componentes tangencial y normal

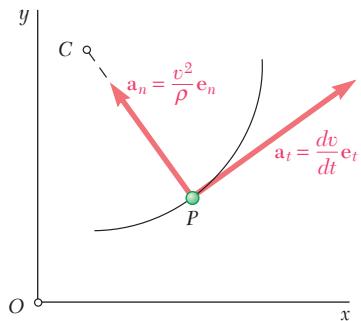


Figura 11.31

Movimiento a lo largo de una curva espacial

Componentes radial y transversal

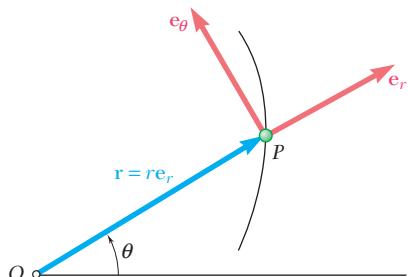


Figura 11.32

Problemas de repaso

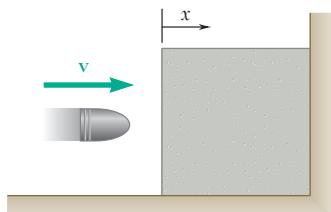


Figura P11.184

11.182 El movimiento de una partícula está definido por la relación $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$ donde x y t se expresan en metros y segundos, respectivamente. Determine a) cuándo la velocidad es cero, b) la posición y la distancia total recorrida cuando la aceleración es cero.

11.183 La aceleración de una partícula está definida por la relación $a = -60x^{-1.5}$, donde a y x se expresan en m/s^2 y metros, respectivamente. Si se sabe que la partícula comienza a moverse sin velocidad inicial en $x = 4$ m, determine la velocidad de la partícula cuando a) $x = 2$ m, b) $x = 1$ m, c) $x = 100$ mm.

11.184 Un proyectil entra a un medio resistivo en $x = 0$ con una velocidad inicial $v_0 = 900$ ft/s y recorre 4 in. antes de quedar en reposo. Si se supone que la velocidad del proyectil se define mediante la relación $v = v_0 - kx$, donde v se expresa en ft/s y x en ft, determine a) la aceleración inicial del proyectil, b) el tiempo requerido para que el proyectil penetre una distancia de 3.9 in. en el medio resistivo.

11.185 Un elevador de carga que se mueve hacia arriba con una velocidad constante de 6 ft/s pasa a un elevador de pasajeros que está detenido. Cuatro segundos después, el elevador de pasajeros comienza su movimiento ascendente con una aceleración constante de 2.4 ft/s^2 . Determine a) cuándo y dónde los elevadores estarán a la misma altura, b) la rapidez del elevador de pasajeros en ese momento.

11.186 El bloque C inicia su movimiento desde el reposo en $t = 0$ y se mueve hacia arriba con una aceleración constante de 25 mm/s^2 . Si se sabe que el bloque A se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 75 mm/s, determine a) el tiempo en el que la velocidad del bloque B es cero, b) la posición correspondiente del bloque B .

11.187 Los tres bloques mostrados se mueven a velocidades constantes. Encuentre la velocidad de cada bloque, si se sabe que la velocidad relativa de A con respecto a C es de 300 mm/s hacia arriba y que la velocidad relativa de B con respecto a A es de 200 mm/s hacia abajo.

11.188 Un rociador oscilante de agua se opera en el punto A sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. El rociador descarga agua con una velocidad inicial v_0 a un ángulo ϕ con la vertical, el cual varía de $-\phi_0$ a $+\phi_0$. Si se sabe que $v_0 = 30$ ft/s, $\phi_0 = 40^\circ$ y $\alpha = 10^\circ$, determine la distancia horizontal entre el rociador y los puntos B y C que delimitan el área regada.

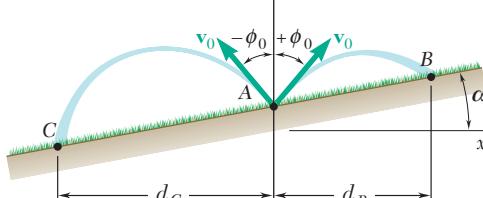


Figura P11.188

11.189 Cuando el conductor de un automóvil viaja hacia el norte a 25 km/h dentro de un estacionamiento, observa que un camión se acerca desde el noroeste. Luego de reducir su rapidez a 15 km/h y dar la vuelta de manera que ahora viaja en dirección noroeste, el camión parece aproximarse desde el oeste. Si se supone que la velocidad del camión es constante durante ese periodo de observación, determine la magnitud y la dirección de la velocidad del camión.

11.190 La conductora de un automóvil reduce su rapidez a una razón constante desde 45 hasta 30 mi/h, en una distancia de 750 ft a lo largo de una curva con 1 500 ft de radio. Determine la magnitud de la aceleración total del automóvil después de que ha recorrido 500 ft a lo largo de la curva.

11.191 Un hombre utiliza una barredora de nieve para limpiar el acceso a su garaje. Si la nieve se descarga a un ángulo promedio 40° con la horizontal determine la velocidad inicial v_0 de la nieve.

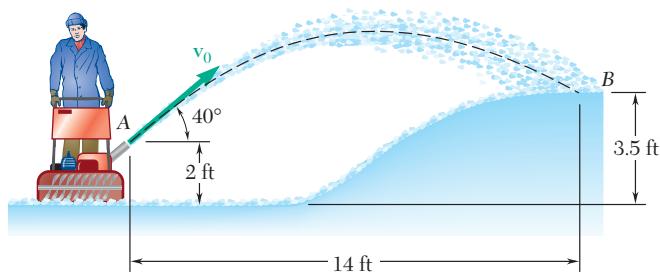


Figura P11.191

11.192 A partir de mediciones de un fotógrafo, se ha encontrado que cuando el chorro de agua salió de la boquilla A, tenía un radio de curvatura de 25 m. Determine *a)* la velocidad inicial v_A del chorro, *b)* el radio de curvatura del chorro cuando alcanzó su máxima altura en B.

11.193 En la parte más baja de su trayectoria en el plano vertical, un avión tiene una velocidad horizontal de 150 m/s y está acelerando a razón de 25 m/s^2 . El radio de curvatura de la trayectoria es de 2 000 m. El avión es rastreado por el radar en O. ¿Cuáles son los valores registrados de r , \dot{r} , $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ para este instante?

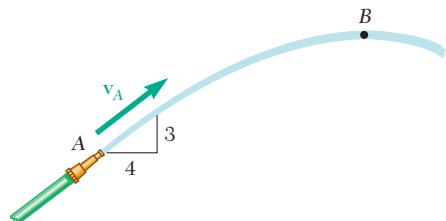


Figura P11.192

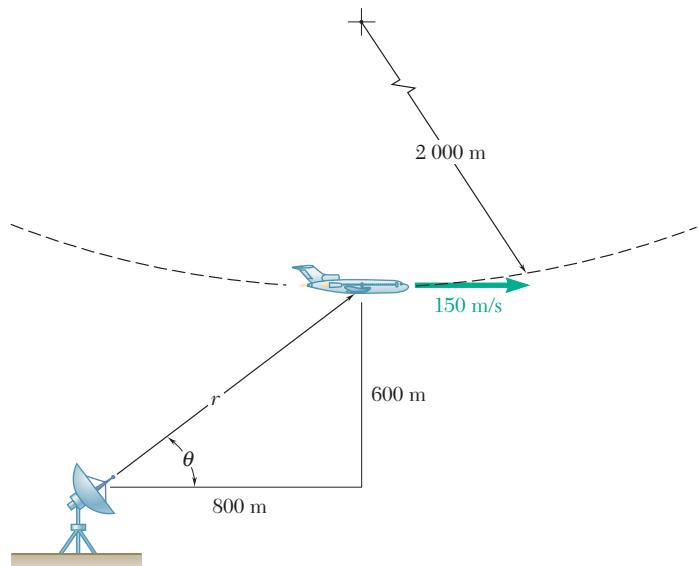


Figura P11.193

Problemas de computadora

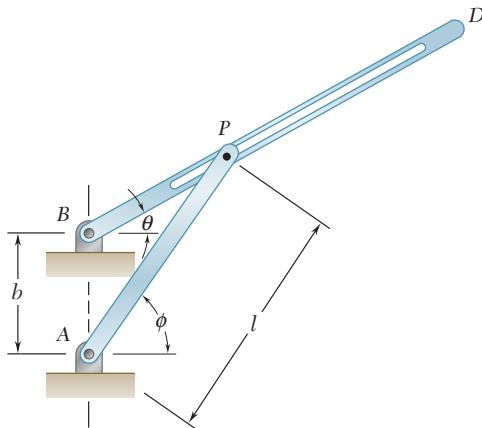


Figura P11.C1

11.C1 El mecanismo que se muestra en la figura se conoce como mecanismo de retorno rápido de Whitworth. La varilla de entrada AP gira a una razón constante $\dot{\phi}$ y el pasador P tiene la libertad de deslizarse en la ranura de la varilla de salida BD . Use software para graficar θ en función de ϕ y $\dot{\theta}$ en función de ϕ para una revolución de la varilla AP . Suponga que $\dot{\phi} = 1 \text{ rad/s}$, $l = 4 \text{ in.}$, $a) b = 2.5 \text{ in.}$, $b) b = 3 \text{ in.}$, $c) b = 3.5 \text{ in.}$

11.C2 Una pelota se deja caer con una velocidad v_0 a un ángulo α con la vertical sobre el escalón superior de una escalera que consta de 8 escalones. La pelota rebota hacia abajo por los escalones, como se muestra en la figura. Cada vez que la pelota rebota, en los puntos A , B , C , ..., la componente horizontal de su velocidad permanece constante y la magnitud de la componente vertical de su velocidad se reduce en un porcentaje k . Use software para determinar *a)* si la pelota baja por las escaleras sin saltarse ningún escalón, *b)* si la pelota baja por las escaleras sin rebotar dos veces en un mismo escalón, *c)* el primer escalón sobre el que la pelota rebota dos veces. Use valores de v_0 desde 1.8 m/s hasta 3.0 m/s con incrementos de 0.6 m/s , valores de α desde 18° hasta 26° con incrementos de 4° , y valores de k iguales a 40 y 50 .

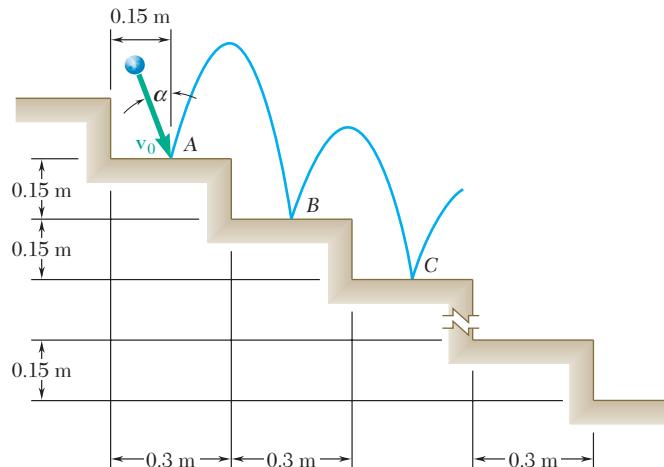


Figura P11.C2

11.C3 En un parque de diversiones, el “avión” A está unido a un elemento rígido OB de 10 m de largo. Para operar el juego mecánico, el avión y OB se giran de manera que $70^\circ \leq \theta_0 \leq 130^\circ$ y luego se deja oscilar libremente alrededor de O. El avión está sujeto a la aceleración de la gravedad y a la desaceleración debida a la resistencia del aire, $-kv^2$, la cual actúa en dirección opuesta a la de su velocidad \mathbf{v} . Ignorando la masa y el arrastre aerodinámico de OB y la fricción del cojinete en O, utilice software para determinar la rapidez del avión correspondiente a los valores de θ_0 y θ y el valor de $\dot{\theta}$ para el cual el avión quedará en reposo después de que se suelta. Use valores de θ_0 desde 70° hasta 130° en incrementos de 30° y determine la velocidad máxima del avión y los primeros dos valores de θ para los cuales $v = 0$. Para cada valor de θ_0 , considere que a) $k = 0$, b) $k = 2 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$, d) $k = 4 \times 10^{-2} \text{ m}^{-1}$. (Sugerencia: Exprese la aceleración tangencial del avión en términos de g , k y $\dot{\theta}$). Recuerde que $v_\theta = r\dot{\theta}$.)

11.C4 Un automovilista que viaja por carretera a una rapidez de 60 mi/h toma una rampa de salida cubierta de hielo. Con la intención de detenerse, aplica los frenos hasta que su automóvil queda en reposo. Si se sabe que la magnitud de la aceleración total del automóvil no puede exceder 10 ft/s^2 , use software para determinar el tiempo mínimo requerido para que el automóvil quede en reposo y la distancia que recorre sobre la rampa de salida, si la rampa a) es recta, b) tiene un radio de curvatura constante de 800 ft. Resuelva cada inciso suponiendo que el conductor aplica sus frenos de forma que dv/dt , durante cada intervalo de tiempo, 1) permanece constante, 2) varía linealmente.

11.C5 Un rociador de jardín oscilante descarga agua con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 de 10 m/s. a) Si se sabe que los lados del quiosco BCDE son abiertos, pero no así su techo, use software para calcular la distancia d al punto F que será regada para valores de α desde 20° hasta 80° . b) Determine el valor máximo de d y el valor correspondiente de α .

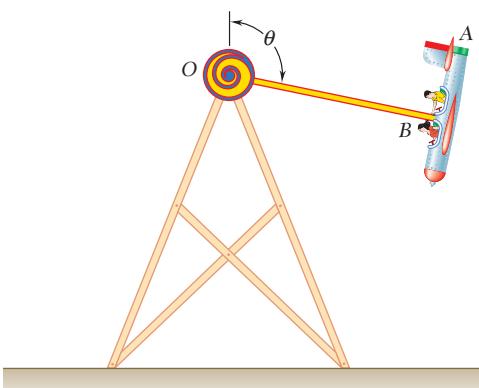


Figura P11.C3

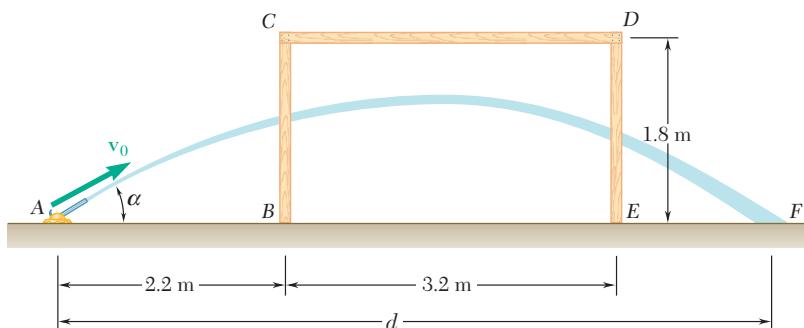


Figura P11.C5



Las fuerzas que experimentan los pasajeros de una montaña rusa dependerán de que el vagón viaje hacia arriba o hacia abajo, en línea recta o a lo largo de una trayectoria curva vertical u horizontal. En este capítulo se estudiará la relación existente entre fuerza, masa y aceleración.

CAPÍTULO

12

Cinética de partículas: segunda ley de Newton



CAPÍTULO 12 CINÉTICA DE PARTÍCULAS: SEGUNDA LEY DE NEWTON

- 12.1** Introducción
- 12.2** Segunda ley de movimiento de Newton
- 12.3** Cantidad de movimiento lineal de una partícula. Razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal
- 12.4** Sistemas de unidades
- 12.5** Ecuaciones de movimiento
- 12.6** Equilibrio dinámico
- 12.7** Cantidad de movimiento angular de una partícula. Razón de cambio de la cantidad de movimiento angular
- 12.8** Ecuaciones de movimiento en términos de las componentes radial y transversal
- 12.9** Movimiento bajo una fuerza central. Conservación de la cantidad de movimiento angular
- 12.10** Ley de gravitación de Newton
- 12.11** Trayectoria de una partícula bajo la acción de una fuerza central
- 12.12** Aplicación en mecánica celeste
- 12.13** Leyes de Kepler del movimiento planetario

12.1. INTRODUCCIÓN

La primera y la tercera leyes de Newton del movimiento se emplearon de manera amplia en estática para estudiar cuerpos en reposo y las fuerzas que actúan sobre ellos. Estas dos leyes también se utilizan en dinámica; en realidad, son suficientes para el estudio del movimiento de cuerpos que no tienen aceleración. Sin embargo, cuando los cuerpos están acelerados, esto es, cuando cambia la magnitud o la dirección de su velocidad, es necesario recurrir a la segunda ley de movimiento de Newton para relacionar el movimiento del cuerpo con las fuerzas que actúan sobre él.

En este capítulo se estudiará la segunda ley de Newton y se aplicará al análisis del movimiento de partículas. Como se establece en la sección 12.2, si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula no es cero, ésta tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta fuerza resultante. Además, es posible utilizar el cociente entre las magnitudes de la fuerza resultante y de la aceleración para definir la *masa* de la partícula.

En la sección 12.3 se define la *cantidad de movimiento lineal* de una partícula como el producto $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ de la masa m y la velocidad \mathbf{v} de la partícula, y se demuestra que la segunda ley de Newton puede expresarse en una forma alternativa que relaciona la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal con la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula.

La sección 12.4 subraya la necesidad de unidades consistentes en la solución de problemas dinámicos y ofrece un repaso del Sistema Internacional de Unidades (unidades del SI) y el sistema de uso común en Estados Unidos.

En las secciones 12.5 y 12.6 y en los problemas resueltos que siguen se aplica la segunda ley de Newton a la solución de problemas de ingeniería, utilizando componentes rectangulares o componentes tangenciales y normales de las fuerzas y las aceleraciones implicadas. Hay que recordar que en un cuerpo real, incluidos cuerpos tan grandes como un automóvil, un cohete o un aeroplano, pueden considerarse como partícula con el fin de analizar su movimiento mientras sea posible ignorar el efecto de una rotación del cuerpo alrededor de su centro de masa.

La segunda parte del capítulo se dedica a la solución de problemas en términos de las componentes radial y transversal, subrayando de manera particular el movimiento de la partícula bajo una fuerza central. En la sección 12.7 la *cantidad de movimiento angular* \mathbf{H}_O de la partícula alrededor del punto O se define como el momento alrededor de O de la cantidad de movimiento lineal de la partícula: $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. Luego se deduce de la segunda ley de Newton que la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O de la partícula es igual a la suma de los momentos alrededor de O de las fuerzas que actúan sobre esa partícula.

La sección 12.9 trata el movimiento de una partícula bajo la acción de una *fuerza central*, esto es, sujeta a una fuerza dirigida hacia o alejándose de un punto fijo O . Puesto que una fuerza de este tipo tiene momento cero alrededor de O , se concluye que se conserva la cantidad de movimiento angular de la partícula alrededor de O . Esta propiedad simplifica de manera considerable el análisis del movimiento de una partícula bajo una fuerza central; en la sección 12.10 se aplica la solución de problemas que implican el movimiento orbital de cuerpos sometidos a atracción gravitacional.

Las secciones de la 12.11 a la 12.13 son opcionales. Presentan una discusión más amplia del movimiento orbital y contienen varios problemas relacionados con mecánica celeste.

12.2. SEGUNDA LEY DE MOVIMIENTO DE NEWTON

La segunda ley de Newton se puede enunciar de la manera siguiente:

Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de esta fuerza resultante.

La segunda ley de movimiento de Newton se comprende mejor al imaginar el siguiente experimento: una partícula se somete a una fuerza \mathbf{F}_1 de dirección constante y magnitud constante F_1 . Bajo la acción de esa fuerza se observa que la partícula se mueve en línea recta y *en la dirección de la fuerza* (figura 12.1a). Al determinar la posición de la partícula en diferentes instantes, se encuentra que su aceleración tiene una magnitud constante a_1 . Si el experimento se repite con fuerzas \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3, \dots , o de diferente magnitud o dirección (figura 12.1b y c), se descubre que cada vez que la partícula se mueve en la dirección de la fuerza que actúa sobre ella y que las magnitudes a_1, a_2, a_3, \dots , de las aceleraciones son proporcionales a las magnitudes F_1, F_2, F_3, \dots , de las fuerzas correspondientes:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = \text{constante}$$

El valor constante que se obtiene para el cociente de las magnitudes de las fuerzas y aceleraciones es característico de la partícula que se considera; se denomina la *masa* de la partícula y se denota mediante m . Cuando sobre una partícula de masa m actúa una fuerza \mathbf{F} , la fuerza \mathbf{F} y la aceleración \mathbf{a} de la partícula deben satisfacer entonces la relación

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (12.1)$$

Esta relación proporciona una formulación completa de la segunda ley de Newton; no sólo expresa que la magnitud de \mathbf{F} y \mathbf{a} son proporcionales, sino también (puesto que m es un escalar positivo) que los vectores \mathbf{F} y \mathbf{a} tienen la misma dirección (figura 12.2). Debe advertirse que la ecuación (12.1) sigue cumpliéndose cuando \mathbf{F} no es constante sino que con el tiempo varía de magnitud o dirección. Las magnitudes de \mathbf{F} y \mathbf{a} permanecen proporcionales, y los dos vectores tienen la misma dirección en cualquier instante determinado. Sin embargo, en general, no son tangentes a la trayectoria de la partícula.

Cuando una partícula se somete de manera simultánea a varias fuerzas, la ecuación (12.1) debe sustituirse por

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (12.2)$$

donde $\Sigma\mathbf{F}$ representa la sumatoria, o resultante, de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula.

Debe notarse que el sistema de ejes con respecto al cual se determina la aceleración \mathbf{a} no es arbitrario. Estos ejes deben tener una orientación constante con respecto a las estrellas, y es necesario que su origen esté unido al Sol[†] o se mueva con velocidad constante con respecto al Sol. Un sistema de ejes de estas características recibe el nombre de *sistema*

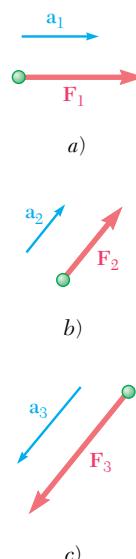


Figura 12.1

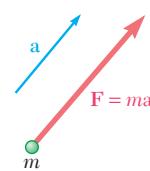


Figura 12.2



Fotografía 12.1 Cuando el automóvil de carreras acelera hacia delante hay una fuerza de fricción que actúa sobre las llantas traseras en la dirección del movimiento del automóvil.

[†]Más precisamente al centro de masa del sistema solar.

de referencia newtoniano.[†] Un sistema de ejes unido a la Tierra *no* constituye un sistema de referencia newtoniano, ya que la Tierra gira con respecto a las estrellas y está acelerada con respecto al Sol. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería, la aceleración \mathbf{a} puede determinarse con respecto a los ejes unidos a la Tierra y las ecuaciones (12.1) y (12.2) se utilizan sin ningún error apreciable. Por otro lado, estas ecuaciones no se cumplen si \mathbf{a} representa una aceleración relativa medida con respecto a ejes en movimiento, tales como los ejes unidos a un automóvil acelerado o a una pieza de maquinaria rotatoria.

Se observa que si la resultante $\Sigma\mathbf{F}$ de las fuerzas que actúan sobre la partícula es cero, se deduce de la ecuación (12.2) que la aceleración \mathbf{a} de la partícula también es cero. Si la partícula se encuentra inicialmente en reposo ($\mathbf{v}_0 = 0$) con respecto al sistema de referencia newtoniano utilizado, así se mantendrá en reposo ($\mathbf{v} = 0$). Si en un principio se movía con una velocidad \mathbf{v}_0 , la partícula mantendrá una velocidad constante $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$; esto es, se moverá con velocidad constante v_0 en una línea recta. Esto es el enunciado de la primera ley de Newton (sección 2.10). De tal modo, la primera ley de Newton constituye un caso particular de la segunda ley y puede omitirse de los principios fundamentales de la mecánica.

12.3. CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL DE UNA PARTÍCULA. RAZÓN DE CAMBIO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

Si se reemplaza la aceleración \mathbf{a} por la derivada $d\mathbf{v}/dt$ en la ecuación (12.2), se escribe

$$\Sigma\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

o, ya que la masa m de la partícula es constante,

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (12.3)$$

El vector $m\mathbf{v}$ se denomina como la *cantidad de movimiento lineal*, o simplemente *cantidad de movimiento* de la partícula. Tiene la misma dirección que la velocidad de la partícula, y su magnitud es igual al producto de la masa m y la velocidad v de la partícula (figura 12.3). La ecuación (12.3) expresa que *la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de la partícula*. En esta forma fue que Newton enunció originalmente la segunda ley de movimiento. Al denotar por \mathbf{L} la cantidad de movimiento lineal de la partícula,

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v} \quad (12.4)$$

y por $\dot{\mathbf{L}}$ su derivada con respecto a t , es posible escribir la ecuación (12.3) en la forma alternativa

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \quad (12.5)$$

[†]Puesto que las estrellas no están realmente fijas, una definición más rigurosa de sistema de referencia newtoniano (denominado también *sistema inercial*) es *uno respecto al cual se cumple la ecuación (12.2)*.

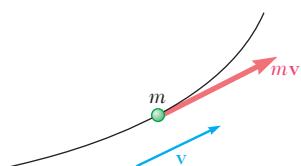


Figura 12.3

Debe notarse que la masa m de la partícula se supone constante en las ecuaciones (12.3) a (12.5). La ecuación (12.3) o (12.5) no debe entonces usarse para resolver problemas que impliquen el movimiento de cuerpos, como cohetes, que ganan o pierden masa. Los problemas de ese tipo se considerarán en la sección 14.12.[†]

Se desprende de la ecuación (12.3) que la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal mv es cero cuando $\Sigma\mathbf{F} = 0$. De tal modo, *si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la cantidad de movimiento lineal de la partícula permanece constante, tanto en magnitud como en dirección*. Éste es el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal para una partícula, el cual puede reconocerse como un enunciado alternativo de la primera ley de Newton (sección 2.10).

12.4. SISTEMAS DE UNIDADES

Al utilizar la ecuación fundamental $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, las unidades de fuerza, masa, longitud y tiempo no pueden elegirse de manera arbitraria. Si eso ocurriera, la magnitud de la fuerza \mathbf{F} que se requiere para proporcionar una aceleración \mathbf{a} a la masa m no sería numéricamente igual al producto ma ; sólo sería proporcional a este producto. En consecuencia, se pueden elegir tres o cuatro unidades de manera arbitraria, pero se debe escoger la cuarta unidad de manera que se satisfaga la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Se dice entonces que las unidades forman un sistema de unidades cinéticas consistentes.

Suelen utilizarse dos sistemas de unidades cinéticas consistentes: el Sistema Internacional de Unidades (unidades del SI[‡]) y unidades utilizadas comúnmente en Estados Unidos. Ambos sistemas se estudiaron con detalle en la sección 1.3 y se describen sólo de manera breve en esta sección.

Sistema Internacional de Unidades (unidades del SI). En este sistema, las unidades básicas son las de longitud, masa y tiempo y se denominan, respectivamente, el *metro* (m), el *kilogramo* (kg) y el *segundo* (s). Las tres se definen en forma arbitraria (sección 1.3). La unidad de fuerza es una unidad derivada. Se denomina *newton* (N) y se define como la fuerza que produce una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de 1 kg (figura 12.4). De la ecuación (12.1) se describe

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Se afirma que las unidades del SI forman un sistema *absoluto* de unidades. Lo anterior significa que las tres unidades básicas elegidas son independientes de la ubicación donde se efectúan las mediciones. El metro, el kilogramo y el segundo pueden ser utilizados en cualquier parte sobre la Tierra; incluso pueden ser usados en otro planeta. Y siempre tendrían el mismo significado.

El *peso* \mathbf{W} de un cuerpo, o la *fuerza de gravedad* que se ejerce sobre ese cuerpo, al igual que otra fuerza, se expresará en newtons. Puesto que un cuerpo sometido a su propio peso adquiere una aceleración igual a la aceleración de la gravedad g , se deduce de la segunda ley de Newton que la magnitud W del peso de un cuerpo de masa m es

$$W = mg \quad (12.6)$$

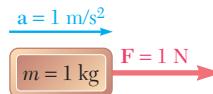


Figura 12.4

[†]Por otro lado, las ecuaciones (12.3) y (12.5) se cumplen en *mecánica relativista*, en la cual se supone que la masa m de la partícula varía con la velocidad de la misma.

[‡]SI es la abreviatura de *Système International d'Unités* (en francés).

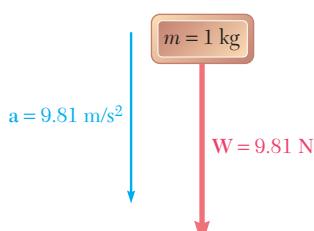


Figura 12.5

Al recordar que $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, se encuentra que el peso de un cuerpo de masa 1 kg (figura 12.5) es

$$W = (1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9.81 \text{ N}$$

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades de longitud, masa y fuerza se usan con frecuencia en la práctica de la ingeniería. Éstos son, respectivamente, el *kilómetro* (km) y el *milímetro* (mm); el *megagramo*[†] (Mg) y el *gramo* (g); y el *kilonewton* (kN). Por definición,

$$\begin{aligned} 1 \text{ km} &= 1000 \text{ m} & 1 \text{ mm} &= 0.001 \text{ m} \\ 1 \text{ Mg} &= 1000 \text{ kg} & 1 \text{ g} &= 0.001 \text{ kg} \\ && 1 \text{ kN} &= 1000 \text{ N} \end{aligned}$$

La conversión de estas unidades a metros, kilogramos y newtons, respectivamente, se efectúa simplemente desplazando el punto decimal tres lugares a la derecha o a la izquierda.

Otras unidades aparte de las de masa, longitud y tiempo pueden expresarse en términos de estas tres unidades básicas. Por ejemplo, la unidad de cantidad en movimiento lineal se obtiene al recordar su definición y al escribir

$$mv = (\text{kg})(\text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Unidades de uso común en Estados Unidos.

La mayoría de los ingenieros estadounidenses siguen utilizando de forma común un sistema en el que las unidades básicas son las de longitud, fuerza y tiempo; estas unidades corresponden, respectivamente, al *pie* (ft), la *libra* (lb) y el *segundo* (s). El segundo es el mismo que la unidad correspondiente del SI. El pie se define como 0.3048 m. La libra se define como el *peso* de un patrón de platino, denominado *libra estándar*, que se conserva en el National Institute of Standards and Technology, cerca de Washington, y cuya masa equivale a 0.453 592 43 kg. Puesto que el peso de un cuerpo depende de la atracción gravitacional de la Tierra, la cual varía con la ubicación, se especifica que la libra estándar debe situarse a nivel del mar y a una altura de 45° para definir de manera adecuada una fuerza de 1 lb. Es claro que las unidades de uso común en Estados Unidos no forman un sistema de unidades absoluto. En virtud de su dependencia de la atracción gravitacional terrestre, se señala que forman un sistema *gravitacional* de unidades.

En tanto que la libra estándar sirve también como la unidad de masa en transacciones comerciales en Estados Unidos, no puede utilizarse en cálculos de ingeniería, pues una unidad de ese tipo no será consistente con las unidades básicas definidas en el párrafo anterior. En realidad, cuando actúa sobre ella una fuerza de 1 lb, esto es, cuando se somete a su propio peso, la libra estándar recibe la aceleración de la gravedad, $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$ (figura 12.6) y no la aceleración unitaria que requiere la ecuación (12.1). La unidad de masa consistente con el pie, la libra y el segundo es la masa, que recibe una aceleración de 1 ft/s^2 cuando se le aplica una fuerza de 1 lb (figura 12.7). Esta unidad, llamada en ocasiones un *slug*, puede deducirse de la ecuación $F = ma$ después de sustituir 1 lb y 1 ft/s^2 en vez de F y a , respectivamente. Se escribe

$$F = ma \quad 1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ ft/s}^2)$$

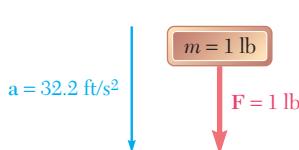


Figura 12.6

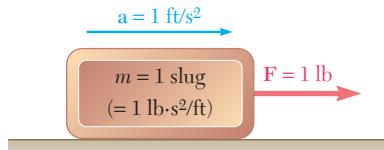


Figura 12.7

[†]Conocido también como *tonelada métrica*.

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Al comparar las figuras 12.6 y 12.7 se concluye que el slug es una masa 32.2 veces mayor que la masa de una libra estándar.

El hecho de que los cuerpos se caractericen en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos por su peso en libras más que su masa en slugs fue una conveniencia en el estudio de la estática, en la que se trata principalmente con pesos y otras fuerzas, y rara vez con masas. Sin embargo, en el estudio de la cinética, la cual implica fuerzas, masas y aceleraciones, será necesario de manera repetida expresar en slugs la masa m de un cuerpo, cuyo peso W se ha indicado en libras. Al recordar la ecuación (12.6), se escribe

$$m = \frac{W}{g} \quad (12.7)$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($g = 32.2 \text{ ft/s}^2$).

Otras unidades aparte de las de fuerza, longitud y tiempo pueden expresarse en términos de estas tres unidades básicas. Por ejemplo, la unidad de cantidad de movimiento lineal puede obtenerse utilizando la definición de cantidad de movimiento lineal para escribir

$$mv = (\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\text{ft/s}) = \text{lb} \cdot \text{s}$$

Conversión de un sistema de unidades a otro. Las conversiones de las unidades del sistema de uso común en Estados Unidos a las del Sistema Internacional de Unidades, y viceversa, se estudió en la sección 1.4. Hay que recordar que los factores de conversión que se obtuvieron para las unidades de longitud, fuerza y masa son, respectivamente,

Longitud:	$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$
Fuerza:	$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N}$
Masa:	$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = 14.59 \text{ kg}$

Aunque no puede utilizarse como una unidad de masa consistente, la masa de una libra estándar es, por definición,

$$1 \text{ libra/masa} = 0.4536 \text{ kg}$$

Es posible utilizar esta constante para determinar la masa en unidades del SI (kilogramos) de un cuerpo que se ha caracterizado por su peso en unidades de uso común en Estados Unidos (libras).

12.5. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Considérese una partícula de masa m sobre la que actúan varias fuerzas. Se tiene de la sección 12.2 que la segunda ley de Newton puede expresarse mediante la ecuación

$$\Sigma \mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (12.2)$$

que relaciona las fuerzas que actúan sobre la partícula y el vector $m \mathbf{a}$ (figura 12.8). Sin embargo, para resolver los problemas que implican el movimiento de una partícula se encontrará más conveniente sustituir la ecuación (12.2) por ecuaciones equivalentes que incluyen cantidades escalares.

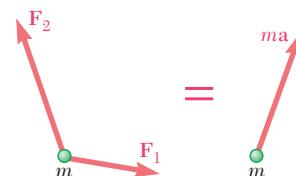


Figura 12.8



Fotografía 12.2 El piloto de un avión de guerra experimentará fuerzas normales muy grandes al dar un giro muy cerrado.

Componentes rectangulares. Al descomponer cada fuerza \mathbf{F} y la aceleración \mathbf{a} en componentes rectangulares, se escribe

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

de lo que se deduce

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_z = ma_z \quad (12.8)$$

Al recordar de la sección 11.11 que las componentes de la aceleración son iguales a la segunda derivada de las coordenadas de la partícula, se tiene

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \quad \Sigma F_y = m\ddot{y} \quad \Sigma F_z = m\ddot{z} \quad (12.8')$$

Considérese, como un ejemplo, el movimiento de un proyectil. Si se ignora la resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre el proyectil después de que éste se ha lanzado es su peso $\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$. En consecuencia, las ecuaciones que definen el movimiento del proyectil son

$$m\ddot{x} = 0 \quad m\ddot{y} = -W \quad m\ddot{z} = 0$$

y las componentes de la aceleración del proyectil corresponden a

$$\ddot{x} = 0 \quad \ddot{y} = -\frac{W}{m} = -g \quad \ddot{z} = 0$$

donde g es 9.81 m/s^2 o 32.2 ft/s^2 . Las ecuaciones que se obtienen se integran de manera independiente, como se muestra en la sección 11.11, para obtener la velocidad y el desplazamiento del proyectil en cualquier instante.

Cuando un problema implica dos o más cuerpos, las ecuaciones de movimiento deben escribirse para cada uno de ellos (véanse los problemas resueltos 12.3 y 12.4). Se recuerda de la sección 12.2 que todas las aceleraciones deben medirse con respecto a un sistema de referencia newtoniano. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería es posible determinar las aceleraciones con respecto a ejes unidos a la Tierra, aunque las aceleraciones relativas medidas con respecto a ejes móviles, como los ejes unidos al cuerpo acelerado, no pueden sustituirse en lugar de \mathbf{a} en las ecuaciones de movimiento.

Componentes tangencial y normal. Al descomponer las fuerzas y la aceleración de la partícula en componentes a lo largo de la tangente a la trayectoria (en la dirección de movimiento) y la normal (hacia

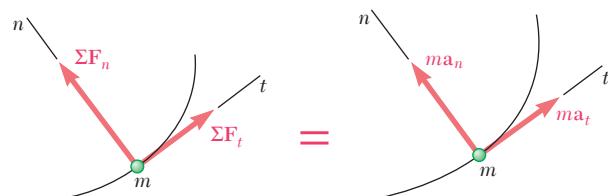


Figura 12.9

el interior de la trayectoria) (figura 12.9) y sustituir a la ecuación (12.2), se obtienen las dos ecuaciones escalares

$$\Sigma F_t = ma_t \quad \Sigma F_n = ma_n \quad (12.9)$$

Al sustituir a_t y a_n , de las ecuaciones (11.40), se tiene

$$\Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{\rho} \quad (12.9')$$

Las ecuaciones que se obtienen pueden resolverse para dos incógnitas.

Al volver a la ecuación (12.2) y trasponer el miembro del lado derecho, se escribe la segunda ley de Newton en la forma alternativa

$$\Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \quad (12.10)$$

en la que se expresa que si se suma el vector $-m\mathbf{a}$ a las fuerzas que actúan sobre la partícula, se obtiene un sistema de vectores equivalente a cero (figura 12.10). El vector $-m\mathbf{a}$, de magnitud $m\mathbf{a}$ y de dirección opuesta a la de la aceleración, se denomina *vector de inercia*. De tal modo, es factible considerar que la partícula está en equilibrio bajo la acción de las fuerzas dadas y del vector de inercia. Se afirma que la partícula está en *equilibrio dinámico*, y el problema que se considera puede resolverse mediante los métodos que se desarrollaron antes en estática.

En el caso de fuerzas coplanares, todos los vectores que se muestran en la figura 12.10, *incluyendo al vector de inercia*, pueden trazarse uno después del otro para formar un polígono vectorial cerrado. También es posible igualar a cero la suma de los componentes de todos los vectores en la figura 12.10, incluyendo de nuevo al vector de inercia. En consecuencia, utilizando componentes rectangulares, se escribe

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \text{incluyendo el vector de inercia} \quad (12.11)$$

Cuando se usan las componentes tangencial y normal, resulta más conveniente representar el vector de inercia por medio de sus dos componentes $-m\mathbf{a}_t$ y $-m\mathbf{a}_n$ en el mismo dibujo (figura 12.11). La componente tangencial del vector de inercia ofrece una medida que la resistencia de la partícula presenta a un cambio en la velocidad, en tanto que su componente normal (también llamada *fuerza centrífuga*) representa la tendencia de la partícula a abandonar su trayectoria curva. Es necesario advertir que cualquiera de estas dos componentes puede ser cero en condiciones especiales: 1) si la partícula parte del reposo, su velocidad inicial es cero y la componente normal del vector de inercia es cero en $t = 0$; 2) si la partícula se mueve con velocidad constante a lo largo de su trayectoria, la componente tangencial del vector de inercia es cero y sólo es necesario considerar su componente normal.

Debido a que mide la resistencia que la partícula ofrece cuando se trata de ponerla en movimiento, o cuando se intenta cambiar las condiciones de este mismo, los vectores de inercia a menudo se denominan *fuerzas de inercia*. Sin embargo, las fuerzas de inercia no son similares a las que se encuentran en estática, que son fuerzas de contacto o fuerzas gravitacionales (pesos). Por consiguiente, muchas personas objetan el uso de la palabra “fuerza” cuando se refieren al vector $-m\mathbf{a}$, o incluso evitan el concepto de equilibrio dinámico. Otros afirman que las fuerzas de inercia y las fuerzas reales, como las gravitacionales, afectan nuestros sentidos en la misma forma y no es posible distinguirlas por mediciones físicas. Un hombre que viaja en un elevador que se acelera hacia arriba puede sentir que su peso se ha incrementado de manera repentina; y ninguna medida efectuada dentro del elevador podría establecer si éste en verdad está acelerado o si se ha incrementado de manera repentina la fuerza de atracción ejercida por la Tierra.

Se ha llegado a las soluciones de los problemas resueltos de este texto mediante la aplicación directa de la segunda ley de Newton, como se ilustra en las figuras 12.8 y 12.9, y no mediante el método de equilibrio dinámico.

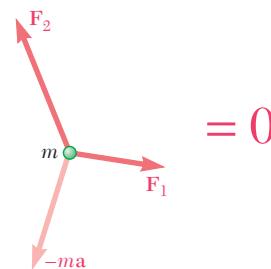


Figura 12.10

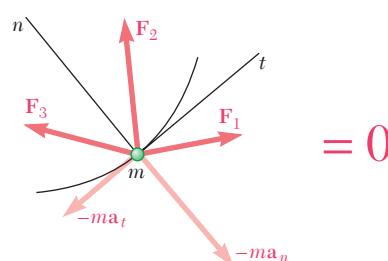
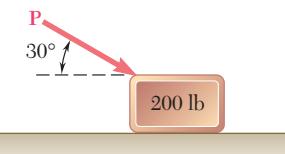


Figura 12.11



Fotografía 12.3 El ángulo que forma cada persona con respecto a la horizontal dependerá de su peso y de la rapidez de rotación.



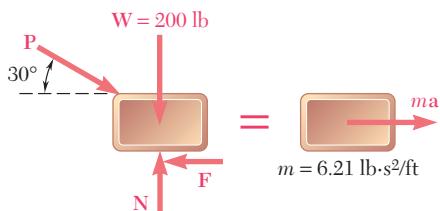
PROBLEMA RESUELTO 12.1

Un bloque de 200 lb descansa sobre un plano horizontal. Determine la magnitud de la fuerza \mathbf{P} que se requiere para dar al bloque una aceleración de 10 ft/s² hacia la derecha. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.25$.

SOLUCIÓN

La masa del bloque es

$$m = \frac{W}{g} = \frac{200 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 6.21 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$



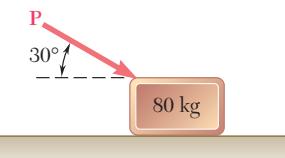
Se tiene que $F = \mu_k N = 0.25N$ y que $a = 10 \text{ ft/s}^2$. Al expresar que las fuerzas que actúan sobre el bloque son equivalentes al vector ma , se escribe

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum F_x &= ma: & P \cos 30^\circ - 0.25N &= (6.21 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(10 \text{ ft/s}^2) \\ && P \cos 30^\circ - 0.25N &= 62.1 \text{ lb} \end{aligned} \quad (1)$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0: \quad N - P \sin 30^\circ - 200 \text{ lb} = 0 \quad (2)$$

Al resolver (2) para N y sustituir el resultado en (1), se obtiene

$$\begin{aligned} N &= P \sin 30^\circ + 200 \text{ lb} \\ P \cos 30^\circ - 0.25(P \sin 30^\circ + 200 \text{ lb}) &= 62.1 \text{ lb} \quad \textcolor{blue}{P = 151 \text{ lb}} \end{aligned}$$



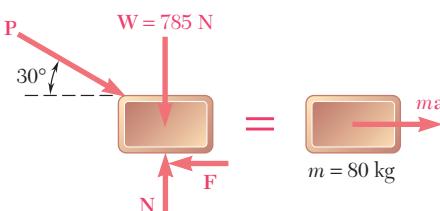
PROBLEMA RESUELTO 12.2

Un bloque de 80 kg descansa sobre un plano horizontal. Determine la magnitud de la fuerza \mathbf{P} requerida para dar al bloque una aceleración de 2.5 m/s² hacia la derecha. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.25$.

SOLUCIÓN

El peso del bloque es

$$W = mg = (80 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 785 \text{ N}$$



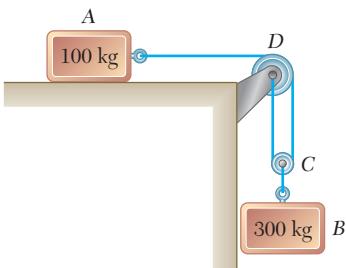
Se tiene que $F = \mu_k N = 0.25N$ y que $a = 2.5 \text{ m/s}^2$. Al expresar que las fuerzas que actúan sobre el bloque son equivalentes al vector ma , se escribe

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum F_x &= ma: & P \cos 30^\circ - 0.25N &= (80 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s}^2) \\ && P \cos 30^\circ - 0.25N &= 200 \text{ N} \end{aligned} \quad (1)$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0: \quad N - P \sin 30^\circ - 785 \text{ N} = 0 \quad (2)$$

Al resolver (2) para N y sustituir el resultado en (1), se obtiene

$$\begin{aligned} N &= P \sin 30^\circ + 785 \text{ N} \\ P \cos 30^\circ - 0.25(P \sin 30^\circ + 785 \text{ N}) &= 200 \text{ N} \quad \textcolor{blue}{P = 535 \text{ N}} \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 12.3

Los dos bloques que se muestran empiezan a moverse a partir del reposo. El plano horizontal y la polea no presentan fricción y se supone que la masa de la polea puede ignorarse. Determine la aceleración de cada bloque y la tensión de cada cuerda.

SOLUCIÓN

Cinemática. Se tiene que si el bloque A se mueve la distancia x_A hacia la derecha, el bloque B descende

$$x_B = \frac{1}{2}x_A$$

Al diferenciar dos veces con respecto a t , se tiene

$$a_B = \frac{1}{2}a_A \quad (1)$$

Cinética. Se aplica sucesivamente la segunda ley de Newton al bloque A, el bloque B y la polea C.

Bloque A. Al denotar mediante T_1 la tensión en la cuerda ACD, se escribe

$$\pm \sum F_x = m_A a_A: \quad T_1 = 100a_A \quad (2)$$

Bloque B. Al observar que el peso del bloque B es

$$W_B = m_B g = (300 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 2940 \text{ N}$$

y al denotar mediante T_2 la tensión en la cuerda BC, se escribe

$$+\downarrow \sum F_y = m_B a_B: \quad 2940 - T_2 = 300a_B$$

o, al sustituir a_B de (1),

$$2940 - T_2 = 300\left(\frac{1}{2}a_A\right) \quad (3)$$

$$T_2 = 2940 - 150a_A$$

Polea C. Puesto que m_C se supone igual a cero, se tiene

$$+\downarrow \sum F_y = m_C a_C = 0: \quad T_2 - 2T_1 = 0 \quad (4)$$

Al sustituir T_1 y T_2 de (2) y (3), respectivamente, en (4), se obtiene

$$2940 - 150a_A - 2(100a_A) = 0 \quad \text{◀}$$

$$2940 - 350a_A = 0 \quad \textcolor{blue}{a_A = 8.40 \text{ m/s}^2} \quad \text{◀}$$

Mediante la sustitución del valor que se obtuvo para a_A en (1) y (2), se tiene

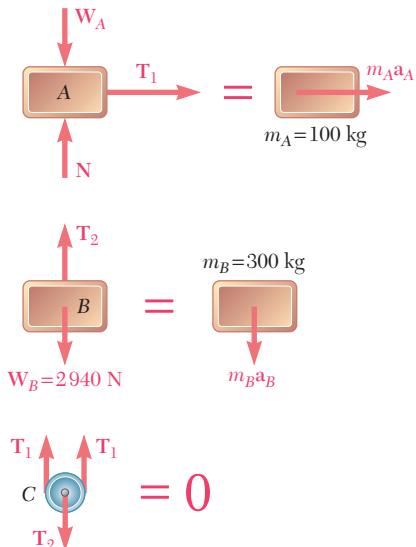
$$a_B = \frac{1}{2}a_A = \frac{1}{2}(8.40 \text{ m/s}^2) \quad \textcolor{blue}{a_B = 4.20 \text{ m/s}^2} \quad \text{◀}$$

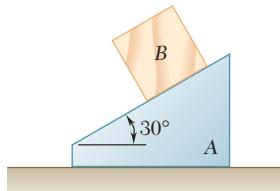
$$T_1 = 100a_A = (100 \text{ kg})(8.40 \text{ m/s}^2) \quad \textcolor{blue}{T_1 = 840 \text{ N}} \quad \text{◀}$$

Recordando (4), se escribe

$$T_2 = 2T_1 \quad T_2 = 2(840 \text{ N}) \quad \textcolor{blue}{T_2 = 1680 \text{ N}} \quad \text{◀}$$

Se tiene que el valor que se obtuvo para T_2 no es igual al peso del bloque B.

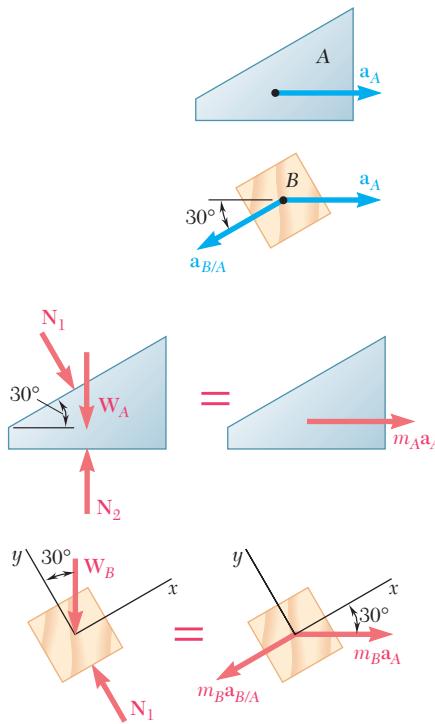




PROBLEMA RESUELTO 12.4

El bloque *B* de 12 lb empieza a moverse desde el reposo y desliza sobre la cuña *A* de 30 lb, la cual está sobre una superficie horizontal. Si se ignora la fricción, determine *a)* la aceleración de la cuña, *b)* la aceleración del bloque relativa a la cuña.

SOLUCIÓN



Cinemática. Se examina primero la aceleración de la cuña y la aceleración del bloque.

Cuña A. Puesto que la cuña está restringida a moverse sobre la superficie horizontal, su aceleración \mathbf{a}_A es horizontal. Se supondrá que ésta apunta hacia la derecha.

Block B. La aceleración \mathbf{a}_B del bloque *B* puede expresarse como la suma de la aceleración de *A* y de la aceleración de *B* relativa a *A*. Se tiene

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

donde $\mathbf{a}_{B/A}$ está dirigida a lo largo de la superficie inclinada de la cuña.

Cinética. Se dibujan los diagramas del cuerpo libre de la cuña y del bloque y se aplica la segunda ley de Newton.

Cuña A. Se denotan las fuerzas ejercidas por el bloque y la superficie horizontal sobre la cuña *A* mediante \mathbf{N}_1 y \mathbf{N}_2 , respectivamente.

$$+\rightarrow \sum F_x = m_A a_A: \quad N_1 \sin 30^\circ = m_A a_A \\ 0.5N_1 = (W_A/g)a_A \quad (1)$$

Block B. Al utilizar los ejes de coordenadas que se muestran y descomponer \mathbf{a}_B y sus componentes \mathbf{a}_A y $\mathbf{a}_{B/A}$, se escribe

$$+\nearrow \sum F_x = m_B a_x: \quad -W_B \sin 30^\circ = m_B a_A \cos 30^\circ - m_B a_{B/A} \\ -W_B \sin 30^\circ = (W_B/g)(a_A \cos 30^\circ - a_{B/A}) \\ a_{B/A} = a_A \cos 30^\circ + g \sin 30^\circ \quad (2)$$

$$+\nwarrow \sum F_y = m_B a_y: \quad N_1 - W_B \cos 30^\circ = -m_B a_A \sin 30^\circ \\ N_1 - W_B \cos 30^\circ = -(W_B/g)a_A \sin 30^\circ \quad (3)$$

a) Aceleración de la cuña A. Si se sustituye N_1 de la ecuación (1) en la ecuación (3), se tiene

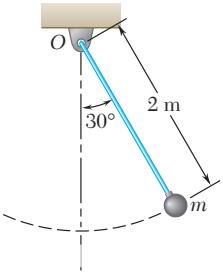
$$2(W_A/g)a_A - W_B \cos 30^\circ = -(W_B/g)a_A \sin 30^\circ$$

Al resolver para a_A y sustituir los datos numéricos, se escribe

$$a_A = \frac{W_B \cos 30^\circ}{2W_A + W_B \sin 30^\circ} \quad g = \frac{(12 \text{ lb}) \cos 30^\circ}{2(30 \text{ lb}) + (12 \text{ lb}) \sin 30^\circ} (32.2 \text{ ft/s}^2) \\ a_A = +5.07 \text{ ft/s}^2 \quad \mathbf{a}_A = 5.07 \text{ ft/s}^2 \rightarrow \blacktriangleleft$$

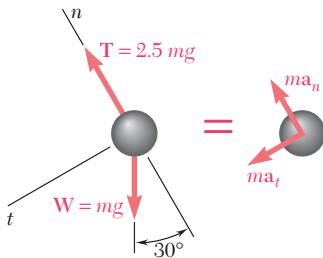
b) Aceleración del bloque B relativa a A. Al sustituir el valor que se obtuvo para a_A en la ecuación (2), se tiene

$$a_{B/A} = (5.07 \text{ ft/s}^2) \cos 30^\circ + (32.2 \text{ ft/s}^2) \sin 30^\circ \\ a_{B/A} = +20.5 \text{ ft/s}^2 \quad \mathbf{a}_{B/A} = 20.5 \text{ ft/s}^2 \not\parallel 30^\circ \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 12.5

La plomada de un péndulo de 2 m describe un arco de círculo en un plano vertical. Si la tensión de la cuerda de estos puntos es cinco veces el peso de la plomada en la posición que se indica, determine la velocidad y la aceleración de la plomada en esa posición.



SOLUCIÓN

El peso de la plomada es $W = mg$; la tensión en la cuerda corresponde consecuentemente a $2.5 mg$. Al recordar que \mathbf{a}_n apunta hacia O y suponiendo que \mathbf{a}_t en la forma que se muestra, se aplica la segunda ley de Newton y se obtiene

$$+\swarrow \Sigma F_t = ma_t: \quad mg \operatorname{sen} 30^\circ = ma_t \\ a_t = g \operatorname{sen} 30^\circ = +4.90 \text{ m/s}^2 \quad \mathbf{a}_t = 4.90 \text{ m/s}^2 \swarrow$$

$$+\nwarrow \Sigma F_n = ma_n: \quad 2.5 mg - mg \cos 30^\circ = ma_n \\ a_n = 1.634 g = +16.03 \text{ m/s}^2 \quad \mathbf{a}_n = 16.03 \text{ m/s}^2 \nwarrow$$

Puesto que $a_n = v^2/\rho$, se tiene $v^2 = \rho a_n = (2 \text{ m})(16.03 \text{ m/s}^2)$

$$v = \pm 5.66 \text{ m/s} \quad \mathbf{v} = 5.66 \text{ m/s} \swarrow \text{(arriba o abajo)}$$

PROBLEMA RESUELTO 12.6

Determine la rapidez máxima de la curva de una autopista de radio $\rho = 400$ ft que tiene un ángulo de peralte $\theta = 18^\circ$. La *rapidez máxima* de la curva peraltada de una autopista es aquella a la cual un automóvil debe viajar para que no exista fuerza de rozamiento lateral en sus neumáticos.

SOLUCIÓN

El automóvil se traslada en una trayectoria circular horizontal de radio ρ . La componente normal \mathbf{a}_n de la aceleración apunta hacia el centro de la trayectoria; su magnitud es $a_n = v^2/\rho$, donde v es la velocidad del automóvil en ft/s. La masa m del auto es W/g , donde W es su peso. Puesto que no se va a ejercer fuerza de fricción lateral sobre el automóvil, la reacción \mathbf{R} del camino se presenta perpendicular al mismo. Al aplicar la segunda ley de Newton se escribe

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad R \cos \theta - W = 0 \quad R = \frac{W}{\cos \theta} \quad (1)$$

$$+\leftarrow \Sigma F_n = ma_n: \quad R \sin \theta = \frac{W}{g} a_n \quad (2)$$

Al sustituir R de (1) en (2), y recordar que $a_n = v^2/\rho$,

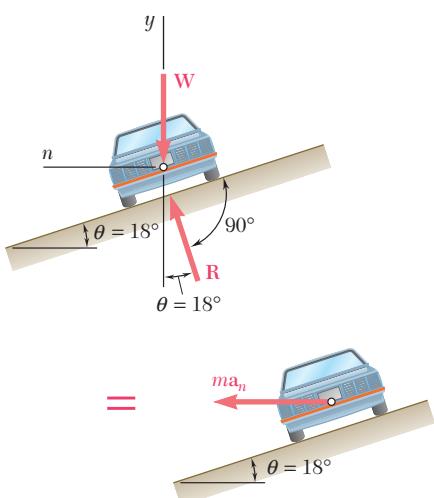
$$\frac{W}{\cos \theta} \sin \theta = \frac{W}{g} \frac{v^2}{\rho} \quad v^2 = g \rho \tan \theta$$

Al sustituir $\rho = 400$ ft y $\theta = 18^\circ$ en esta ecuación, se obtiene

$$v^2 = (32.2 \text{ ft/s}^2)(400 \text{ ft}) \tan 18^\circ$$

$$v = 64.7 \text{ ft/s}$$

$$v = 44.1 \text{ mi/h} \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas de esta sección se aplicará la *segunda ley de movimiento de Newton*, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, para relacionar las fuerzas que actúan sobre una partícula con el movimiento de esta misma.

1. Escritura de las ecuaciones de movimiento. Al aplicar la segunda ley de Newton a los tipos de movimiento que se estudian en esta lección, se encontrará más conveniente expresar los vectores \mathbf{F} y \mathbf{a} en términos de sus componentes rectangulares o de sus componentes tangencial y normal.

a) Cuando se utilicen componentes rectangulares, y recordando de la sección 11.11 las expresiones que se obtuvieron para a_x , a_y y a_z se debe escribir

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \quad \Sigma F_y = m\ddot{y} \quad \Sigma F_z = m\ddot{z}$$

b) Cuando se usen las componentes tangencial y normal, y recordando de la sección 11.13 las expresiones que se obtuvieron para a_t y a_n se debe escribir

$$\Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

2. El dibujo de un diagrama de un cuerpo libre que muestre las fuerzas aplicadas y un diagrama equivalente que indique el vector $m\mathbf{a}$ o sus componentes proporcionará una representación gráfica de la segunda ley de Newton [problemas resueltos 12.1 a 12.6]. Estos diagramas resultarán de gran ayuda cuando se escriban las ecuaciones de movimiento. Hay que observar que cuando el problema incluye dos o más cuerpos, suele ser mejor considerar cada cuerpo por separado.

3. Aplicación de la segunda ley de Newton. Como se observó en la sección 12.2, la aceleración utilizada en la ecuación $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ siempre debe ser la *aceleración absoluta* de la partícula (es decir, es necesario medirla con respecto a un sistema de referencia newtoniano). Además, si se desconoce el sentido de la aceleración \mathbf{a} o no es fácil deducirlo, hay que suponer un sentido arbitrario para la misma (por lo general la dirección positiva de un eje de coordenada) y dejar que la solución proporcione después el sentido correcto. Por último, hay que advertir cómo las soluciones de los problemas resueltos 12.3 y 12.4 se dividieron en la parte *cinemática* y en la parte *cinética*, y cómo en el problema resuelto 12.4 se usaron dos sistemas de ejes coordinados para simplificar las ecuaciones de movimiento.

4. Cuando un problema incluye fricción seca, hay que cerciorarse de revisar las importantes secciones de *Estática* [secciones 8.1 a 8.3] antes de tratar de resolverlo. En particular, se debe saber cuándo recurrir a cada una de las ecuaciones $F = \mu_s N$ y $F = \mu_k N$. También se debe reconocer que si no se especifica el movimiento de un sistema, es necesario suponer primero un posible movimiento y luego verificar la validez de la suposición.

5. Solución de problemas que implican movimiento relativo. Cuando el cuerpo B se mueve con respecto al cuerpo A , como en el problema resuelto 12.4, a menudo resulta conveniente expresar la aceleración de B como

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

donde $\mathbf{a}_{B/A}$ es la aceleración de B relativa a A , esto es, la aceleración de B según se observa desde un sistema de referencia unido a A y en traslación. Si se observa que B se mueve en línea recta, $\mathbf{a}_{B/A}$ estará dirigida a lo largo de esa línea. Por otro lado, si se observa que B se mueve en una trayectoria circular, la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ debe descomponerse en las componentes tangencial y normal a esta trayectoria.

6. Por último, hay que considerar siempre las implicaciones de cualquier suposición que se haga. Por consiguiente, en un problema que incluya dos cuerdas, si supone que la tensión en una de las cuerdas es igual a su máximo valor permisible, se debe verificar si algún otro requerimiento impuesto para la otra cuerda será satisfecho en ese caso. Por ejemplo, ¿la tensión T en esa cuerda cumplirá la relación $0 \leq T \leq T_{\max}$? Esto es, ¿la cuerda permanecerá estirada y su tensión será menor que su valor máximo permisible?

Problemas

12.1 El valor de g en cualquier latitud ϕ puede obtenerse mediante la fórmula

$$g = 32.09 (1 + 0.0053 \operatorname{sen}^2 \phi) \text{ ft/s}^2$$

la cual toma en cuenta el efecto de la rotación de la Tierra junto con el hecho de que ésta no es realmente esférica. Determine con una exactitud de cuatro cifras significativas *a)* el peso en libras, *b)* la masa en libras, *c)* la masa en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$, en las latitudes de 0° , 45° , 60° , de una barra de plata, cuya masa se ha designado oficialmente igual a 5 lb.

12.2 La aceleración debida a la gravedad en la Luna es de 1.62 m/s^2 . Determine *a)* el peso en newtons y *b)* la masa en kilogramos en la Luna, para una barra de oro, cuya masa se ha designado de manera oficial igual a 2 kg.

12.3 Un satélite de 200 kg está en una órbita circular a 1 500 km por encima de la superficie de Venus. La aceleración debida a la atracción gravitacional de Venus a esta altura es de 5.52 m/s^2 . Determine la magnitud de la cantidad de movimiento lineal del satélite, si se sabe que su rapidez orbital es de $23.4 \times 10^3 \text{ km/h}$.

12.4 Una báscula de resorte *A* y una báscula de brazo *B* que tienen brazos de palanca iguales se fijan al techo de un elevador, y se les cuelgan paquetes idénticos en la forma mostrada. Si se sabe que cuando el elevador se mueve hacia abajo con una aceleración de 4 ft/s^2 la báscula de resorte indica una carga de 14.1 lb, determine *a)* el peso de los paquetes, *b)* la carga indicada por la báscula de resorte y la masa necesaria para equilibrar la báscula de brazo cuando el elevador asciende con una aceleración de 4 ft/s^2 .

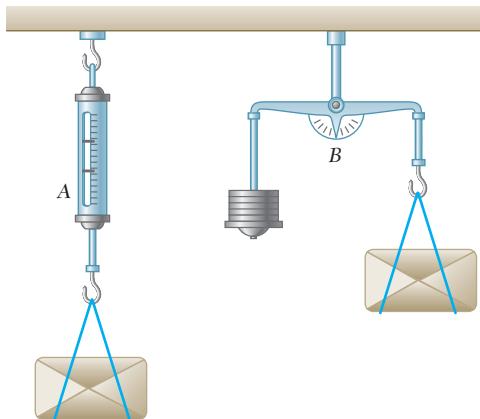


Figura P12.4

12.5 Un jugador de hockey golpea un disco de manera que éste vuelve al reposo en 9 s, después de deslizarse durante 30 m sobre el hielo. Determine *a)* la velocidad inicial del disco, *b)* el coeficiente de fricción entre el disco y el hielo.

12.6 Determine la máxima rapidez teórica que puede alcanzar un automóvil, que parte desde el reposo, después de recorrer 400 m. Suponga que existe un coeficiente de fricción estática de 0.80 entre las llantas y el pavimento y que *a*) el automóvil tiene tracción en las ruedas delanteras, las cuales soportan 62 por ciento del peso del automóvil, *b*) el automóvil tiene tracción en las ruedas traseras, las cuales soportan 43 por ciento del peso del automóvil.

12.7 En previsión de una larga pendiente ascendente de 7° , un conductor de autobús acelera a una razón constante de 3 ft/s^2 cuando todavía está en una sección plana de la carretera. Si se sabe que la rapidez del autobús es de 60 mi/h cuando comienza a subir la pendiente y el conductor no cambia la posición de su acelerador ni cambia de velocidad, determine la distancia recorrida por el autobús sobre la pendiente cuando su rapidez ha disminuido a 50 mi/h .

12.8 Si la distancia de frenado de un automóvil desde 60 mph es de 150 ft sobre un pavimento plano, determine la distancia de frenado del automóvil desde 60 mph cuando está *a*) subiendo una pendiente de 5° , *b*) bajando por un plano inclinado a 3 por ciento. Suponga que la fuerza de frenado es independiente del grado de inclinación.

12.9 Un paquete de 20 kg se encuentra en reposo sobre un plano inclinado cuando se le aplica una fuerza **P**. Determine la magnitud de **P** si se requieren 10 s para que el paquete recorra 5 m hacia arriba por el plano inclinado. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el paquete y el plano inclinado son iguales a 0.3.

12.10 La aceleración de un paquete que se desliza en el punto A es de 3 m/s^2 . Si se supone que el coeficiente de fricción cinética es el mismo para cada sección, determine la aceleración del paquete en el punto B.

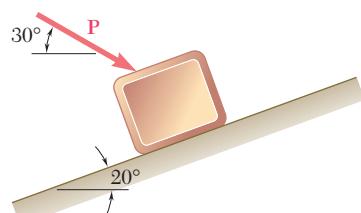


Figura P12.9

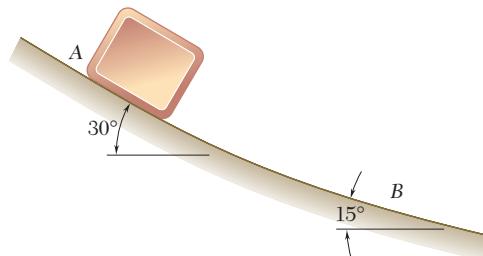


Figura P12.10

12.11 Los dos bloques que se muestran en la figura se encuentran originalmente en reposo. Si se desprecian las masas de las poleas y el efecto de fricción en éstas y entre el bloque A y la superficie horizontal, determine *a*) la aceleración de cada bloque, *b*) la tensión en el cable.

12.12 Los dos bloques que se muestran en la figura se encuentran originalmente en reposo. Si se desprecian las masas de las poleas y el efecto de fricción en éstas y se supone que los componentes de fricción entre el bloque A y la superficie horizontal son $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine *a*) la aceleración de cada bloque, *b*) la tensión en el cable.

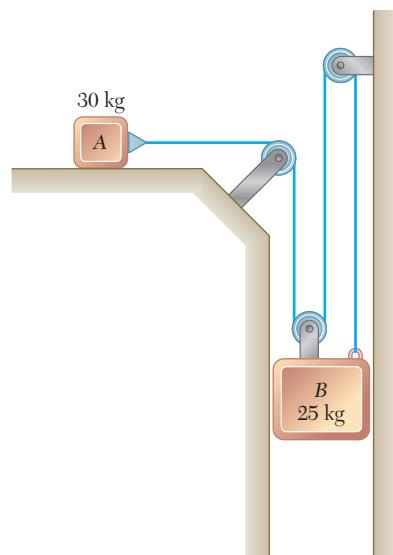


Figura P12.11 y P12.12

12.13 Los coeficientes de fricción entre la carga y la plataforma plana del camión que se muestra en la figura son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Si se sabe que la rapidez del vehículo es de 45 mi/h, determine la distancia más corta en la que el camión puede detenerse por completo sin que la carga se mueva.

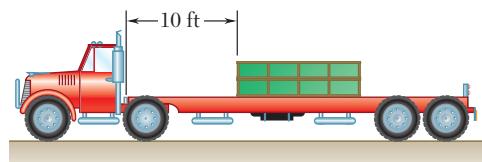


Figura P12.13

12.14 Un tractocamión viaja a 60 mi/h cuando el conductor aplica los frenos. Si se sabe que las fuerzas de frenado del tractor y el remolque son, respectivamente, 3 600 lb y 13 700 lb, determine *a*) la distancia recorrida por el tractocamión antes de detenerse, *b*) la componente horizontal de la fuerza en el enganche entre el tractor y el remolque mientras éstos van frenando.



Figura P12.14

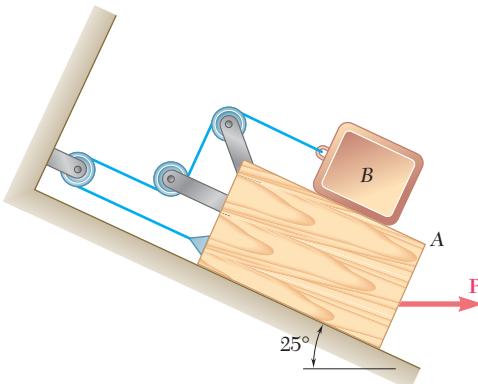


Figura P12.15 y P12.16

12.15 El bloque *A* tiene una masa de 40 kg y el bloque *B* de 8 kg. Los coeficientes de fricción entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$. Si $P = 0$, determine *a*) la aceleración del bloque *B*, *b*) la tensión en la cuerda.

12.16 El bloque *A* tiene una masa de 40 kg y el bloque *B* de 8 kg. Los coeficientes de fricción entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$. Si se sabe que $P = 40 \text{ N} \rightarrow$, determine *a*) la aceleración del bloque *B*, *b*) la tensión en la cuerda.

12.17 Las cajas *A* y *B* están en reposo sobre una banda transportadora que se encuentra inicialmente en reposo. La banda se empieza a mover de manera repentina en la dirección ascendente de manera que ocurre deslizamiento entre la banda y las cajas. Si los coeficientes de fricción cinética entre la banda y las cajas son $(\mu_k)_A = 0.30$ y $(\mu_k)_B = 0.32$, determine la aceleración inicial de cada caja.

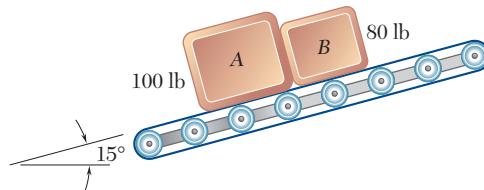


Figura P12.17

- 12.18** Si el sistema mostrado inicia desde el reposo, encuentre la velocidad en $t = 1.2 \text{ s}$ a) del collarín A, b) del collarín B. No tome en cuenta las masas de las poleas y el efecto de la fricción.

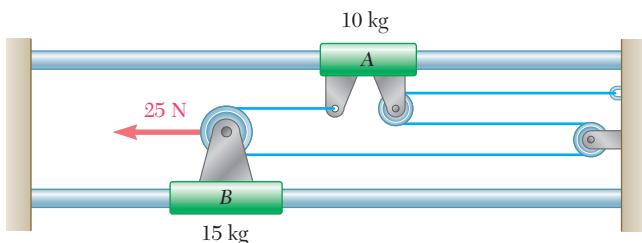


Figura P12.18

- 12.19** Cada uno de los sistemas que se muestran en la figura está al principio en reposo. Si se ignora la fricción del eje y las masas de las poleas, determine para cada sistema a) la aceleración del bloque A, b) la velocidad del bloque A después de que éste se ha movido 10 ft, c) el tiempo que se requiere para que el bloque A alcance una velocidad de 20 ft/s.

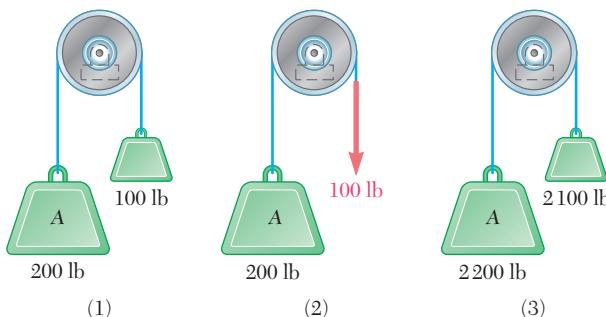


Figura P12.19

- 12.20** Un hombre que está parado dentro de un elevador, el cual se mueve con una aceleración constante, sostiene un bloque B de 3 kg entre otros dos bloques de tal forma que el movimiento de B en relación con A y C es inminente. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre todas las superficies son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$, determine a) la aceleración del elevador si se está moviendo hacia arriba y cada una de las fuerzas ejercidas por el hombre sobre los bloques A y C tiene una componente horizontal igual al doble del peso de B, b) las componentes horizontales de las fuerzas ejercidas por el hombre sobre los bloques A y C si la aceleración del elevador es de 2.0 m/s^2 hacia abajo.

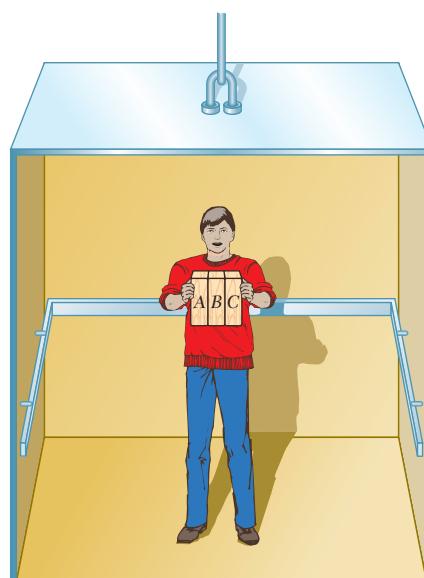


Figura P12.20

- 12.21** Un paquete está en reposo sobre una banda transportadora que en un principio se encuentra en reposo. La banda empieza a moverse hacia la derecha durante 1.3 s con una aceleración constante de 2 m/s^2 . Después la banda se mueve con una desaceleración constante a_2 y se detiene después de un desplazamiento total de 2.2 m. Si los coeficientes de fricción entre el paquete y la banda son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine a) la desaceleración a_2 de la banda, b) el desplazamiento del paquete relativo a la banda cuando ésta se detiene.

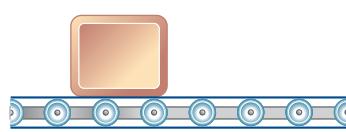


Figura P12.21

12.22 Para transportar una serie de bultos de tejas A hasta el techo, un contratista utiliza un montacargas motorizado compuesto por una plataforma horizontal BC que se monta sobre los rieles unidos a los lados de una escalera. El montacargas empieza su movimiento desde el reposo, al principio se mueve con una aceleración constante a_1 como se muestra en la figura. Después se desacelera a una tasa constante a_2 y se detiene en D, cerca de la parte superior de la escalera. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bulto de tejas y la plataforma horizontal es de 0.30, determine la aceleración máxima permisible a_1 , y la desaceleración máxima permisible a_2 si el bulto no debe resbalarse sobre la plataforma.

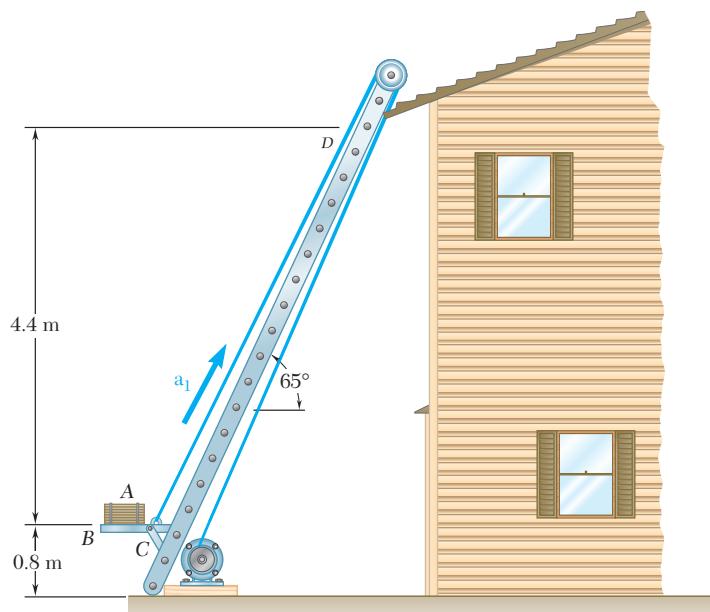


Figura P12.22

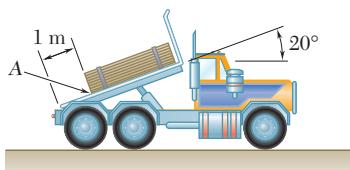


Figura P12.23

12.23 Para bajar de un camión una pila de madera comprimida, el conductor primero inclina la cama del vehículo y después acelera desde el reposo. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre la lámina debajo de la madera comprimida y la cama son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$, determine a) la aceleración mínima del camión que provocará el deslizamiento de la pila de madera comprimida, b) la aceleración del camión que ocasionará que la esquina A de la pila de madera llegue al extremo de la cama en 0.9 s.

12.24 Los propulsores de un barco de peso W pueden producir una fuerza impulsora \mathbf{F}_0 ; producen una fuerza de la misma magnitud pero dirección opuesta cuando los motores se invierten. Si se sabe que el barco se desplaza hacia delante a su rapidez máxima v_0 cuando los motores se pusieron en reversa, determine la distancia que recorre el barco antes de detenerse. Suponga que la resistencia a la fricción del agua varía directamente con el cuadrado de la velocidad.

12.25 Se aplica una fuerza constante \mathbf{P} al pistón y a la varilla de masa total m para que se muevan en un cilindro lleno de aceite. Conforme se mueve el pistón, se obliga a que el aceite atraviese los orificios en el pistón y ejerza sobre este mismo una fuerza de magnitud kv en la dirección opuesta al movimiento del pistón. Si el pistón parte de reposo en $t = 0$ y $x = 0$, muestre que la ecuación que relaciona a x , v y t es lineal en cada una de las variables donde x es la distancia recorrida por el pistón y v es la rapidez del mismo.



Figura P12.25

- 12.26** Un resorte AB de constante k se une a un soporte A y a un collarín de masa m . La longitud no alargada del resorte es l . Si se suelta el collarín desde el reposo en $x = x_0$ y se desprecia la fricción entre el collarín y la varilla horizontal, determine la magnitud de la velocidad del collarín cuando pasa por el punto C .

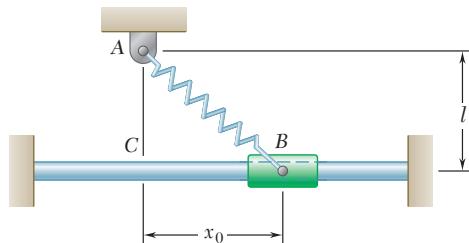


Figura P12.26

- 12.27** Determine la rapidez teórica máxima que puede alcanzar un automóvil de 2 700 lb, que parte desde el reposo, después de recorrer un cuarto de milla y tomando en cuenta la resistencia del aire. Suponga que el coeficiente de fricción estática es de 0.70 entre las llantas y el pavimento, que el automóvil tiene tracción delantera, que las ruedas delanteras soportan 62 por ciento del peso del automóvil, y que el arrastre aerodinámico \mathbf{D} tiene una magnitud $D = 0.012v^2$, donde D y v se expresan en libras y ft/s, respectivamente.

- 12.28** Los coeficientes de fricción entre los bloques A y C y las superficies horizontales son $\mu_s = 0.24$ y $\mu_k = 0.20$. Si se sabe que $m_A = 5$ kg, $m_B = 10$ kg y $m_C = 10$ kg, determine *a)* la tensión en la cuerda, *b)* la aceleración de cada bloque.

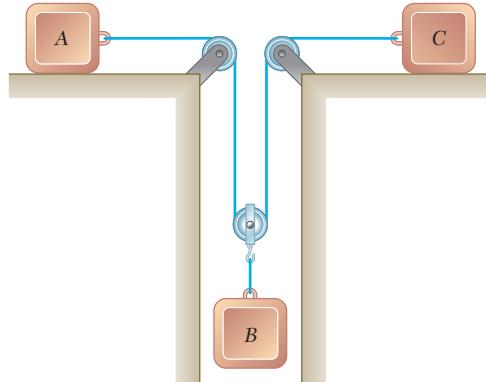


Figura P12.28

- 12.29** Retome el problema 12.28, y ahora suponga que $m_A = 5$ kg, $m_B = 10$ kg y $m_C = 20$ kg.

- 12.30** Los bloques A y B pesan 20 lb cada uno, el bloque C pesa 14 lb y el bloque D 16 lb. Si se aplica una fuerza hacia abajo con una magnitud de 24 lb sobre el bloque D , determine *a)* la aceleración de cada bloque, *b)* la tensión en la cuerda ABC. No tome en cuenta los pesos de las poleas ni el efecto de la fricción.

- 12.31** Los bloques A y B pesan 20 lb cada uno, el bloque C pesa 14 lb y el bloque D 16 lb. Si se aplica una fuerza hacia abajo con una magnitud de 10 lb sobre el bloque B y el sistema inicia su movimiento desde el reposo, determine en $t = 3$ s la velocidad *a)* de D en relación con A , *b)* de C en relación con D . No tome en cuenta los pesos de las poleas ni el efecto de la fricción.

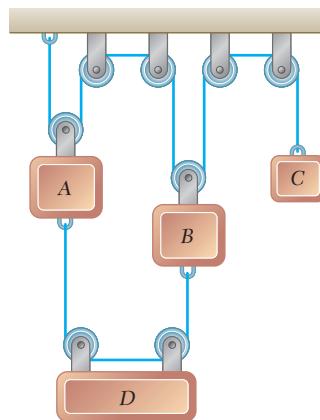


Figura P12.30 y P12.31

12.32 El bloque *B* de 15 kg está apoyado en el bloque *A* de 25 kg y unido a una cuerda a la cual se aplica una fuerza horizontal de 225 N, como se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta la fricción, determine *a*) la aceleración del bloque *A* y *b*) la aceleración del bloque *B* relativa a *A*.

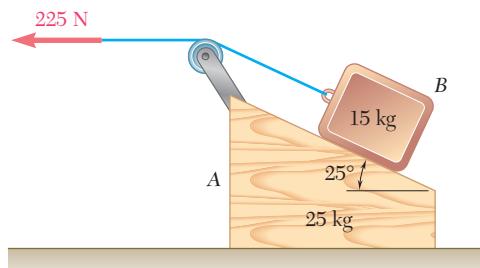


Figura P12.32

12.33 El bloque *B* con 10 kg de masa descansa sobre la superficie superior de una cuña *A* de 22 kg. Si se sabe que el sistema se libera desde el reposo y se desprecia la fricción, determine *a*) la aceleración de *B* y *b*) la velocidad de *B* en relación con *A* en $t = 0.5$ s.

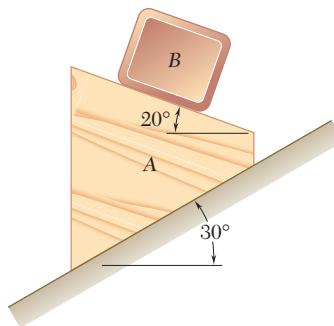


Figura P12.33

12.34 Un panel deslizante de 40 lb se sostiene mediante rodillos en *B* y *C*. Un contrapeso *A* de 25 lb se une a un cable como se muestra en la figura y, en los casos *a* y *c*, está inicialmente en contacto con un borde vertical del panel. Sin tomar en cuenta la fricción, determine en cada caso mostrado la aceleración del panel y la tensión en la cuerda inmediatamente después de que el sistema se libera desde el reposo.

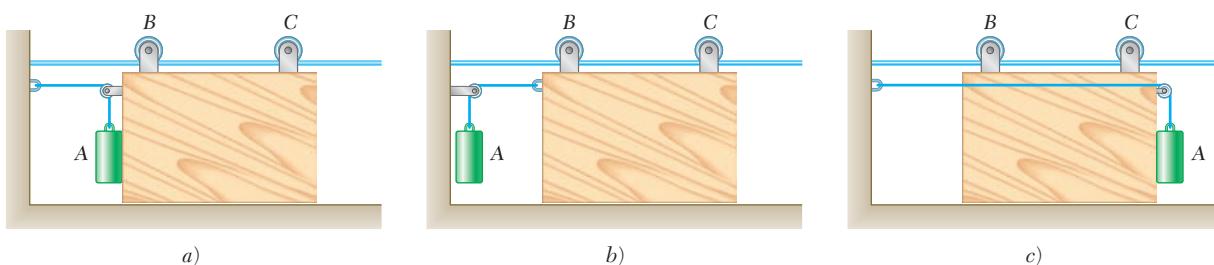


Figura P12.34

12.35 Una caja *B* de 500 lb está suspendida de un cable unido a una carretilla *A* de 40 lb que va montada sobre una viga I inclinada en la forma que se muestra. Si en el instante indicado la carretilla tiene una aceleración de 1.2 ft/s^2 hacia arriba y a la derecha, determine *a)* la aceleración de *B* en relación con *A* y *b)* la tensión en el cable *CD*.

12.36 Durante la práctica de un lanzador de martillo, la cabeza *A* del martillo de 7.1 kg gira a una velocidad constante *v* en un círculo horizontal como se muestra en la figura. Si $\rho = 0.93 \text{ m}$ y $\theta = 60^\circ$, determine *a)* la tensión en el alambre *BC*, *b)* la rapidez de la cabeza del martillo.

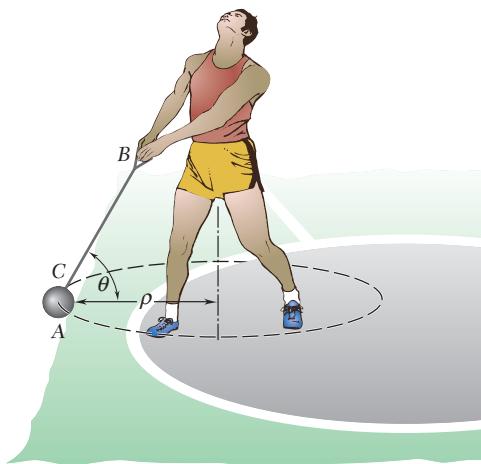


Figura P12.36

12.37 Una pelota atada *A* de 450 g se mueve a lo largo de una trayectoria circular a una rapidez constante de 4 m/s. Determine *a)* el ángulo θ que forma la cuerda con el poste *BC*, *b)* la tensión en la cuerda.

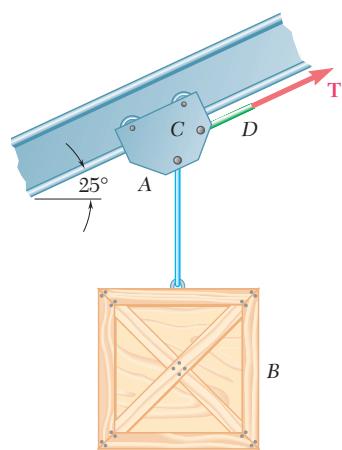


Figura P12.35

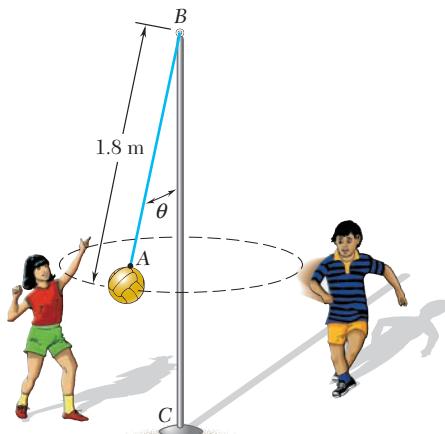


Figura P12.37

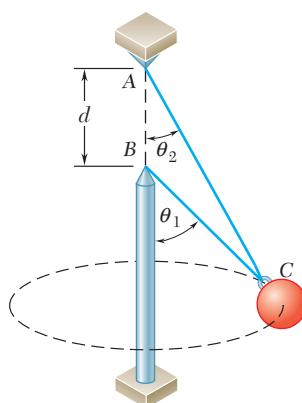


Figura P12.38, P12.39 y P12.40

12.38 Un alambre ACB de 80 in. de longitud pasa por un anillo en C , el cual está unido a una esfera que gira a una rapidez constante v en el círculo horizontal que se muestra en la figura. Si $\theta_1 = 60^\circ$ y $\theta_2 = 30^\circ$ y la tensión es la misma en ambas porciones del alambre, determine la rapidez v .

12.39 Un alambre ACB pasa por un anillo en C , el cual está unido a una esfera de 12 lb que gira a una rapidez constante v en el círculo horizontal que se muestra en la figura. Si $\theta_1 = 50^\circ$ y $d = 30$ in. y la tensión en ambas porciones del alambre es de 7.6 lb, determine *a)* el ángulo θ_2 y *b)* la rapidez v .

12.40 Dos alambres AC y BC están unidos a una esfera de 7 kg que gira a rapidez constante v en el círculo horizontal que se muestra en la figura. Si $\theta_1 = 55^\circ$ y $\theta_2 = 30^\circ$ y $d = 1.4$ m, determine el intervalo de valores de v para los cuales ambos alambres se mantienen tensos.

12.41 Una esfera D de 100 g se encuentra en reposo respecto al tambor ABC que gira a una razón constante. Sin tomar en cuenta la fricción, determine el intervalo de los valores permisibles de la velocidad v de la esfera, si ninguna de las fuerzas normales ejercidas por la esfera sobre las superficies inclinadas del tambor debe exceder 1.1 N.

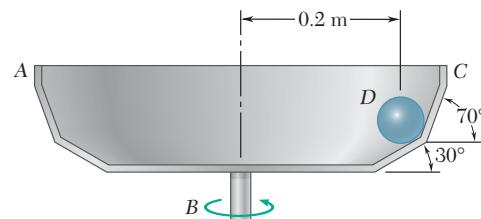


Figura P12.41

***12.42** Como parte de una exposición al aire libre, un modelo de la Tierra C de 12 lb se une a los alambres AC y BC y gira a rapidez constante v en el círculo horizontal que se muestra en la figura. Determine el intervalo de valores permisibles de v si ambos alambres permanecerán tensos y la tensión en cualquiera de ellos no será mayor que 26 lb.

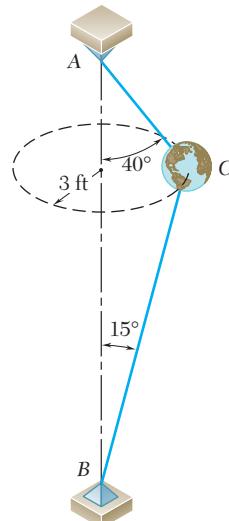


Figura P12.42

***12.43** Las esferas volantes de 1.2 lb del regulador centrífugo giran con rapidez constante v en el círculo horizontal de 6 in. de radio que se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta los pesos de los eslabones AB , BC , AD y DE y con la restricción de que los eslabones sólo soportan fuerzas de tensión, determine el intervalo de valores permisibles de v de modo que las magnitudes de las fuerzas de los eslabones no excedan 17 lb.

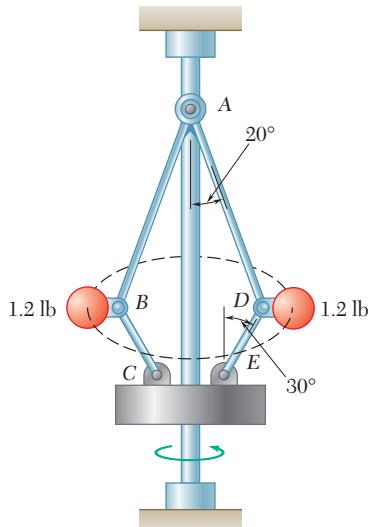


Figura P12.43

12.44 Un niño que tiene una masa de 22 kg se sienta sobre un columpio y un segundo niño lo mantiene en la posición mostrada. Si se desprecia la masa del columpio, determine la tensión en la cuerda AB *a)* mientras el segundo niño sostiene el columpio con sus brazos extendidos de manera horizontal, *b)* inmediatamente después de soltar el columpio.

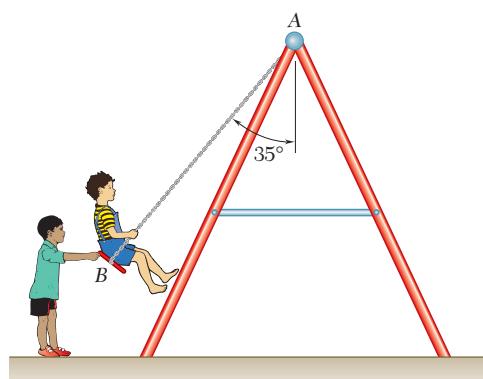


Figura P12.44

12.45 Una bola para demolición B de 60 kg está unida a un cable de acero AB de 15 m de largo y oscila en el arco vertical que se indica en la figura. Determine la tensión en el cable *a)* en la parte superior C de la oscilación y *b)* en la parte inferior D de la oscilación, donde la rapidez de B es igual a 4.2 m/s.

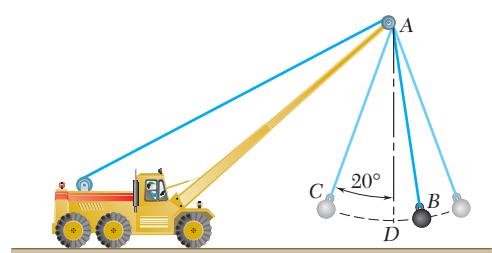


Figura P12.45

12.46 En el transcurso de una persecución a alta velocidad, un automóvil deportivo de 2 400 lb que viaja a una rapidez de 100 mi/h apenas pierde contacto con el camino cuando alcanza la cresta A de una colina. a) Determine el radio de curvatura ρ del perfil vertical del camino en A. b) Utilizando el valor de ρ que se encontró en el inciso a), determine la fuerza que ejerce el asiento de un conductor de 160 lb que conduce un automóvil de 3 100 lb, cuando este último, viajando a rapidez constante de 50 mi/h, pasa por A.

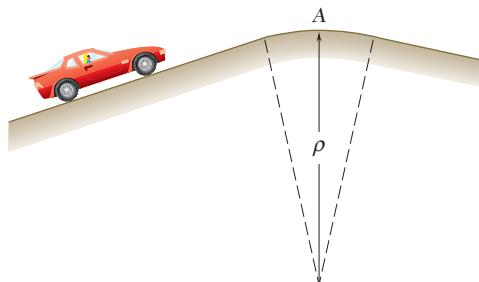


Figura P12.46

12.47 La porción mostrada de una pendiente para tobogán está contenida en un plano vertical. Las secciones AB y CD tienen los radios de curvatura que se indican en la figura, mientras que la sección BC es recta y forma un ángulo de 20° con la horizontal. Si el coeficiente de fricción cinética entre el trineo y la pendiente es de 0.10 y la rapidez del trineo es de 25 ft/s en B, determine la componente tangencial de la aceleración del trineo a) justo antes de llegar a B, b) justo después de pasar C.

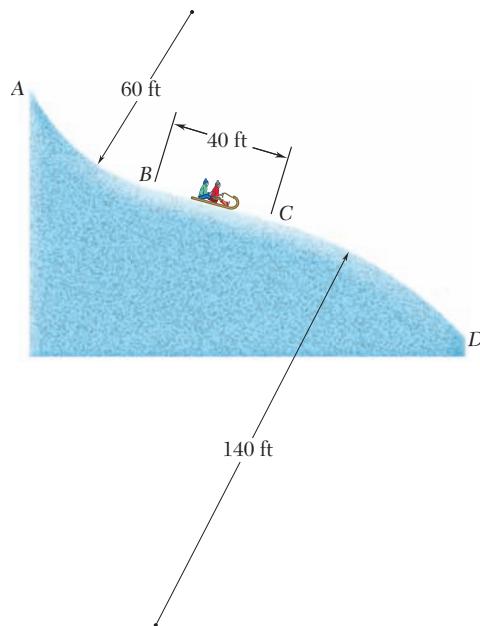


Figura P12.47

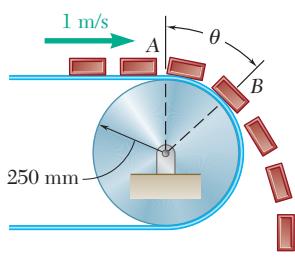


Figura P12.48

12.48 Una serie de pequeños paquetes, cada uno con una masa de 0.5 kg, se descarga desde una banda transportadora como se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre cada paquete y la banda transportadora es de 0.4, determine a) la fuerza ejercida por la banda sobre el paquete justo después de haber pasado el punto A, b) el ángulo θ que define al punto B donde los paquetes se *deslizan* por primera vez con respecto a la banda.

- 12.49** Una piloto de 54 kg vuela un jet de entrenamiento en una media vuelta vertical de 1 200 m de radio de manera que la velocidad del jet disminuye a razón constante. Si se sabe que los pesos aparentes de la piloto en los puntos A y C son respectivamente de 1 680 N y 350 N, determine la fuerza que ejerce sobre ella el asiento del jet cuando éste se encuentra en el punto B.

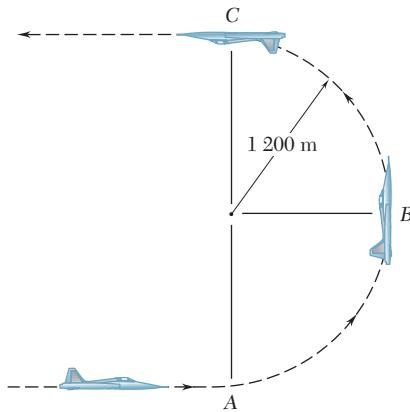


Figura P12.49

- 12.50** Un bloque B de 250 g se encuentra dentro de una pequeña cavidad cortada en el brazo OA, que gira en el plano vertical a razón constante de tal modo que $v = 3 \text{ m/s}$. Si se sabe que el resorte ejerce una fuerza de magnitud $P = 1.5 \text{ N}$ sobre el bloque B, y sin tomar en cuenta la fuerza de fricción, determine el intervalo de valores de θ para los cuales el bloque B está en contacto con la cara de la cavidad más cercana al eje de rotación O.

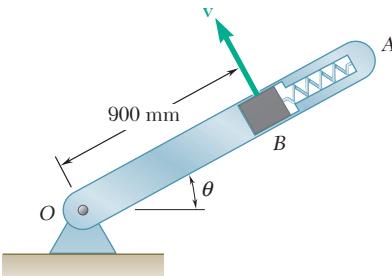


Figura P12.50

- 12.51** Una curva en una pista de carreras tiene un radio de 1000 ft y una rapidez máxima de 120 mi/h. (Vea en el problema resuelto 12.6 la definición de velocidad máxima.) Si se sabe que un automóvil de carreras comienza a derrapar sobre la curva cuando viaja a una rapidez de 180 mi/h, determine *a)* el ángulo θ del peralte, *b)* el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la pista bajo las condiciones prevalecientes, *c)* la rapidez mínima a la cual el mismo automóvil podría pasar la curva sin dificultades.

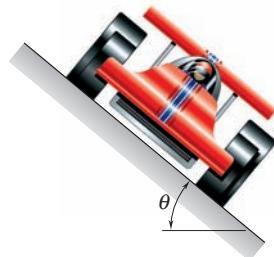


Figura P12.51

12.52 Un automóvil viaja sobre un camino peraltado a una rapidez constante v . Determine el intervalo de valores de v para los cuales el automóvil no patina. Exprese su respuesta en términos del radio r de la curva, el ángulo θ de peralte y el ángulo de fricción estática ϕ_s entre las llantas y el pavimento.

12.53 Los trenes de inclinación como el *American Flyer*, que viaja de Washington a Nueva York y Boston, están diseñados para desplazarse con seguridad a altas velocidades sobre secciones curvas de las vías que fueron diseñadas para trenes convencionales más lentos. Al entrar a una curva, cada vagón se inclina por medio de actuadores hidráulicos montados sobre sus plataformas. La característica de inclinación de los vagones incrementa también el confort de los pasajeros al eliminar o reducir de manera considerable la fuerza lateral \mathbf{F}_s (paralela al piso del vagón) a la cual los pasajeros se sienten sujetos. Para un tren que viaja a 100 mi/h sobre una sección curva de la vía con un ángulo de peralte $\theta = 6^\circ$ y con una rapidez máxima permitida de 60 mi/h, determine *a)* la magnitud de la fuerza lateral que siente un pasajero de peso W en un vagón estándar sin ninguna inclinación ($\phi = 0$), *b)* el ángulo de inclinación ϕ que se requiere si el pasajero no debe sentir ninguna fuerza lateral. (Vea en el problema resuelto 12.6 la definición de rapidez máxima.)

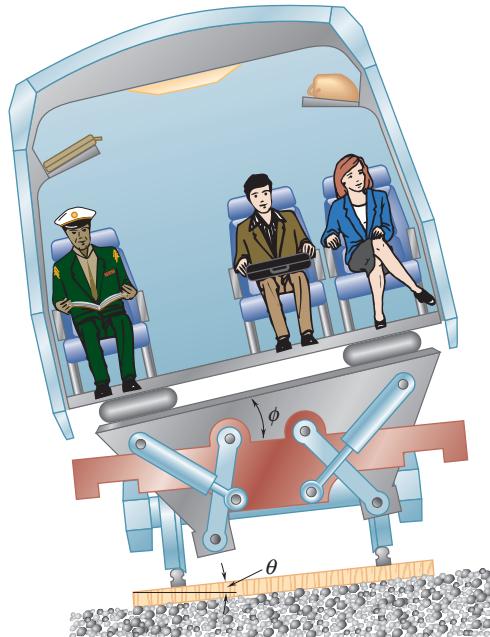


Figura P12.53 y P12.54

12.54 Las pruebas que se llevan a cabo con los trenes de inclinación descritos en el problema 12.53 revelan que los pasajeros se marean cuando miran a través de la ventana del vagón si el tren recorre una curva a alta velocidad, incluso sin sentir una fuerza lateral. En consecuencia, los diseñadores prefieren reducir, pero no eliminar esa fuerza. Para el caso del tren del problema 12.53, determine el ángulo de inclinación ϕ que se requiere si los pasajeros sintieran fuerzas laterales iguales a 10% de sus pesos.

12.55 Un pequeño collarín D de 300 g puede deslizarse sobre la porción AB de la barra que está dobrada en la forma que se indica en la figura. Si se sabe que $\alpha = 40^\circ$ y que la barra gira alrededor del eje vertical AC a una razón constante de 5 rad/s, determine el valor de r para el cual el collarín no se deslizará sobre la barra, si se desprecia el efecto de la fricción entre la barra y el collarín.

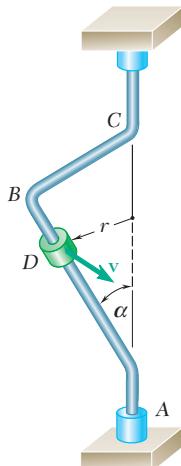


Figura P12.55,
P12.56 y P12.57

12.56 Un pequeño collarín D de 200 g puede deslizarse sobre la porción AB de la barra que está dobrada en la forma que se indica en la figura. Si se sabe que la barra gira alrededor del eje vertical AC a una razón constante y que $\alpha = 30^\circ$ y $r = 600$ mm, determine el intervalo de valores de la rapidez v para el cual el collarín no se deslizará sobre la barra, si el coeficiente de fricción estática entre la barra y el collarín es 0.30.

12.57 Un pequeño collarín D de 0.6 lb puede deslizarse sobre la porción AB de la barra que está dobrada en la forma que se indica en la figura. Si se sabe que $r = 8$ in. y que la barra gira alrededor del eje vertical AC a una razón constante de 10 rad/s, determine el valor mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra si el collarín no debe deslizarse cuando *a)* $\alpha = 15^\circ$, *b)* $\alpha = 45^\circ$. Para cada caso indique la dirección del movimiento inminente.

12.58 Una ranura semicircular con 10 in. de radio se corta en una placa plana que gira alrededor de la vertical AD a una razón constante de 14 rad/s. Un bloque pequeño E de 8 lb está diseñado para deslizarse en la ranura mientras la placa gira. Si los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine si el bloque se deslizará en la ranura cuando éste se libera en la posición correspondiente a *a)* $\theta = 80^\circ$, *b)* $\theta = 40^\circ$. También determine la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción ejercida sobre el bloque inmediatamente después de ser liberado.

12.59 Tres segundos después de que una pulidora empezó a moverse a partir del reposo, se observa el vuelo de pequeñas borlas de lana que salen de la circunferencia de 225 mm de diámetro de la almohadilla de pulido. Si la pulidora se enciende de tal manera que la lana de la circunferencia se somete a una aceleración constante tangencial de 4 m/s^2 , determine *a)* la rapidez v de la borla cuando ésta se desprende de la almohadilla y *b)* la magnitud de la fuerza que se requiere para liberar la borla si la masa promedio de ésta es de 1.6 mg.

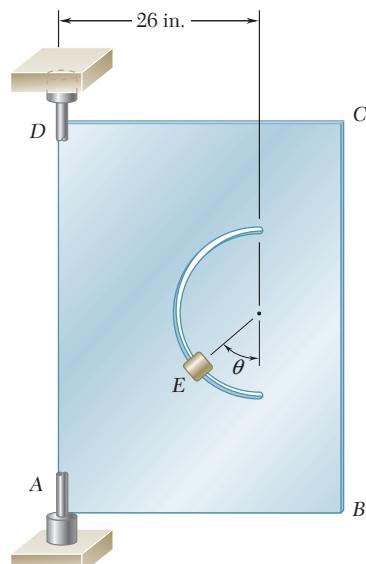


Figura P12.58

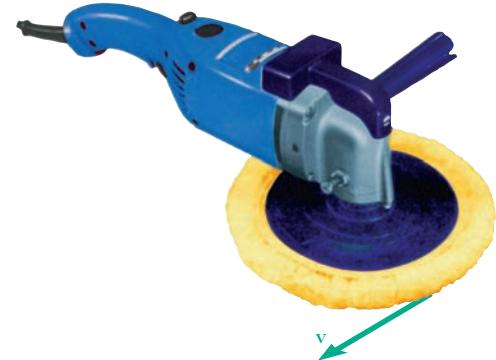


Figura P12.59

12.60 Sobre un escenario se construye una plataforma giratoria A que se utilizará en una producción teatral. En un ensayo se observa que el baúl B empieza a deslizarse sobre la plataforma giratoria 10 s después de que ésta empezó a girar. Si el baúl se somete a una aceleración constante de 0.24 m/s^2 , determine el coeficiente de fricción estática entre el baúl y la plataforma giratoria.

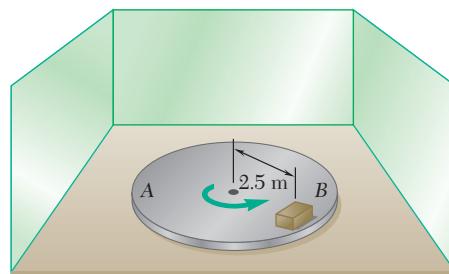


Figura P12.60

12.61 El mecanismo de eslabones paralelos ABCD se utiliza para transportar un componente I entre los procesos de manufactura de las estaciones E, F y G al recolectarlo con una estación cuando $\theta = 0$ y depositarlo en la estación siguiente cuando $\theta = 180^\circ$. Si se sabe que el elemento BC permanecerá horizontal a lo largo de su movimiento y que los enlaces AB y CD giran a una razón constante en un plano vertical, de manera tal que $v_B = 2.2 \text{ ft/s}$, determine a) el valor mínimo del coeficiente de fricción estática entre el componente y BC mientras se está transfiriendo y b) los valores de θ para los cuales el deslizamiento es inminente.

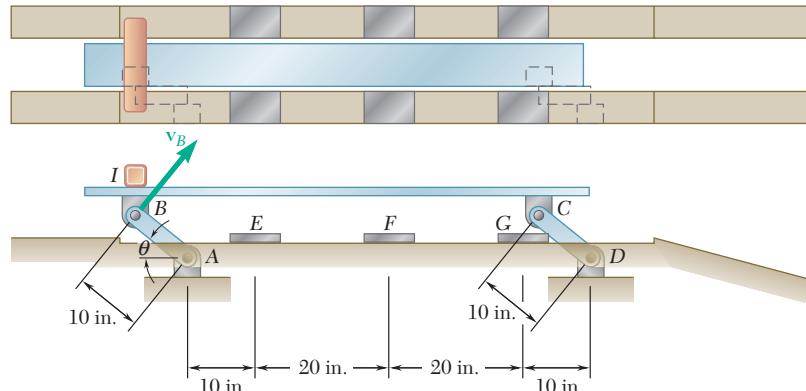


Figura P12.61

12.62 Si los coeficientes de fricción entre el componente I y el elemento BC del mecanismo del problema 12.61 son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine a) la rapidez máxima permitida v_B si el componente no debe deslizarse sobre BC mientras es transferido y b) el valor de θ para el cual el deslizamiento es inminente.

12.63 En el tubo de rayos catódicos que se muestra en la figura, los electrones emitidos por el cátodo y atraídos por el ánodo pasan a través de un pequeño agujero en el ánodo, y luego viajan en línea recta con velocidad v_0 hasta que inciden sobre la pantalla en A. Sin embargo, si se establece una diferencia de potencial de V entre las dos placas paralelas, los electrones estarán sujetos a una fuerza \mathbf{F} perpendicular a las placas mientras viajan entre éstas, e incidirán en la pantalla en el punto B que está a una distancia δ de A. La magnitud de la fuerza \mathbf{F} es $F = eV/d$, donde $-e$ es la carga de un electrón y d es la distancia entre las placas. Deduzca una expresión para la deflexión d en términos de V , v_0 , la carga $-e$ y la masa m de un electrón, así como las dimensiones d , l y L .

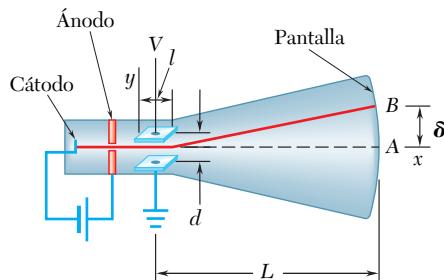


Figura P12.63

12.64 En el problema 12.63 determine el valor mínimo permitido del cociente d/l en términos de e , m , v_0 y V si en $x = l$ la distancia mínima permitida entre la trayectoria de los electrones y la placa positiva es igual a $0.05d$.

12.65 El modelo actual para un tubo de rayos catódicos se debe modificar de manera que la longitud del tubo y el espacio entre las placas se reduzcan en 40 y 20 por ciento, respectivamente. Si el tamaño de la pantalla debe permanecer igual, determine la nueva longitud l' de las placas suponiendo que todas las otras características del tubo deben conservarse sin cambio. (En el problema 12.63 se puede ver una descripción general del tubo de rayos catódicos.)

12.7. CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UNA PARTÍCULA. RAZÓN DE CAMBIO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Considérese una partícula P de masa m que se mueve con respecto a un sistema de referencia newtoniano $Oxyz$. Como se estudió en la sección 12.3, la cantidad de movimiento lineal de la partícula en un instante determinado se define como el vector mv obtenido al multiplicar la velocidad \mathbf{v} de la partícula por su masa m . El momento alrededor de O del vector mv se denomina *momento de la cantidad de movimiento*, o la *cantidad de movimiento angular* de la partícula en torno a O en ese instante y se denota por medio de \mathbf{H}_O . Al recordar la definición del momento de un vector (sección 3.6) y denotar mediante \mathbf{r} el vector de posición de P , se escribe

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times mv \quad (12.12)$$

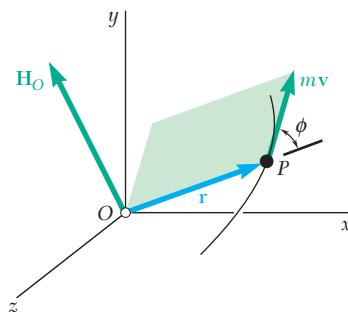


Figura 12.12

se tiene que \mathbf{H}_O es un vector perpendicular al plano que contiene \mathbf{r} y $m\mathbf{v}$ y de magnitud

$$H_O = rmv \operatorname{sen} \phi \quad (12.13)$$

donde ϕ es el ángulo entre \mathbf{r} y $m\mathbf{v}$ (figura 12.12). El sentido de \mathbf{H}_O puede determinarse a partir del sentido de $m\mathbf{v}$ aplicando la regla de la mano derecha. La unidad de cantidad de movimiento angular se obtiene al multiplicar las unidades de longitud y de cantidad de movimiento lineal (sección 12.4). Con unidades del SI se tiene

$$(m)(kg \cdot m/s) = kg \cdot m^2/s$$

Con unidades de uso común en Estados Unidos, se escribe

$$(ft)(lb \cdot s) = ft \cdot lb \cdot s$$

Al descomponer los vectores \mathbf{r} y $m\mathbf{v}$ en componentes y aplicar la fórmula (3.10), se escribe

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \quad (12.14)$$

Las componentes de \mathbf{H}_O , las cuales representan también los momentos de la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}$ alrededor de los ejes de coordenadas, se obtienen expandiendo el determinante en (12.14). Se tiene

$$\begin{aligned} H_x &= m(yv_z - zv_y) \\ H_y &= m(zv_x - xv_z) \\ H_z &= m(xv_y - yv_x) \end{aligned} \quad (12.15)$$

En el caso de una partícula que se mueve en el plano xy , se tiene $z = vz = 0$ y las componentes H_x y H_y se reducen a cero. De tal modo, la cantidad de movimiento angular es perpendicular al plano xy ; en ese caso se define por completo mediante el escalar

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \quad (12.16)$$

que será positivo o negativo de acuerdo con el sentido en el cual se observa que la partícula se mueve desde O . Si se recurre a coordenadas polares, se descompone la cantidad de movimiento lineal de la partícula en las componentes radial y transversal (figura 12.13) y se escribe

$$H_O = rmv \operatorname{sen} \phi = rmv_\theta \quad (12.17)$$

o, al recordar de (11.45) que $v_\theta = r\dot{\theta}$,

$$H_O = mr^2\dot{\theta} \quad (12.18)$$

A continuación se calcula la derivada con respecto a t de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O de la partícula P que se mueve en el espacio. Al diferenciar ambos miembros de la ecuación (12.12), y recordar la regla para la diferenciación de un producto vectorial (sección 11.10), se escribe

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Puesto que los vectores \mathbf{v} y $m\mathbf{v}$ son colineales, el primer término de la expresión que se obtiene es cero; y, mediante la segunda ley de Newton, $m\mathbf{a}$ es igual a la suma $\Sigma\mathbf{F}$ de las fuerzas que actúan sobre P . Si $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ representa la suma $\Sigma\mathbf{M}_O$ de los momentos alrededor de O de estas fuerzas, se escribe

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (12.19)$$

La ecuación (12.19), que resulta directamente de la segunda ley de Newton, establece que *la suma de los momentos de O de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la razón de cambio del momento de la cantidad de movimiento, o cantidad de movimiento angular, de la partícula alrededor de O .*

12.8. ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN TÉRMINOS DE LAS COMPONENTES RADIAL Y TRANSVERSAL

Considérese una partícula P , de coordenadas polares r y θ , que se mueve en un plano bajo la acción de varias fuerzas. Al descomponer las fuerzas y la aceleración de la partícula en las componentes radial y transversal (figura 12.14) y sustituir la ecuación (12.2), se obtienen las dos ecuaciones escalares

$$\Sigma F_r = ma_r \quad \Sigma F_\theta = ma_\theta \quad (12.20)$$

Al sustituir a_r y a_θ de acuerdo con las ecuaciones (11.46), se tiene

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (12.21)$$

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (12.22)$$

Las ecuaciones que se obtienen pueden resolverse para dos incógnitas.

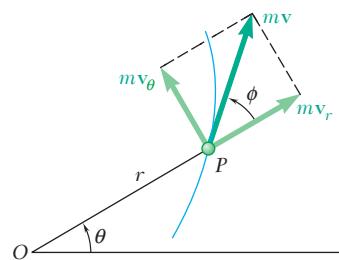


Figura 12.13



Fotografía 12.4 Las fuerzas que actúan sobre la probeta usada en una máquina de centrífugado de alta velocidad pueden describirse en términos de sus componentes radiales y transversales.

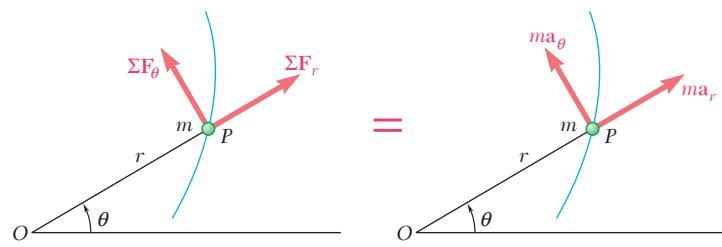


Figura 12.14

Era posible deducir la ecuación (12.22) de la ecuación (12.19). Al recordar (12.18) y notar que $\Sigma M_O = r\Sigma F_\theta$, la ecuación (12.19) produce

$$\begin{aligned} r\Sigma F_\theta &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) \\ &= m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) \end{aligned}$$

y, después de dividir ambos miembros entre r ,

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (12.22)$$

12.9. MOVIMIENTO BAJO UNA FUERZA CENTRAL. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Cuando la única fuerza que actúa sobre una partícula P es una fuerza \mathbf{F} dirigida hacia O alejándose de un punto fijo O , se dice que la partícula se está moviendo *bajo una fuerza central*, y el punto O se conoce como el *centro de fuerza* (figura 12.15). Puesto que la línea de acción de \mathbf{F} pasa por O , se debe tener $\Sigma \mathbf{M}_O = 0$ en cualquier instante. Al sustituir la ecuación (12.19), se obtiene

$$\dot{\mathbf{H}}_O = 0$$

para todos los valores de t e, integrar en t ,

$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \quad (12.23)$$

Se concluye en consecuencia que *la cantidad de movimiento angular de una partícula que se mueve bajo una fuerza central es constante, tanto en magnitud como en dirección*.

Al recordar la definición de la cantidad de movimiento angular de una partícula (sección 12.7), se escribe

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{H}_O = \text{constante} \quad (12.24)$$

de la cual se concluye que el vector de posición \mathbf{r} de la partícula P debe ser perpendicular al vector constante \mathbf{H}_O . Por consiguiente, una partícula sometida a una fuerza central se mueve en un plano fijo perpendicular a \mathbf{H}_O . El vector \mathbf{H}_O y el plano fijo se definen mediante el vector de posición

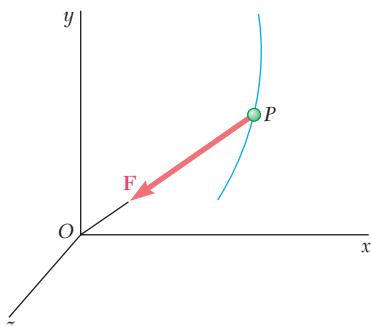


Figura 12.15

inicial \mathbf{r}_0 y la velocidad inicial \mathbf{v}_0 de la partícula. Por conveniencia, se considerará que el plano de la figura coincide con el plano fijo de movimiento (figura 12.16).

Puesto que la magnitud H_O de la cantidad de movimiento angular de la partícula P es constante, el miembro del lado derecho de la ecuación (12.13) debe ser constante. Por lo tanto, se escribe

$$rmv \sin \phi = r_0mv_0 \sin \phi_0 \quad (12.25)$$

Esta relación se aplica al movimiento de cualquier partícula sometida a una fuerza central. Puesto que la fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre un planeta es una fuerza central dirigida hacia el centro del Sol, la ecuación (12.25) es fundamental para el estudio del movimiento planetario. Por una razón similar, también es fundamental para el estudio del movimiento de vehículos espaciales en órbita alrededor de la Tierra.

De manera alternativa, al recordar la ecuación (12.18), es posible expresar el hecho de que la magnitud H_O de la cantidad de movimiento angular de la partícula P es constante al escribir

$$mr^2\dot{\theta} = H_O = \text{constante} \quad (12.26)$$

o, dividir entre m y denotar por h el movimiento angular por masa unitaria H_O/m ,

$$r^2\dot{\theta} = h \quad (12.27)$$

Es posible dar a la ecuación (12.27) una interpretación geométrica interesante. Si se observa en la figura 12.17 que el vector radial OP barre un área infinitesimal $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ conforme gira t un ángulo $d\theta$, y si se define la *velocidad de área* de la partícula como el cociente dA/dt , se nota que el miembro del lado izquierdo de la ecuación (12.27) representa el doble de la velocidad de área de la partícula. Por consiguiente, se concluye que *cuando una partícula se mueve bajo una fuerza central, su velocidad de área es constante*.

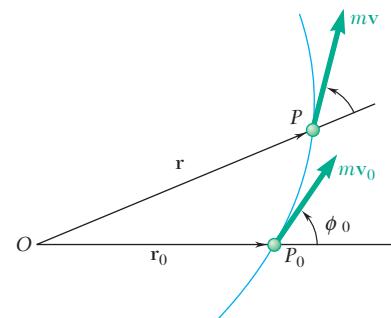


Figura 12.16

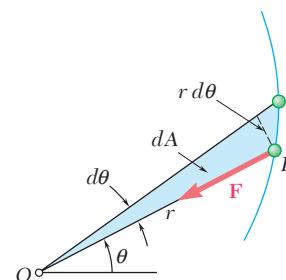


Figura 12.17

12.10. LEY DE GRAVITACIÓN DE NEWTON

Como se estudió en la sección anterior, la fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre un planeta o por la Tierra sobre un satélite en órbita es un ejemplo importante de una fuerza central. En esta sección se aprenderá cómo determinar la magnitud de una fuerza gravitacional.

En su *ley de la gravitación universal*, Newton postuló que dos partículas de masa M y m a una distancia r una de la otra se atraen entre sí con fuerzas iguales y opuestas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ dirigidas a lo largo de la línea que las une (figura 12.18). La magnitud común F de las dos fuerzas es

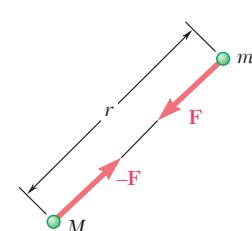


Figura 12.18

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (12.28)$$

donde G es una constante universal, llamada la *constante de gravitación*. Los experimentos indican que el valor de G corresponde a $(66.73 \pm 0.03) \times 10^{-12} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ en unidades del SI o aproximadamente $34.4 \times 10^{-9} \text{ ft}^4/\text{lb} \cdot \text{s}^4$ en unidades del sistema de uso común en Estados Unidos. Las fuerzas gravitacionales existen entre cualquier par de cuerpos, pero su efecto sólo es apreciable cuando uno de los cuerpos tiene una masa muy grande. El efecto de las fuerzas gravitacionales es patente en los casos de movimiento de un planeta alrededor del Sol, de satélites que orbitan alrededor de la Tierra, o de cuerpos que caen sobre la superficie terrestre.

Puesto que la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo de masa m localizado sobre o cerca de su superficie se define como el peso \mathbf{W} del cuerpo, es posible sustituir la magnitud $W = mg$ del peso por F , y el radio R de la Tierra por r , en la ecuación (12.28). Se obtiene

$$W = mg = \frac{GM}{R^2}m \quad \text{o} \quad g = \frac{GM}{R^2} \quad (12.29)$$

donde M es la masa de la Tierra. En virtud de que la Tierra no es verdaderamente esférica, la distancia R desde el centro terrestre depende del punto elegido sobre su superficie, y los valores de W y g variarán entonces con la altura y la latitud del punto que se esté considerando. Otra razón para la variación de W y g con la latitud es que un sistema de ejes unido a la Tierra no constituye un sistema de referencia newtoniano (véase la sección 12.2). Una definición más precisa del peso de un cuerpo debe, por lo tanto, incluir una componente que represente la fuerza centrífuga debida a la rotación terrestre. Los valores de g a nivel del mar varían de 9.781 m/s^2 , o 32.09 ft/s^2 , en el ecuador, a 9.833 m/s^2 , o 32.26 ft/s^2 , en los polos.[†]

La fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo de masa m ubicado en el espacio a una distancia r de su centro, puede determinarse a partir de la ecuación (12.28). Los cálculos se simplificarán un poco, ya que de acuerdo con la ecuación (12.29), el producto de la constante de gravedad G y de la masa M de la Tierra puede expresarse como

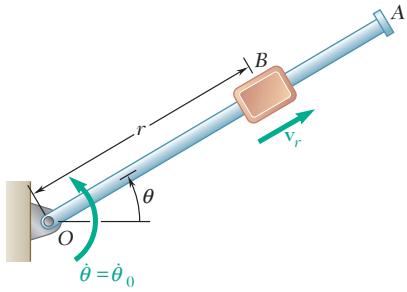
$$GM = gR^2 \quad (12.30)$$

donde g y el radio R de la Tierra serán dados en sus valores promedio $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ y $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ en unidades del SI[‡] y $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$ y $R = (3960 \text{ mi})(5280 \text{ ft/mi})$ en unidades de uso común en Estados Unidos.

El descubrimiento de la ley de la gravedad universal se ha atribuido a menudo a la creencia de que, luego de observar la caída de una manzana de un árbol, Newton reflexionó que la Tierra debe atraer a una manzana y a la Luna de la misma manera. Si bien es dudoso que este incidente haya ocurrido en la realidad, sí es posible afirmar que Newton no habría formulado su ley si no hubiera percibido primero que la aceleración de un cuerpo que cae debe ser consecuencia de la misma causa que la aceleración que mantiene a la Luna en su órbita. El concepto básico de la continuidad de la atracción gravitacional se comprende mejor en la actualidad, cuando la brecha entre la manzana y la Luna se está llenando de satélites terrestres artificiales.

[†]Una fórmula que expresa g en términos de la latitud ϕ se proporcionó en el problema 12.1.

[‡]El valor de R se encuentra fácilmente si se recuerda que la circunferencia terrestre es $2\pi R = 40 \times 10^6 \text{ m}$.



PROBLEMA RESUELTO 12.7

Un bloque B de masa m se puede deslizar libremente sobre un brazo OA sin fricción, que gira en un plano horizontal a razón constante $\dot{\theta}_0$. Si se sabe que B se suelta a una distancia r_0 de O , exprese como función de r , a) la componente v_r de la velocidad de B a lo largo de OA , b) la magnitud de la fuerza horizontal \mathbf{F} ejercida sobre B por el brazo OA .

SOLUCIÓN

Puesto que todas las otras fuerzas son perpendiculares al plano de la figura, la única fuerza que se muestra actuando sobre B es la fuerza \mathbf{F} perpendicular a OA .

Ecuaciones de movimiento. Al usar las componentes radial y transversal.

$$+\nearrow \sum F_r = ma_r: \quad 0 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$+\nwarrow \sum F_\theta = ma_\theta: \quad F = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (2)$$

a) **Componente v_r de la velocidad.** Puesto que $v_r = \dot{r}$, se tiene

$$\dot{r} = \dot{v}_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr} \frac{dr}{dt} = v_r \frac{dv_r}{dr}$$

Al sustituir \dot{r} en (1), y recordar que $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ y separar las variables,

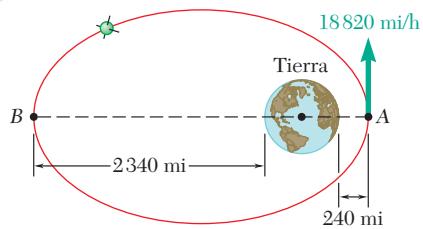
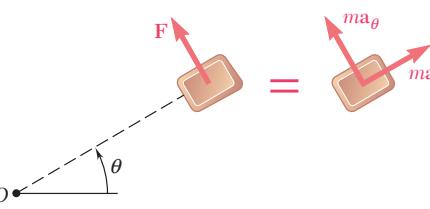
$$v_r dv_r = \dot{\theta}_0^2 r dr$$

Al multiplicar por 2 e integrar de 0 a v_r y de r_0 a r ,

$$v_r^2 = \dot{\theta}_0^2(r^2 - r_0^2) \quad v_r = \dot{\theta}_0(r^2 - r_0^2)^{1/2} \quad \blacktriangleleft$$

b) **Fuerza horizontal F .** Al dejar $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$, $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{r} = v_r$ en la ecuación (2), y sustituir la expresión para v_r que se obtuvo en la parte a,

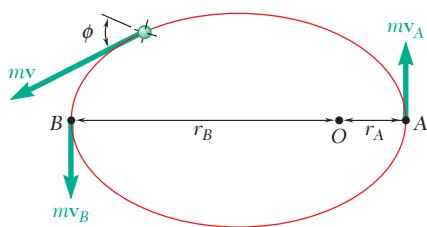
$$F = 2m\dot{\theta}_0(r^2 - r_0^2)^{1/2}\dot{\theta}_0 \quad F = 2m\dot{\theta}_0^2(r^2 - r_0^2)^{1/2} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 12.8

Se lanza un satélite en dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 18 820 mi/h desde una altura de 240 mi. Determine la velocidad del satélite cuando éste alcanza su altura máxima de 2 340 mi. Recuérdese que el radio de la Tierra es de 3 960 mi.

SOLUCIÓN



Puesto que el satélite se mueve bajo el efecto de una fuerza central dirigida hacia el centro O de la Tierra, su cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O es constante. De la ecuación (12.13) se tiene

$$rmv \sin \phi = H_O = \text{constante}$$

que muestra que v es mínima en B , donde tanto r como $\sin \phi$ son máximos. Al expresar la conservación de la cantidad de movimiento angular entre A y B,

$$r_A m v_A = r_B m v_B$$

$$v_B = v_A \frac{r_A}{r_B} = (18 820 \text{ mi/h}) \frac{3 960 \text{ mi} + 240 \text{ mi}}{3 960 \text{ mi} + 2 340 \text{ mi}}$$

$$v_B = 12 550 \text{ mi/h} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se continuó el estudio de la segunda ley de Newton expresando la fuerza y la aceleración en términos de sus *componentes radial y transversal*, donde las ecuaciones de movimiento correspondientes son

$$\begin{aligned}\Sigma F_r &= ma_r: & \Sigma F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \Sigma F_\theta &= ma_\theta: & \Sigma F_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\end{aligned}$$

Se introdujo el *momento de la cantidad de movimiento*, o la *cantidad de movimiento angular*, \mathbf{H}_O de una partícula alrededor de O

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (12.12)$$

y se encontró que \mathbf{H}_O es constante cuando la partícula se mueve bajo una *fuerza central* con su centro localizado en O .

1. Empleo de las componentes radial y transversal. Las componentes radial y transversal se presentaron en la última lección del capítulo 11 [sección 11.14]; es necesario que se repase dicho material antes de tratar de resolver los siguientes problemas. Además, los comentarios en la lección anterior respecto a la aplicación de la segunda ley de Newton (dibujo de un diagrama de cuerpo libre y un diagrama $m\mathbf{a}$, etc.) siguen aplicándose [problema resuelto 12.7]. Por último, hay que percibirse de que la solución de ese problema resuelto depende de la aplicación de las técnicas que se desarrollaron en el capítulo 11 —es necesario recurrir a técnicas similares para resolver algunos de los problemas de esta lección—.

2. Resolución de problemas que implican el movimiento de una partícula sometida a una fuerza central. En problemas de este tipo se conserva la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O de la partícula alrededor del centro de fuerza O . Es conveniente introducir la constante $h = H_O/m$, que representa la cantidad del movimiento angular por unidad de masa. La conservación de la cantidad del movimiento angular de la partícula P en torno a O se expresa entonces mediante alguna de las siguientes ecuaciones

$$rv \sin \phi = h \quad \text{o} \quad r^2\dot{\theta} = h$$

donde r y θ son las coordenadas polares de P , y ϕ es el ángulo que la velocidad \mathbf{v} de la partícula forma con la línea OP (figura 12.16). La constante h se determina a partir de las condiciones iniciales y es posible resolver cualquiera de las ecuaciones anteriores para una de las incógnitas.

3. En los problemas de mecánica celeste que implican el movimiento orbital de un planeta alrededor del Sol, o un satélite en torno a la Tierra, la Luna o algún

(continúa)

otro planeta, la fuerza central \mathbf{F} es la fuerza de la atracción gravitacional; ésta se dirige *hacia* el centro de fuerza O y tiene la magnitud

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (12.28)$$

Adviértase que en el caso particular de la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra, el producto GM puede sustituirse por gR^2 , donde R es el radio terrestre [ecuación 12.30].

Con frecuencia se encuentran los siguientes dos casos de movimiento orbital:

a) En el caso de un satélite en órbita circular, la fuerza \mathbf{F} es normal a la órbita y se puede escribir $F = ma_n$; al sustituir F de la ecuación (12.28) y observar que $a_n = v^2/\rho = v^2/r$, se obtendrá

$$G \frac{Mm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad \text{o} \quad v^2 = \frac{GM}{r}$$

b) Para un satélite en una órbita elíptica, el vector del radio \mathbf{r} y la velocidad \mathbf{v} del satélite son perpendiculares entre sí en los puntos A y B , los cuales son, respectivamente, el más alejado y el más cercano al centro de fuerza O [problema resuelto 12.8]. De tal manera, la conservación del momento angular del satélite entre estos dos puntos se expresa como

$$r_A m v_A = r_B m v_B$$

Problemas

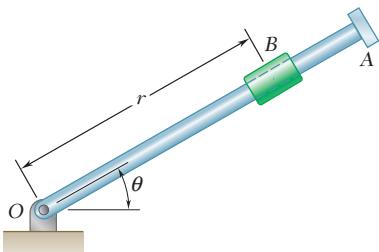


Figura P12.66 y P12.68

12.66 La varilla OA gira alrededor de O en un plano horizontal. El movimiento del collarín B de 300 g se define mediante las relaciones $r = 300 + 100 \cos(0.5\pi t)$ y $\theta = \pi(t^2 - 3t)$, donde r se expresa en milímetros, t en segundos y θ en radianes. Determine las componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre el collarín cuando *a*) $t = 0$ y *b*) $t = 0.5$ s.

12.67 Para el movimiento definido en el problema 12.66, determine las componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre el collarín cuando $t = 1.5$ s.

12.68 La varilla OA gira alrededor de O en un plano horizontal. El movimiento del collarín B de 5 lb se define mediante las relaciones $r = 10/(t + 4)$ y $\theta = (2/\pi) \operatorname{sen} \pi t$, donde r se expresa en pies, t en segundos y θ en radianes. Determine las componentes radial y transversal de la fuerza ejercida sobre el collarín cuando *a*) $t = 1$ s y *b*) $t = 6$ s.

12.69 Un collarín B de masa m se desliza sobre un brazo AA' sin fricción. El brazo está unido a un tambor D y gira alrededor de O en un plano horizontal a una razón $\dot{\theta} = ct$, donde c es una constante. Cuando el arreglo brazo-tambor gira, un mecanismo dentro del tambor libera una cuerda de manera que el collarín se mueve hacia afuera a partir de O con una rapidez constante k . Si se sabe que en $t = 0$, $r = r_0$, exprese como una función de m , c , k , r_0 y t , *a*) la tensión T en la cuerda, *b*) la magnitud de la fuerza horizontal \mathbf{Q} ejercida por el brazo AA' sobre B .

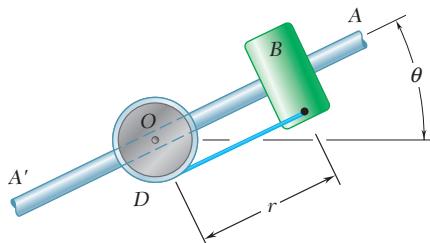


Figura P12.69 y P12.70

12.70 El collarín B de 3 kg se desliza sobre un brazo AA' sin fricción. El brazo está unido a un tambor D y gira alrededor de O en un plano horizontal a una razón $\dot{\theta} = 0.75t$, donde θ y t se expresan en rad/s y segundos, respectivamente. Cuando el arreglo brazo-tambor gira, un mecanismo dentro del tambor libera una cuerda de manera que el collarín se mueve hacia afuera a partir de O con una rapidez constante de 0.5 m/s. Si se sabe que en $t = 0$, $r = 0$, determine el tiempo al cual la tensión en la cuerda es igual a la magnitud de la fuerza horizontal que ejerce el brazo AA' sobre B .

- 12.71** El pasador *B* de 100 g se desliza a lo largo de la ranura en el brazo rotatorio *OC* y a lo largo de la ranura *DE*, la cual se cortó en una placa horizontal fija. Si se ignora la fricción y se sabe que el brazo *OC* gira a una razón constante $\dot{\theta}_0 = 12 \text{ rad/s}$, determine para cualquier valor dado de θ *a)* las componentes radial y transversal de la fuerza resultante \mathbf{F} que se ejerce sobre el pasador *B*, *b)* las fuerzas \mathbf{P} y \mathbf{Q} ejercidas sobre el pasador *B* por el brazo *OC* y la pared de la ranura *DE*, respectivamente.

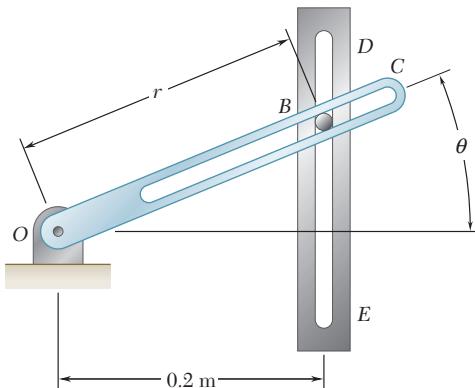


Figura P12.71

- *12.72** El deslizador *C* tiene un peso de 0.5 lb y puede moverse por una ranura cortada en un brazo *AB*, el cual gira a razón constante $\dot{\theta}_0 = 10 \text{ rad/s}$ en un plano horizontal. El deslizador se encuentra unido a un resorte con razón constante $k = 2.5 \text{ lb/ft}$ que se encuentra sin estirar cuando $r = 0$. Si el deslizador se suelta desde el reposo sin velocidad radial en la posición $r = 18 \text{ in.}$ y no se toma en cuenta la fricción, determine para la posición $r = 12 \text{ in.}$ *a)* las componentes radial y transversal de la velocidad del deslizador, *b)* las componentes radial y transversal de su aceleración, *c)* la fuerza horizontal ejercida sobre el deslizador por el brazo *AB*.

- 12.73** Retome el problema 12.72, y ahora suponga que el resorte está sin estirar cuando el deslizador *C* se encuentra a 2 in. a la izquierda del punto medio *O* del brazo *AB* ($r = -2 \text{ in.}$).

- 12.74** Una partícula de masa m se lanza desde el punto *A* con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 perpendicular a la línea *OA* y se mueve bajo una fuerza central \mathbf{F} a lo largo de una trayectoria semicircular de diámetro *OA*. Si se observa que $r = r_0 \cos \theta$ y se usa la ecuación (12.27), demuestre que la rapidez de la partícula es $v = v_0 / \cos^2 \theta$.

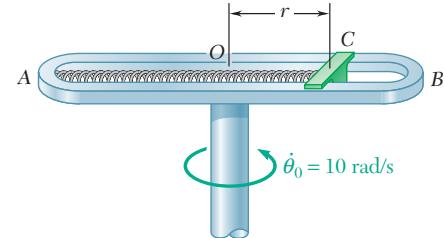


Figura P12.72

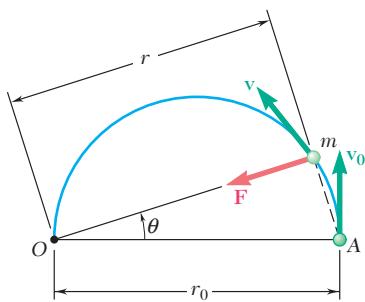


Figura P12.74

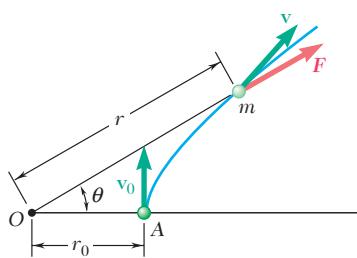


Figura P12.76

12.75 Para la partícula del problema 12.74, determine la componente tangencial F_t de la fuerza central \mathbf{F} a lo largo de la tangente a la trayectoria de la partícula para *a)* $\theta = 0$ y *b)* $\theta = 45^\circ$.

12.76 Una partícula de masa m se lanza desde el punto *A* con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 perpendicular a la línea *OA* y se mueve bajo la acción de una fuerza central \mathbf{F} que se aleja del centro de fuerza *O*. Si la partícula sigue una trayectoria definida por la ecuación $r = r_0/\sqrt{\cos 2\theta}$ y se usa la ecuación (12.27), exprese las componentes radial y transversal de la velocidad \mathbf{v} de la partícula como funciones de θ .

12.77 Para la partícula del problema 12.76, demuestre *a)* que la velocidad de la partícula y la fuerza central \mathbf{F} son proporcionales a la distancia r de la partícula al centro de fuerza *O* y *b)* que el radio de curvatura de la trayectoria es proporcional a r^3 .

12.78 El radio de la órbita de una luna de determinado planeta es igual al doble del radio de dicho planeta. Si se denota mediante ρ la densidad media del planeta, demuestre que el tiempo que requiere la luna para completar una revolución alrededor del planeta es $(24\pi/G\rho)^{1/2}$, donde G es la constante de gravitación.

12.79 Demuestre que el radio r de la órbita de una luna de un planeta dado puede determinarse a partir del radio R del planeta, la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta y el tiempo τ requerido por la luna para dar una revolución completa alrededor del planeta. Determine la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta Júpiter si se sabe que $R = 71\,492$ km, $\tau = 3.551$ días y $r = 670.9 \times 10^3$ km en el caso de su luna Europa.

12.80 Los satélites de comunicaciones se ubican en una órbita geosincrónica, es decir, en una órbita circular tal que terminan una revolución completa alrededor de la Tierra en un día sideral (23.934 h), y de esa manera parecen estacionarios con respecto a la superficie terrestre. Determine *a)* la altura de estos satélites sobre la superficie de la Tierra y *b)* la velocidad con la cual describen su órbita. Dé su respuesta en unidades tanto del SI como de uso común en Estados Unidos.

12.81 Determine la masa de la Tierra si se sabe que el radio medio de la órbita de la Luna alrededor de nuestro planeta es de 238 910 mi y que la Luna requiere 27.32 días para completar una vuelta completa alrededor de la Tierra.

12.82 Una nave espacial se coloca en una órbita polar alrededor del planeta Marte a una altura de 380 km. Si se sabe que la densidad media de Marte es de 3.94 Mg/m^3 y que el radio de Marte es de 3 397 km, determine *a)* el tiempo τ que se requiere para que la nave espacial complete una revolución alrededor de Marte, *b)* la velocidad con la que la nave espacial describe su órbita.

12.83 Un satélite se coloca en una órbita circular alrededor del planeta Saturno a una altura de 2 100 mi. El satélite describe su órbita con una velocidad de 54.7×10^3 mi/h. Si el radio de la órbita alrededor de Saturno y el periodo orbital de Atlas, una de las lunas de Saturno, son 85.54×10^3 mi y 0.6017 días, respectivamente, determine *a)* el radio de Saturno y *b)* la masa de Saturno. (El *periodo orbital* de un satélite es el tiempo que requiere para dar una revolución completa alrededor de un planeta.)

12.84 Se ha observado que los periodos orbitales (vea el problema 12.83) de las lunas Julieta y Titania de Urano son 0.4931 días y 8.706 días, respectivamente. Si se sabe que el radio de la órbita de Julieta es de 64 360 km, determine *a)* la masa de Urano y *b)* el radio de la órbita de Titania.

12.85 Una nave espacial de 1 200 lb se ubica primero en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 2 800 mi y después se transfiere a una órbita circular alrededor de la Luna. Si se sabe que la masa de la Luna es 0.01230 veces la masa de la Tierra y el radio de la Luna corresponde a 1 080 mi, determine *a*) la fuerza gravitacional que se ejerció sobre la nave espacial cuando orbitaba la Tierra, *b*) el radio requerido de la órbita de la nave espacial alrededor de la Luna si los períodos orbitales (vea el problema 12.83) de las dos órbitas deben ser iguales y *c*) la aceleración de la gravedad en la superficie lunar.

12.86 Para colocar un satélite de comunicaciones en una órbita geosincrónica (vea el problema 12.80) a una altura de 22 240 mi sobre la superficie terrestre, el satélite se libera primero de un transbordador espacial, el cual está en una órbita circular a una altura de 185 mi, y después es lanzado por un impulsor de plataforma superior hasta su altura final. Cuando el satélite pasa por A, el motor del impulsor se enciende para incorporar al satélite en la órbita de transferencia elíptica. El impulsor se enciende de nuevo en B para incorporar al satélite en la órbita geosincrónica. Si se sabe que el segundo encendido aumenta la velocidad del satélite en 4 810 ft/s, determine *a*) la rapidez del satélite cuando se acerca a B sobre la órbita de transferencia elíptica, *b*) el aumento en la rapidez que resulta del primer encendido en A.

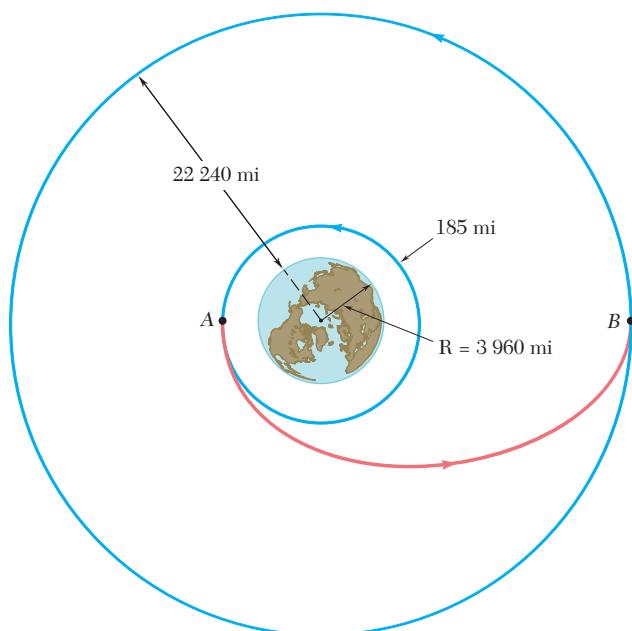


Figura P12.86

12.87 Un vehículo espacial está en una órbita circular de 2 200 km de radio alrededor de la Luna. Para pasar a una órbita más pequeña de 2 080 km de radio, el vehículo se ubica primero en una trayectoria elíptica AB reduciendo su rapidez en 26.3 m/s cuando pasa por A. Si se sabe que la masa de la Luna es de 73.49×10^{21} kg, determine *a*) la rapidez del vehículo cuando se approxima a B sobre la trayectoria elíptica, *b*) la cantidad que su rapidez debe reducirse cuando se approxima a B para incorporarse a la órbita circular más pequeña.

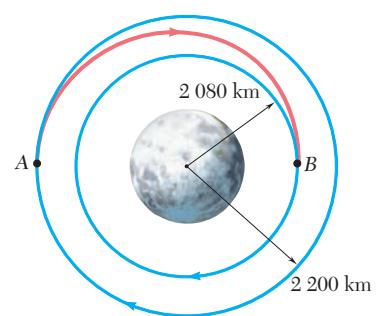


Figura P12.87

12.88 Los planes para una misión no tripulada al planeta Marte requieren que el vehículo de regreso a la Tierra primero describa una órbita circular a una altura $d_A = 2\ 200$ km sobre la superficie del planeta con una velocidad de 2 771 m/s. Al pasar por el punto A, el vehículo se incorporará a una órbita elíptica de transferencia encendiendo su motor y aumentando su velocidad en $\Delta v_A = 1\ 046$ m/s. Cuando pase por el punto B, a una altura $d_B = 100\ 000$ km, el vehículo debe incorporarse a una segunda órbita de transferencia localizada en un plano ligeramente diferente, cambiando la dirección de su velocidad y reduciendo su rapidez en $\Delta v_B = -22.0$ m/s. Por último, cuando el vehículo pase por el punto C, a una altura $d_C = 1\ 000$ km, su rapidez debe aumentar en $\Delta v_C = 660$ m/s para ingresar a su trayectoria de regreso. Si se sabe que el radio del planeta Marte es $R = 3\ 400$ km, determine la velocidad del vehículo después de completar la última maniobra.

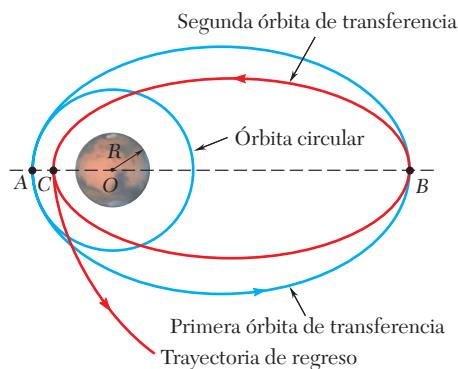


Figura P12.88

12.89 Un transbordador espacial S y un satélite A se encuentran en las órbitas circulares que se muestran en la figura. Para recuperar el satélite, el transbordador se ubica primero en una trayectoria elíptica BC incrementando su rapidez en $\Delta v_B = 280$ ft/s cuando pasa a través de B. Cuando el transbordador se aproxima a C, su rapidez se incrementa en $\Delta v_C = 260$ ft/s para incorporarlo en la segunda órbita de transferencia elíptica CD. Si se sabe que la distancia de O a C es de 4 289 mi, determine la cantidad en la cual la rapidez del transbordador debe incrementarse cuando se approxima a D para insertarlo en la órbita circular del satélite.

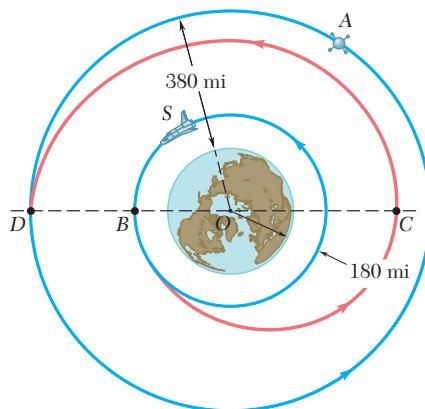


Figura P12.89

12.90 Un collarín de 3 lb puede deslizarse sobre una varilla horizontal la cual gira libremente alrededor de un eje vertical. El collarín se sostiene inicialmente en *A* mediante una cuerda unida al eje y comprime un resorte con una constante de 2 lb/ft, el cual está sin deformar cuando el collarín se localiza en *A*. Cuando el eje gira a la tasa $\theta = 16 \text{ rad/s}$, la cuerda se corta y el collarín se mueve hacia fuera a lo largo de la varilla. Si se desprecia la fricción y la masa de la varilla, determine *a*) las componentes radial y transversal de la aceleración del collarín en *A*, *b*) la aceleración del collarín relativa a la varilla en *A*, *c*) la componente transversal de la velocidad del collarín en *B*.

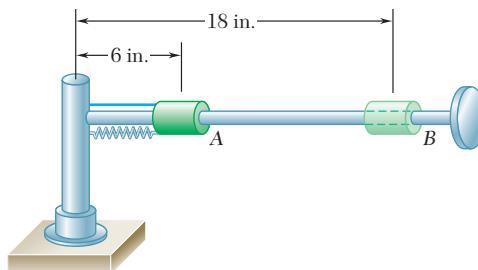


Figura P12.90

12.91 Para el collarín del problema 12.90, suponga que la varilla gira inicialmente a una razón $\dot{\theta} = 12 \text{ rad/s}$, determine para la posición *B* del collarín, *a*) la componente transversal de la velocidad del collarín, *b*) las componentes radial y transversal de su aceleración, *c*) la aceleración del collarín respecto a la varilla.

12.92 Una bola *A* de 200 g y una bola *B* de 400 g se montan sobre una varilla horizontal que gira libremente alrededor de un eje vertical. Las bolas se mantienen en las posiciones indicadas mediante pasadores. El pasador que sostiene a *B* se quita repentinamente y la bola se mueve a la posición *C* cuando gira la varilla. Si se desprecia la fricción y la masa de la varilla, y se sabe que la rapidez inicial de *A* es $v_A = 2.5 \text{ m/s}$, determine *a*) las componentes radial y transversal de la aceleración de la bola *B* inmediatamente después de que se quita el pasador, *b*) la aceleración de la bola *B* relativa a la varilla en ese instante y *c*) la rapidez de la bola *A* después de que la bola *B* ha alcanzado el reposo en *C*.

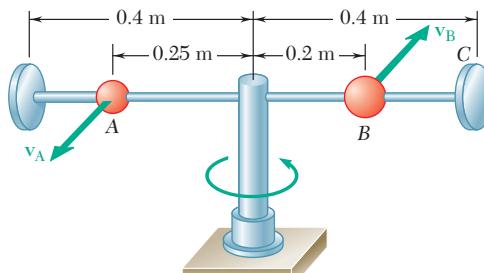


Figura P12.92

12.93 Una pequeña bola gira en un círculo horizontal en los extremos de una cuerda de longitud l_1 , la cual forma un ángulo θ_1 con la vertical. Después se jala el cordón lentamente a través del soporte en *O* hasta que la longitud del extremo libre es igual a l_2 . *a*) Obtenga una relación entre l_1 , l_2 , θ_1 y θ_2 . *b*) Si la bola se pone en movimiento de manera que al principio $l_1 = 0.8 \text{ m}$ y $\theta_1 = 35^\circ$, determine el ángulo θ_2 cuando $l_2 = 0.6 \text{ m}$.

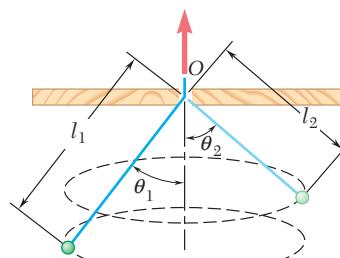


Figura P12.93

*12.11. TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA BAJO LA ACCIÓN DE UNA FUERZA CENTRAL

Considérese una partícula P que se mueve bajo el efecto de una fuerza central \mathbf{F} . Se desea obtener la ecuación diferencial que define su trayectoria.

Si se supone que la fuerza \mathbf{F} está dirigida hacia el centro de fuerza O , se tiene que ΣF_r y ΣF_θ se reducen, respectivamente, a $-F$ y cero en las ecuaciones (12.21) y (12.22). Por lo tanto, se escribe

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F \quad (12.31)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (12.32)$$

Estas ecuaciones definen el movimiento de P . Sin embargo, se sustituye la ecuación (12.32) por la ecuación (12.27), la cual es equivalente a la ecuación (12.32), lo cual se verifica sin dificultad al diferenciarla con respecto a t , pero cuyo uso es más conveniente. Se escribe

$$r^2\dot{\theta} = h \quad \text{o} \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (12.33)$$

La ecuación (12.33) se usa para eliminar la variable independiente t de la ecuación (12.31). Al resolver la ecuación (12.33) para $\dot{\theta}$ o $d\theta/dt$, se tiene

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \quad (12.34)$$

de la cual se deduce que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (12.35)$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d\dot{r}}{d\theta}$$

o, al sustituir \dot{r} de (12.35),

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[-h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \\ &= -\frac{h^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (12.36)$$

Al sustituir θ y \ddot{r} de (12.34) y (12.36), respectivamente, en la ecuación (12.31) e introducir la función $u = 1/r$, se obtiene después de simplificaciones

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \quad (12.37)$$

Para obtener la ecuación (12.37), se supuso que la fuerza \mathbf{F} estaba dirigida hacia O . Por lo tanto, la magnitud F será positiva si \mathbf{F} realmente apunta hacia O (fuerza atractiva) y negativa si \mathbf{F} apunta alejándose de O (fuerza repulsiva). Si F es una función conocida de r y, en consecuencia, de u , la ecuación (12.37) es una ecuación diferencial en u y θ que define a la trayectoria seguida por la partícula bajo la acción de la fuerza central \mathbf{F} . La ecuación de la trayectoria se obtiene al resolver la ecuación diferencial (12.37) para u con una función de θ y al determinar las constantes de integración a partir de las condiciones iniciales.

Después de que ha finalizado la última etapa de los cohetes de lanzamiento, los satélites terrestres y otros vehículos espaciales están sujetos sólo a la atracción gravitacional de la Tierra. En consecuencia, es posible determinar su movimiento de las ecuaciones (12.33) y (12.37), las cuales gobiernan el movimiento de una partícula bajo una fuerza central, luego de que F se ha sustituido por la expresión que se obtuvo para la fuerza de atracción gravitacional.[†] Al sustituir la expresión en la ecuación (12.37)

$$F = \frac{GMm}{r^2} = GMmu^2$$

donde M = masa de la Tierra

m = masa del vehículo

r = distancia del centro de la Tierra al vehículo

$u = l/r$

se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (12.38)$$

donde se observa que el miembro del lado derecho es una constante.

La solución de la ecuación diferencial (12.38) se obtiene al sumar la solución particular $u = GM/h^2$ a la solución general $u = C \cos(\theta - \theta_0)$ de la ecuación homogénea correspondiente (esto es, la ecuación que se obtiene al igualar a 0 el miembro del lado derecho). Si se fija el eje polar de manera que $\theta_0 = 0$, se escribe

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (12.39)$$

La ecuación (12.39) es la correspondiente a una *sección cónica* (elipse, parábola o hipérbola) en las coordenadas polares r y θ . El origen O de las coordenadas, el cual se ubica en el centro de la Tierra, es un foco de esta sección cónica, y el eje polar es uno de sus ejes de simetría (figura 12.19).

El cociente entre las constantes C y GM/h^2 define la *excentricidad* ε de la sección cónica; al dejar

$$\varepsilon = \frac{C}{GM/h^2} = \frac{Ch^2}{GM} \quad (12.40)$$

puede escribirse la ecuación (12.39) en la forma

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (12.39')$$

Esta ecuación representa las tres posibles trayectorias.

1. $\varepsilon > 1$, o $C > GM/h^2$: hay dos valores θ_1 y $-\theta_1$ del ángulo polar, definido $\cos \theta_1 = -GM/Ch^2$, para los cuales el miembro



Fotografía 12.5 El telescopio Hubble fue puesto en órbita por el transbordador espacial en 1990 (primera geosincrónica de la NASA).

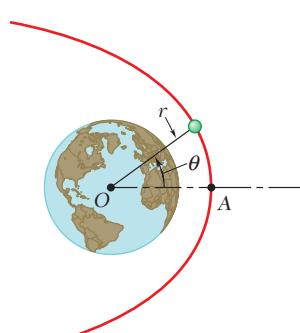


Figura 12.19

[†]Se supone que los vehículos espaciales considerados aquí son atraídos únicamente por la Tierra, y que sus masas son ignorables en comparación con la masa de la Tierra. Si un vehículo se mueve muy alejado de la Tierra su trayectoria quizás sea afectada por la atracción del Sol, la Luna u otro planeta.

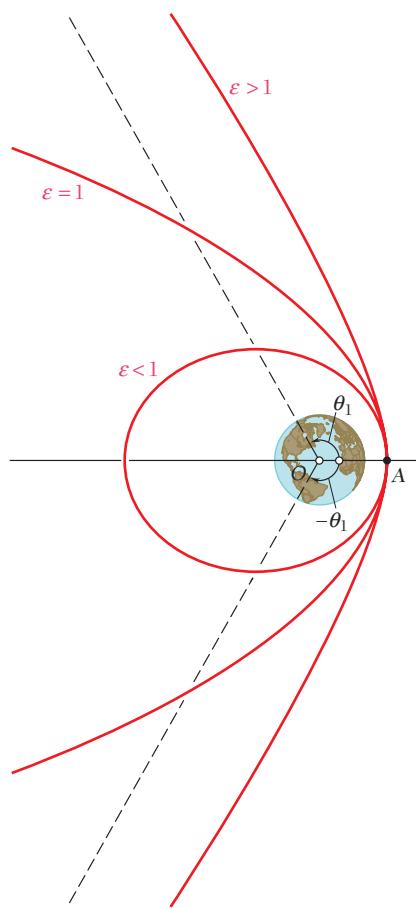


Figura 12.20

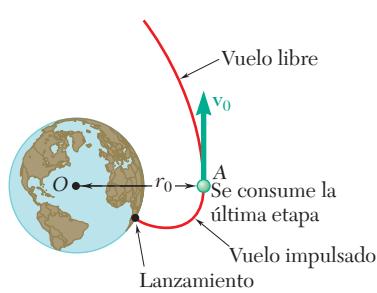


Figura 12.21

derecho de la ecuación (12.39) se vuelve cero. Para estos dos valores, el vector radio r se vuelve infinito; la sección cónica es una *hipérbola* (figura 12.20).

2. $\epsilon = 1$, o $C = GM/h^2$: el vector radio se vuelve infinito para $\theta = 180^\circ$; la sección cónica es una *parábola*.

3. $\epsilon < 1$, o $C < GM/h^2$: el vector radio permanece finito para todo valor de θ ; la sección cónica es una *elipse*. En el caso particular en que $\epsilon = C = 0$, la longitud del vector radio es constante, la sección cónica es un círculo.

Ahora se verá cómo las constantes C y GM/h^2 , que caracterizan la trayectoria de un vehículo espacial, se determinan a partir de la posición y velocidad del vehículo al principio de su vuelo libre. Se considera que, como es en general el caso, la fase impulsada de su vuelo se ha programado de manera tal que al consumirse la última etapa del cohete de lanzamiento, el vehículo tiene una velocidad paralela a la superficie de la Tierra (figura 12.21). En otras palabras, se supondrá que el vehículo espacial empieza su vuelo libre en el vértice A de su trayectoria.[†]

Al denotar el vector radio y la velocidad del vehículo al principio de su vuelo libre, respectivamente, por r_0 y v_0 , se observa que la velocidad se reduce a su componente transversal y , en consecuencia, que $v_0 = r_0\dot{\theta}_0$. Al recordar la ecuación (12.27), se expresa el momento angular por masa unitaria h como

$$h = r_0^2\dot{\theta}_0 = r_0v_0 \quad (12.41)$$

Es posible utilizar el valor obtenido para h para determinar la constante GM/h^2 . También se tiene que el cálculo de esta constante se simplificará si se usa la relación que se obtuvo en la sección 12.10:

$$GM = gR^2 \quad (12.30)$$

donde R es el radio de la Tierra ($R = 6.37 \times 10^6$ m o 3960 mi) y g es la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

La constante C se obtiene fijando $\theta = 0$, $r = r_0$ en (12.39):

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2} \quad (12.42)$$

Al sustituir h de (12.41), es posible expresar fácilmente C en términos de r_0 y v_0 .

Se determinarán ahora las condiciones iniciales correspondientes a cada una de las tres trayectorias fundamentales indicadas antes. Al considerar primero la trayectoria parabólica, se hace C igual a GM/h^2 en la ecuación (12.42) y se elimina h entre las ecuaciones (12.41) y (12.42). Al resolver para v_0 , se obtiene

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

Se puede verificar fácilmente que un valor mayor de la velocidad inicial corresponde a una trayectoria hiperbólica y que un valor más pequeño corresponde a una órbita elíptica. Puesto que el valor de v_0 que se

[†]Los problemas que impliquen lanzamientos oblicuos se considerarán en la sección 13.9.

obtuvo para la trayectoria parabólica es el valor más pequeño para el cual el vehículo espacial no regresa a su punto de inicio, recibe el nombre de *velocidad de escape*. Por consiguiente, se escribe

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad \text{o} \quad v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}} \quad (12.43)$$

si se recurre a la ecuación (12.30). Se advierte que la trayectoria será 1) hiperbólica si $v_0 > v_{\text{esc}}$, 2) parabólica si $v_0 = v_{\text{esc}}$ y 3) elíptica si $v_0 < v_{\text{esc}}$.

Entre las diversas órbitas elípticas posibles, la que se obtiene cuando $C = 0$, la *órbita circular*, resulta de interés especial. Se encuentra con facilidad que el valor de la velocidad inicial correspondiente a una órbita circular es

$$v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad \text{o} \quad v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}} \quad (12.44)$$

si se toma en cuenta la ecuación (12.30). De la figura 12.22 se tiene que para valores v_0 mayores que v_{circ} pero más pequeños que v_{esc} , el punto A donde se inicia el vuelo libre es el punto de la órbita más cercano a la Tierra; este punto recibe el nombre de *perigeo*, mientras que el punto A' , que es el más alejado de la Tierra, se conoce como *apogeo*. Para valores de v_0 más pequeños que v_{circ} , el punto A es el apogeo, en tanto que el punto A'' , en el otro lado de la órbita, es el perigeo. Para valores de v_0 mucho más pequeños que v_{circ} , la trayectoria del vehículo espacial intercepta la superficie de la Tierra; en tal caso, el vehículo no entra en órbita.

Los misiles balísticos, que se diseñan para golpear contra la superficie terrestre, también viajan a lo largo de trayectorias elípticas. En realidad, se debe reconocer ahora que cualquier objeto lanzado en el vacío con una velocidad inicial v_0 más pequeña que v_{circ} se moverá a lo largo de una trayectoria elíptica. Sólo en el caso en que las distancias implicadas son pequeñas es posible suponer que el campo gravitacional de la Tierra es uniforme, y que la trayectoria elíptica puede aproximarse mediante una trayectoria parabólica, como se hizo antes (sección 11.11) en el caso de proyectiles convencionales.

Periodo orbital. Una característica importante del movimiento de un satélite terrestre es el tiempo que éste requiere para describir su órbita. Este tiempo, conocido como el *periodo orbital* del satélite, se denota mediante τ . Observamos primero, en vista de la definición de velocidad de área (sección 12.9), que τ se obtiene al dividir el área dentro de la órbita entre la velocidad de área. Al advertir que el área de una elipse es igual a πab , donde a y b denotan, respectivamente, los semiejes mayor y menor, y que la velocidad de área es igual a $h/2$, se escribe

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \quad (12.45)$$

En tanto que h puede determinarse de inmediato a partir de r_0 y v_0 en el caso de un satélite lanzado en una dirección paralela a la superficie terrestre, los semiejes a y b no se relacionan directamente con las condiciones iniciales. Puesto que, por otro lado, los valores de r_0 y r_1 de r correspondientes al perigeo y al apogeo de la órbita pueden determinarse sin dificultades a partir de la ecuación (12.39), se expresan los semiejes a y b en términos de r_0 y r_1 .

Considérese la órbita elíptica que se muestra en la figura 12.23. El centro de la Tierra se ubica en O y coincide con uno de los dos focos de

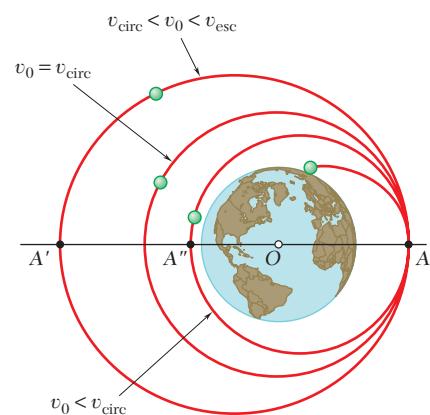


Figura 12.22

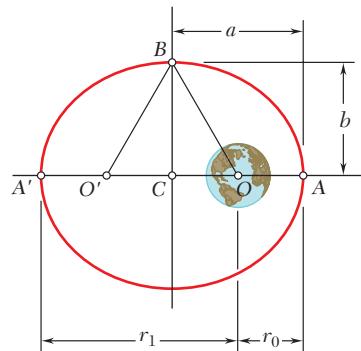


Figura 12.23

la elipse, en tanto que los puntos A y A' representan, respectivamente, el perigeo y el apogeo de la órbita. Fácilmente se confirma que

$$r_0 + r_1 = 2a$$

y consecuentemente

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) \quad (12.46)$$

Si se recuerda que la suma de las distancias desde cada uno de los focos hasta cualquier punto de la elipse es constante, se escribe

$$O'B + BO = O'A + OA = 2a \quad \text{o} \quad BO = a$$

Por otro lado, se tiene que $CO = a - r_0$. Por lo tanto, es posible escribir

$$\begin{aligned} b^2 &= (BC)^2 = (BO)^2 - (CO)^2 = a^2 - (a - r_0)^2 \\ b^2 &= r_0(2a - r_0) = r_0 r_1 \end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$b = \sqrt{r_0 r_1} \quad (12.47)$$

Las fórmulas (12.46) y (12.47) indican que los semiejes mayor y menor de la órbita son iguales, respectivamente, a la media aritmética y geométrica de los valores máximo y mínimo del vector radio. Una vez que r_0 y r_1 se han determinado, las longitudes de los semiejes pueden calcularse fácilmente y sustituirse por a y b en la fórmula (12.45).

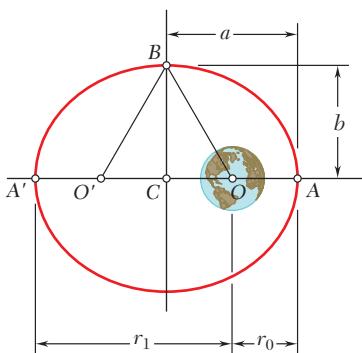


Figura 12.23 (repetida)

*12.13. LEYES DE KEPLER DEL MOVIMIENTO PLANETARIO

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un satélite terrestre se pueden utilizar para describir el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. En este caso, sin embargo, la masa de la Luna no es despreciable comparada con la masa terrestre, y los resultados que se obtienen no son del todo precisos.

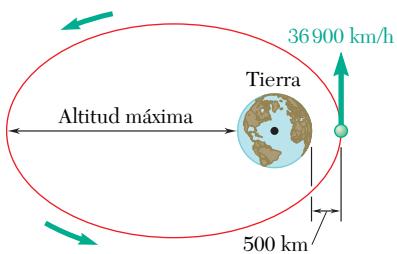
La teoría que se desarrolló en las secciones precedentes también se aplican al estudio del movimiento de los planetas alrededor del Sol. Aunque se introduce otro error al ignorar las fuerzas que los planetas ejercen entre sí, la aproximación que se obtiene es excelente. De hecho, incluso antes de que Newton hubiera formulado su teoría fundamental, las propiedades expresadas por la ecuación (12.39), donde M representa la masa del Sol, y mediante la ecuación (12.33) habían sido descubiertas por el astrónomo alemán Johann Kepler (1571-1630) a partir de observaciones astronómicas del movimiento de los planetas.

Las tres *leyes del movimiento planetario* de Kepler se enuncian del modo siguiente.

1. Cada planeta describe una elipse, con el Sol ubicado en uno de sus focos.
2. El vector radio trazado desde el Sol hasta un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.
3. Los cuadrados de tiempos periódicos de los planetas son proporcionales a los cubos de los ejes semimayores de sus órbitas.

La primera ley establece un caso particular del resultado que se estableció en la sección 12.12, y la segunda ley expresa que la velocidad de área de cada planeta es constante (véase la sección 12.9). También es posible obtener la tercera ley de Kepler de los resultados a los que se llegó en la sección 12.12.[†]

[†]Véase el problema 12.121.



PROBLEMA RESUELTO 12.9

Un satélite se lanza en una dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36 900 km/h desde una altura de 500 km. Determine *a)* la altitud máxima alcanzada por el satélite, *b)* el periodo orbital del satélite.

SOLUCIÓN

a) Altitud máxima. Despues de que se lanza el satélite, éste se encuentra sujeto únicamente a la atracción gravitacional de la Tierra; en consecuencia, su movimiento lo gobierna la ecuación (12.39),

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (1)$$

Puesto que la componente radial de la velocidad es cero en el punto de lanzamiento *A*, se tiene $h = r_0 v_0$. Al recordar que para la Tierra $R = 6\ 370$ km, se calcula

$$\begin{aligned} r_0 &= 6\ 370 \text{ km} + 500 \text{ km} = 6\ 870 \text{ km} = 6.87 \times 10^6 \text{ m} \\ v_0 &= 36\ 900 \text{ km/h} = \frac{36.9 \times 10^6 \text{ m}}{3.6 \times 10^3 \text{ s}} = 10.25 \times 10^3 \text{ m/s} \\ h &= r_0 v_0 = (6.87 \times 10^6 \text{ m})(10.25 \times 10^3 \text{ m/s}) = 70.4 \times 10^9 \text{ m}^2/\text{s} \\ h^2 &= 4.96 \times 10^{21} \text{ m}^4/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Puesto que $GM = gR^2$, donde R es el radio de la Tierra, se tiene

$$\begin{aligned} GM &= gR^2 = (9.81 \text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 398 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2 \\ \frac{GM}{h^2} &= \frac{398 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2}{4.96 \times 10^{21} \text{ m}^4/\text{s}^2} = 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

Al sustituir este valor dentro de (1), se obtiene

$$\frac{1}{r} = 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + C \cos \theta \quad (2)$$

Al advertir que el punto *A* es $\theta = 0$ y $r = r_0 = 6.87 \times 10^6$ m, se calcula la constante *C*:

$$\frac{1}{6.87 \times 10^6 \text{ m}} = 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + C \cos 0^\circ \quad C = 65.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$$

En *A'*, el punto de la órbita más alejado de la Tierra, se tiene $\theta = 180^\circ$. Mediante (2), se calcula la distancia correspondiente r_1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= 80.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + (65.3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}) \cos 180^\circ \\ r_1 &= 66.7 \times 10^6 \text{ m} = 66\ 700 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\text{Altura máxima} = 66\ 700 \text{ km} - 6\ 370 \text{ km} = 60\ 300 \text{ km} \quad \blacktriangleleft$$

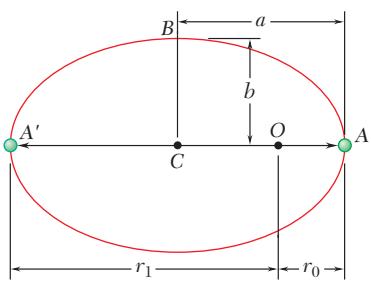
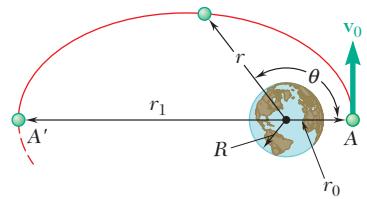
b) Período orbital. Puesto que *A* y *A'* son el perigeo y el apogeo, respectivamente, de la órbita elíptica, se utilizan las ecuaciones (12.46) y (12.47) y se calculan los semiejes mayor y menor de la órbita

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) = \frac{1}{2}(6.87 + 66.7)(10^6) \text{ m} = 36.8 \times 10^6 \text{ m}$$

$$b = \sqrt{r_0 r_1} = \sqrt{(6.87)(66.7)} \times 10^6 \text{ m} = 21.4 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi(36.8 \times 10^6 \text{ m})(21.4 \times 10^6 \text{ m})}{70.4 \times 10^9 \text{ m}^2/\text{s}}$$

$$\tau = 70.3 \times 10^3 \text{ s} = 1\ 171 \text{ min} = 19 \text{ h } 31 \text{ min} \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se continuó el estudio del movimiento de una partícula bajo una fuerza central y se aplicaron los resultados a problemas en mecánica celeste. Se encontró que la trayectoria de una partícula bajo una fuerza central se define mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \quad (12.37)$$

donde u es el recíproco de la distancia r de la partícula al centro de fuerza ($u = 1/r$), F es la magnitud de la fuerza central \mathbf{F} , y h es una constante igual a la cantidad de movimiento angular por unidad de masa de la partícula. En problemas de mecánica celeste, \mathbf{F} es la fuerza de atracción gravitacional ejercida sobre el satélite o nave espacial por el Sol, la Tierra u otro planeta alrededor del cual viaja. Al sustituir $F = GMm/r^2 = GMmu^2$ en la ecuación (12.37), se obtiene para ese caso

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (12.38)$$

donde el miembro del lado derecho es una constante.

1. Análisis del movimiento de satélites y naves espaciales. La solución de la ecuación diferencial (12.38) define la trayectoria de un satélite o nave espacial. Ésta se obtuvo en la sección 12.12 y se expresó en dos formas alternativas

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad \text{o} \quad \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \varepsilon \cos \theta) \quad (12.39, 12.39')$$

Al aplicar estas ecuaciones recuérdese que $\theta = 0$ corresponde siempre al perigeo (el punto de máximo acercamiento) de la trayectoria (figura 12.19) y que h es una constante para una trayectoria determinada. Dependiendo del valor de la excentricidad ε , la trayectoria será una hipérbola, una parábola o una elipse.

a) $\varepsilon > 1$: La trayectoria es una hipérbola. por lo que para este caso la nave espacial nunca retorna a su punto de partida.

b) $\varepsilon = 1$: La trayectoria es una parábola. Éste es el caso límite entre trayectorias abierta (hiperbólica) y cerrada (elíptica). Para este caso la velocidad v_0 en el perigeo es igual a la velocidad de escape v_{esc} .

$$v_0 = v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad (12.43)$$

Adviértase que la velocidad de escape es la velocidad más pequeña para la cual la nave espacial no regresa al punto de partida.

c) $\epsilon < 1$: La trayectoria es una órbita elíptica. En problemas que implican órbitas elípticas, tal vez se encuentre útil en la solución de problemas subsecuentes la relación que se obtuvo en el problema 12.102,

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

Cuando se aplique esta ecuación, hay que recordar que r_0 y r_1 son las distancias desde el centro de fuerza desde el perigeo ($\theta = 0$) y el apogeo ($\theta = 180^\circ$), respectivamente; que $h = r_0 v_0 = r_1 v_1$ y que, para un satélite que orbita a la Tierra, $GM_{\text{tierra}} = gR^2$, donde R es el radio terrestre. Recuérdese también que la trayectoria es un círculo cuando $\epsilon = 0$.

2. Determinación del punto de impacto de una nave espacial que desciende.

En problemas de este tipo, es posible que se suponga que la trayectoria sea elíptica, y que el punto inicial de la trayectoria de descenso es el apogeo de la trayectoria (figura 12.22). Adviértase que en el punto de impacto, la distancia r en las ecuaciones (12.39) y (12.39') es igual al radio R del cuerpo sobre el cual la nave espacial aterriza o se estrella. Además, se tiene que $h = Rv_I \sin \phi_I$, donde v_I es la velocidad de la nave espacial en el impacto y ϕ_I es el ángulo que su trayectoria forma con la vertical en el punto de impacto.

3. Cálculo del tiempo de recorrido entre dos puntos sobre una trayectoria. Para el movimiento de fuerza central, el tiempo t que se requiere para que una partícula recorra una porción de su trayectoria se determina al recordar de la sección 12.9 que la razón a la cual el vector de posición \mathbf{r} barre el área en la unidad de tiempo es igual a la mitad de la cantidad de movimiento angular por masa unitaria h de la partícula: $dA/dt = h/2$. Se concluye que, dado que h es constante para una trayectoria dada, que

$$t = \frac{2A}{h}$$

donde A es el área total barrida en el tiempo t .

a) **En el caso de una trayectoria elíptica**, el tiempo que se requiere para completar una órbita recibe el nombre de *periodo orbital* y se expresa como

$$\tau = \frac{2(\pi ab)}{h} \quad (12.45)$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor, respectivamente, de la elipse, y se relacionan con las distancias r_0 y r_1 mediante

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) \quad \text{y} \quad b = \sqrt{r_0 r_1} \quad (12.46, 12.47)$$

b) **La tercera ley de Kepler** proporciona una relación conveniente entre los períodos orbitales de dos satélites que describen órbitas elípticas alrededor del mismo cuerpo [sección 12.13]. Al denotar los semiejes mayores de las dos órbitas de a_1 y a_2 , respectivamente, y los períodos orbitales correspondientes por τ_1 y τ_2 se tiene

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

c) **En el caso de una trayectoria parabólica**, es posible que se recurra a la expresión dada en la portada del libro para un área parabólica o un área semiparabólica con el fin de calcular el tiempo que se requiere para viajar entre los dos puntos de la trayectoria.

Problemas

12.94 Una partícula de masa m describe el cardioide $r = r_0(1 + \cos \theta)/2$ bajo una fuerza central \mathbf{F} dirigida hacia el centro de fuerza O . Mediante la ecuación (12.37), demuestre que \mathbf{F} es inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia r desde la partícula hasta O .

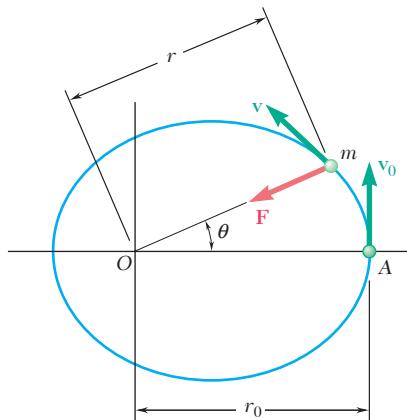


Figura P12.95

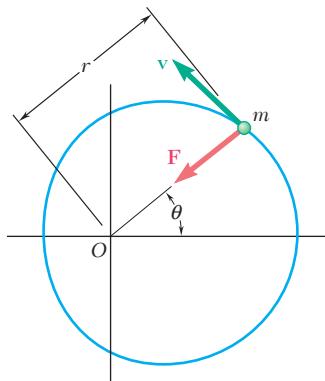


Figura P12.94

12.95 Una partícula de masa m se proyecta desde el punto A con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 perpendicular a OA y se mueve bajo una fuerza central \mathbf{F} a lo largo de una trayectoria elíptica definida por la ecuación $r = r_0/(2 - \cos \theta)$. Mediante la ecuación (12.37), demuestre que \mathbf{F} es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r desde la partícula hasta el centro de fuerza O .

12.96 Una partícula de masa m describe la trayectoria definida por la ecuación $r = r_0 \operatorname{sen} \theta$ bajo la acción de una fuerza central \mathbf{F} dirigida hacia el centro de fuerza O . Mediante la ecuación (12.37), demuestre que \mathbf{F} es inversamente proporcional a la quinta potencia de la distancia r desde la partícula hasta O .

12.97 Para la partícula del problema 12.76, utilice la ecuación (12.37) para demostrar que la fuerza central \mathbf{F} es proporcional a la distancia r desde la partícula hasta el centro de fuerza O .

12.98 Se observó que durante el primer vuelo sobre la Tierra de la nave espacial Galileo, la altura mínima fue de 960 km sobre la superficie terrestre. Suponiendo que la trayectoria de la nave espacial fue parabólica, determine su velocidad máxima durante este primer vuelo sobre la Tierra.

12.99 Cuando una sonda espacial que se aproxima al planeta Venus en una trayectoria parabólica alcanza el punto A de máximo acercamiento al planeta, su velocidad se reduce para incorporarla a una órbita circular. Si se sabe que la masa y el radio de Venus son 4.87×10^{24} kg y 6 052 km, respectivamente, determine *a)* la velocidad de la sonda cuando se aproxima a A , *b)* la reducción de velocidad que se requiere para incorporarla en una órbita circular.

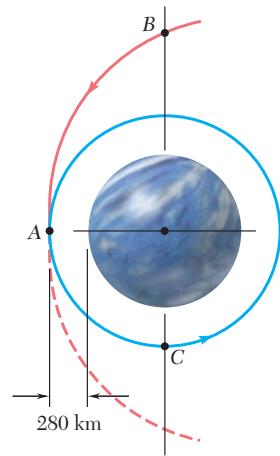


Figura P12.99

12.100 Se observó que durante su segundo vuelo sobre la Tierra, la nave espacial Galileo tuvo una velocidad de 46.2×10^3 ft/s cuando alcanzó su altura mínima de 188.3 mi sobre la superficie terrestre. Determine la excentricidad de la trayectoria de la nave espacial durante esta parte de su vuelo.

12.101 Se observó que cuando la nave espacial Galileo alcanzó el punto de su trayectoria más próximo a Io, una de las lunas del planeta Júpiter, se ubicaba a una distancia de 1 750 mi desde el centro de este satélite que tenía una velocidad de 49.4×10^3 ft/s. Si se sabe que la masa de Io es 0.01496 veces la masa de la Tierra, determine la excentricidad de la trayectoria de la nave espacial cuando se aproximaba a Io.

12.102 Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de un planeta de masa M . Si se denota por medio de r_0 y r_1 , respectivamente, los valores mínimo y máximo de la distancia r desde el satélite hasta el centro del planeta, deduzca la relación

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

donde h es la cantidad de movimiento angular por unidad de masa del satélite.

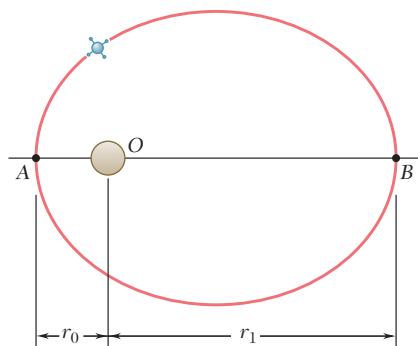


Figura P12.102

12.103 En el corte del motor principal de su decimotercer vuelo, el transbordador espacial Discovery mantuvo una órbita elíptica de 40.3 mi de altura mínima y 336 mi de altura máxima sobre la superficie terrestre. Si se sabe que en el punto A el transbordador tuvo una velocidad v_0 paralela a la superficie de la Tierra y que el vehículo espacial se transfirió a una órbita circular cuando pasó por el punto B, determine a) la velocidad v_0 del transbordador espacial en A, b) el aumento en la rapidez requerido en B para incorporar al transbordador en la órbita circular.

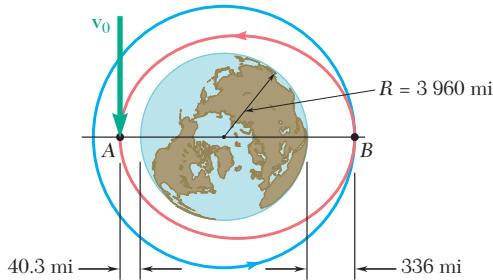


Figura P12.103

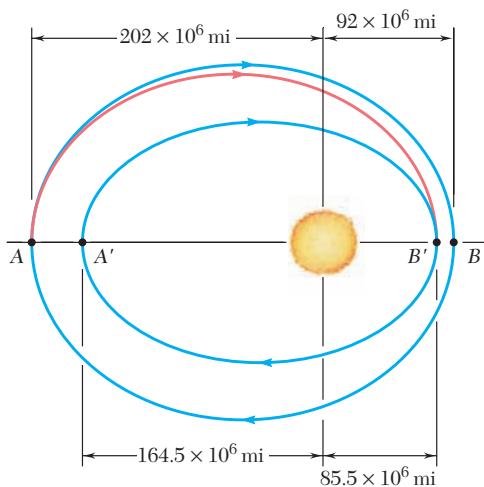


Figura P12.105

12.104 Una sonda espacial describe una órbita circular alrededor de un planeta de radio R . La altura de la sonda sobre la superficie del planeta es αR y su velocidad es v_0 . Para colocar a la sonda en una órbita elíptica que la acerará más al planeta, su rapidez se reduce desde v_0 hasta βv_0 , donde $\beta < 1$, al encender su motor durante un intervalo corto de tiempo. Determine el valor mínimo permisible de β si la sonda no debe chocar con la superficie del planeta.

12.105 Mientras describe una órbita elíptica alrededor del Sol, una nave espacial alcanza una distancia máxima de 202×10^6 mi desde el centro del Sol en el punto A (llamado *afelio*) y una distancia mínima de 92×10^6 mi en el punto B (llamado *perihelio*). Para colocar la nave espacial en una órbita elíptica más pequeña con afelio A' y perihelio B' , donde A' y B' se localizan, respectivamente, a 164.5×10^6 mi y 85.5×10^6 mi, desde el centro del Sol, la rapidez de la nave espacial se reduce primero cuando pasa por A y después se reduce más cuando pasa por B' . Si se sabe que la masa del Sol es de 332.8×10^3 veces la masa de la Tierra, determine *a)* la rapidez de la nave espacial en A y *b)* la cantidad que la rapidez de la nave espacial debe reducirse en A y B' para que ingrese en la órbita elíptica deseada.

12.106 Una sonda espacial se colocará en una órbita circular con $5\,600$ mi de radio alrededor del planeta Venus en un plano especificado. Cuando la sonda alcanza A , el punto de su trayectoria original más cercano a Venus, se inserta en una primera órbita de transferencia elíptica al reducir su rapidez en Δv_A . Esta órbita lo lleva al punto B con una velocidad más baja. Allí, la sonda se inserta en una segunda órbita de transferencia ubicada en el plano especificado al cambiar la dirección de su velocidad y además al reducir su rapidez en Δv_B . Por último, cuando la sonda llega al punto C , se inserta en la órbita circular deseada al reducir su rapidez en Δv_C . Si se sabe que la masa de Venus es 0.82 veces la masa de la Tierra, que $r_A = 9.3 \times 10^3$ mi y $r_B = 190 \times 10^3$ mi y que la sonda se aproxima a A en una trayectoria parabólica, determine en cuánto debe reducirse la velocidad de la sonda *a)* en A , *b)* en B , *c)* en C .

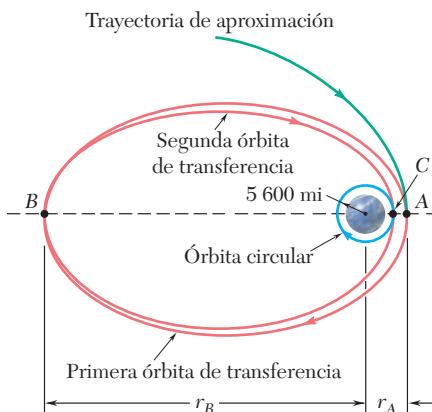


Figura P12.106

12.107 Para la sonda espacial del problema 12.106, se sabe que $r_A = 9.3 \times 10^3$ mi y que la velocidad de la sonda se reduce hasta $20\,000$ ft/s cuando pasa por A . Determine *a)* la distancia desde el centro de Venus hasta el punto B , *b)* la cantidad en la que debe reducirse la velocidad de la sonda en B y C .

12.108 Determine el tiempo necesario para que la sonda espacial del problema 12.106 viaje de A a B sobre su primera órbita de transferencia.

- 12.109** La nave espacial Clementina describió una órbita elíptica de altura mínima $h_A = 400$ km y una altura máxima de $h_B = 2\,940$ km sobre la superficie de la Luna. Si el radio de esta última es de 1 737 km y su masa corresponde a 0.01230 veces la masa de la Tierra, determine el periodo orbital de la nave espacial.

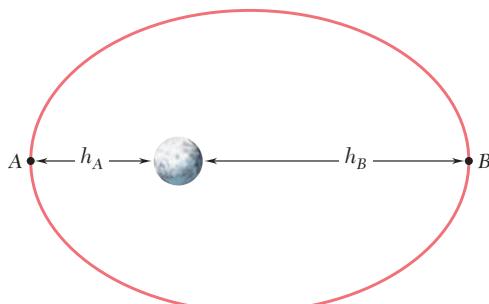


Figura P12.109

- 12.110** Una sonda espacial en una órbita terrestre baja se inserta en una órbita de transferencia elíptica al planeta Venus. Si se sabe que la masa del Sol es 332.8×10^3 veces la masa de la Tierra y se supone que la sonda está sujeta sólo a la atracción gravitatoria del Sol, determine el valor de ϕ , que define la posición relativa de Venus con respecto a la Tierra, en el momento que la sonda se inserta a la órbita de transferencia.

- 12.111** Con base en las observaciones efectuadas durante el avistamiento en 1996 del cometa Hyakutake, se concluyó que su trayectoria es una elipse sumamente alargada para la cual la excentricidad es casi de $\epsilon = 0.999887$. Si se sabe que para el avistamiento de 1996 la distancia mínima entre el cometa y el Sol era de $0.230R_E$, donde R_E es la distancia media desde el Sol hasta la Tierra, determine el periodo orbital del cometa.

- 12.112** El cometa Halley viaja en una órbita elíptica alargada para la cual la distancia mínima desde el Sol es de aproximadamente $\frac{1}{2}r_E$, donde $r_E = 150 \times 10^6$ km es la distancia media del Sol a la Tierra. Si se sabe que el periodo orbital del cometa Halley es de alrededor de 76 años, determine la distancia máxima desde el Sol alcanzada por el cometa.

- 12.113** Determine el tiempo necesario para que la sonda espacial del problema 12.99 viaje desde B hasta C.

- 12.114** Una sonda espacial describe una órbita circular de radio nR con una velocidad v_0 alrededor de un planeta de radio R y centro O. Cuando la sonda pasa por un punto A, su velocidad se reduce de v_0 a βv_0 , donde $\beta < 1$, para poner la sonda en una trayectoria de impacto. Exprese en términos de n y β el ángulo AOB, donde B denota el punto de impacto de la sonda sobre el planeta.

- 12.115** Antes de las misiones Apolo a la Luna, se utilizaron varios orbitadores lunares para fotografiar la superficie del satélite y obtener información relativa a posibles sitios de alunizaje. Al final de cada misión, se ajustó la trayectoria de cada nave de manera que éstas se estrellaran a fin de efectuar estudios adicionales de las características de la superficie lunar. En la figura se muestra la órbita elíptica del Orbitador Lunar 2. Si se sabe que la masa de la Luna es 0.01230 veces la masa de la Tierra, determine la cantidad que debe reducirse la rapidez del orbitador en el punto B de modo que choque con la superficie lunar en el punto C. (Sugerencia: El punto B es el apogeo de la trayectoria de impacto elíptica.)

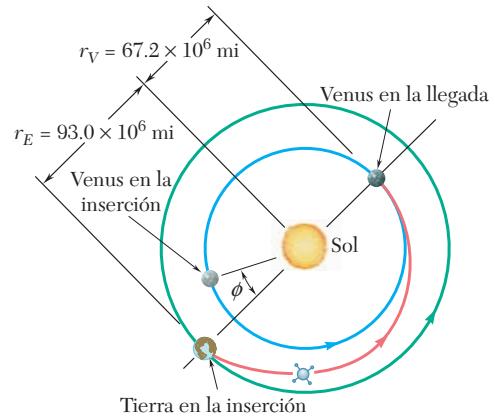


Figura P12.110

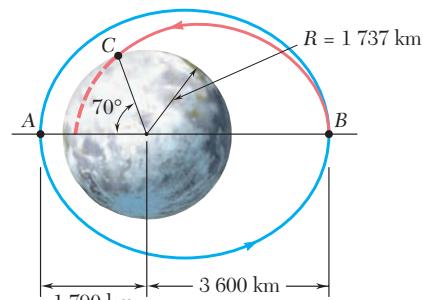


Figura P12.115

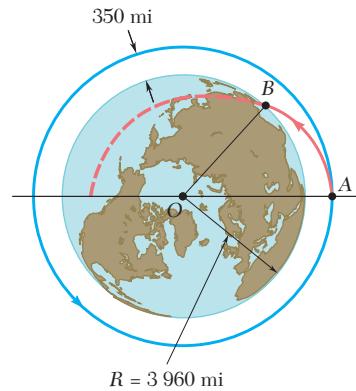


Figura P12.117

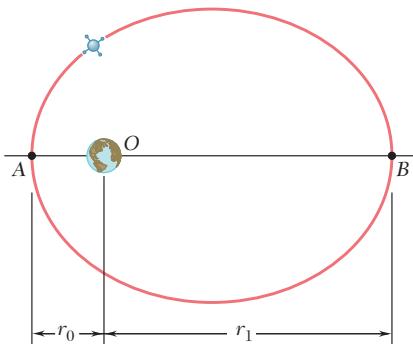


Figura P12.118 y P12.119

12.116 Mientras una nave espacial se aproxima al planeta Júpiter, libera una sonda que debe entrar a la atmósfera del planeta en el punto *B* a una altitud de 450 km sobre la superficie de Júpiter. La trayectoria de la sonda es una hipérbola de excentricidad $\varepsilon = 1.031$. Si se sabe que el radio y la masa de Júpiter son 71.492×10^3 y 1.9×10^{27} kg, respectivamente, y que la velocidad \mathbf{v}_B de la sonda en *B* forma un ángulo de 82.9° con la dirección de *OA*, determine *a*) el ángulo *AOB*, *b*) la velocidad v_B de la sonda en *B*.

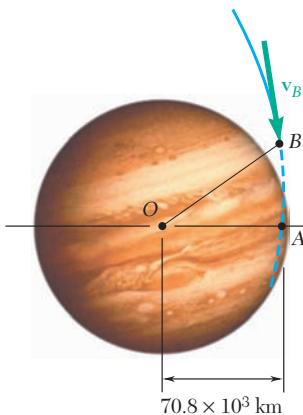


Figura P12.116

12.117 Un transbordador espacial describe una órbita circular a una altura de 350 mi sobre la superficie de la Tierra. Cuando pasa por el punto *A*, enciende su motor durante un breve intervalo de tiempo para reducir su rapidez en 500 ft/s y empezar su descenso hacia la Tierra. Determine el ángulo *AOB* de manera que la altura del transbordador en el punto *B* sea 75 mi. (*Sugerencia*: El punto *A* es el apogeo de la trayectoria descendente elíptica.)

12.118 Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de un planeta. Denotando por r_0 y r_1 las distancias correspondientes, respectivamente, al perigeo y al apogeo de la órbita, demuestre que la curvatura de esta última en cada uno de los dos puntos indicados puede expresarse como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} \right)$$

12.119 *a*) Exprese la excentricidad ε de la órbita elíptica descrita por un satélite alrededor de un planeta en términos de las distancias r_0 y r_1 correspondientes al perigeo y al apogeo de la órbita, *b*) Utilice el resultado que se obtuvo en el inciso *a*) y los datos dados en el problema 12.111, donde $R_E = 149.6 \times 10^6$ km, para determinar la distancia máxima apropiada desde el Sol que alcanza el cometa Hyakutake.

12.120 Demuestre que el movimiento angular de masa unitaria h de un satélite que describe una órbita elíptica del semieje mayor a y excentricidad ε alrededor de un planeta de masa M puede expresarse como

$$h = \sqrt{GMa(1 - \varepsilon^2)}$$

12.121 Deduzca la tercera ley del movimiento planetario de Kepler a partir de las ecuaciones (12.39) y (12.45).

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 12

Este capítulo se dedicó a la segunda ley de Newton y su aplicación al análisis del movimiento de partículas.

Al denotar mediante m la masa de una partícula, por $\Sigma\mathbf{F}$ la suma, o resultante, de las fuerzas que actúan sobre la partícula, y por \mathbf{a} la aceleración de la partícula relativa a un *sistema de referencia newtoniano* [sección 12.2], se escribe

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (12.2)$$

Al presentar la *cantidad de movimiento lineal* de una partícula, $\mathbf{L} = mv$ [sección 12.3], se vio que la segunda ley de Newton también puede escribirse en la forma

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \quad (12.5)$$

la cual expresa que la resultante *de la fuerza que actúa sobre una partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal de la partícula*.

La ecuación (12.2) se cumple sólo si se usa un sistema consistente en unidades. Con unidades del SI, las fuerzas se expresarán en newtons, las masas en kilogramos y las aceleraciones en m/s^2 ; con unidades de uso común en Estados Unidos las fuerzas deben expresarse en libras, las masas en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$ (conocidas también como *slugs*), y las aceleraciones en ft/s^2 [sección 12.4].

Para resolver un problema que implica el movimiento de una partícula, la ecuación (12.2) debe sustituirse por ecuaciones que contengan cantidades escalares [sección 12.5]. Al usar *componentes rectangulares* de \mathbf{F} y \mathbf{a} , se escribe

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_z = ma_z \quad (12.8)$$

Mediante las *componentes tangencial y normal*, se tiene

$$\Sigma F_t = m \frac{dv}{dt} \quad \Sigma F_n = m \frac{v^2}{\rho} \quad (12.9')$$

También se señaló [sección 12.6] que las ecuaciones del movimiento de una partícula pueden sustituirse por ecuaciones similares a las de equilibrio que se usan en estática si un vector $-m\mathbf{a}$ de magnitud ma pero de sentido opuesto al de la aceleración, se añade a las fuerzas aplicadas a la partícula; en ese caso se dice que la partícula está en *equilibrio dinámico*. Sin embargo, por uniformidad, todos los problemas resueltos se solucionaron utilizando las ecuaciones de movimiento, primero con componentes rectangulares [problemas resueltos 12.1 a 12.4] y después con las componentes tangencial y normal [problemas resueltos 12.5 y 12.6].

[Segunda ley de Newton](#)

[Cantidad de movimiento lineal](#)

[Sistemas de unidades consistentes](#)

[Ecuaciones de movimiento de una partícula](#)

[Equilibrio dinámico](#)

Cantidad de movimiento angular

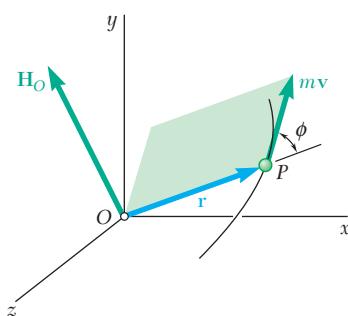


Figura 12.24

Razón de cambio de la cantidad del movimiento angular

Componentes radial y transversal

Movimiento bajo una fuerza central

En la segunda parte del capítulo se definió la *cantidad de movimiento angular* \mathbf{H}_O de una partícula alrededor de un punto O como el momento alrededor de O de la cantidad de movimiento lineal mv de esa partícula [sección 12.7]. Se escribe

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times mv \quad (12.12)$$

y se tiene que \mathbf{H}_O es un vector perpendicular en el plano que contiene \mathbf{r} y mv (figura 12.24) y de magnitud

$$H_O = rmv \sin \phi \quad (12.13)$$

Al descomponer los vectores \mathbf{r} y mv en componentes rectangulares, se expresa la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O en la forma determinada

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \quad (12.14)$$

En el caso de una partícula que se mueve en el plano xy , se tiene $z = v_z = 0$. La cantidad de movimiento angular es perpendicular al plano xy y está completamente definida por su magnitud. Se escribe

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \quad (12.16)$$

Al calcular la tasa de cambio $\dot{\mathbf{H}}_O$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O , y al aplicar la segunda ley de Newton, se escribe la ecuación

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (12.19)$$

la cual establece que *la suma de los momentos alrededor de O de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la razón de cambio de la cantidad del movimiento angular de la partícula en torno a O*.

En muchos problemas que implican el movimiento plano de una partícula, se encontró conveniente utilizar las *componentes radial y transversal* [sección 12.8, problema resuelto 12.7] y escribir las ecuaciones

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (12.21)$$

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}) \quad (12.22)$$

Cuando la única fuerza que actúa sobre una partícula P es la fuerza \mathbf{F} dirigida hacia o alejándose de un punto fijo O , se dice que la partícula se mueve *bajo la acción de una fuerza central* [sección 12.9]. Puesto que $\Sigma \mathbf{M}_O = 0$ en cualquier instante dado, se concluye de la ecuación (12.19) que $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$ para todos los valores de t y, en consecuencia, que

$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \quad (12.23)$$

Se concluye que la cantidad de movimiento angular de una partícula que se mueve bajo una fuerza central es constante, tanto en magnitud como en dirección, y que la partícula se mueve en un plano perpendicular al vector \mathbf{H}_O .

Al recordar la ecuación (12.13), se escribe la relación

$$rmv \operatorname{sen} \phi = r_0mv_0 \operatorname{sen} \phi_0 \quad (12.25)$$

para el movimiento de cualquier partícula bajo una fuerza central (figura 12.25). Mediante coordenadas polares y recordando la ecuación (12.18), se obtuvo también

$$r^2\dot{\theta} = h \quad (12.27)$$

donde h es una constante que representa la cantidad de movimiento angular por unidad de masa, H_O/m , de la partícula. Se señaló (figura 12.26) que el área infinitesimal dA que barre el radio vector OP cuando gira un ángulo $d\theta$ es igual a $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ y, en consecuencia, que el miembro del lado izquierdo de la ecuación (12.27) representa el doble de la *velocidad del área* dA/dt de la partícula. Por lo tanto, la *velocidad de área de una partícula que se mueve bajo una fuerza central es constante*.

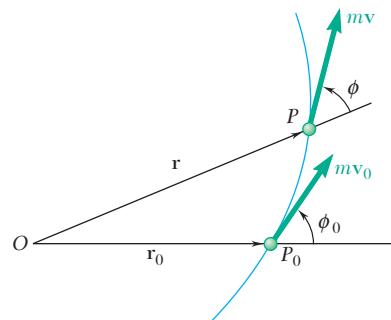


Figura 12.25

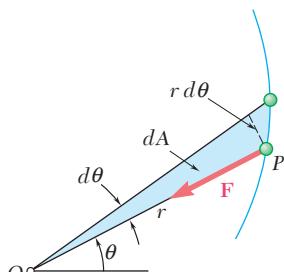


Figura 12.26

Una aplicación importante del movimiento bajo una fuerza central la ofrece el movimiento orbital de cuerpos sometidos a la atracción gravitacional [sección 12.10]. De acuerdo con la *ley de Newton de la gravitación universal*, dos partículas a una distancia r una de la otra y de masas M y m , respectivamente, se atraen entre sí con fuerzas iguales y opuestas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ dirigidas a lo largo de la línea que une las partículas (figura 12.27). La magnitud común F de las dos fuerzas es

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (12.28)$$

donde G es la *constante de gravedad*. En el caso de un cuerpo de masa m sujeto a la atracción gravitacional de la Tierra, el producto GM , donde M es la masa de la Tierra, puede expresarse como

$$GM = gR^2 \quad (12.30)$$

donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 32.2 \text{ ft/s}^2$ y R es el radio de la Tierra.

Se demostró en la sección 12.11 que una partícula que se mueve bajo una fuerza central describe una trayectoria definida por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \quad (12.37)$$

Ley de Newton de la gravitación universal

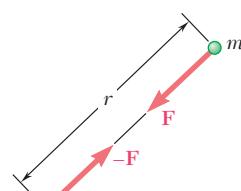


Figura 12.27

Movimiento orbital

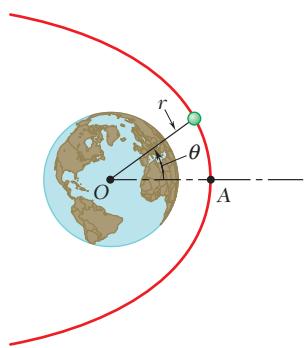


Figura 12.28

Velocidad de escape

donde $F > 0$ corresponde a una fuerza atractiva y $u = 1/r$. En el caso de una partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza de atracción gravitacional [sección 12.12], se sustituye F por la expresión dada en la ecuación (12.28). Midiendo θ a partir del eje OA que une el foco O con el punto A de la trayectoria más cercano a O (figura 12.28), se encuentra que la solución de la ecuación (12.37) era

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C \cos \theta \quad (12.39)$$

Ésta es la ecuación de una cónica de excentricidad $\varepsilon = Ch^2/GM$. La cónica es una *elipse* si $\varepsilon < 1$, una *parábola* si $\varepsilon = 1$, y una *hipérbola* si $\varepsilon > 1$. Es posible determinar las constantes C y h de las condiciones iniciales; si la partícula se proyecta desde el punto A ($\theta = 0$, $r = r_0$) con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 perpendicular a OA , tenemos $h = r_0 v_0$ [problema resuelto 12.9].

Se indicó también que los valores de la velocidad inicial correspondientes, respectivamente, a una trayectoria parabólica y a una circular eran

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad (12.43)$$

$$v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad (12.44)$$

y que el primero de estos valores, denominado la *velocidad de escape*, es el valor más pequeño de v_0 para el cual la partícula no regresará a su punto de partida.

Periodo orbital

El *periodo orbital* τ de un planeta o satélite se definió como el tiempo requerido por el cuerpo para describir su órbita. Se mostró que

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \quad (12.45)$$

donde $h = r_0 v_0$ y donde a y b representan los semiejes mayor y menor de la órbita. Se indicó además que estos semiejes son iguales respectivamente a las medias aritmética y geométrica de los valores máximo y mínimo del vector radio r .

Leyes de Kepler

La última sección del capítulo [sección 12.13] presentó las *leyes de Kepler del movimiento planetario* y mostró que estas leyes empíricas, obtenidas a partir de antiguas observaciones astronómicas, confirman las leyes de movimiento de Newton, así como su ley de gravedad.

Problemas de repaso

12.122 Un automóvil de 3 000 lb es conducido hacia abajo sobre un plano inclinado de 5° a una rapidez de 50 mi/h cuando se aplican los frenos, lo que ocasiona la aplicación de una fuerza de frenado total de 1 200 lb sobre el automóvil. Determine la distancia recorrida por el automóvil antes de detenerse.

12.123 Un bloque *B* de 6 kg descansa, como se muestra en la figura, sobre una ménsula *A* de 10 kg. Los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$ entre el bloque *B* y la ménsula *A*, y no existe fricción en la polea o entre la ménsula y la superficie horizontal. *a)* Determine la masa máxima del bloque *C* si el bloque *B* no debe deslizarse sobre la ménsula *A*. *b)* Si la masa del bloque *C* es 10% más grande que la respuesta obtenida en *a*, determine las aceleraciones de *A*, *B* y *C*.

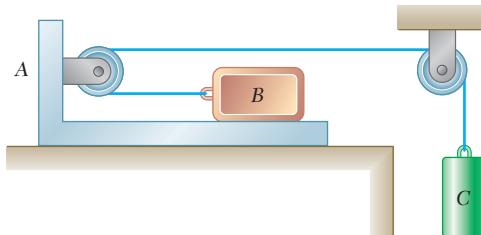


Figura P12.123

12.124 El bloque *A* pesa 20 lb y los bloques *B* y *C* pesan 10 lb cada uno. Si se sabe que los bloques se encuentran inicialmente en reposo y que *B* recorre 8 ft en 2 s, determine *a)* la magnitud de la fuerza *P*, *b)* la tensión en la cuerda *AD*. Desprecie las masas de las poleas y el efecto de la fricción.

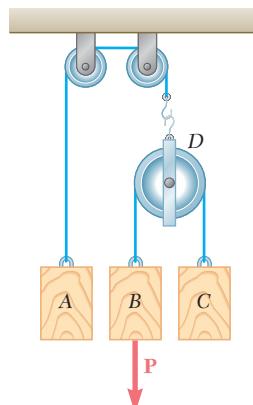


Figura P12.124

12.125 Un bloque *B* de 12 lb descansa sobre la superficie superior de una cuña *A* de 30 lb, como se muestra en la figura. No tome en cuenta la fricción y determine, inmediatamente después de que el sistema se libera desde el reposo, *a)* la aceleración de *A*, *b)* la aceleración de *B* en relación con *A*.

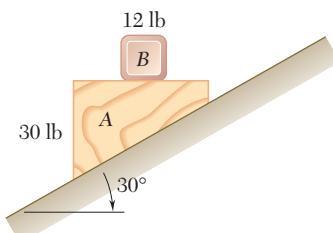


Figura P12.125

12.126 La pista de la montaña rusa que se muestra está contenida en un plano vertical. La parte de la vía entre A y B es recta y horizontal, en tanto que las porciones a la izquierda de A y a la derecha de B tienen los radios de curvatura que se indican. Un carro viaja a la rapidez de 72 km/h cuando se aplican repentinamente los frenos, lo que provoca que las ruedas del carro se deslicen sobre la vía ($\mu_k = 0.25$). Determine la desaceleración inicial del carro si los frenos se aplican cuando este último a) casi ha llegado a A, b) está viajando entre A y B, c) acaba de pasar por B.

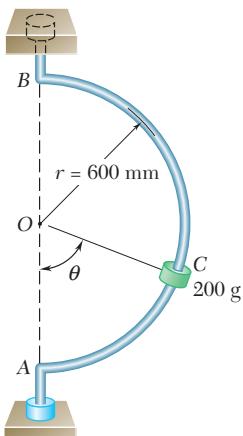


Figura P12.127

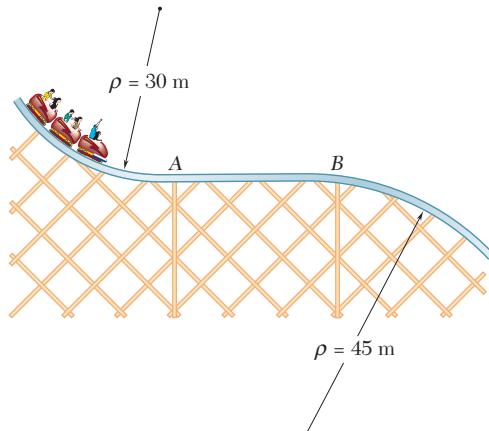


Figura P12.126

12.127 Un pequeño collarín C de 200 g se puede deslizar sobre una varilla semicircular que está diseñada para girar alrededor de la vertical AB a una razón constante de 6 rad/s. Determine el valor mínimo requerido del coeficiente de fricción estática entre el collarín y la varilla si el collarín no debe deslizarse cuando a) $\theta = 90^\circ$, b) $\theta = 75^\circ$, c) $\theta = 45^\circ$. Indique en cada caso la dirección del movimiento inminente.

12.128 El pasador B que pesa 4 oz se desliza libremente en un plano horizontal a lo largo de la ranura en el brazo rotatorio OC y a lo largo de la ranura DE con radio $b = 20$ in. Si se desprecia la fricción y se sabe que $\dot{\theta} = 15$ rad/s y $\ddot{\theta} = 250$ rad/s² para la posición $\theta = 20^\circ$, determine para esa posición a) las componentes radial y transversal de la fuerza resultante que se ejerce sobre el pasador B, b) las fuerzas **P** y **Q** ejercidas sobre el pasador B por el brazo OC y la pared de la ranura DE, respectivamente.

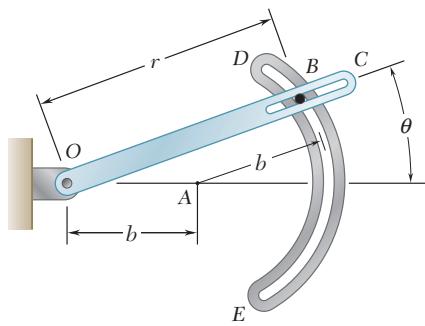


Figura P12.128

12.129 Una partícula de masa m se proyecta desde el punto A con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 perpendicular a la línea OA y se mueve bajo la acción de una fuerza central **F** que se aleja del centro de fuerza O. Si la partícula sigue una trayectoria definida por la ecuación $r = r_0/\cos 2\theta$ y usa la ecuación (12.27), exprese las componentes radial y transversal de la velocidad \mathbf{v} de la partícula como funciones del ángulo θ .

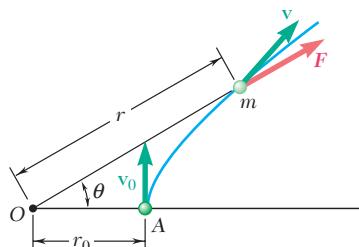


Figura P12.129

12.130 Demuestre que el radio r de la órbita de la Luna puede determinarse a partir del radio R de la Tierra, la aceleración de la gravedad g en la superficie de la Tierra y el tiempo τ requerido por la Luna para completar una revolución alrededor del planeta. Calcule r si se sabe que $\tau = 27.3$ días, dé la respuesta en unidades del SI y de uso común de Estados Unidos.

***12.131** El disco A gira en un plano horizontal alrededor de un eje vertical a razón constante de $\dot{\theta}_0 = 12 \text{ rad/s}$. La corredera B pesa 8.05 oz y se mueve en una ranura sin fricción del disco. La corredera se une a un resorte de constante k , el cual se mantiene sin deformar cuando $r = 0$. Si la corredera se libera sin velocidad radial en la posición $r = 15 \text{ in.}$, determine la posición de la corredera y la fuerza horizontal ejercida sobre ésta por el disco cuando $t = 0.1 \text{ s}$ para a) $k = 2.25 \text{ lb/ft}$, b) $k = 3.25 \text{ lb/ft}$.

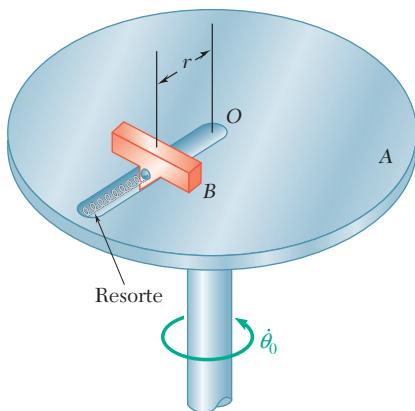


Figura P12.131

12.132 Se observó que cuando la nave espacial *Voyager I* alcanzó el punto de su trayectoria más próximo a Saturno, se ubicaba a una distancia de $185 \times 10^3 \text{ km}$ desde el centro del planeta y tenía una velocidad de 21.0 km/s . Si se sabe que Tethys, una de las lunas de Saturno, describe una órbita circular con radio de $295 \times 10^3 \text{ km}$ a una rapidez de 11.35 km/s , determine la excentricidad de la trayectoria del *Voyager I* cuando se aproximaba a Saturno.

12.133 Mediante la ignición de su motor, un transbordador alcanzó el punto A a una altitud de 40 mi sobre la superficie de la Tierra y tenía una velocidad horizontal v_0 . Si su primera órbita era elíptica y el transbordador se transfirió a una órbita circular cuando pasó por el punto B a una altura de 170 mi, determine a) el tiempo necesario para que el transbordador viaje desde A hasta B sobre su órbita elíptica original, b) el periodo orbital del transbordador en su órbita circular final.

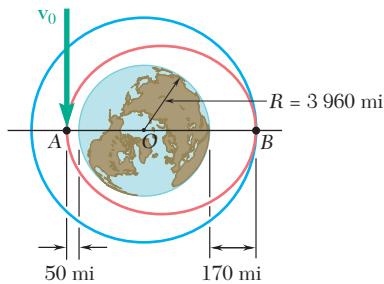


Figura P12.133

Problemas de computadora

12.C1 El bloque *B* que tiene una masa de 10 kg está inicialmente en reposo, como se indica en la figura, sobre la superficie superior de una cuña *A* de 20 kg, la cual se sostiene por medio de una superficie horizontal. Un bloque *C* de 2 kg se conecta al bloque *B* mediante una cuerda, que pasa sobre una polea de masa despreciable. Si se recurre al software y se denota mediante μ al coeficiente de fricción de todas las superficies, calcule las aceleraciones para los valores de $\mu \geq 0$. Utilice incrementos de 0.01 para μ , hasta que la cuña no se mueva y luego use incrementos de 0.1 hasta que no haya movimiento.

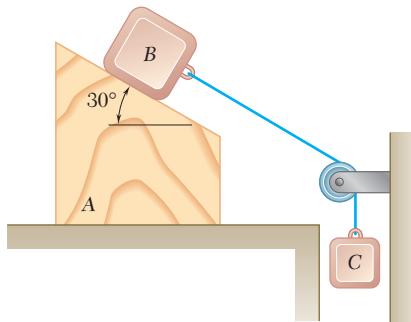


Figura P12.C1

12.C2 Un pequeño bloque de 1 lb está en reposo en la parte superior de una superficie cilíndrica. Al bloque se le da una velocidad inicial v_0 hacia la derecha de magnitud 10 ft/s la cual provoca que se deslice sobre la superficie cilíndrica. Utilizando software calcule y grafique los valores de θ para los cuales el bloque pierde contacto con la superficie con valores de μ_k , el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie, desde 0 hasta 0.4.

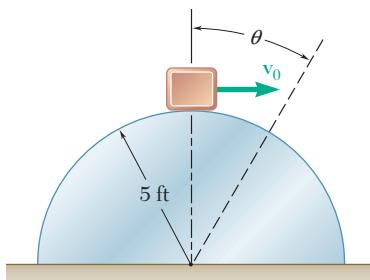


Figura P12.C2

12.C3 Un bloque de masa m está unido a un resorte de constante k . El bloque se suelta desde el reposo cuando el resorte está en posición horizontal y no deformada. Utilice software para determinar, para diversos valores seleccionados de k/m y r_0 , a) la longitud del resorte y la magnitud y la dirección de la velocidad del bloque cuando éste pasa directamente bajo el punto de suspensión del resorte, b) el valor de k/m para el cual la velocidad es horizontal si $r_0 = 1$ m.

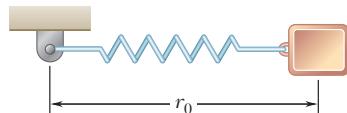


Figura P12.C3

12.C4 Use software para determinar los intervalos de valores de θ para los cuales el bloque E del problema 12.58 no se deslizará en la ranura semicircular de la placa plana. Si se supone un coeficiente de fricción estática de 0.35, determine los intervalos de valores cuando la razón constante de rotación de la placa es a) 14 rad/s, b) 2 rad/s.

12.C5 Con software determine el tiempo requerido por una nave espacial para viajar entre dos puntos de su trayectoria, dada la distancia al apogeo o al perigeo de la trayectoria y la rapidez de la nave espacial en ese punto. Use este programa para determinar a) el tiempo requerido por el *Orbitador Lunar 2* del problema 12.115 para viajar entre los puntos B y C de su trayectoria de impacto, si se sabe que la velocidad del orbitador es de 869.4 m/s cuando comienza a descender en B , b) el tiempo requerido por el transbordador espacial del problema 12.117 para viajar entre los puntos A y B de su trayectoria de aterrizaje, si se sabe que la rapidez del transbordador es de 24 371 ft/s cuando comienza a descender en A .



Una pelota de golf se deforma después de un impacto, como lo muestra esta fotografía de alta velocidad. La deformación máxima ocurrirá cuando la velocidad de la cabeza del bastón y la velocidad de la pelota sean iguales. En este capítulo se analizarán los impactos utilizando el coeficiente de restitución y la conservación de la cantidad de movimiento lineal. El tema de este capítulo es la cinética de partículas a partir de los métodos de energía y cantidad de movimiento.

CAPÍTULO

13

Cinética de partículas: métodos de la energía y la cantidad de movimiento



CAPÍTULO 13 CINÉTICA DE PARTÍCULAS: MÉTODOS DE LA ENERGÍA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

- 13.1 Introducción
- 13.2 Trabajo de una fuerza
- 13.3 Energía cinética de una partícula. Principio del trabajo y la energía
- 13.4 Aplicaciones del principio del trabajo y la energía
- 13.5 Potencia y eficiencia
- 13.6 Energía potencial
- 13.7 Fuerzas conservativas
- 13.8 Conservación de la energía
- 13.9 Movimiento bajo una fuerza central conservativa. Aplicación a la mecánica celeste
- 13.10 Principio del impulso y la cantidad de movimiento
- 13.11 Movimiento impulsivo
- 13.12 Impacto
- 13.13 Impacto central directo
- 13.14 Impacto central oblicuo
- 13.15 Problemas en los que interviene la energía y la cantidad de movimiento

13.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior la mayor parte de los problemas relacionados con el movimiento de partículas se resolvieron mediante el uso de la ecuación fundamental del movimiento $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Dada una partícula sobre la que se ejerce una fuerza \mathbf{F} , se podría resolver esta ecuación para la aceleración \mathbf{a} ; luego, aplicando los principios de la cinemática sería posible determinar a partir de \mathbf{a} la velocidad y la posición de la partícula en cualquier tiempo.

El uso de la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ junto con los principios de la cinemática permiten obtener dos métodos de análisis adicionales, el *método del trabajo y la energía* y el *método del impulso y la cantidad de movimiento*. La ventaja de estos métodos radica en el hecho de que hacen que resulte innecesaria la determinación de la aceleración. En realidad, el método del trabajo y la energía relaciona directamente la fuerza, la masa, la velocidad y el desplazamiento, en tanto que el método del impulso y la cantidad de movimiento relaciona la fuerza, la masa, la velocidad y el tiempo.

Primero se considera el método del trabajo y la energía. En las secciones 13.2 a 13.4 se analizan el *trabajo de una fuerza* y la *energía cinética de una partícula* y se aplica el principio del trabajo y la energía a la solución de problemas de ingeniería. Los conceptos de *potencia* y *eficiencia* de una máquina se presentan en la sección 13.5.

Las secciones 13.6 a 13.8 se dedican al concepto de *energía potencial* de una fuerza conservativa y a la aplicación del principio de la conservación de energía a diversos problemas de interés práctico. En la sección 13.9, los principios de la conservación de la energía y de la conservación del momento angular se emplean en forma conjunta para resolver problemas de mecánica celeste.

La segunda parte del capítulo se dedica al *principio del impulso y la cantidad de movimiento* y a su aplicación en el estudio del movimiento de una partícula. Como se verá en la sección 13.11, este principio es en particular eficaz en el estudio del *movimiento impulsivo* de una partícula, en el cual se aplican fuerzas muy grandes durante un intervalo de tiempo muy corto.

En las secciones 13.12 a 13.14 se considera el *impacto central* de dos cuerpos y se muestra que existe cierta relación entre las velocidades relativas de los dos cuerpos en colisión antes y después del impacto. Esta relación, junto con el hecho de que se conserva la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos, puede utilizarse para resolver varios problemas de interés práctico.

Por último, en la sección 13.15 se aborda la selección de los tres métodos fundamentales que se presentan en los capítulos 12 y 13 y el más adecuado para la solución de un problema dado. También se verá cómo es posible combinar el principio de conservación de la energía y el método del impulso y la cantidad de movimiento para resolver problemas que implican únicamente fuerzas conservativas, con excepción de la fase de corto impacto durante la cual también deben tomarse en cuenta las fuerzas impulsivas.

13.2. TRABAJO DE UNA FUERZA

Se definen primero los términos *desplazamiento* y *trabajo* en la forma que se utilizan en mecánica.[†] Considere una partícula que se mueve de

[†]La definición de trabajo se presentó en la sección 10.2 y las propiedades básicas del trabajo de una fuerza se detallaron en las secciones 10.2 y 10.6. Por conveniencia, se repiten aquí las partes de este material que se relacionan con la cinética de partículas.

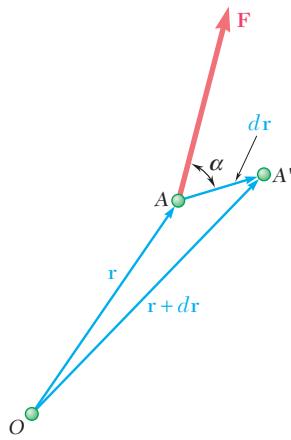


Figura 13.1

un punto A a un punto cercano A' (figura 13.1). Si \mathbf{r} denota el vector de posición correspondiente al punto A , el vector que une a A y a A' puede denotarse mediante la diferencial $d\mathbf{r}$; el vector $d\mathbf{r}$ se denomina el *desplazamiento* de la partícula. Suponga ahora que una fuerza \mathbf{F} actúa sobre la partícula. El *trabajo de la fuerza \mathbf{F} correspondiente al desplazamiento $d\mathbf{r}$* se define como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.1)$$

obtenida al formar el producto escalar de la fuerza \mathbf{F} y el desplazamiento $d\mathbf{r}$. Denotando por medio de F y ds , respectivamente, las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento, y mediante α el ángulo formado por \mathbf{F} y $d\mathbf{r}$, y recordando la definición de producto escalar de dos vectores (sección 3.9), se escribe

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (13.1')$$

Utilizando la fórmula (3.30), es posible expresar también el trabajo dU en términos de las componentes rectangulares de la fuerza y del desplazamiento:

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (13.1'')$$

Al ser una *cantidad escalar*, el trabajo tiene magnitud y signo, pero no dirección. También se vio que el trabajo debe expresarse en unidades que se obtienen al multiplicar unidades de longitud por unidades de fuerza. Así, si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos, el trabajo debe expresarse en ft · lb o in. · lb. Si se emplean unidades del SI, el trabajo se expresará en N · m. La unidad de trabajo N · m se denomina como *joule* (J).[†] Al recordar los factores de conversión indicados en la sección 12.4, se escribe

$$1 \text{ ft} \cdot \text{lb} = (1 \text{ ft})(1 \text{ lb}) = (0.3048 \text{ m})(4.448 \text{ N}) = 1.356 \text{ J}$$

Se deduce de (13.1') que el trabajo dU es positivo si el ángulo α es agudo y negativo si α es obtuso. Son tres los casos de interés particular. Si

[†]El joule (J) es la unidad de *energía* del SI, ya sea en forma mecánica (trabajo, energía potencial, energía cinética) o en forma química, eléctrica o térmica. Se debe señalar que aun cuando N · m = J, el momento de una fuerza debe expresarse en N · m y no en joules, ya que el momento de una fuerza no es una forma de energía.

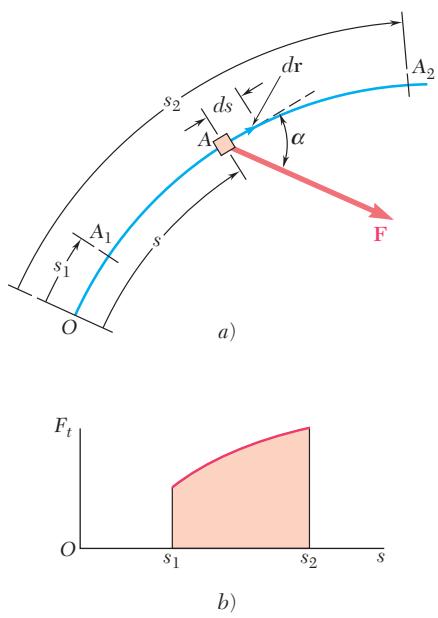


Figura 13.2

la fuerza \mathbf{F} tiene la misma dirección que $d\mathbf{r}$, y el trabajo dU se reduce a $F ds$. Si \mathbf{F} tiene dirección opuesta a la de $d\mathbf{r}$, el trabajo es $dU = -F ds$. Si \mathbf{F} es perpendicular a $d\mathbf{r}$, el trabajo dU es cero.

El trabajo de \mathbf{F} durante un desplazamiento *finito* de la partícula de A_1 a A_2 (figura 13.2a) se obtiene al integrar la ecuación (13.1) a lo largo de la trayectoria que describe la partícula. Este trabajo, denotado por $U_{1 \rightarrow 2}$, es

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.2)$$

Al utilizar la expresión alternativa (13.1') para el trabajo elemental dU y observar que $F \cos \alpha$ representa la componente tangencial F_t de la fuerza, es posible expresar el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ como

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds \quad (13.2')$$

donde la variable de integración s mide la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria. El trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ se representa por medio del área bajo la curva que se obtiene al graficar $F_t = F \cos \alpha$ contra s (figura 13.2b).

Cuando la fuerza \mathbf{F} se define por medio de sus componentes rectangulares, la expresión (13.1'') puede utilizarse para el trabajo elemental. En ese caso se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (13.2'')$$

donde la integración se va a realizar a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula.

Trabajo de una fuerza constante en movimiento rectilíneo.

Cuando una partícula que se mueve en una línea recta se somete a una fuerza \mathbf{F} de magnitud constante y dirección constante (figura 13.3), la fórmula (13.2'') produce

$$U_{1 \rightarrow 2} = (F \cos \alpha) \Delta x \quad (13.3)$$

donde α = ángulo que forma la fuerza con la dirección de movimiento
 Δx = desplazamiento de A_1 a A_2

Trabajo realizado por la fuerza de la gravedad.

El trabajo del peso \mathbf{W} de un cuerpo, esto es, de la fuerza que la gravedad ejerce sobre ese cuerpo, se obtiene al sustituir las componentes de \mathbf{W} en (13.1'') y (13.2''). Al elegir el eje y hacia arriba (figura 13.4), se tiene $F_x = 0$, $F_y = -W$ y $F_z = 0$, y se escribe

$$dU = -W dy$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{y_1}^{y_2} W dy = Wy_1 - Wy_2 \quad (13.4)$$

o

$$U_{1 \rightarrow 2} = -W(y_2 - y_1) = -W \Delta y \quad (13.4')$$

donde Δy es el desplazamiento vertical de A_1 a A_2 . En consecuencia, el trabajo del peso \mathbf{W} es igual al producto de W y el desplazamiento vertical

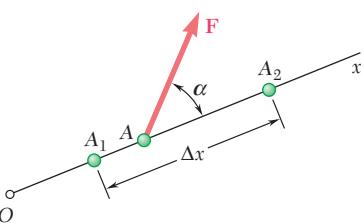


Figura 13.3

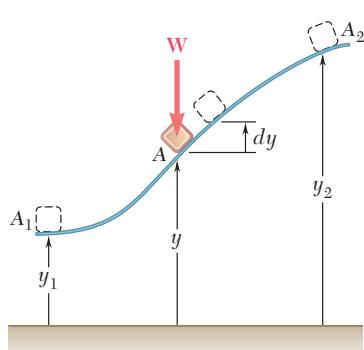


Figura 13.4

del centro de gravedad del cuerpo. El trabajo es positivo cuando $\Delta y < 0$, esto es, cuando el cuerpo se mueve hacia abajo.

Trabajo realizado por la fuerza que ejerce un resorte o muelle. Considere un cuerpo A unido a un punto fijo B por medio de un resorte; se supone que este último no está deformado cuando el cuerpo se encuentra en A_0 (figura 13.5a). La evidencia experimental muestra que la magnitud de la fuerza \mathbf{F} ejercida por el resorte sobre un cuerpo A es proporcional a la deformación x del resorte medida a partir de la posición A_0 . Se tiene

$$F = kx \quad (13.5)$$

donde k es la *constante del resorte*, expresada en N/m o kN/m si se usan unidades del SI y en lb/ft o lb/in. si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos.[†]

El trabajo de la fuerza \mathbf{F} ejercido por el resorte durante un desplazamiento finito del cuerpo de $A_1(x = x_1)$ a $A_2(x = x_2)$ se obtiene al escribir

$$dU = -F dx = -kx dx$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (13.6)$$

Debe tenerse cuidado de expresar k y x en unidades consistentes. Por ejemplo, si se utilizan unidades de uso común en Estados Unidos, k debe expresarse en lb/ft y x en pies, o k en lb/in. y x en pulgadas; en el primer caso, el trabajo se obtiene en ft · lb, en el segundo, en in. · lb. Adviéntase que el trabajo de la fuerza \mathbf{F} ejercida por el resorte sobre el cuerpo es *positivo* cuando $x_2 < x_1$, esto es, cuando el resorte está *regresando a la posición no deformada*.

Puesto que la ecuación (13.5) es la de una línea recta de pendiente k que pasa por el origen, el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ de \mathbf{F} durante el desplazamiento de A_1 a A_2 puede obtenerse al evaluar el área del trapezoide que se muestra en la figura 13.5b. Esto se hace al calcular F_1 y F_2 y multiplicar la base Δx del trapezoide por medio de su altura media $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Puesto que el trabajo de la fuerza \mathbf{F} ejercido por el resorte es positivo para un valor negativo de Δx , se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\frac{1}{2}(F_1 + F_2) \Delta x \quad (13.6')$$

La fórmula (13.6') suele ser más conveniente que la (13.6), pues son menores las posibilidades de confundir las unidades que se utilizan.

Trabajo realizado por una fuerza gravitacional. En la sección 12.10 se vio que dos partículas de masa M y m a una distancia r una de la otra se atraen entre sí con fuerzas iguales y opuestas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$, dirigidas a lo largo de la línea que une a las partículas y de magnitud

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

Suponga que la partícula M ocupa una posición fija O mientras la partícula m se mueve a lo largo de la trayectoria indicada en la figura 13.6. El tra-

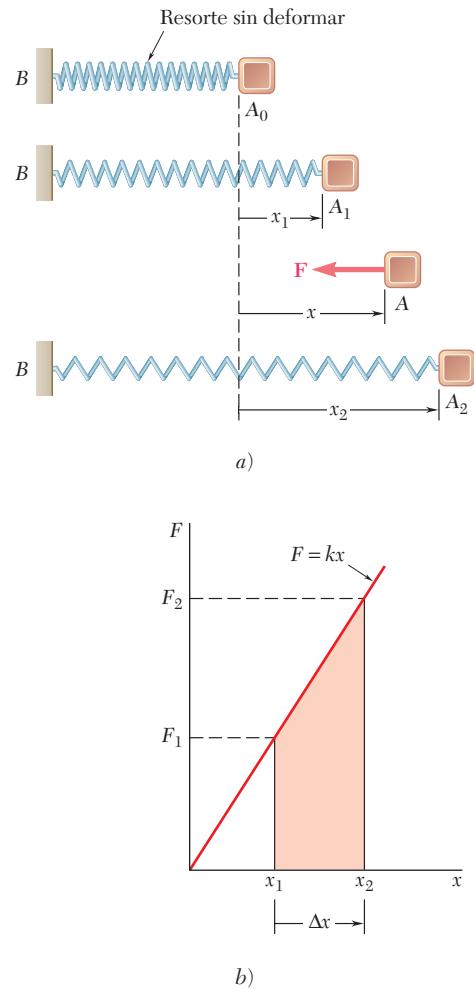


Figura 13.5

[†] La relación $F = kx$ es correcta únicamente bajo condiciones estáticas. Bajo condiciones dinámicas, la fórmula (13.5) debe modificarse para tomar en cuenta la inercia del resorte. Sin embargo, el error que se introduce al utilizar la relación $F = kx$ en la solución de problemas de cinética es mínimo si la masa del resorte es pequeña comparada con las demás masas en movimiento.

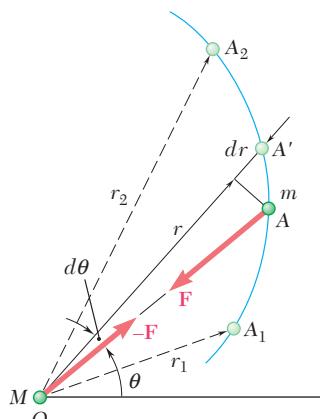


Figura 13.6

bajo de la fuerza \mathbf{F} ejercida sobre la partícula m durante un desplazamiento infinitesimal de la partícula de A a A' puede obtenerse al multiplicar la magnitud F de la fuerza por la componente radial dr del desplazamiento. Puesto que \mathbf{F} está dirigida hacia O , el trabajo es negativo y se escribe

$$dU = -F dr = -G \frac{Mm}{r^2} dr$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitacional \mathbf{F} durante un desplazamiento finito de $A_1(r = r_1)$ a $A_2(r = r_2)$ es por tanto

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \quad (13.7)$$

donde M es la masa de la Tierra. Es posible utilizar esta fórmula para determinar el trabajo de la fuerza ejercida por la Tierra sobre un cuerpo de masa m a una distancia r del centro de la misma, cuando r es más grande que el radio R terrestre. Al recordar la primera de las relaciones (12.29), se puede sustituir el producto GMm en la ecuación (13.7) por WR^2 , donde R es el radio de la Tierra ($R = 6.37 \times 10^6$ m o 3 960 mi) y W es el peso del cuerpo en la superficie terrestre.

Varias fuerzas que se encuentran con frecuencia en problemas de cinética *no realizan trabajo*. Se trata de fuerzas aplicadas en puntos fijos ($ds = 0$) o actuando en una dirección perpendicular al desplazamiento ($\cos \alpha = 0$). Entre las fuerzas que no realizan trabajo se encuentran las siguientes: la reacción en un pasador sin fricción cuando el cuerpo que se soporta gira alrededor del pasador, la reacción en una superficie sin fricción cuando el cuerpo en contacto se mueve a lo largo de la superficie, la reacción en un rodillo que se desplaza a lo largo de su pista y el peso de un cuerpo cuando el centro de gravedad se mueve en forma horizontal.

13.3. ENERGÍA CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA. PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

Considere una partícula de masa m que se somete a una fuerza \mathbf{F} y que se mueve a lo largo de una trayectoria que es rectilínea o curva (figura 13.7). Al expresar la segunda ley de Newton en términos de las componentes tangenciales de la fuerza y de la aceleración (véase la sección 12.5), se escribe

$$F_t = ma_t \quad \text{o} \quad F_t = m \frac{dv}{dt}$$

donde v es la velocidad de la partícula. Al recordar de la sección 11.9 que $v = ds/dt$, se obtiene

$$\begin{aligned} F_t &= m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = mv \frac{dv}{ds} \\ F_t ds &= mv dv \end{aligned}$$

Al integrar desde A_1 , donde $s = s_1$ y $v = v_1$, hasta A_2 , donde $s = s_2$ y $v = v_2$, se escribe

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t ds = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (13.8)$$

El miembro de la izquierda de la ecuación (13.8) representa el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ de la fuerza \mathbf{F} ejercida sobre la partícula durante el desplazamiento de A_1 a A_2 ; como se indica en la sección 13.2, el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ es una

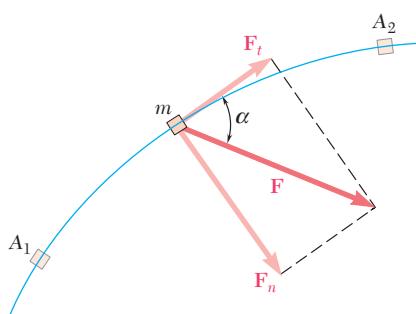


Figura 13.7

cantidad escalar. La expresión $\frac{1}{2}mv^2$ es también una cantidad escalar; se define como la energía cinética de la partícula y se denota mediante T . Se escribe

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13.9)$$

Al sustituir en (13.8), se tiene

$$U_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 \quad (13.10)$$

la cual expresa que, cuando la partícula se mueve de A_1 a A_2 bajo la acción de una fuerza \mathbf{F} , el trabajo de la fuerza \mathbf{F} es igual al cambio de la energía cinética de la partícula. Lo anterior se conoce como el principio del trabajo y la energía. Al rearreglar los términos en (13.10), se escribe

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (13.11)$$

Así, la energía cinética de una partícula en A_2 puede obtenerse agregando a su energía cinética en A_1 el trabajo realizado durante el desplazamiento de A_1 a A_2 que lleva a cabo la fuerza \mathbf{F} ejercida sobre la partícula. Al igual que la segunda ley de Newton de la cual se deriva, el principio del trabajo y la energía se aplica sólo con respecto a un marco de referencia newtoniano (sección 12.2). La rapidez v que se emplea para determinar la energía cinética T debe, por tanto, medirse con respecto a un marco de referencia newtoniano.

Puesto que tanto el trabajo como la energía cinética son cantidades escalares, su suma puede calcularse como una suma algebraica ordinaria, considerándose el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ positivo o negativo de acuerdo con la dirección de \mathbf{F} . Cuando varias fuerzas actúan sobre la partícula, la expresión $U_{1 \rightarrow 2}$ representa el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre la partícula; ésta se obtiene sumando algebraicamente el trabajo de las diversas fuerzas.

Como se señaló antes, la energía cinética de una partícula es una cantidad escalar. Además, por la definición $T = \frac{1}{2}mv^2$, la energía cinética siempre es positiva, independientemente de la dirección de movimiento de la partícula. Al considerar el caso particular cuando $v_1 = 0$ y $v_2 = v$, y al sustituir $T_1 = 0$ y $T_2 = T$ en (13.10) se observa que el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a T . En consecuencia, la energía cinética de una partícula que se mueve con una rapidez v representa el trabajo que debe efectuarse para llevar la partícula desde el reposo hasta la rapidez v . Si se sustituye $T_1 = T$ y $T_2 = 0$ en (13.10), también se advierte que cuando una partícula que se mueve con una rapidez v se lleva al reposo, el trabajo ejecutado por las fuerzas que actúan sobre la misma es $-T$. Suponiendo que no se disipa energía en forma de calor, la conclusión es que el trabajo realizado por las fuerzas ejercidas por la partícula sobre los cuerpos que provocan que quede en reposo es igual a T . Por consiguiente, la energía cinética de una partícula representa también la capacidad para realizar trabajo asociado con la velocidad de la partícula.

La energía cinética se mide en las mismas unidades que el trabajo, esto es, en joules si se usan unidades del SI y en $\text{ft} \cdot \text{lb}$ si se emplean unidades de uso común en Estados Unidos. Se confirma que, en unidades del SI,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \text{kg}(\text{m/s})^2 = (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2)\text{m} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$$

en tanto que, en unidades de uso común en Estados Unidos,

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = (\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\text{ft/s})^2 = \text{ft} \cdot \text{lb}$$

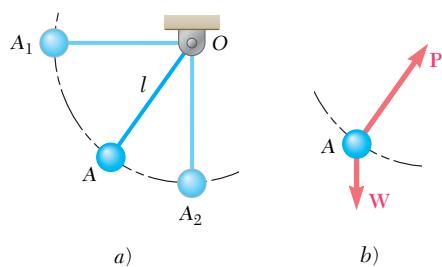


Figura 13.8

13.4. APLICACIONES DEL PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

La aplicación del principio del trabajo y la energía simplifica en forma considerable la solución de muchos problemas que implican fuerzas, desplazamientos y velocidades. Considere, por ejemplo, el péndulo OA compuesto por una plomada A de peso W unida a una cuerda de longitud l (figura 13.8a). El péndulo se suelta sin velocidad inicial desde una posición horizontal OA_1 y se deja que oscile en un plano vertical. Se desea determinar la rapidez de la plomada cuando pasa por A_2 , directamente abajo de O .

Primero se determina el trabajo realizado durante el desplazamiento desde A_1 hasta A_2 por las fuerzas que actúan sobre la plomada. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de esta última, indicando todas las fuerzas *reales* que actúan sobre ella, esto es, el peso \mathbf{W} y la fuerza \mathbf{P} ejercida por la cuerda (figura 13.8b). (Un vector de inercia no es una fuerza real y *no debe* incluirse en el diagrama de cuerpo libre.) Adviértase que la fuerza \mathbf{P} no realiza trabajo, ya que es normal a la trayectoria; la única fuerza que efectúa trabajo es consecuentemente el peso \mathbf{W} . El trabajo de \mathbf{W} se obtiene al multiplicar su magnitud W por el desplazamiento vertical l (sección 13.2); en vista de que el desplazamiento es hacia abajo, el trabajo es positivo. Por lo tanto, se escribe $U_{1 \rightarrow 2} = Wl$.

Si se considera ahora la energía cinética de la plomada, se encuentra que $T_1 = 0$ en A_1 y que $T_2 = \frac{1}{2}(W/g)v_2^2$ en A_2 . Después de esto es posible aplicar el principio del trabajo y la energía; al recordar la fórmula (13.11), se escribe

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad 0 + Wl = \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_2^2$$

Al resolver para v_2 , se encuentra $v_2 = \sqrt{2gl}$. Adviértase que la rapidez que se obtiene es la de un cuerpo que cae libremente desde una altura l .

El ejemplo considerado ilustra las siguientes ventajas del método del trabajo y la energía:

1. Con el fin de encontrar la rapidez en A_2 , no hay necesidad de determinar la aceleración en una posición intermedia A y de integrar la expresión que se obtuvo de A_1 a A_2 .
2. Todas las cantidades implicadas son escalares y pueden sumarse de manera directa, sin utilizar las componentes x y y .
3. Las fuerzas que no realizan trabajo se eliminan de la solución del problema.

Lo que es una ventaja en un problema, sin embargo, quizás sea una desventaja en otro. Es evidente, por ejemplo, que no es posible utilizar el método del trabajo y la energía para determinar de manera directa una aceleración. Igualmente es evidente que al determinar una fuerza que es normal a la trayectoria de la partícula, una fuerza que no realiza trabajo, el método del trabajo y la energía debe complementarse mediante la aplicación directa de la segunda ley de Newton. Supóngase, por ejemplo, que interesa determinar la tensión en la cuerda del péndulo de la figura 13.8a cuando la plomada pasa por A_2 . Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la plomada en esa posición (figura 13.9) y se expresa la segunda ley de Newton en términos de las componentes tangencial y normal. Las ecuaciones $\sum F_t = ma_t$ y $\sum F_n = ma_n$ producen, respectivamente, $a_t = 0$ y

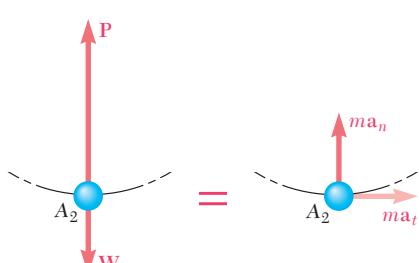


Figura 13.9

$$P - W = ma_n = \frac{W}{g} \frac{v_2^2}{l}$$

Sin embargo, la rapidez en A_2 se determinó antes por el método del trabajo y la energía. Al sustituir $v_2^2 = 2gl$ y resolver para P , se escribe

$$P = W + \frac{W}{g} \frac{2gl}{l} = 3W$$

Cuando un problema implica dos o más partículas, es factible aplicar el principio del trabajo y la energía a cada partícula por separado. Al sumar las energías cinéticas de las diversas partículas y considerar el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre ellas, es posible escribir una sola ecuación del trabajo y la energía para todas las partículas implicadas. Se tiene

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (13.11)$$

donde T representa la suma aritmética de las energías cinéticas de las partículas que se consideran (todos los términos son positivos) y $U_{1 \rightarrow 2}$ es el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las partículas, *incluyendo las fuerzas de acción y reacción que ejercen las partículas entre sí*. Sin embargo, en problemas que implican cuerpos conectados mediante *cuerdas o eslabones inextensibles*, se cancela el trabajo de las fuerzas ejercidas por una cuerda o eslabón determinado sobre los dos cuerpos que conecta, ya que los puntos de aplicación de estas fuerzas se mueven a través de distancias iguales (véase el problema resuelto 13.2).[†]

Puesto que las fuerzas de fricción tienen una dirección opuesta a la del desplazamiento del cuerpo sobre el cual actúan, *el trabajo de las fuerzas de fricción siempre es negativo*. Este trabajo representa la energía disipada en calor y siempre da por resultado una disminución de la energía cinética del cuerpo que se considera (véase el problema resuelto 13.3).

13.5. POTENCIA Y EFICIENCIA

La *potencia* se define como la tasa en el tiempo a la cual se efectúa el trabajo. En la selección de un motor o máquina, la potencia es un criterio mucho más importante que la cantidad real de trabajo que se lleva a cabo. Es posible utilizar un motor pequeño o una gran planta eléctrica para realizar una cantidad determinada de trabajo; sin embargo, el motor pequeño quizás requiera un mes para efectuar el trabajo que la planta eléctrica realizaría en unos cuantos minutos. Si ΔU es el trabajo realizado durante el intervalo Δt , entonces la potencia promedio durante ese intervalo es

$$\text{Potencia promedio} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

al dejar que Δt tienda a cero, se obtiene en el límite

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} \quad (13.12)$$

[†]La aplicación del método del trabajo y la energía a un sistema de partículas se estudia en detalle en el capítulo 14.

Al sustituir el producto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ por dU , se puede escribir también

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt}$$

y, al recordar que $d\mathbf{r}/dt$ representa la velocidad \mathbf{v} del punto de aplicación de \mathbf{F} ,

$$\text{Potencia} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (13.13)$$

Puesto que la potencia se definió como la tasa en el tiempo a la cual se realiza el trabajo, ésta debe expresarse en unidades que se obtienen al dividir unidades de trabajo entre la unidad de tiempo. De tal modo, si se usan unidades del SI, la potencia debe expresarse en J/s; esta unidad se conoce como *watt* (W). Se tiene

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

Si se emplean unidades de uso común en Estados Unidos, la potencia debe expresarse en ft · lb/s o en *caballos de potencia* (hp), con esta última unidad definida como

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

Al recordar de la sección 13.2 que $1 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 1.356 \text{ J}$, se verifica que

$$1 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 1.356 \text{ J/s} = 1.356 \text{ W}$$

$$1 \text{ hp} = 550(1.356 \text{ W}) = 746 \text{ W} = 0.746 \text{ kW}$$

La eficiencia mecánica de una máquina se definió en la sección 10.5 como la relación entre el trabajo de salida y el trabajo de entrada:

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \quad (13.14)$$

Esta definición se basa en la suposición de que el trabajo se realiza a una tasa constante. La relación entre el trabajo de salida y el de entrada es, por tanto, igual a la relación de las tasas a las cuales se realiza el trabajo de salida y de entrada, y se tiene

$$\eta = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \quad (13.15)$$

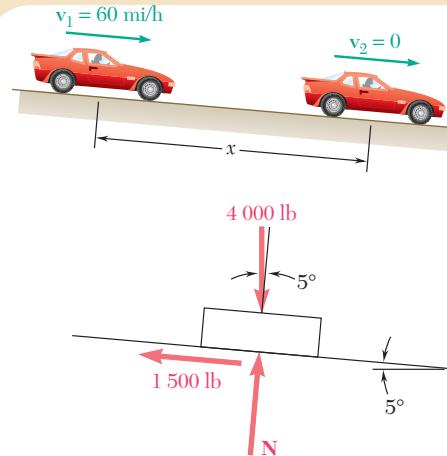
Debido a las pérdidas de energía resultado de la fricción, el trabajo de salida siempre es más pequeño que el trabajo de entrada y, en consecuencia, la salida de potencia es siempre menor que la entrada de potencia. La eficiencia mecánica de una máquina es entonces siempre menor que 1.

Cuando se usa una máquina para transformar la energía mecánica en energía eléctrica, o la energía térmica en energía mecánica, su *eficiencia o rendimiento total* puede obtenerse de la fórmula (13.15). La eficiencia total de una máquina es siempre menor que 1; proporciona una medida del total de las diversas pérdidas de energía implicadas (pérdidas de energía eléctrica o térmica, así como pérdidas por fricción). Advierta que es necesario expresar la salida de potencia y la entrada de potencia en las mismas unidades antes de utilizar la fórmula (13.15).



PROBLEMA RESUELTO 13.1

Un automóvil que pesa 4 000 lb desciende por una pendiente de 5° de inclinación a una rapidez de 60 mi/h cuando se aplican los frenos, lo que provoca una fuerza de frenado total constante (aplicada por el camino sobre las llantas) de 1 500 lb. Determine la distancia que recorre el automóvil antes de detenerse.



SOLUCIÓN

Energía cinética

$$\text{Posición 1: } v_1 = \left(60 \frac{\text{mi}}{\text{h}}\right) \left(\frac{5280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) = 88 \text{ ft/s}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(4000/32.2)(88)^2 = 481000 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

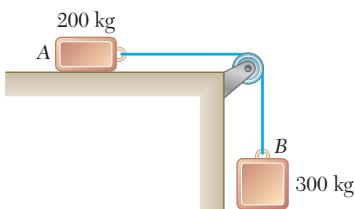
$$\text{Posición 2: } v_2 = 0 \quad T_2 = 0$$

$$\text{Trabajo} \quad U_{1 \rightarrow 2} = -1500x + (4000 \sin 5^\circ)x = -1151x$$

Principio del trabajo y la energía

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \\ 481000 - 1151x = 0$$

$$x = 418 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 13.2

Dos bloques están unidos por un cable inextensible en la forma que se muestra. Si el sistema se suelta desde el reposo, determine la velocidad del bloque A después de que éste se ha movido 2 m. Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y el plano es $\mu_k = 0.25$ y que la polea no tiene peso ni fricción.

SOLUCIÓN

Trabajo y energía del bloque A. Al detonar la fuerza de fricción F_A y la fuerza ejercida por el cable mediante F_C , se escribe

$$m_A = 200 \text{ kg} \quad W_A = (200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 1962 \text{ N}$$

$$F_A = \mu_k N_A = \mu_k W_A = 0.25(1962 \text{ N}) = 490 \text{ N}$$

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2: \quad 0 + F_C(2 \text{ m}) - F_A(2 \text{ m}) = \frac{1}{2}m_A v^2 \\ F_C(2 \text{ m}) - (490 \text{ N})(2 \text{ m}) = \frac{1}{2}(200 \text{ kg})v^2 \quad (1)$$

Trabajo y energía del bloque B. Se escribe

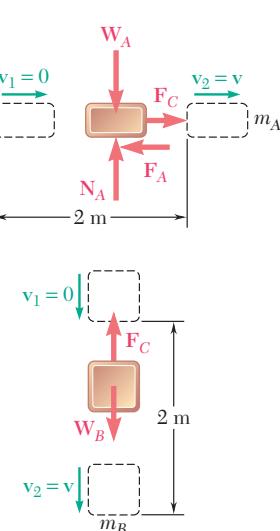
$$m_B = 300 \text{ kg} \quad W_B = (300 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 2940 \text{ N}$$

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2: \quad 0 + W_B(2 \text{ m}) - F_C(2 \text{ m}) = \frac{1}{2}m_B v^2 \\ (2940 \text{ N})(2 \text{ m}) - F_C(2 \text{ m}) = \frac{1}{2}(300 \text{ kg})v^2 \quad (2)$$

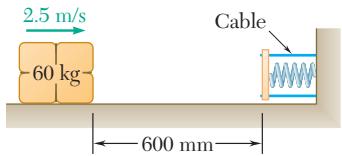
Al sumar los miembros izquierdo y derecho de (1) y (2), se observa que se cancela el trabajo de las fuerzas ejercidas por el cable sobre A y B:

$$(2940 \text{ N})(2 \text{ m}) - (490 \text{ N})(2 \text{ m}) = \frac{1}{2}(200 \text{ kg} + 300 \text{ kg})v^2$$

$$4900 \text{ J} = \frac{1}{2}(500 \text{ kg})v^2 \quad v = 4.43 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

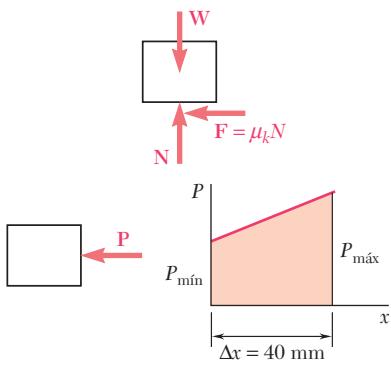
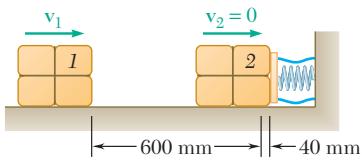


PROBLEMA RESUELTO 13.3



Se utiliza un resorte para detener un paquete de 60 kg que se desliza sobre una superficie horizontal. El resorte tiene una constante $k = 20 \text{ kN/m}$ y se sostiene mediante cables de manera que se encuentre inicialmente comprimido 120 mm. Sabiendo que el paquete tiene una velocidad de 2.5 m/s en la posición que se indica y que la máxima compresión adicional del resorte es de 40 mm, determine *a)* el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la superficie, *b)* la velocidad del paquete cuando éste pasa otra vez por la posición mostrada.

SOLUCIÓN



a) Movimiento desde la posición 1 hasta la posición 2

Energía cinética. **Posición 1:** $v_1 = 2.5 \text{ m/s}$

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(60 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s})^2 = 187.5 \text{ N} \cdot \text{m} = 187.5 \text{ J}$$

Posición 2: (deformación máxima del resorte): $v_2 = 0 \quad T_2 = 0$
Trabajo

Fuerza de fricción \mathbf{F} . Se tiene

$$F = \mu_k N = \mu_k W = \mu_k mg = \mu_k(60 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = (588.6 \text{ N})\mu_k$$

El trabajo de \mathbf{F} es negativo e igual a

$$(U_{1 \rightarrow 2})_f = -Fx = -(588.6 \text{ N})\mu_k(0.600 \text{ m} + 0.040 \text{ m}) = -(377 \text{ J})\mu_k$$

Fuerza del resorte \mathbf{P} . La fuerza variable \mathbf{P} ejercida por el resorte realiza una cantidad de trabajo negativa igual al área bajo la curva fuerza-deformación de la fuerza del resorte. Se tiene

$$P_{\min} = kx_0 = (20 \text{ kN/m})(120 \text{ mm}) = (20000 \text{ N/m})(0.120 \text{ m}) = 2400 \text{ N}$$

$$P_{\max} = P_{\min} + k \Delta x = 2400 \text{ N} + (20 \text{ kN/m})(40 \text{ mm}) = 3200 \text{ N}$$

$$(U_{1 \rightarrow 2})_e = -\frac{1}{2}(P_{\min} + P_{\max}) \Delta x = -\frac{1}{2}(2400 \text{ N} + 3200 \text{ N})(0.040 \text{ m}) = -112.0 \text{ J}$$

El trabajo total es entonces

$$U_{1 \rightarrow 2} = (U_{1 \rightarrow 2})_f + (U_{1 \rightarrow 2})_e = -(377 \text{ J})\mu_k - 112.0 \text{ J}$$

Principio del trabajo y la energía

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2: \quad 187.5 \text{ J} - (377 \text{ J})\mu_k - 112.0 \text{ J} = 0 \quad \mu_k = 0.20 \quad \blacktriangleleft$$

b) Movimiento desde la posición 2 hasta la posición 3

Energía cinética. **Posición 2:** $v_2 = 0 \quad T_2 = 0$

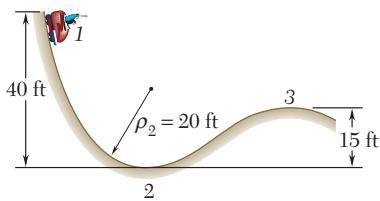
$$\mathbf{Posición 3:} \quad T_3 = \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}(60 \text{ kg})v_3^2$$

Trabajo. Puesto que las distancias implicadas son las mismas, los valores numéricos del trabajo de la fuerza de fricción \mathbf{F} y de la fuerza del resorte \mathbf{P} son los mismos que antes. Sin embargo, mientras que el trabajo \mathbf{F} sigue siendo negativo, el trabajo de \mathbf{P} es en este caso positivo.

$$U_{2 \rightarrow 3} = -(377 \text{ J})\mu_k + 112.0 \text{ J} = -75.5 \text{ J} + 112.0 \text{ J} = +36.5 \text{ J}$$

Principio del trabajo y la energía

$$T_2 + U_{2 \rightarrow 3} = T_3: \quad 0 + 36.5 \text{ J} = \frac{1}{2}(60 \text{ kg})v_3^2 \quad v_3 = 1.103 \text{ m/s} \quad \mathbf{v}_3 = 1.103 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 13.4

Un vehículo de 2 000 lb parte del reposo en el punto 1 y desciende sin fricción por la pista que se indica. a) Determine la fuerza que ejerce la pista sobre el vehículo en el punto 2, donde el radio de curvatura de la pista es de 20 ft. b) Determine el valor mínimo seguro del radio de curvatura en el punto 3.

SOLUCIÓN

a) Fuerza ejercida por pista en el punto 2. Se utiliza el principio del trabajo y la energía para determinar la velocidad del vehículo cuando éste pasa por el punto 2.

$$\text{Energía cinética. } T_1 = 0 \quad T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_2^2$$

Trabajo. La única fuerza que efectúa trabajo es el peso **W**. Puesto que el desplazamiento vertical desde el punto 1 hasta el punto 2 es de 40 ft hacia abajo, el trabajo del peso es

$$U_{1 \rightarrow 2} = +W(40 \text{ ft})$$

Principio del trabajo y la energía

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad 0 + W(40 \text{ ft}) = \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_2^2$$

$$v_2^2 = 80g = 80(32.2) \quad v_2 = 50.8 \text{ ft/s}$$

Segunda ley de Newton en el punto 2. La aceleración **a_n** del vehículo en el punto 2 tiene una magnitud $a_n = v_2^2/\rho$ y está dirigida hacia arriba. Puesto que las fuerzas externas que actúan sobre el vehículo son **W** y **N**, se escribe

$$+\uparrow \sum F_n = ma_n: \quad -W + N = ma_n$$

$$= \frac{W}{g} \frac{v_2^2}{\rho}$$

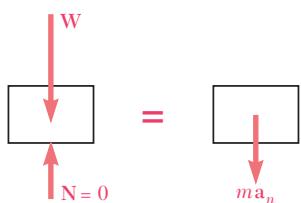
$$= \frac{W}{g} \frac{80g}{20}$$

$$N = 5W \quad N = 10000 \text{ lb} \uparrow \blacktriangleleft$$

b) Valor mínimo de ρ en el punto 3. Principio del trabajo y de la energía. Al aplicar el principio del trabajo y la energía entre el punto 1 y el punto 3, se obtiene

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 3} = T_3 \quad 0 + W(25 \text{ ft}) = \frac{1}{2} \frac{W}{g} v_3^2$$

$$v_3^2 = 50g = 50(32.2) \quad v_3 = 40.1 \text{ ft/s}$$

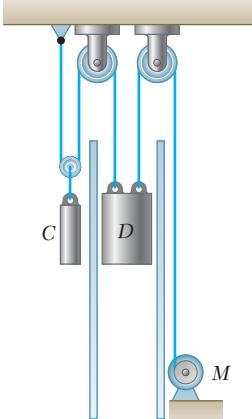


Segunda ley de Newton en el punto 3. El valor mínimo seguro de ρ ocurre cuando $N = 0$. En este caso, la aceleración **a_n** de magnitud $a_n = v_3^2/\rho$, está dirigida hacia abajo, y se escribe

$$+\downarrow \sum F_n = ma_n: \quad W = \frac{W}{g} \frac{v_3^2}{\rho}$$

$$= \frac{W}{g} \frac{50g}{\rho}$$

$$\rho = 50 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft$$

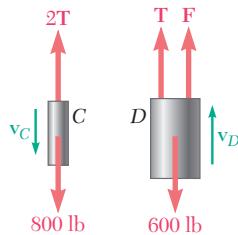


PROBLEMA RESUELTO 13.5

El montacargas D y su carga tienen un peso combinado de 600 lb, en tanto que el contrapeso C pesa 800 lb. Determine la potencia entregada por el motor eléctrico M cuando el montacargas *a)* se mueve hacia arriba a una rapidez constante de 8 ft/s, *b)* tiene una velocidad instantánea de 8 ft/s y una aceleración de 2.5 ft/s², ambas dirigidas hacia arriba.

SOLUCIÓN

Puesto que la fuerza \mathbf{F} ejercida por el cable del motor tiene la misma dirección que la velocidad \mathbf{v}_D del montacargas, la potencia es igual a Fv_D , donde $v_D = 8 \text{ ft/s}$. Para obtener la potencia, se debe determinar primero \mathbf{F} en cada una de las dos situaciones indicadas.



a) Movimiento uniforme. Se tiene que $\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D = 0$; ambos cuerpos se encuentran en equilibrio.

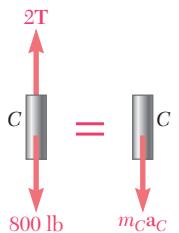
$$\text{Cuerpo libre } C: +\uparrow \sum F_y = 0: 2T - 800 \text{ lb} = 0 \quad T = 400 \text{ lb}$$

$$\text{Cuerpo libre } D: +\uparrow \sum F_y = 0: F + T - 600 \text{ lb} = 0$$

$$F = 600 \text{ lb} - T = 600 \text{ lb} - 400 \text{ lb} = 200 \text{ lb}$$

$$Fv_D = (200 \text{ lb})(8 \text{ ft/s}) = 1600 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

$$\text{Potencia} = (1600 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}) \frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}} = 2.91 \text{ hp} \quad \blacktriangleleft$$



b) Movimiento acelerado. Se tiene

$$\mathbf{a}_D = 2.5 \text{ ft/s}^2 \uparrow \quad \mathbf{a}_C = -\frac{1}{2}\mathbf{a}_D = 1.25 \text{ ft/s}^2 \downarrow$$

Las ecuaciones de movimiento son

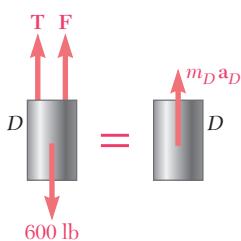
$$\text{Cuerpo libre } C: +\downarrow \sum F_y = m_C a_C: 800 - 2T = \frac{800}{32.2} (1.25) \quad T = 384.5 \text{ lb}$$

$$\text{Cuerpo libre } D: +\uparrow \sum F_y = m_D a_D: F + T - 600 = \frac{600}{32.2} (2.5)$$

$$F + 384.5 - 600 = 46.6 \quad F = 262.1 \text{ lb}$$

$$Fv_D = (262.1 \text{ lb})(8 \text{ ft/s}) = 2097 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

$$\text{Potencia} = (2097 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}) \frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}} = 3.81 \text{ hp} \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En el capítulo anterior se resolvieron problemas relacionados con el movimiento de una partícula utilizando la ecuación fundamental $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para determinar la aceleración \mathbf{a} . Al aplicar los principios de la cinemática se pudo determinar a partir de \mathbf{a} la velocidad y el desplazamiento de la partícula en cualquier tiempo. En esta lección se combinó $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y los principios de la cinemática para obtener un método de análisis adicional que se conoce como el *método del trabajo y la energía*. Éste elimina la necesidad de calcular la aceleración y permite relacionar las velocidades de la partícula en dos puntos a lo largo de su trayectoria de movimiento. Para resolver un problema mediante el método del trabajo y la energía se deben seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el trabajo de cada una de las fuerzas. El trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ de una fuerza dada \mathbf{F} durante un desplazamiento finito de la partícula desde A_1 hasta A_2 se define como

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{o} \quad U_{1 \rightarrow 2} = \int (F \cos \alpha) ds \quad (13.2, 13.2')$$

donde α es el ángulo entre \mathbf{F} y el desplazamiento $d\mathbf{r}$. El trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ es una cantidad escalar y se expresa en $\text{ft} \cdot \text{lb}$ o $\text{in} \cdot \text{lb}$ en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos y en $\text{N} \cdot \text{m}$ o joules (J) en el SI. Hay que observar que el trabajo efectuado es cero para la fuerza perpendicular al desplazamiento ($\alpha = 90^\circ$). El trabajo negativo se realiza para $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y en particular para una fuerza de fricción, la cual siempre se opone en dirección al desplazamiento ($\alpha = 180^\circ$).

El trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ puede evaluarse fácilmente en los siguientes casos:

a) Trabajo de la fuerza constante en movimiento rectilíneo

$$U_{1 \rightarrow 2} = (F \cos \alpha) \Delta x \quad (13.3)$$

donde α = ángulo que forma la fuerza con la dirección del movimiento

Δx = desplazamiento de A_1 a A_2 (figura 13.3)

b) Trabajo de la fuerza de gravedad

$$U_{1 \rightarrow 2} = -W \Delta y \quad (13.4')$$

donde Δy es el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo de peso W . Advierta que el trabajo es positivo cuando Δy es negativo, esto es, cuando el cuerpo desciende (figura 13.4).

c) Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte

$$U_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 \quad (13.6)$$

donde k es la constante de resorte y x_1 y x_2 son las elongaciones del resorte correspondientes a las posiciones A_1 y A_2 (figura 13.5).

(continúa)

d) Trabajo de una fuerza gravitacional

$$U_{1 \rightarrow 2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \quad (13.7)$$

para un desplazamiento del cuerpo $A_1(r = r_1)$ a $A_2(r = r_2)$ (figura 13.6).

2. Calcular la energía cinética en A_1 y A_2 . La energía cinética T es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13.9)$$

donde m es la masa de la partícula y v es la magnitud de su velocidad. Las unidades de la energía cinética son las mismas que las unidades del trabajo, esto es, $\text{ft} \cdot \text{lb}$ o $\text{in.} \cdot \text{lb}$ si se usan unidades de uso común en Estados Unidos y $\text{N} \cdot \text{m}$ o joules (J) si se usan unidades del SI.

3. Sustituir los valores para el trabajo realizado $U_{1 \rightarrow 2}$ y las energías cinéticas T_1 y T_2 en la ecuación

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (13.11)$$

Habrá una ecuación que puede resolver para una incógnita. Hay que observar que esta ecuación no proporciona directamente el tiempo de recorrido o la aceleración. Sin embargo, si se conoce el radio de curvatura ρ de la trayectoria de la partícula en el punto donde se ha obtenido la velocidad v , puede expresar la componente normal de la aceleración como $a_n = v^2/\rho$ y obtener la componente normal de la fuerza ejercida sobre la partícula al escribir $F_n = mv^2/\rho$.

4. La potencia se presentó en esta lección como la tasa en el tiempo a la cual se realiza el trabajo, $P = dU/dt$. La potencia se mide en $\text{ft} \cdot \text{lb/s}$ o *caballos de potencia* (hp) en el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos y J/s o *watts* (W) en el sistema de unidades del SI. Para calcular la potencia, puede usar la fórmula equivalente,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (13.13)$$

donde \mathbf{F} y \mathbf{v} denotan la fuerza y la velocidad, respectivamente, en un tiempo determinado [problema resuelto 13.5]. En algunos problemas [véase, por ejemplo, el problema 13.50] se pedirá la *potencia promedio*, la cual es posible obtener al dividir el trabajo total entre el intervalo durante el cual se efectúa el trabajo.

Problemas

13.1 Un pequeño automóvil híbrido de 1 300 kg viaja a 108 km/h. Determine *a)* la energía cinética del vehículo, *b)* la rapidez requerida para que un camión de 9 000 kg tenga la misma energía cinética.

13.2 Un satélite de 870 lb se pone en una órbita circular a 3 973 mi sobre la superficie de la Tierra. A esta altura la aceleración de la gravedad es igual a 8.03 ft/s^2 . Si la rapidez orbital del satélite es de 12 500 mi/h, determine su energía cinética.

13.3 Una piedra de 2 lb se deja caer desde una altura h y golpea el suelo con una velocidad de 50 ft/s. *a)* Encuentre la energía cinética de la piedra cuando golpea el suelo y la altura h desde la cual se dejó caer. *b)* Resuelva el inciso *a)* suponiendo que la misma piedra se deja caer sobre la Luna. (La aceleración de la gravedad sobre la Luna = 5.31 ft/s^2 .)

13.4 Una piedra de 4 kg se deja caer desde una altura h y golpea el suelo con una velocidad de 25 m/s. *a)* Encuentre la energía cinética de la piedra cuando golpea el suelo y la altura h desde la cual se dejó caer. *b)* Resuelva el inciso *a)* suponiendo que la misma piedra se deja caer sobre la Luna. (La aceleración de la gravedad sobre la Luna = 1.62 m/s^2 .)

13.5 Determine la máxima rapidez teórica que puede alcanzar un automóvil, en una distancia de 360 ft, si éste parte desde el reposo y se supone que no sufre deslizamiento. El coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento es de 0.75 y 60 por ciento del peso del automóvil está distribuido en las llantas delanteras, mientras que 40 por ciento lo está en los neumáticos traseros. Suponga que el automóvil tiene *a)* tracción delantera, *b)* tracción trasera.

13.6 Las marcas que se dejaron sobre una pista de carreras indican que las ruedas traseras (las de la tracción) de un automóvil patinaron en los primeros 60 ft de la pista de 1 320 ft. *a)* Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética es de 0.60, determine la rapidez del automóvil al final de los primeros 60 ft de la pista si éste parte desde el reposo y las llantas delanteras se levantan un poco del suelo. *b)* ¿Cuál es la máxima rapidez teórica del automóvil en la línea de meta si, después de patinar 60 ft, éste no vuelve a patinar en el resto de la pista? Suponga que mientras el automóvil avanza sin patinar, 60 por ciento de su peso está sobre las llantas traseras y que el coeficiente de fricción estática es de 0.85. No tome en cuenta la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento.

13.7 En una operación para mezclar minerales, un perol lleno de material está suspendido de una grúa móvil que se traslada a lo largo de un puente estacionario. El perol no debe oscilar horizontalmente más de 4 m cuando la grúa se detiene en forma súbita. Determine la máxima rapidez v permisible para la grúa.

13.8 En una operación para mezclar minerales, un perol lleno de material está suspendido de una grúa móvil que se traslada a lo largo de un puente estacionario. La grúa se mueve a una rapidez de 3 m/s cuando se detiene de súbito. Determine la máxima distancia horizontal a través de la cual oscilará el perol.



Figura P13.6

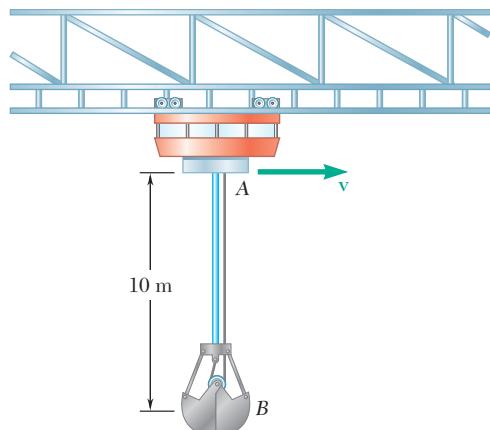


Figura P13.7 y P13.8

13.9 Un paquete se proyecta 10 m hacia arriba sobre un plano inclinado de 15° de modo que alcanza la parte superior del plano con una velocidad cero. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el plano inclinado es de 0.12, determine *a)* la velocidad inicial del paquete en A, *b)* la velocidad del paquete cuando éste regrese a su posición original.

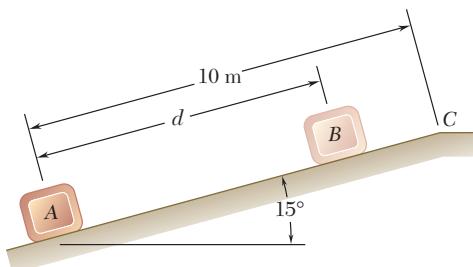


Figura P13.9 y P13.10

13.10 Un paquete se proyecta hacia arriba sobre un plano inclinado de 15° con una velocidad inicial de 8 m/s en A. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el plano inclinado es de 0.12, determine *a)* la distancia máxima d que se moverá el paquete sobre el plano inclinado, *b)* la velocidad del paquete cuando éste regrese a su posición original.

13.11 Se transportan cajas sobre una banda transportadora con una velocidad v_0 hasta una pendiente fija en A donde se deslizan y al final caen en B. Si se sabe que $\mu_k = 0.40$, determine la velocidad de la banda transportadora si las cajas dejan la pendiente en B con una velocidad de 8 ft/s.

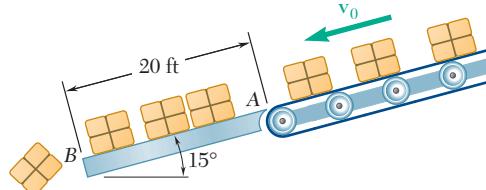


Figura P13.11 y P13.12

13.12 Se transportan cajas sobre una banda transportadora con una velocidad v_0 hasta una pendiente fija en A donde se deslizan y al final caen en B. Si se sabe que $\mu_k = 0.40$, determine la velocidad de la banda transportadora si la velocidad de las cajas en B es igual a cero.

13.13 Los paquetes que se muestran en la figura se lanzan hacia abajo sobre un plano inclinado en A con una velocidad de 1 m/s. Los paquetes se deslizan a lo largo de la superficie ABC hacia una banda transportadora que se mueve con una velocidad de 2 m/s. Si se sabe que $\mu_k = 0.25$ entre los paquetes y la superficie ABC, determine la distancia d si los paquetes deben llegar a C con una velocidad de 2 m/s.

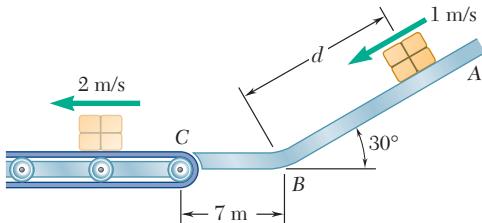


Figura P13.13 y P13.14

13.14 Los paquetes que se muestran en la figura se lanzan hacia abajo sobre un plano inclinado en A con una velocidad de 1 m/s. Los paquetes se deslizan a lo largo de la superficie ABC hacia una banda transportadora que se mueve con una velocidad de 2 m/s. Si se sabe que $d = 7.5$ m y $\mu_k = 0.25$ entre los paquetes y todas las superficies, determine *a)* la rapidez del paquete en C, *b)* la distancia que se deslizará un paquete sobre la banda transportadora antes de llegar al reposo con respecto a la banda.

13.15 El tren subterráneo que se muestra en la figura viaja a una rapidez de 30 mi/h cuando se aplican por completo los frenos en las ruedas de los carros *B* y *C*, lo que causa que éstos se deslicen sobre la vía, pero los frenos no se aplican en las ruedas del carro *A*. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética es de 0.35 entre las ruedas y la vía, determine *a*) la distancia requerida para que el tren se detenga, *b*) la fuerza en cada acoplamiento.

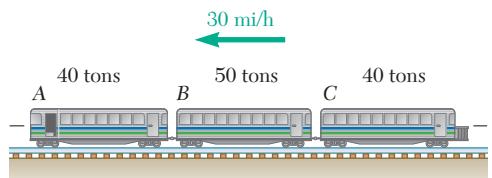


Figura P13.15

13.16 Retome el problema 13.15, y ahora suponga que los frenos se aplican sólo sobre las ruedas del carro *A*.

13.17 Un tractocamión entra a una pendiente descendente de 2 por ciento viajando a 108 km/h y debe bajar su velocidad a 72 km/h en 300 m. La cabina tiene una masa de 1 800 kg y el remolque de 5 400 kg. Determine *a*) la fuerza de frenado promedio que se debe aplicar, *b*) la fuerza promedio ejercida sobre el acoplamiento si 70 por ciento de la fuerza de frenado la proporciona el remolque y 30 por ciento la cabina.

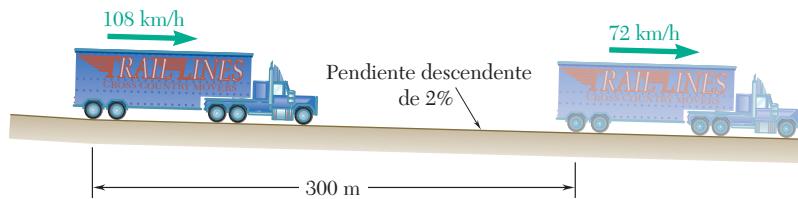


Figura P13.17

13.18 Un tractocamión ingresa a una pendiente ascendente de 2 por ciento mientras viaja a 72 km/h y alcanza una rapidez de 108 km/h en 300 m. La cabina tiene una masa de 1 800 kg y el remolque de 5 400 kg. Determine *a*) la fuerza promedio en las ruedas de la cabina, *b*) la fuerza promedio en el acoplamiento entre la cabina y el remolque.

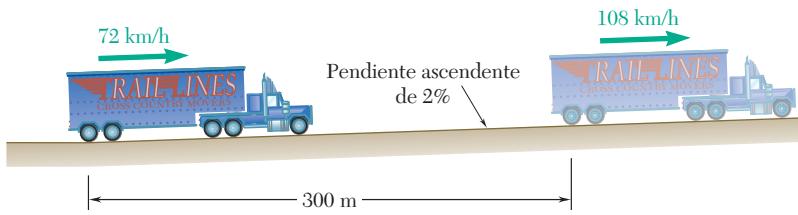


Figura P13.18

13.19 Los dos bloques idénticos que se muestran en la figura se sueltan desde el reposo. Si se ignoran las masas de las poleas y el efecto de la fricción, determine *a)* la velocidad del bloque *B* después de que éste se ha movido 2 m, *b)* la tensión en el cable.

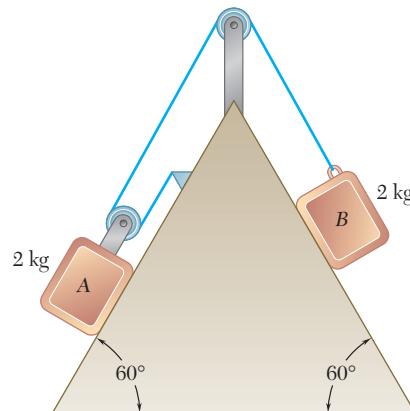


Figura P13.19 y P13.20

13.20 Los dos bloques idénticos que se muestran en la figura se sueltan desde el reposo. Si se ignoran las masas de las poleas y se sabe que los coeficientes de fricción estática y cinética son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.20$, determine *a)* la velocidad del bloque *B* después de que éste se ha movido 2 m, *b)* la tensión en el cable.

13.21 El sistema que se muestra en la figura está en reposo cuando se aplica una fuerza constante de 150 N al collarín *B*. *a)* Si la fuerza actúa a través de todo el movimiento, determine la rapidez del collarín *B* al golpear al soporte en *C*. *b)* ¿Después de qué distancia *d* debería retirarse la fuerza de 150 N si el collarín debe llegar al soporte *C* con velocidad cero?

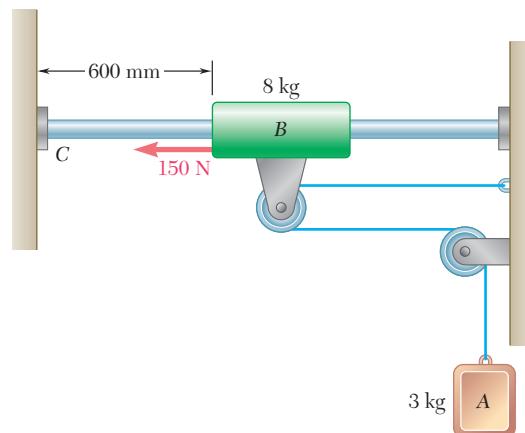


Figura P13.21

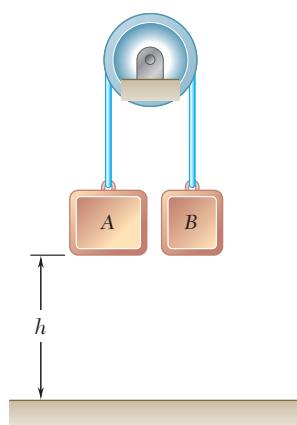


Figura P13.22

13.22 Los bloques *A* y *B* tienen masas de 11 kg y 5 kg, respectivamente, y se encuentran a una altura $h = 2$ m sobre el suelo cuando el sistema se suelta desde el reposo. Justo antes de que *A* golpee el suelo se mueve a una rapidez de 3 m/s. Determine *a)* la cantidad de energía que se disipa por la fricción en la polea, *b)* la tensión en cada porción de la cuerda durante el movimiento.

- 13.23** El sistema que se muestra, compuesto por un collarín *A* de 40 lb y un contrapeso *B* de 20 lb está en reposo cuando se aplica una fuerza constante de 100 lb al collarín *A*. *a)* Determine la rapidez de *A* justo antes de que golpee el soporte en *C*. *b)* Resuelva el inciso *a)* suponiendo que el contrapeso *B* se sustituye por una fuerza hacia abajo de 20 lb. No tome en cuenta la fricción ni las masas de las poleas.

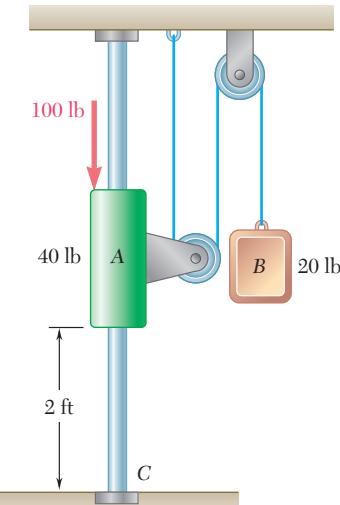


Figura P13.23

- 13.24** Cuatro paquetes, cada uno con un peso de 6 lb, se mantienen fijos por la fricción sobre una banda transportadora que está desacoplada de su motor. Cuando el sistema se suelta desde el reposo, el paquete 1 deja la banda en *A* justo cuando el paquete 4 ingresa a la parte inclinada de la banda en *B*. Determine *a)* la rapidez del paquete 2 cuando deja la banda en *A*, *b)* la rapidez del paquete 3 cuando deja la banda en *A*. No tome en cuenta las masas de la banda ni los rodillos.

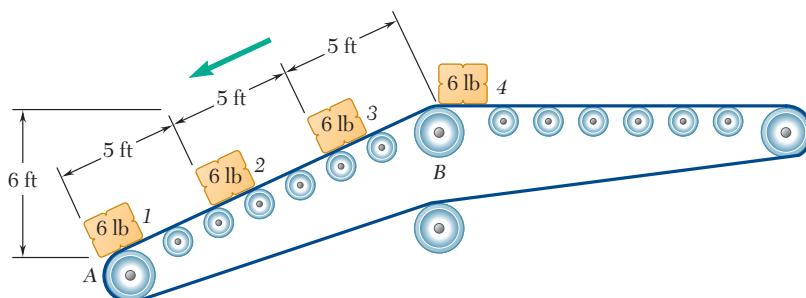


Figura P13.24

- 13.25** Dos bloques *A* y *B*, de 4 y 5 kg de masa, respectivamente, están conectados por una cuerda que pasa sobre las poleas en la forma que se muestra en la figura. Un collarín *C* de 3 kg se coloca sobre el bloque *A* y el sistema se suelta desde el reposo. Después de que los bloques se mueven 0.9 m, se retira el collarín *C* y los bloques *A* y *B* continúan moviéndose. Determine la rapidez del bloque *A* justo antes de que golpee el suelo.

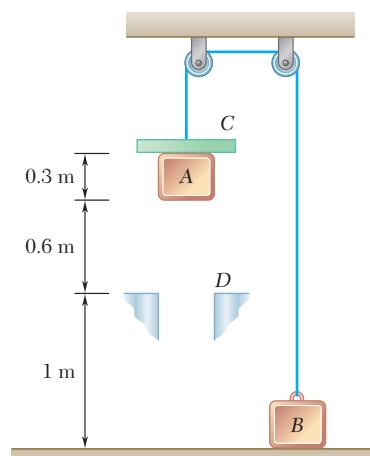


Figura P13.25

13.26 Un bloque de 10 lb está unido a un resorte sin estirar con una constante $k = 12 \text{ lb/in.}$. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque y el plano son 0.60 y 0.40, respectivamente. Si se aplica lentamente una fuerza \mathbf{F} al bloque hasta que la tensión en el resorte alcance 20 lb y luego, de manera súbita, se retira la fuerza determine *a)* la rapidez del bloque cuando regresa a su posición inicial, *b)* la rapidez máxima alcanzada por el bloque.

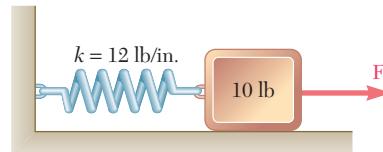


Figura P13.26 y P13.27

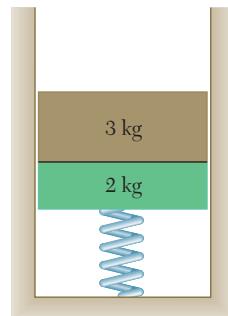


Figura P13.28

13.27 Un bloque de 10 lb está unido a un resorte sin estirar con una constante $k = 12 \text{ lb/in.}$. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque y el plano son 0.60 y 0.40, respectivamente. Si se aplica una fuerza \mathbf{F} al bloque hasta que la tensión en el resorte alcance 20 lb y luego, de manera súbita, se retira la fuerza determine *a)* a qué distancia se moverá el bloque hacia la izquierda antes de llegar al reposo y *b)* si el bloque se moverá después de nuevo a la derecha.

13.28 Un bloque de 3 kg descansa sobre la parte superior de un bloque de 2 kg soportado pero no unido a un resorte con una constante de 40 N/m. El bloque superior se retira de manera repentina. Determine *a)* la rapidez máxima alcanzada por el bloque de 2 kg, *b)* la altura máxima alcanzada por el bloque de 2 kg.

13.29 Retome el problema 13.28, y ahora suponga que el bloque de 2 kg está unido al resorte.

13.30 Un collarín *C* de 8 lb se desliza sobre una varilla horizontal entre los resortes *A* y *B*. Si se empuja el collarín hacia la derecha hasta que el resorte *B* se comprime 2 in. y se suelta, determine la distancia que recorre el collarín, suponiendo *a)* ninguna fricción entre el collarín y la varilla, *b)* un coeficiente de fricción $\mu_k = 0.35$.

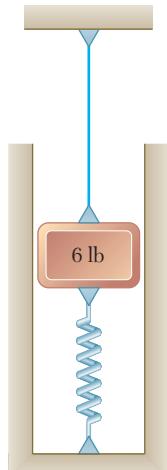


Figura P13.31

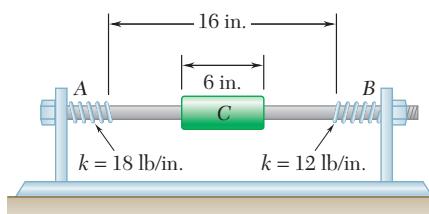


Figura P13.30

13.31 Un bloque de 6 lb está unido a un cable y a un resorte como se muestra en la figura. La constante del resorte es $k = 8 \text{ lb/in.}$ y la tensión en el cable es de 3 lb. Si se corta el cable, determine *a)* el desplazamiento máximo del bloque, *b)* la rapidez máxima del bloque.

13.32 Un automóvil fuera de control que viaja a 65 mi/h golpea en forma perpendicular un amortiguador de impactos de una autopista en el que el automóvil se detiene al aplastar en forma sucesiva a los barriles de acero. La magnitud F que se requiere para aplastar los barriles se muestra como una función de la distancia x que el automóvil se ha desplazado dentro de la zona de amortiguamiento. Si se sabe que el automóvil tiene un peso de 2 250 lb y se desprecia el efecto de la fricción, determine *a)* la distancia que el automóvil se desplazará en el amortiguador antes de detenerse, *b)* la desaceleración máxima del automóvil.

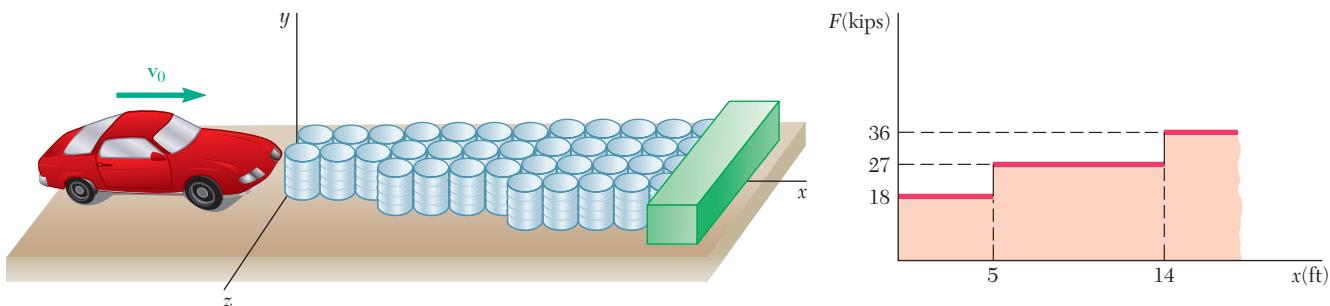


Figura P13.32

13.33 Un pistón de masa m y área de sección transversal A está en equilibrio bajo la presión p en el centro de un cilindro cerrado en ambos extremos. Si se supone que el pistón se mueve hacia la izquierda una distancia $a/2$ y se suelta, y si se sabe que la presión sobre cada lado del pistón varía inversamente con el volumen, determine la velocidad del pistón cuando regresa al centro del cilindro. Desprecie la fricción entre el pistón y el cilindro y exprese su respuesta en términos de m , a , p y A .

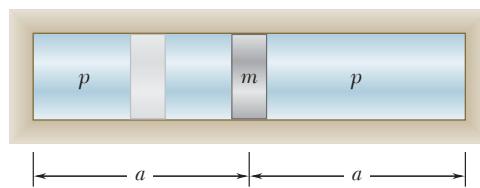


Figura P13.33

13.34 Exprese la aceleración de la gravedad g_h a una altura h sobre la superficie de la Tierra en términos de la aceleración de la gravedad g_0 en la superficie terrestre, la altura h y el radio R de la Tierra. Determine el error porcentual si el peso que un objeto tiene sobre la superficie de la Tierra se usa como su peso a una altura de *a)* 1 km, *b)* 1 000 km.

13.35 Un cohete se dispara verticalmente desde la superficie de la Luna con una rapidez v_0 . Deduzca una fórmula para el cociente h_n/h_u de las alturas alcanzadas con una rapidez v , si se usa la ley de Newton de la gravitación para calcular h_n y se recurre a un campo gravitacional uniforme para calcular h_u . Exprese su respuesta en términos de la aceleración de la gravedad g_m sobre la superficie de la Luna, el radio R_m de la Luna y las velocidades v y v_0 .

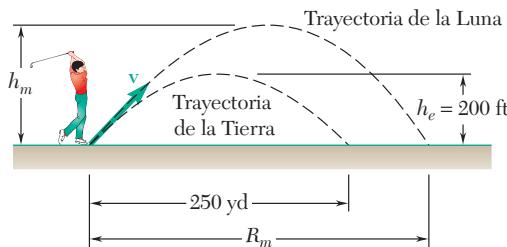


Figura P13.36

13.36 Una pelota de golf golpeada en la Tierra alcanza una altura máxima de 200 pies y choca en el suelo a 250 yardas de distancia. ¿Qué distancia recorrerá la misma pelota en la Luna si la magnitud y dirección de su velocidad son iguales que en la Tierra, inmediatamente después de haber sido golpeada? Suponga que la pelota se golpea y choca con la superficie a la misma altura y que se desprecia el efecto de la atmósfera en la Tierra, de manera que en ambos casos la trayectoria es una parábola. La aceleración de la gravedad en la Luna es 0.165 veces la de la Tierra.

13.37 Un bloque A de latón (no magnético) de 300 g y un imán B de acero de 200 g están en equilibrio en un tubo de latón bajo la acción de la fuerza repelente magnética de otro imán C ubicado a una distancia $x = 4 \text{ mm}$ de B. La fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre B y C. Si el bloque A se quita repentinamente, determine a) la velocidad máxima de B, b) la aceleración máxima de B. Suponga que la resistencia del aire y la fricción son despreciables.

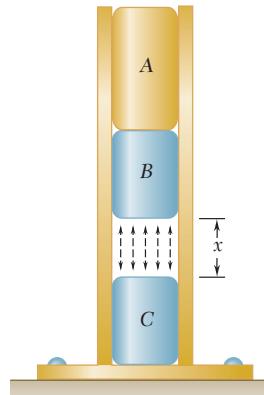


Figura P13.37

13.38 Los resortes no lineales se clasifican como duros o suaves, dependiendo de la curvatura de su función fuerza-deflexión (vea la figura). Si un instrumento delicado que tiene una masa de 5 kg se coloca sobre un resorte de longitud l de manera que su base justo toca el resorte sin deformar y después de manera inadvertida se libera desde esa posición, determine la deflexión máxima x_m del resorte y la fuerza máxima F_m ejercida por el resorte, suponiendo a) un resorte lineal de constante $k = 3 \text{ kN/m}$, b) un resorte duro, no lineal, para el cual $F = (3 \text{ kN/m})(x + 160x^3)$.

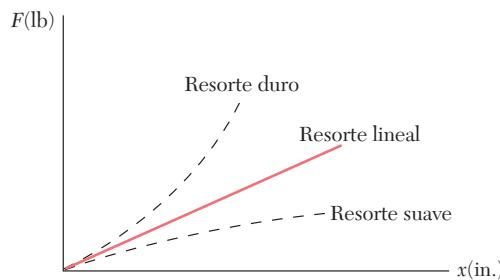
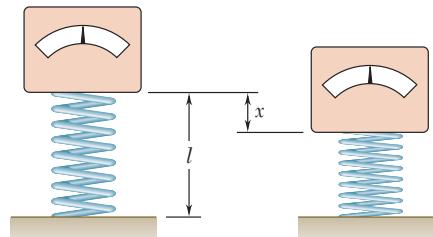


Figura P13.38



13.39 A una esfera en A se le da una velocidad hacia abajo v_0 y oscila en un círculo vertical de radio l y centro O . Determine la velocidad más baja v_0 para la cual la esfera alcanzará el punto B cuando ésta gire en torno al punto O *a)* si AO es una cuerda, *b)* si AO es una varilla delgada de masa despreciable.

13.40 A la esfera en A se le da una velocidad hacia abajo v_0 de magnitud igual a 5 m/s y oscila en un plano vertical en el extremo de una cuerda de longitud $l = 2$ m unida a un soporte en O . Determine el ángulo θ al cual se romperá la cuerda, si se sabe que ésta puede resistir una tensión máxima igual al doble del peso de la esfera.

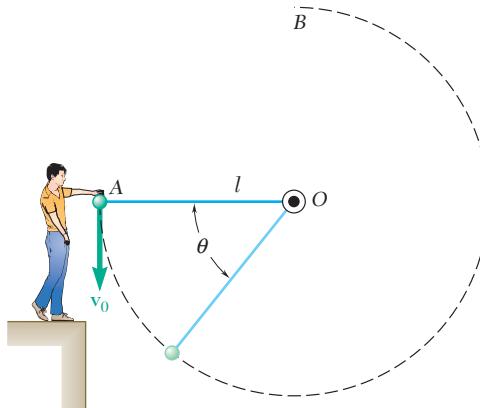


Figura P13.39 y P13.40

13.41 Una sección de la pista de una montaña rusa está compuesta por dos arcos circulares AB y CD unidos por una porción recta BC . El radio de AB es de 90 ft y el radio de CD es de 240 ft. El carro y sus ocupantes, con un peso total de 560 lb, llega al punto A prácticamente sin velocidad y luego cae libremente a lo largo de la pista. Determine la fuerza normal ejercida por la pista sobre el carro cuando éste alcanza el punto B . Desprecie la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento.

13.42 Una sección de la pista de una montaña rusa está compuesta por dos arcos circulares AB y CD unidos por una porción recta BC . El radio de AB es de 90 ft y el radio de CD es de 240 ft. El carro y sus ocupantes, con un peso total de 560 lb, llega al punto A prácticamente sin velocidad y luego cae libremente a lo largo de la pista. Determine los valores máximo y mínimo de la fuerza normal ejercida por la pista sobre el carro mientras éste viaja desde A hasta D . Desprecie la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento.

13.43 Una pequeña esfera B de masa m se libera desde el reposo en la posición mostrada y oscila libremente en un plano vertical, primero alrededor de O y luego alrededor de la clavija A después de que la cuerda entra en contacto con la clavija. Determine la tensión en la cuerda *a)* justo antes de que la cuerda entre en contacto con la clavija, *b)* justo después de que la cuerda hace contacto con la clavija.

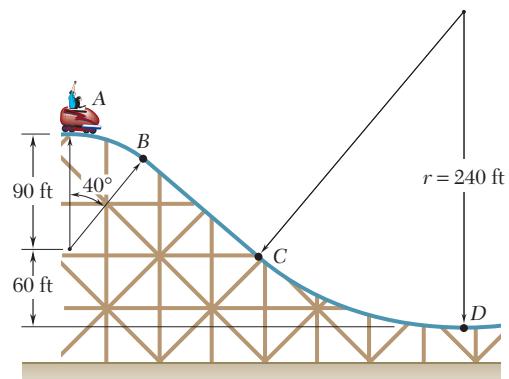


Figura P13.41 y P13.42

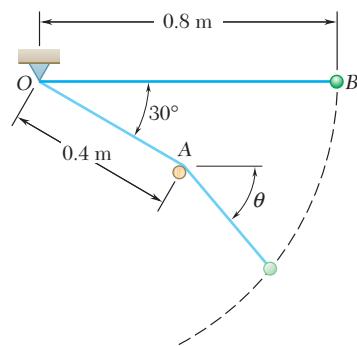


Figura P13.43

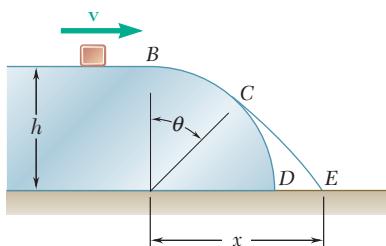


Figura P13.44 y P13.45

13.44 Un pequeño bloque se desliza a una rapidez $v = 8 \text{ ft/s}$ sobre una superficie horizontal a una altura $h = 3 \text{ ft}$ sobre el suelo. Determine a) el ángulo θ al cual el bloque abandonará la superficie cilíndrica BCD , b) la distancia x a la cual golpeará el suelo. No tome en cuenta la fricción ni la resistencia del aire.

13.45 Un pequeño bloque se desliza a una rapidez v sobre una superficie horizontal. Se sabe que $h = 2.5 \text{ m}$, determine la rapidez requerida del bloque si éste debe dejar la superficie cilíndrica BCD cuando $\theta = 40^\circ$.

13.46 a) Una mujer de 120 lb conduce una bicicleta de 15 lb hacia arriba por una pendiente de 3 por ciento a una rapidez constante de 5 ft/s. ¿Cuánta potencia debe generar la mujer? b) Un hombre de 180 lb sobre una bicicleta de 18 lb empieza a desplazarse hacia abajo por la misma pendiente y mantiene una rapidez constante de 20 ft/s accionando los frenos. ¿Cuánta potencia disipan los frenos? No tome en cuenta la resistencia del aire ni la resistencia al rodamiento.

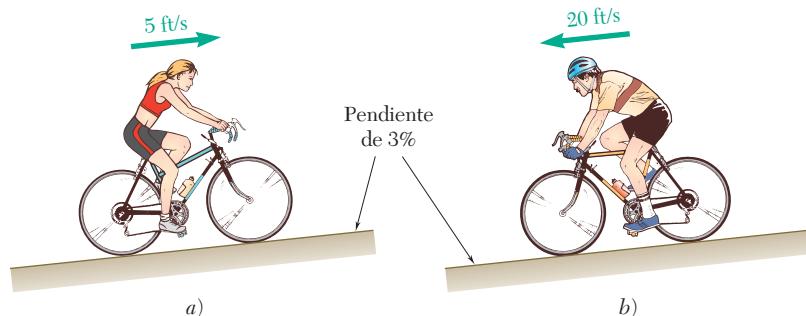


Figura P13.46

13.47 Se va a deducir una fórmula para especificar la potencia de un motor eléctrico que acciona una banda transportadora que mueve material sólido a diferentes velocidades y a distintas alturas y distancias. Si se denota la eficiencia de los motores mediante η y no se toma en cuenta la potencia que se necesita para accionar la propia banda, obtenga una fórmula a) en el sistema de unidades del SI, para la potencia P en kW, en términos de la tasa del flujo de masa m en kg/h, la altura b y la distancia horizontal l en metros, y b) en unidades de uso común en Estados Unidos, para la potencia en hp, en términos de la razón de flujo de masa w en tons/h y la altura b y la distancia horizontal l en pies.

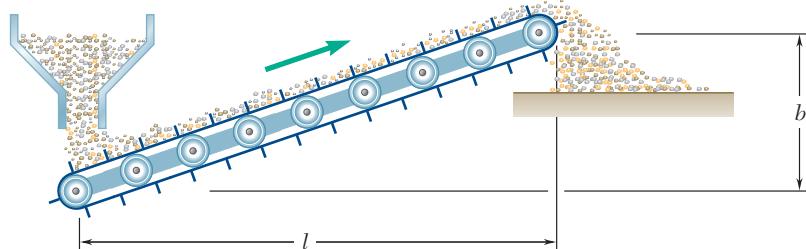


Figura P13.47

13.48 Un transportador de sillas está diseñado para trasladar 900 esquiadores por hora desde la base A hasta la cumbre B. El peso promedio de un esquiador es de 160 lb y la rapidez promedio del transportador es de 250 ft/min. Determine *a*) la potencia promedio requerida, *b*) la capacidad requerida del motor si la eficiencia mecánica es de 85 por ciento y se permite una sobrecarga de 300 por ciento.

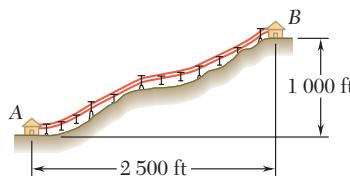


Figura P13.48

13.49 En una carrera de automóviles, las llantas traseras (de tracción) de un automóvil de 1 000 kg patinan los primeros 20 m y ruedan sin patinar los restantes 380 m. Las ruedas delanteras del automóvil se despegan un poco del piso durante los primeros 20 m y para el resto de la carrera 80 por ciento del peso del automóvil está sobre las ruedas traseras. Si se sabe que los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.90$ y $\mu_k = 0.68$, determine la potencia desarrollada por el automóvil en las llantas de tracción *a*) al final de los primeros 20 m de la carrera, *b*) al final de la carrera. Dé su respuesta en kW y en hp. No tome en cuenta el efecto de la resistencia del aire ni la resistencia al rodamiento.



Figura P13.49

13.50 Se requieren 15 s para levantar un automóvil de 1 200 kg y la plataforma de soporte de 300 kg del elevador de automóviles hidráulico hasta una altura de 2.8 m. Si se sabe que la eficiencia de conversión total de potencia eléctrica en mecánica para el sistema es de 82 por ciento, determine *a*) la potencia de salida promedio entregada por la bomba hidráulica para elevar el sistema, *b*) la potencia eléctrica promedio que se requiere.

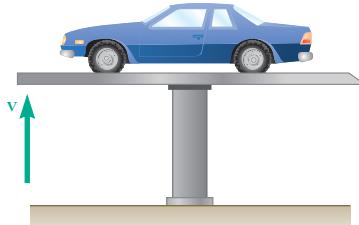


Figura P13.50

13.51 La velocidad del elevador del problema 13.50 aumenta de manera uniforme desde cero hasta su valor máximo en 7.5 s y después disminuye uniformemente hasta cero en 7.5 s. Si se sabe que la salida de potencia máxima de la bomba hidráulica es de 6 kW cuando la velocidad es máxima, determine la fuerza de elevación máxima proporcionada por la bomba.

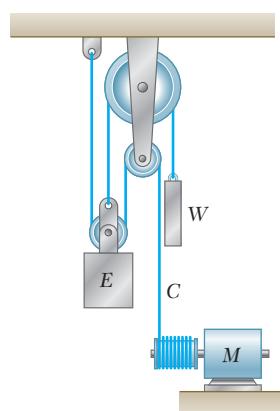


Figura P13.54

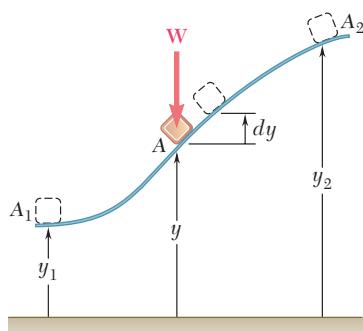


Figura 13.4 (repetida)

13.52 Un tren de 100 ton que viaja sobre una pista horizontal requiere 400 hp para mantener una rapidez constante de 50 mi/h. Determine *a*) la fuerza total necesaria para contrarrestar la fricción del eje, la resistencia al rodamiento y la resistencia del aire, *b*) los caballos de fuerza adicionales requeridos si el tren debe mantener la misma rapidez cuando asciende por una pendiente de 1 por ciento.

13.53 Se sabe que la resistencia de fricción de un barco varía directamente como la potencia 1.75 de la velocidad v del barco. Un solo remolcador a máxima potencia puede jalar al barco a una rapidez constante de 4.5 km/h, ejerciendo una fuerza constante de 300 kN. Determine *a*) la potencia desarrollada por el remolcador, *b*) la rapidez máxima a la que dos remolcadores, capaces de entregar la misma potencia, pueden arrastrar al barco.

13.54 El elevador E tiene una masa de 3 000 kg cuando está completamente cargado y se conecta como se muestra a un contrapeso W de 1 000 kg de masa. Determine la potencia en kW que entrega el motor *a*) cuando el elevador se mueve hacia abajo a una rapidez constante de 3 m/s, *b*) cuando tiene una velocidad hacia arriba de 3 m/s y una desaceleración de 0.5 m/s².

13.6. ENERGÍA POTENCIAL[†]

Considere de nuevo un cuerpo de peso \mathbf{W} que se mueve a lo largo de una trayectoria curva desde un punto A_1 de elevación y_1 hasta un punto A_2 de elevación y_2 (figura 13.4). En la sección 13.2 se estudió que el trabajo de la fuerza de gravedad \mathbf{W} durante este desplazamiento es

$$U_{1 \rightarrow 2} = Wy_1 - Wy_2 \quad (13.4)$$

El trabajo de \mathbf{W} puede obtenerse entonces al restar el valor de la función Wy , correspondiente a la segunda posición del cuerpo, del valor que corresponde a su primera posición. El trabajo de \mathbf{W} es independiente de la trayectoria real seguida; depende sólo de los valores inicial y final de la función Wy . Esta función recibe el nombre de *energía potencial* del cuerpo respecto a la *fuerza de gravedad* \mathbf{W} , y se denota mediante V_g . Se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \quad \text{con } V_g = Wy \quad (13.16)$$

Se observa que si $(V_g)_2 > (V_g)_1$, esto es, si la *energía potencial aumenta* durante el desplazamiento (como en el caso considerado aquí), el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ es negativo. Si, por otro lado, el trabajo de \mathbf{W} es positivo, disminuye la energía potencial. Por lo tanto, la energía potencial V_g del cuerpo proporciona una medida del trabajo que puede realizarse mediante su peso \mathbf{W} . Puesto que en la fórmula (13.16) únicamente está implicado el *cambio* en la energía potencial, y no el valor real de V_g , puede agregarse una constante arbitraria a la expresión obtenida para V_g . En otras palabras, el nivel de referencia desde el cual es medida la elevación y se puede elegir de manera arbitraria. Advierta que la energía potencial se expresa en las mismas unidades que el trabajo, esto es, en joules si se usan unidades SI y en ft · lb o in. · lb si se utilizan unidades de uso común en Estados Unidos.

[†]Parte del material de esta sección ya se consideró en la sección 10.7.

Hay que observar que la expresión que se acaba de obtener para la energía potencial de un cuerpo con respecto a la gravedad sólo es válida mientras es posible suponer que el peso \mathbf{W} del cuerpo permanece constante. Esto es, siempre y cuando los desplazamientos del cuerpo sean pequeños comparados con el radio de la Tierra. Sin embargo, en el caso de un vehículo espacial debemos tomar en consideración la variación de la fuerza de la gravedad con la distancia r desde el centro de la Tierra. Con base en la expresión que se obtuvo en la sección 13.2 para el trabajo de una fuerza gravitacional, se escribe (figura 13.6)

$$U_{1 \rightarrow 2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \quad (13.7)$$

El trabajo de la fuerza de gravedad puede entonces obtenerse al sustraer el valor de la función $-GMm/r$ correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. En consecuencia, la expresión que debe usarse para la energía potencial V_g cuando la variación en la fuerza de la gravedad no puede ignorarse es

$$V_g = -\frac{GMm}{r} \quad (13.17)$$

Si se toma la primera de las relaciones (12.29) en cuenta, se escribe V_g en la forma alternativa

$$V_g = -\frac{WR^2}{r} \quad (13.17')$$

donde R es el radio de la Tierra y W es el valor del peso del cuerpo en la superficie terrestre. Cuando cualquiera de las relaciones (13.17) o (13.17') se usa para expresar V_g , la distancia r debe, desde luego, medirse desde el centro de la Tierra.[†] Advierta que V_g siempre es negativa y que se approxima a cero para valores muy grandes de r .

Considere ahora un cuerpo unido a un resorte y que se mueve de una posición A_1 , correspondiente a una deformación x_1 del resorte, a una posición A_2 , correspondiente a una deformación x_2 del resorte (figura 13.5). Recuérdese de la sección 13.2 que el trabajo de la fuerza \mathbf{F} ejercida por el resorte sobre el cuerpo es

$$U_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (13.6)$$

El trabajo de la fuerza elástica se obtiene de tal modo al sustraer el valor de la función $\frac{1}{2}kx^2$ correspondiente a la segunda posición del cuerpo de su valor correspondiente a la primera posición. Esta función se denota mediante V_e y se denomina la *energía potencial* del cuerpo con respecto a la *fuerza elástica* \mathbf{F} . Se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \quad \text{con } V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (13.18)$$

y se observa que durante el desplazamiento considerado, el trabajo de la fuerza \mathbf{F} ejercido por el resorte sobre el cuerpo es negativo y que aumenta la energía potencial V_e . Hay que observar que la expresión que

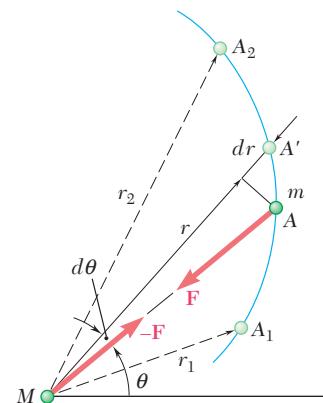


Figura 13.6 (repetida)

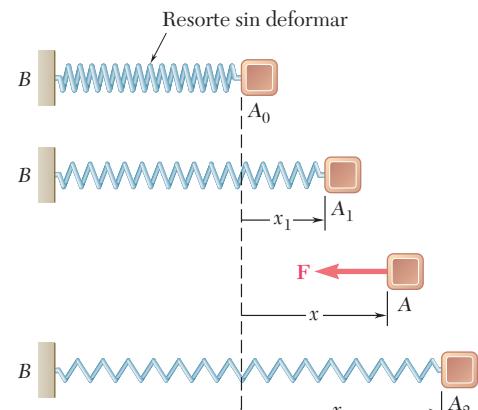


Figura 13.5 (repetida)

[†]Las expresiones dadas para V_g en (13.17) y (13.17') son válidas sólo cuando $r \geq R$, esto es, cuando el cuerpo considerado está sobre la superficie de la Tierra.

se obtuvo para V_e sólo es válida si las deformaciones del resorte se miden a partir de su posición no deformada. Por otro lado, es posible utilizar la fórmula (13.18) incluso cuando el resorte se gira alrededor de su extremo fijo (figura 13.10a). El trabajo de la fuerza elástica depende únicamente de las deformaciones inicial y final del resorte (figura 13.10b).

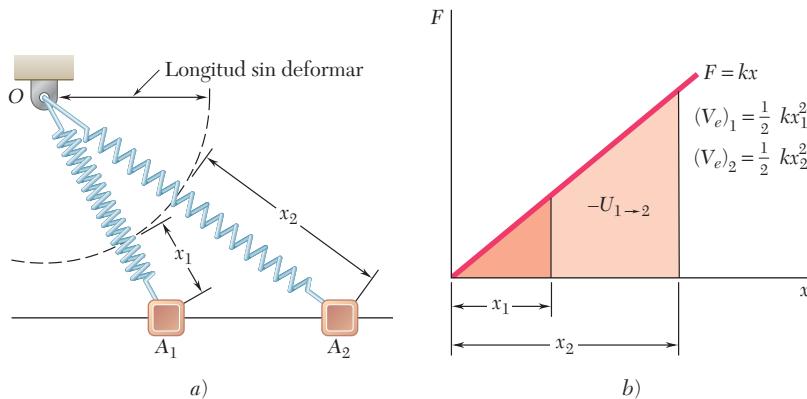


Figura 13.10

Es posible recurrir al concepto de energía potencial cuando están implicadas fuerzas diferentes a las de la gravedad y elásticas. En realidad, sigue siendo válido siempre que el trabajo de la fuerza considerada sea independiente de la trayectoria seguida por su punto de aplicación cuando este punto se mueve de una posición dada A_1 a una posición dada A_2 . Este tipo de fuerzas se dice que son *fuerzas conservativas*; las propiedades generales de las fuerzas conservativas se estudian en la siguiente sección.

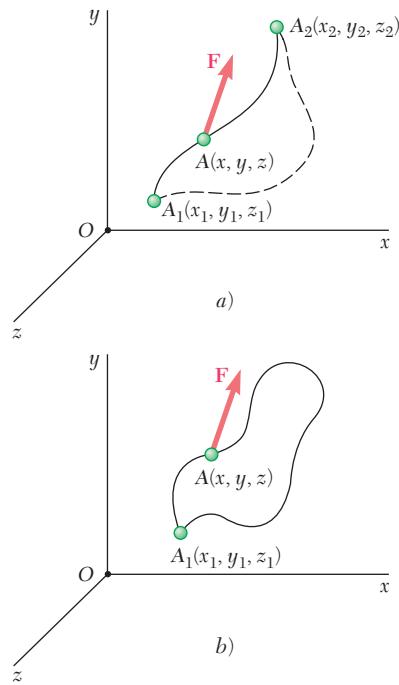


Figura 13.11

*13.7. FUERZAS CONSERVATIVAS

Como se indica en la sección precedente, una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre una partícula A se dice que es conservativa si su trabajo $U_{1\rightarrow 2}$ es independiente de la trayectoria seguida por la partícula A cuando se mueve de A_1 a A_2 (figura 13.11a). Se puede escribir entonces

$$U_{1\rightarrow 2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) \quad (13.19)$$

o, en forma resumida,

$$U_{1\rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (13.19')$$

La función $V(x, y, z)$ recibe el nombre de energía potencial, o *función potencial* de \mathbf{F} .

Note que si A_2 se elige para coincidir con A_1 , esto es, si la partícula describe una trayectoria cerrada (figura 13.11b), $V_1 = V_2$ y el trabajo es cero. De tal modo, es posible escribir para una fuerza conservativa \mathbf{F}

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (13.20)$$

donde el círculo sobre el signo integral indica que la trayectoria es cerrada.

Al aplicar ahora (13.19) entre dos puntos vecinos $A(x, y, z)$ y $A'(x + dx, y + dy, z + dz)$. El trabajo elemental dU correspondiente al desplazamiento $d\mathbf{r}$ de A a A' es

$$dU = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz)$$

o

$$dU = -dV(x, y, z) \quad (13.21)$$

Así, el trabajo elemental de una fuerza conservativa es una *diferencial exacta*.

Al sustituir para dU en (13.21) la expresión que se obtuvo en (13.1'') y recordar la definición de la diferencial de una función de varias variables, se escribe

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right)$$

de la cual se sigue que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (13.22)$$

Es claro que las componentes de \mathbf{F} deben ser funciones de las coordenadas x, y y z . En consecuencia, una condición *necesaria* para una fuerza conservativa es que ésta sólo depende de la posición de su punto de aplicación. Las relaciones (13.22) pueden expresarse de manera más concisa si se escribe

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{k}\right)$$

El vector entre paréntesis se conoce como el *gradiente de la función escalar* V y se denota por **grad** V . Se escribe entonces para cualquier fuerza conservativa

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad} V \quad (13.23)$$

Se demostró que las relaciones (13.19) a (13.23) serán satisfechas por cualquier fuerza conservativa. También se mostró que si una fuerza \mathbf{F} satisface una de estas relaciones, \mathbf{F} debe ser una fuerza conservativa.

13.8. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En las dos secciones anteriores se ha visto que el trabajo de una fuerza conservativa, tal como el peso de una partícula o la fuerza ejercida por un resorte, puede expresarse como un cambio en la energía potencial. Cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, el principio del trabajo y la energía enunciado en la sección 13.3 puede expresarse en forma modificada. Al sustituir $U_{1 \rightarrow 2}$ de (13.19') en (13.10), se escribe

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (13.24)$$

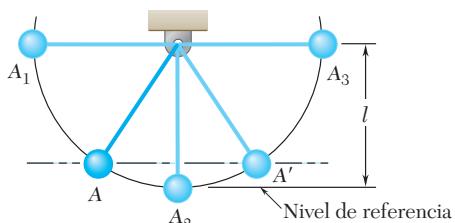


Figura 13.12

La fórmula (13.24) indica que cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, *la suma de la energía cinética y de la energía potencial de la partícula permanece constante*. La suma $T + V$ se denomina la *energía mecánica total* de la partícula y se denota por medio de E .

Considere, por ejemplo, el péndulo que se analizó en la sección 13.4, el cual se suelta sin velocidad desde A_1 y se permite que se balancee en un plano vertical (figura 13.12). Al medir la energía potencial desde el nivel de A_2 , hay, en A_1 ,

$$T_1 = 0 \quad V_1 = Wl \quad T_1 + V_1 = Wl$$

Al recordar que en A_2 la rapidez del péndulo es $v_2 = \sqrt{2gl}$, se tiene

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \frac{W}{g}(2gl) = Wl \quad V_2 = 0$$

$$T_2 + V_2 = Wl$$

Se verifica de ese modo que la energía mecánica total $E = T + V$ del péndulo es la misma en A_1 y en A_2 . En tanto que la energía es enteramente potencial en A_1 , ésta se vuelve por completo cinética en A_2 , y cuando el péndulo se mantiene oscilando hacia la derecha, la energía cinética se transforma de nuevo en energía potencial. En A_3 , $T_3 = 0$ y $V_3 = Wl$.

Puesto que la energía mecánica total del péndulo permanece constante y debido a que la energía potencial depende exclusivamente de su elevación, la energía cinética del péndulo tendrá el mismo valor en cualesquiera dos puntos ubicados al mismo nivel. De tal manera, la rapidez del péndulo es la misma en A y en A' (figura 13.12). Este resultado puede extenderse al caso de una partícula que se mueve a lo largo de cualquier trayectoria determinada, independientemente de la forma de la trayectoria, siempre y cuando las únicas fuerzas que actúen sobre la partícula sean su peso y la reacción normal de la trayectoria. La partícula de la figura 13.13, por ejemplo, la cual desliza sobre un plano vertical a lo largo de una pista sin fricción, tendrá la misma velocidad en A , A' y A'' .

Si bien el peso de una partícula y la fuerza ejercida por un resorte son fuerzas conservativas, *las fuerzas de fricción son fuerzas no conservativas*. En otras palabras, *el trabajo de la fuerza de fricción no puede expresarse como un cambio en la energía potencial*. El trabajo de la fuerza de fricción depende de la trayectoria seguida por su punto de aplicación; y mientras el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ definido por (13.19) es positivo o negativo de acuerdo con el sentido de movimiento, *el trabajo de una fuerza de fricción*, como se señaló en la sección 13.4, *siempre es negativo*. Hay que concluir que cuando un sistema mecánico implica fricción, su energía mecánica total no permanece constante, sino que disminuye. Sin embargo, la energía del sistema no se pierde; se transforma en calor, y la suma de la *energía mecánica* y de la *energía térmica* del sistema permanece constante.

Otras formas de energía también pueden estar implicadas en un sistema. Por ejemplo, un generador convierte energía mecánica en *energía eléctrica*; un motor a gasolina convierte *energía química* en energía mecánica; un reactor nuclear convierte *masa* en energía térmica. Si se toman en cuenta todas las formas de energía, la energía de cualquier sistema puede considerarse como constante y el principio de conservación de la energía sigue siendo válido bajo todas las condiciones.

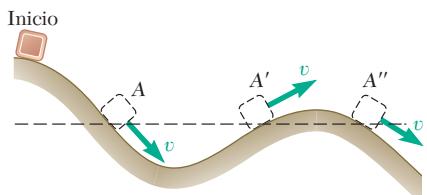


Figura 13.13

13.9. MOVIMIENTO BAJO UNA FUERZA CENTRAL CONSERVATIVA. APlicación A LA MECÁNICA CELESTE

En la sección 12.9 se analizó que cuando una partícula P se mueve bajo la acción de una fuerza central \mathbf{F} , la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O de la partícula alrededor del centro de fuerza O es constante. Si la fuerza \mathbf{F} es también conservativa, existe ahí una energía potencial V asociada con \mathbf{F} , y la energía total $E = T + V$ de la partícula es constante (sección 13.8). Así, cuando una partícula se mueve bajo una fuerza central conservativa, tanto el principio de conservación de la cantidad de movimiento angular como el principio de conservación de la energía pueden utilizarse para estudiar su movimiento.

Consideré, por ejemplo, un vehículo espacial de masa m que se mueve bajo la fuerza gravitacional de la Tierra. Suponga que inicia su vuelo libre en el punto P_0 a una distancia r_0 del centro de la Tierra, con una velocidad \mathbf{v}_0 formando un ángulo ϕ_0 con el radio vector OP_0 (figura 13.14). Sea P un punto de la trayectoria descrita por el vehículo; denote por r la distancia de O a P , por \mathbf{v} la velocidad del vehículo en P , y por ϕ el ángulo formado por \mathbf{v} y el radio vector OP . Al aplicar el principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular alrededor de O entre P_0 y P (sección 12.9), se escribe

$$r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 = r m v \operatorname{sen} \phi \quad (13.25)$$

Al recordar la expresión (13.17) que se obtuvo para la energía potencial debida a una fuerza gravitacional, se aplica el principio de conservación de la energía entre P_0 y P y se escribe

$$T_0 + V_0 = T + V$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \quad (13.26)$$

donde M es la masa de la Tierra.

La ecuación (13.26) puede resolverse para la magnitud v de la velocidad del vehículo en P cuando se conoce la distancia r de O a P ; es posible entonces utilizar la ecuación (13.25) para determinar el ángulo ϕ que forma la velocidad con el radio vector OP .

Las ecuaciones (13.25) y (13.26) también se emplean para determinar los valores máximo y mínimo de r en el caso de un satélite lanzado desde P_0 en una dirección que forma un ángulo ϕ_0 con la vertical OP_0 (figura 13.15). Los valores deseados de r se obtienen haciendo $\phi = 90^\circ$ en (13.25) y eliminando v entre las ecuaciones (13.25) y (13.26).

Debe notarse que la aplicación de los principios de conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento angular conducen a una formulación más fundamental de los problemas de la mecánica celeste que con el método indicado en la sección 12.12. En todos los casos que implican lanzamientos oblicuos, también producirá cálculos mucho más simples. Y si bien es necesario usar el método de la sección 12.12 cuando se van a determinar la trayectoria real o el periodo orbital del vehículo espacial, los cálculos se simplificarán si se usan primero los principios de conservación para calcular los valores máximo y mínimo del radio vector r .

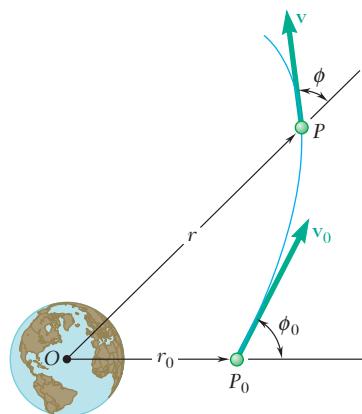


Figura 13.14

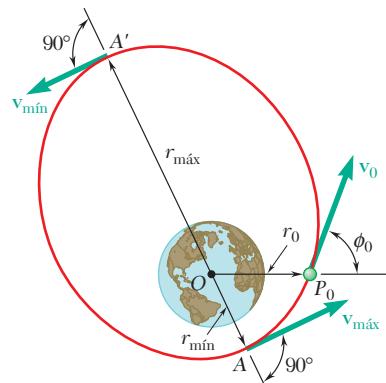
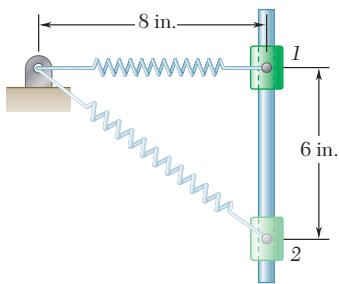


Figura 13.15



PROBLEMA RESUELTO 13.6

Un collarín de 20 lb desliza sin fricción a lo largo de una varilla vertical en la forma que se indica. El resorte unido al collarín tiene una longitud no deformada de 4 in. y una constante de 3 lb/in. Si el collarín se suelta desde el reposo en la posición 1, determine su velocidad después de que se ha movido 6 in. hasta la posición 2.

SOLUCIÓN

Posición 1. Energía potencial. El alargamiento del resorte es

$$x_1 = 8 \text{ in.} - 4 \text{ in.} = 4 \text{ in.}$$

y se tiene

$$V_e = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}(3 \text{ lb/in.})(4 \text{ in.})^2 = 24 \text{ in.} \cdot \text{lb}$$

Al elegir el nivel de referencia como se muestra, se tiene $V_g = 0$. Por lo tanto,

$$V_1 = V_e + V_g = 24 \text{ in.} \cdot \text{lb} = 2 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Energía cinética. Puesto que la velocidad en la posición 1 es cero, $T_1 = 0$.

Posición 2. Energía potencial. El alargamiento del resorte es

$$x_2 = 10 \text{ in.} - 4 \text{ in.} = 6 \text{ in.}$$

y se tiene

$$V_e = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}(3 \text{ lb/in.})(6 \text{ in.})^2 = 54 \text{ in.} \cdot \text{lb}$$

$$V_g = W_y = (20 \text{ lb})(-6 \text{ in.}) = -120 \text{ in.} \cdot \text{lb}$$

Por lo tanto,

$$V_2 = V_e + V_g = 54 - 120 = -66 \text{ in.} \cdot \text{lb} \\ = -5.5 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

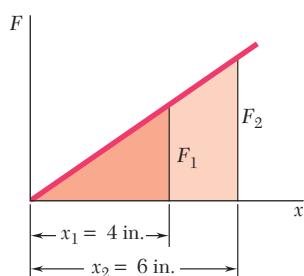
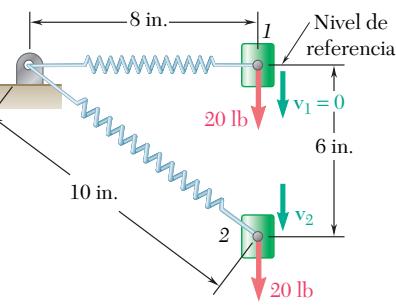
Energía cinética

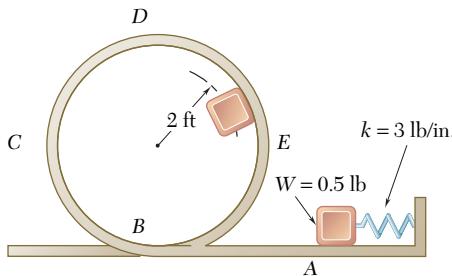
$$T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \frac{20}{32.2} v_2^2 = 0.311v_2^2$$

Conservación de la energía. Al aplicar el principio de la conservación de la energía entre las posiciones 1 y 2, se escribe

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \\ 0 + 2 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 0.311v_2^2 - 5.5 \text{ ft} \cdot \text{lb} \\ v_2 = \pm 4.91 \text{ ft/s}$$

$$\mathbf{v}_2 = 4.91 \text{ ft/s} \downarrow$$





PROBLEMA RESUELTO 13.7

Un objeto de 0.5 lb se empuja contra el resorte en A y se suelta desde el reposo. Ignorando la fricción, determine la deformación mínima del resorte para la cual el objeto viajará alrededor del aro ABCDE y permanecerá en contacto con él todo el tiempo.

SOLUCIÓN

Rapidez necesaria en el punto D. Cuando el objeto pasa por el punto más alto D, su energía potencial con respecto a la gravedad es máxima y consecuentemente su energía cinética y su rapidez son mínimas. Puesto que el objeto debe permanecer en contacto con el aro, la fuerza **N** ejercida sobre el objeto por el aro debe ser igual o mayor que cero. Al dejar **N** = 0, se calcula la rapidez mínima posible v_D :

$$\boxed{W} = \boxed{ma_n}$$

$$+\downarrow \sum F_n = ma_n: \quad W = ma_n \quad mg = ma_n \quad a_n = g$$

$$a_n = \frac{v_D^2}{r}: \quad v_D^2 = ra_n = rg = (2 \text{ ft})(32.2 \text{ ft/s}^2) = 64.4 \text{ ft}^2/\text{s}^2$$

Posición 1. Energía potencial. Si se denota por x la deformación del resorte y se advierte que $k = 3 \text{ lb/in.} = 36 \text{ lb/ft}$, se escribe

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(36 \text{ lb/ft})x^2 = 18x^2$$

Al elegir el nivel de referencia en A, tenemos que $V_g = 0$; por lo tanto

$$V_1 = V_e + V_g = 18x^2$$

Energía cinética. Puesto que el objeto se suelta desde el reposo, $v_A = 0$ y $T_1 = 0$.

Posición 2. Energía potencial. El resorte ahora no está deformado; de tal modo, $V_e = 0$. Puesto que el objeto está 4 ft arriba del nivel de referencia, se tiene

$$V_g = W_y = (0.5 \text{ lb})(4 \text{ ft}) = 2 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

$$V_2 = V_e + V_g = 2 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Energía cinética. Al utilizar el valor de v_D^2 que se obtuvo antes, se escribe

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2} \frac{0.5 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} (64.4 \text{ ft}^2/\text{s}^2) = 0.5 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

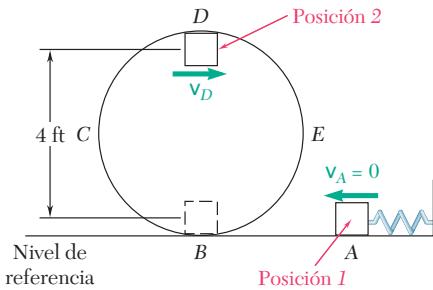
Conservación de la energía. Al aplicar el principio de conservación de energía entre las posiciones 1 y 2, se escribe

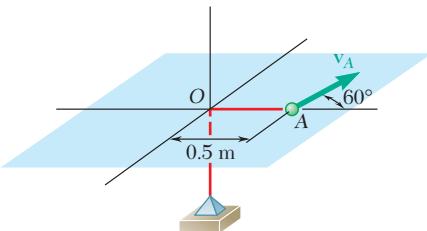
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 18x^2 = 0.5 \text{ ft} \cdot \text{lb} + 2 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

$$x = 0.3727 \text{ ft}$$

$$x = 4.47 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft$$



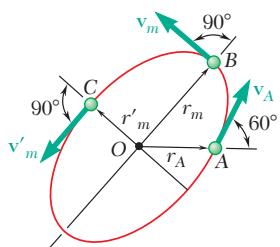


PROBLEMA RESUELTO 13.8

Una esfera de masa $m = 0.6 \text{ kg}$ se une a un cordón elástico de constante $k = 100 \text{ N/m}$, el cual no está deformado cuando la esfera se localiza en el origen O . Si se sabe que la esfera puede deslizarse en fricción sobre la superficie horizontal y que en la posición indicada su velocidad \mathbf{v}_A tiene una magnitud de 20 m/s , determine a) las distancias máxima y mínima de la esfera al origen O , b) los valores correspondientes de su rapidez.

SOLUCIÓN

La fuerza que ejerce la cuerda sobre la esfera pasa por el punto fijo O , y su trabajo puede expresarse como el cambio en la energía potencial. Por lo tanto, es una fuerza central conservativa, y se conservan tanto la energía total de la esfera como su cantidad de movimiento angular alrededor de O .



Conservación de la cantidad de movimiento angular alrededor de O . En el punto B , donde la distancia desde O es máxima, la velocidad de la esfera es perpendicular a OB y la cantidad de movimiento angular es $r_m m v_m$. Una propiedad similar se cumple en el punto C , donde la distancia desde O es mínima. Al expresar la conservación de la cantidad de movimiento angular entre A y B , se escribe

$$\begin{aligned} r_A m v_A \operatorname{sen} 60^\circ &= r_m m v_m \\ (0.5 \text{ m})(0.6 \text{ kg})(20 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 60^\circ &= r_m (0.6 \text{ kg}) v_m \\ v_m &= \frac{8.66}{r_m} \end{aligned} \quad (1)$$

Conservación de la energía

$$\begin{aligned} \text{En el punto A: } T_A &= \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} (0.6 \text{ kg}) (20 \text{ m/s})^2 = 120 \text{ J} \\ V_A &= \frac{1}{2} k r_A^2 = \frac{1}{2} (100 \text{ N/m}) (0.5 \text{ m})^2 = 12.5 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En el punto B: } T_B &= \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} (0.6 \text{ kg}) v_m^2 = 0.3 v_m^2 \\ V_B &= \frac{1}{2} k r_m^2 = \frac{1}{2} (100 \text{ N/m}) r_m^2 = 50 r_m^2 \end{aligned}$$

Al aplicar el principio de conservación de la energía entre los puntos A y B , se escribe

$$\begin{aligned} T_A + V_A &= T_B + V_B \\ 120 + 12.5 &= 0.3 v_m^2 + 50 r_m^2 \end{aligned} \quad (2)$$

a) Valores máximo y mínimo de la distancia. Al sustituir v_m de la ecuación (1) en la ecuación (2) y resolver para r_m^2 , se obtiene

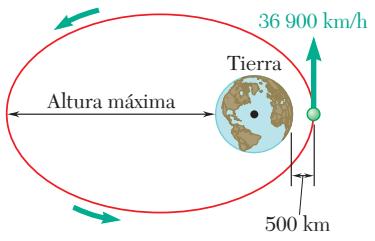
$$r_m^2 = 2.468 \text{ o } 0.1824 \quad r_m = 1.571 \text{ m, } r'_m = 0.427 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$

b) Valores de velocidad correspondientes. Al sustituir los valores que se obtuvieron para r_m y r'_m en la ecuación (1), se tiene

$$v_m = \frac{8.66}{1.571} \quad v_m = 5.51 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

$$v'_m = \frac{8.66}{0.427} \quad v'_m = 20.3 \text{ m/s} \quad \blacktriangleleft$$

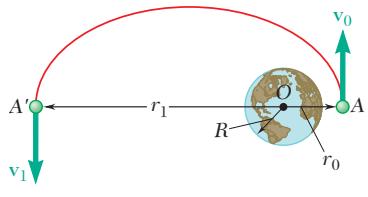
Nota. Puede mostrarse que la trayectoria de la esfera es una elipse de centro O .



PROBLEMA RESUELTO 13.9

Se lanza un satélite en dirección paralela a la superficie de la Tierra con una velocidad de 36 900 km/h desde una altura de 500 km. Determine *a)* la altura máxima alcanzada por el satélite, *b)* el error máximo permisible en la dirección de lanzamiento si el satélite va a entrar a una órbita en la que su máximo acercamiento a la superficie terrestre va a ser de 200 km.

SOLUCIÓN



a) Altura máxima. Se denota por A' el punto de la órbita más alejado de la Tierra y por r_1 la distancia correspondiente desde el centro de nuestro planeta. Puesto que el satélite se encuentra en vuelo libre entre A y A' , se aplica el principio de conservación de la energía

$$T_A + V_A = T_{A'} + V_{A'} \quad \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{r_1} - \frac{GMm}{r_1} \quad (1)$$

Puesto que la única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza de la gravedad, que es una fuerza central, se conserva la cantidad de movimiento angular del satélite alrededor de O . Al considerar los puntos A y A' , se escribe

$$r_0mv_0 = r_1mv_1 \quad v_1 = v_0 \frac{r_0}{r_1} \quad (2)$$

Al sustituir esta expresión para v_1 en la ecuación (1), y dividir cada término entre la masa m y reagrupar los términos, se obtiene

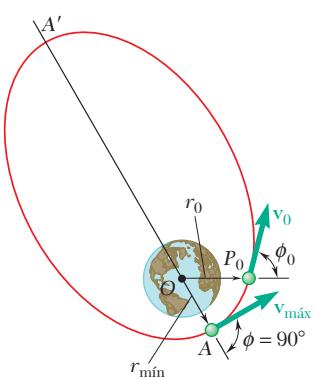
$$\frac{\frac{1}{2}v_0^2}{r_0} \left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right) = \frac{GM}{r_0} \left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \quad 1 + \frac{r_0}{r_1} = \frac{2GM}{r_0v_0^2} \quad (3)$$

Al recordar que el radio de la Tierra es $R = 6\,370$ km, se calcula

$$r_0 = 6\,370 \text{ km} + 500 \text{ km} = 6\,870 \text{ km} = 6.87 \times 10^6 \text{ m} \\ v_0 = 36\,900 \text{ km/h} = (36.9 \times 10^6 \text{ m}) / (3.6 \times 10^3 \text{ s}) = 10.25 \times 10^3 \text{ m/s} \\ GM = gR^2 = (9.81 \text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 398 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

Al sustituir estos valores en (3), se obtiene $r_1 = 66.8 \times 10^6$ m.

$$\text{Altura máxima} = 66.8 \times 10^6 \text{ m} - 6.37 \times 10^6 \text{ m} = 60.4 \times 10^6 \text{ m} = 60\,400 \text{ km} \quad \blacktriangleleft$$



b) Error permisible en la dirección de lanzamiento. El satélite se lanza desde P_0 en una dirección que forma un ángulo ϕ_0 con la vertical OP_0 . El valor de ϕ_0 corresponde a $r_{\min} = 6\,370 \text{ km} + 200 \text{ km} = 6\,570 \text{ km}$ se obtiene aplicando el principio de conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento angular entre P_0 y A :

$$\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{r_0} - \frac{GMm}{r_0} = \frac{\frac{1}{2}mv_{\max}^2}{r_{\max}} - \frac{GMm}{r_{\max}} \quad (4)$$

$$r_0mv_0 \operatorname{sen} \phi_0 = r_{\min}mv_{\max} \quad (5)$$

Al resolver (5) para v_{\max} y luego sustituir v_{\max} en (4), se puede resolver (4) respecto a $\operatorname{sen} \phi_0$. Utilizando los valores de v_0 y GM calculados en el inciso *a)* y al advertir que $r_0/r_{\min} = 6\,870/6\,570 = 1.0457$, se encuentra

$$\operatorname{sen} \phi_0 = 0.9801 \quad \phi_0 = 90^\circ \pm 11.5^\circ \quad \text{Error permisible} = \pm 11.5^\circ \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió que cuando el trabajo realizado por una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre una partícula A es *independiente de la trayectoria que sigue la partícula* cuando se mueve de una posición dada A_1 a una posición dada A_2 (figura 13.11a), entonces es posible definir para la fuerza \mathbf{F} una función V , llamada *energía potencial*. Este tipo de fuerzas se dice que son *fuerzas conservativas*, y se puede escribir

$$U_{1 \rightarrow 2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) \quad (13.19)$$

o, en forma breve,

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (13.19')$$

Hay que observar que el trabajo es negativo cuando el cambio en la energía potencial es positivo, esto es, cuando $V_2 > V_1$.

Al sustituir la expresión anterior en la ecuación para el trabajo y la energía, se puede escribir

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (13.24)$$

que muestra que cuando una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa *la suma de las energías cinética y potencial de la partícula permanece constante*.

La solución de problemas en los que se use la fórmula anterior consistirá de los siguientes pasos.

1. Determine si todas las fuerzas implicadas son conservativas. Si algunas de las fuerzas no son conservativas, por ejemplo, si está implicada la fricción, se debe usar el método del trabajo y la energía de la lección anterior, ya que el trabajo efectuado por tales fuerzas depende de la trayectoria seguida por la partícula y no existe una función potencial. Si no hay fricción y si todas las fuerzas son conservativas, se puede proceder de la manera siguiente.

2. Determinar la energía cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$ en cada extremo de la trayectoria.

3. Calcular la energía potencial de todas las fuerzas implicadas en cada extremo de la trayectoria. Recuérdese que las siguientes expresiones para la energía potencial se obtuvieron en esta lección.

a) La energía potencial del peso W cerca de la superficie de la Tierra y a una altura y sobre un nivel de referencia dado,

$$V_g = W_y \quad (13.16)$$

(continúa)

b) La energía potencial de una masa m localizada a una distancia r del centro de la Tierra, suficientemente grande de manera que la variación de la fuerza de la gravedad deba tomarse en cuenta,

$$V_g = -\frac{GMm}{r} \quad (13.17)$$

donde la distancia r se mide desde el centro de la Tierra y V_g es igual a cero en $r = \infty$.

c) La energía potencial de un cuerpo con respecto a una fuerza elástica $\mathbf{F} = k\mathbf{x}$,

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (13.18)$$

donde la distancia x es la deformación del resorte elástico medida desde su posición *no deformada* y k es la constante de resorte. Advierta que V_e depende exclusivamente de la deformación x y no de la trayectoria del cuerpo unido al resorte. Además, V_e siempre es positiva, ya sea que el resorte esté comprimido o extendido.

4. Sustituir las expresiones para las energías cinética y potencial en la ecuación (13.24) anterior. Se puede resolver esta ecuación para una incógnita, por ejemplo, para una velocidad [problema resuelto 13.6]. Si está implicada más de una incógnita, se tendrá que buscar otra condición o ecuación, tal como una velocidad mínima [problema resuelto 13.7] o la energía potencial mínima de la partícula. En el caso de problemas que impliquen una fuerza central, puede obtenerse una segunda ecuación utilizando la conservación de la cantidad de movimiento angular [problema resuelto 13.8]. Esto es en especial útil en las aplicaciones a la mecánica celeste [sección 13.9].

Problemas

13.55 Una fuerza \mathbf{P} se aplica lentamente a una placa que está unida a dos resortes y provoca una deflexión x_0 . En cada uno de los dos casos indicados, obtenga una expresión para la constante k_e , en términos de k_1 y k_2 , del resorte único equivalente al sistema dado, esto es, de un resorte que experimentaría la misma deformación x_0 si se sometiera a la misma fuerza \mathbf{P} .

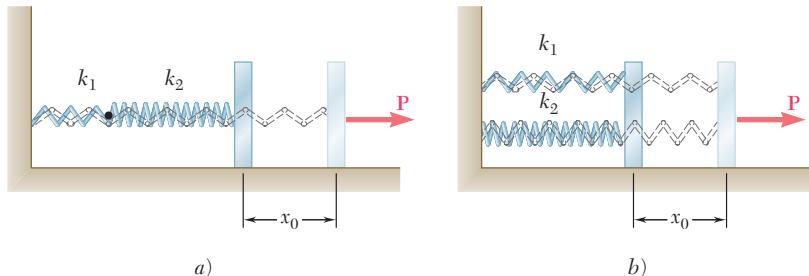


Figura P13.55

13.56 Un bloque de masa m está unido a dos resortes como se muestra en la figura. Si se sabe que en cada caso indicado el bloque se jala a través de una distancia x_0 desde su posición de equilibrio y después se suelta, determine la máxima rapidez del bloque en el movimiento subsecuente.

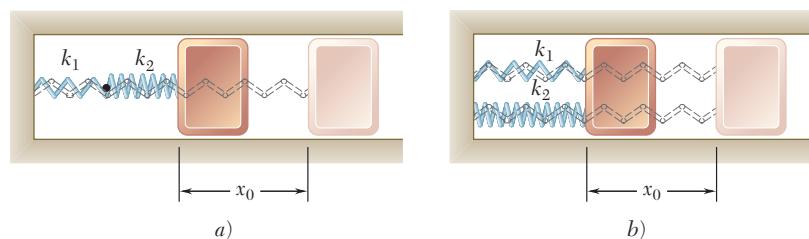


Figura P13.56

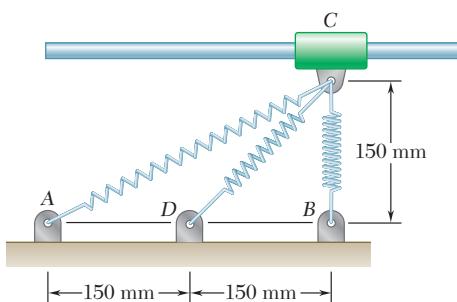


Figura P13.57

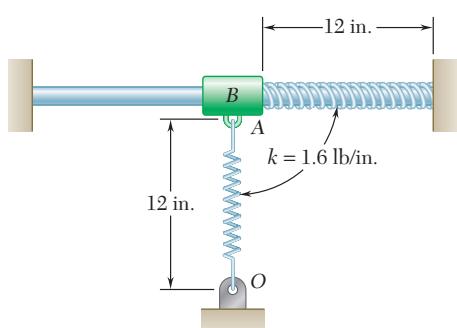


Figura P13.58

13.57 Un collarín C de 1.2 kg puede deslizarse sin fricción a lo largo de una varilla horizontal. Está unido a tres resortes, cada uno de constante $k = 400 \text{ N/m}$ y con una longitud no deformada de 150 mm. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine la rapidez máxima que alcanzará con el movimiento resultante.

13.58 Un collarín B de 10 lb puede deslizarse sin fricción a lo largo de una varilla horizontal y está en equilibrio en A cuando se le empuja 5 in. hacia la derecha y se le suelta desde el reposo. La longitud sin deformar de los resortes es de 12 in. y la constante de cada uno es $k = 1.6 \text{ lb/in.}$. Determine *a)* la rapidez máxima del collarín, *b)* la aceleración máxima del collarín.

- 13.59** Una cuerda elástica está estirada entre dos puntos *A* y *B*, separados por una distancia de 16 in. en el mismo plano horizontal. Cuando se estira directamente entre *A* y *B*, la tensión es de 10 lb. Después la cuerda se estira como se muestra en la figura hasta que su punto medio *C* se ha movido 6 in. hasta *C'*; se requiere una fuerza de 60 lb para mantener la cuerda en *C'*. Si se coloca un perdigón de 0.2 lb en *C'* y luego se suelta la cuerda, determine la rapidez del perdigón cuando pasa por *C*.

- 13.60** Un collarín de 1.5 kg está unido a un resorte y se desliza sin fricción a lo largo de una varilla circular en un *plano horizontal*. El resorte tiene una longitud no deformada de 150 mm y una constante $k = 400 \text{ N/m}$. Si se sabe que el collarín está en equilibrio en *A* y se le da un ligero impulso para ponerlo en movimiento, determine la velocidad del collarín *a)* cuando pasa por *B*, *b)* cuando pasa por *C*.

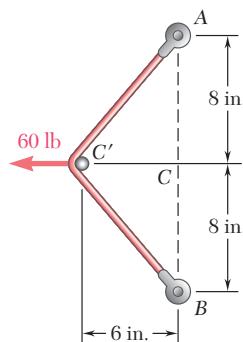


Figura P13.59

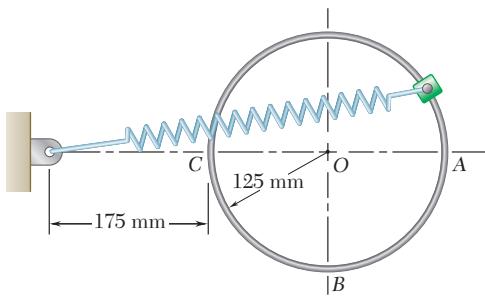


Figura P13.60

- 13.61** Un collarín de 500 g se puede deslizar sin fricción sobre la varilla curva *BC* en un *plano horizontal*. Si la longitud no deformada del resorte es de 80 mm y $k = 400 \text{ kN/m}$, determine *a)* la velocidad que se le debe imprimir al collarín en el punto *A* para llegar a *B* con velocidad nula, *b)* la velocidad del collarín cuando llegue al punto *C*.

- 13.62** Un collarín de 3 kg puede deslizarse sin fricción sobre una varilla vertical y descansa en equilibrio sobre un resorte. Se empuja hacia abajo, comprimiendo el resorte 150 mm, y se suelta. Si se sabe que la constante del resorte es $k = 2.6 \text{ kN/m}$, determine *a)* la altura máxima *h* que alcanza el collarín sobre su posición de equilibrio, *b)* la rapidez máxima del collarín.

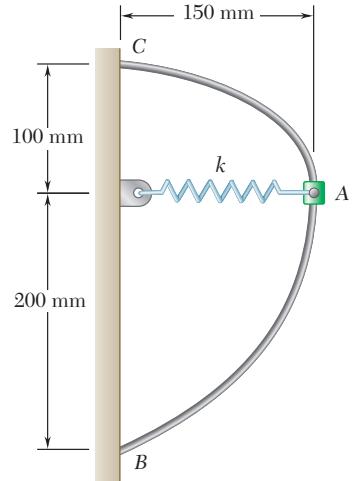


Figura P13.61

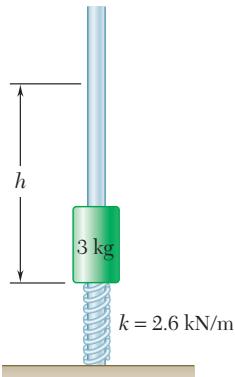


Figura P13.62



Figura P13.63

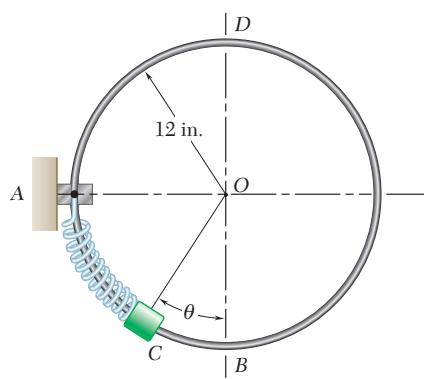


Figura P13.64 y P13.65

13.63 En mecánica de materiales se ha demostrado que cuando una viga elástica AB soporta a un bloque de peso W en un punto dado B, la deflexión y_{st} (llamada deflexión estática) es proporcional a W . Demuestre que si el mismo bloque se deja caer desde una altura h sobre el extremo B de una viga en voladizo AB y no rebota, la deflexión máxima y_m en el movimiento resultante puede expresarse como $y_m = y_{st} (1 + \sqrt{1 + 2h/y_{st}})$. Observe que esta fórmula es aproximada, puesto que se basa en el supuesto de que no hay energía disipada en el impacto y en que el peso de la viga es pequeño en comparación con el peso del bloque.

13.64 Una varilla circular delgada se mantiene en un *plano vertical* mediante una brida en A. Unido a la brida y enrollado holgadamente alrededor de la varilla está un resorte de constante $k = 3 \text{ lb/ft}$ y longitud no deformada igual al arco de círculo AB. Un collarín C de 8 oz, que no está unido al resorte, puede deslizarse sin fricción a lo largo de la varilla. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo cuando $\theta = 30^\circ$, determine a) la altura máxima sobre el punto B que alcanza el collarín, b) la rapidez máxima del collarín.

13.65 Una varilla circular delgada se mantiene en un *plano vertical* por medio de una brida en A. Unido a la brida y enrollado holgadamente alrededor de la varilla está un resorte de constante $k = 3 \text{ lb/ft}$ y longitud no deformada igual al arco de círculo AB. Un collarín C de 8 oz, que no está unido al resorte, puede deslizarse sin fricción a lo largo de la varilla. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo a un ángulo θ con respecto a la vertical, determine a) el valor mínimo de θ para el cual el collarín pasará a través de D y llegará al punto A, b) la velocidad del collarín cuando éste llega al punto A.

13.66 Un collarín de 2.7 lb puede deslizarse a lo largo de la varilla que se muestra en la figura. El collarín está unido a una cuerda elástica anclada en F, con una longitud sin deformar de 0.9 ft y una constante de resorte de 5 lb/ft. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en A y si no se toma en cuenta la fricción, determine la rapidez del collarín a) en B, b) en E.

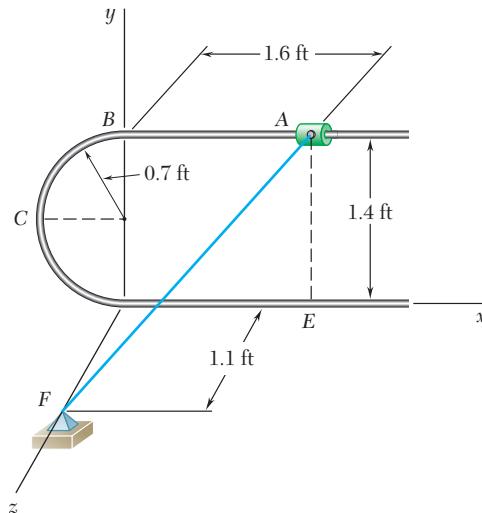


Figura P13.66

13.67 El sistema que se muestra está en equilibrio cuando $\phi = 0$. Si se sabe que inicialmente $\phi = 90^\circ$ y que el bloque C recibe un ligero golpe cuando el sistema está en esa posición, determine la rapidez del bloque cuando pasa por la posición de equilibrio $\phi = 0$. Desprecie la masa de la varilla.

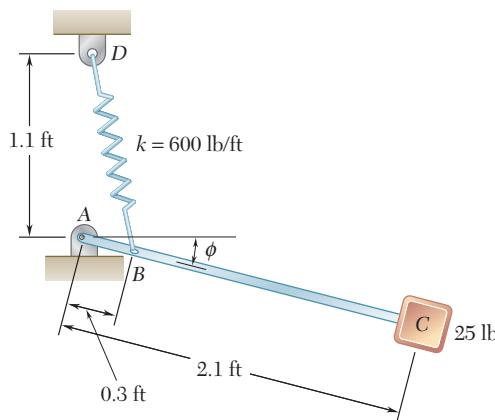


Figura P13.67

13.68 Un resorte se usa para detener un paquete de 50 kg, el cual se mueve hacia abajo sobre una pendiente de 20° . El resorte tiene una constante $k = 30 \text{ kN/m}$ y se sostiene mediante cables, de manera que en un inicio está comprimido 50 mm. Si se sabe que la velocidad del paquete es de 2 m/s cuando se encuentra a 8 m del resorte y si se desprecia la fricción, determine la deformación adicional máxima del resorte para llevar el paquete al reposo.

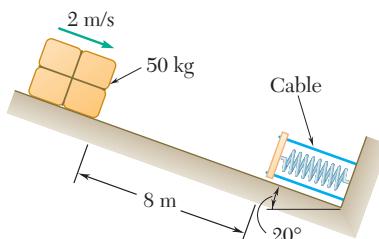


Figura P13.68

13.69 Retome el problema 13.68, y ahora suponga que el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y el plano inclinado es de 0.2.

13.70 Un objeto de 300 g se suelta desde el reposo en A y se desliza sin fricción a lo largo de la superficie mostrada. Determine la fuerza que ejerce la superficie sobre el objeto a) justo antes de que llegue a B, b) inmediatamente después de que pasa por B.

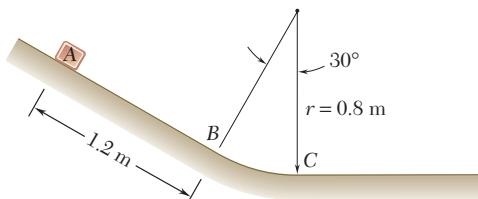


Figura P13.70 y P13.71

13.71 Un objeto de 300 g se suelta desde el reposo en A y se desliza sin fricción a lo largo de la superficie mostrada. Determine la fuerza ejercida sobre el objeto por la superficie a) justo antes de que llegue a C, b) inmediatamente después de que pasa por C.

13.72 Un collarín de 1.2 lb puede deslizarse sin fricción a lo largo de la varilla semicircular BCD. El resorte tiene una constante de 1.8 lb/in., y su longitud sin deformar es de 8 in. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en B, determine a) la rapidez del collarín cuando pasa por C, b) la fuerza que ejerce la varilla sobre el collarín en C.

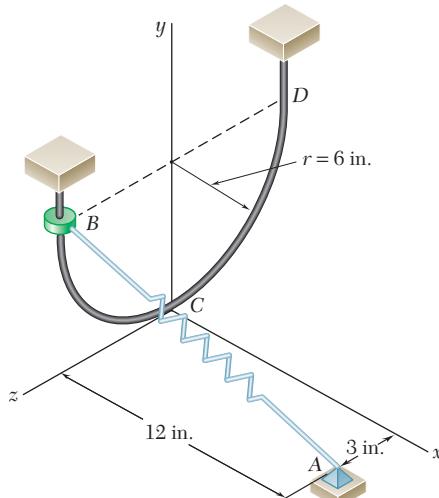


Figura P13.72

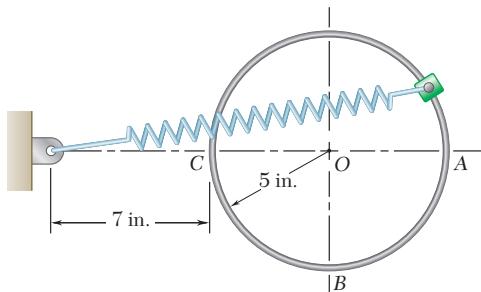


Figura P13.73

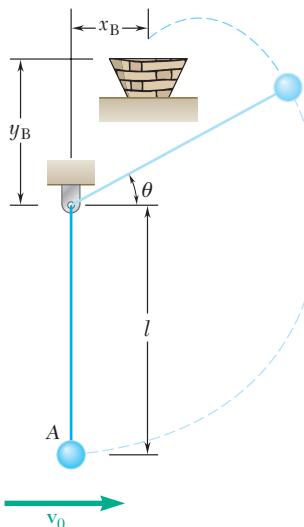


Figura P13.76 y P13.77

13.73 Un collarín de 1 lb está unido a un resorte y se desliza sin fricción a lo largo de una varilla circular en un *plano vertical*. El resorte tiene una longitud no deformada de 5 in. y una constante $k = 10 \text{ lb/ft}$. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en A, determine la rapidez del collarín y la fuerza normal entre el collarín y la varilla cuando el collarín pasa por B.

13.74 Un paquete de 200 g se lanza, mediante un resorte en A, hacia arriba con una velocidad v_0 ; el paquete se mueve alrededor de un conducto sin fricción y se deposita en C. Para cada uno de los dos conductos que se muestran, determine a) la velocidad mínima v_0 para la cual el paquete llegará a C, b) la fuerza correspondiente ejercida por el paquete en el conducto justo antes de abandonar el conducto en C.

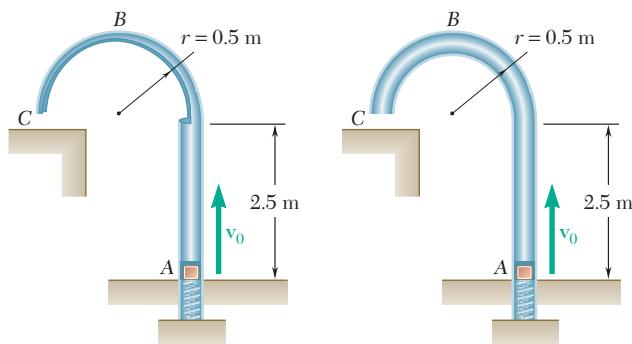


Figura P13.74

13.75 Si el paquete del problema 13.74 no debe golpear la superficie horizontal en C con una rapidez mayor que 3.5 m/s, a) demuestre que este requisito sólo puede ser satisfecho por el segundo conducto, b) determine la velocidad inicial máxima permisible v_0 cuando se emplea el segundo conducto.

13.76 La pelota de 2 lb en A se encuentra suspendida de una cuerda inextensible y se le da una velocidad horizontal inicial de 16 ft/s. Si $l = 2$ ft y $x_B = 0$, determine y_B de forma que la pelota entre en la canasta.

***13.77** La pelota de 2 lb en A se encuentra suspendida de una cuerda inextensible y se le da una velocidad horizontal inicial de v_0 . Si $l = 2$ ft, $x_B = 0.3$ ft y $y_B = 0.4$ ft, determine la velocidad inicial v_0 de forma que la pelota entre a la canasta.

***13.78** En un almacén los paquetes se mueven desde el punto A, en el piso superior, hasta el punto B del piso inferior, 12 ft directamente por debajo de A, por medio de un tobogán cuya línea central tiene la forma de una hélice con eje vertical y radio $R = 8$ ft. La sección transversal del tobogán debe inclinarse de modo que cada paquete, después de soltarse en A sin velocidad, se deslice a lo largo de la línea central del tobogán sin tocar los bordes. Si se desprecia la fricción, a) exprese el ángulo ϕ formado por la normal a la superficie del tobogán en P y la normal principal de la línea central en ese punto, como una función de la elevación y de un punto dado P de la línea central, b) determine la magnitud y la dirección de la fuerza ejercida por el tobogán sobre un paquete de 20 lb cuando éste llega al punto B. *Sugerencia:* La normal principal a la hélice en el punto P es horizontal y está dirigida hacia el eje y, además el radio de curvatura de la hélice es $\rho = R[1 + (h/2\pi R)^2]$.

***13.79** Demuestre que una fuerza $F(x, y, z)$ es conservativa, si y sólo si se satisfacen las siguientes relaciones

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

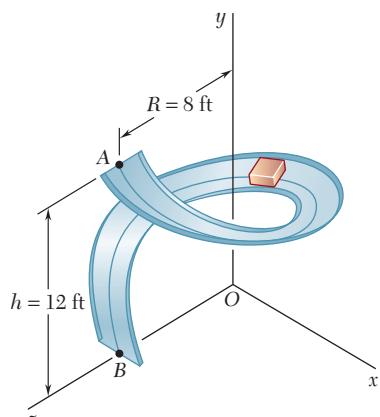


Figura P13.78

- 13.80** La fuerza $\mathbf{F} = (yzi + zxj + xyk)/xyz$ actúa sobre la partícula $P(x, y, z)$ que se mueve en el espacio. *a)* Utilizando la relación deducida en el problema 13.79, demuestre que es una fuerza conservativa. *b)* Determine la función potencial asociada con \mathbf{F} .

- *13.81** Una fuerza \mathbf{F} actúa sobre una partícula $P(x, y)$ que se mueve en el plano xy . Determine si \mathbf{F} es una fuerza conservativa y calcule el trabajo de \mathbf{F} cuando P describe la trayectoria A, B, C, A en el sentido de las manecillas del reloj, incluyendo el cuarto de círculo $x^2 + y^2 = a^2$, si *a)* $\mathbf{F} = kyi$, *b)* $\mathbf{F} = k(yi + xj)$.

- *13.82** Se sabe que la función potencial asociada con una fuerza \mathbf{P} en el espacio es $V(x, y, z) = -(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. *a)* Determine las componentes x, y y z de \mathbf{P} . *b)* Calcule el trabajo realizado por \mathbf{P} desde O hasta D , integrando a lo largo de la trayectoria $OABD$ y demuestre que es igual al negativo del cambio en el potencial desde O hasta D .

- *13.83** *a)* Calcule el trabajo realizado desde D hasta O por la fuerza \mathbf{P} del problema 13.82 integrando a lo largo de la diagonal del cubo. *b)* Usando el resultado obtenido y la respuesta al inciso *b)* del problema 13.82, verifique que el trabajo realizado por una fuerza conservativa alrededor de la trayectoria cerrada $OABDO$ es cero.

- *13.84** La fuerza $\mathbf{F} = (xi + yj + zk)/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ actúa sobre la partícula $P(x, y, z)$ que se mueve en el espacio. *a)* Utilizando la relación deducida en el problema 13.79, demuestre que \mathbf{F} es una fuerza conservativa. *b)* Determine la función potencial $V(x, y, z)$ asociada con \mathbf{F} .

- 13.85** Mientras describe una órbita circular a 300 km sobre la Tierra un vehículo espacial lanza un satélite de comunicaciones de 3 600 kg. Determine *a)* la energía adicional que se requiere para poner el satélite en una órbita geosíncrona a una altura de 35 770 km sobre la superficie terrestre, *b)* la energía requerida para poner el satélite en la misma órbita lanzándolo desde la superficie de la Tierra, sin incluir la energía necesaria para superar la resistencia del aire. (Una *órbita geosíncrona* es una órbita circular en la cual el satélite parece estacionario con respecto al suelo.)

- 13.86** Un satélite se coloca en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. Si se sabe que el cociente v_A/v_P de la velocidad en el apogeo A y la velocidad en el perigeo P es igual al cociente r_P/r_A de la distancia al centro de la Tierra en P a la distancia correspondiente en A , y que la distancia entre A y P es de 80 000 km, determine la energía por unidad de masa que se requiere para poner el satélite en su órbita lanzándolo desde la superficie terrestre. Excluya la energía adicional necesaria para superar el peso del cohete impulsor, la resistencia del aire y las maniobras.

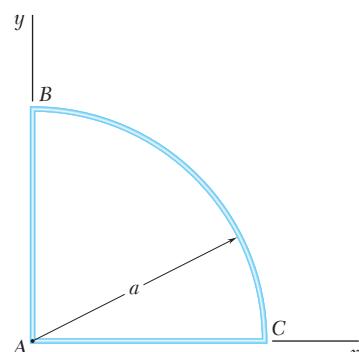


Figura P13.81

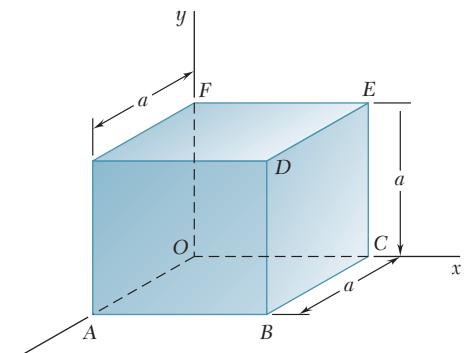


Figura P13.82

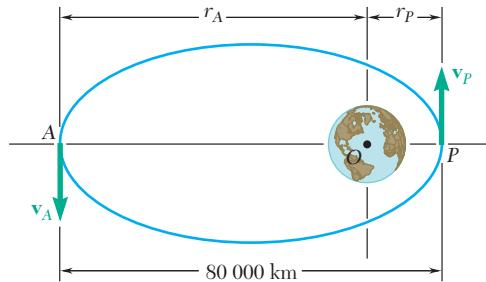


Figura P13.86

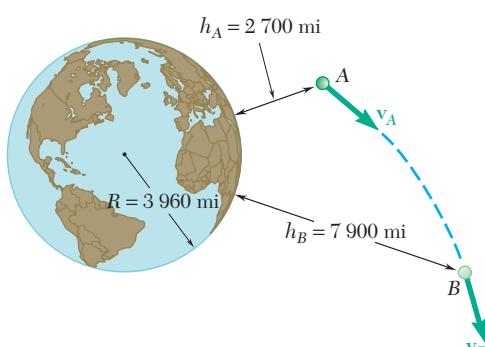


Figura P13.87

13.87 Si se sabe que la velocidad de una sonda espacial experimental lanzada desde la Tierra tiene una magnitud $v_A = 20.2 \times 10^3$ mi/h en el punto A, determine la velocidad de la sonda cuando pase por el punto B.

13.88 Un módulo de excursión lunar (LEM) se utilizó en las misiones de aluminaje Apolo para ahorrar combustible al hacer innecesario el relanzamiento de toda la nave espacial Apolo desde la superficie de la Luna en su viaje de retorno a la Tierra. Verifique la eficacia de este planteamiento calculando la energía por libra que requiere una nave espacial para escapar del campo gravitacional lunar si la nave parte desde a) la superficie de la Luna, b) una órbita circular a 50 mi sobre la superficie lunar. No tome en cuenta el efecto del campo gravitatorio terrestre. (El radio de la Luna es de 1 081 mi y su masa es 0.0123 veces la masa de la Tierra.)

13.89 Un satélite de masa m describe una órbita circular de radio r alrededor de la Tierra. Exprese como una función de r a) la energía potencial del satélite, b) su energía cinética, c) su energía total como función de r . Denote el radio de la Tierra mediante R y la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre mediante g , y suponga que la energía potencial del satélite es cero en su plataforma de lanzamiento.

13.90 ¿Cuánta energía por kilogramo debe proporcionarse a un satélite para ponerlo en una órbita circular a una altura de a) 600 km, b) 6 000 km?

13.91 a) Demuestre que, si se establece $r = R + y$ en el miembro del lado derecho de la ecuación (13.17') y se desarrolla ese miembro en una serie de potencias en y/R , la expresión en la ecuación (13.16) para la energía potencial V_g debida a la gravedad es una aproximación de primer orden para la expresión dada en la ecuación (13.17'). b) Utilizando el mismo desarrollo, deduzca una aproximación de segundo orden para V_g .

13.92 Las observaciones muestran que un cuerpo celeste que viaja a 1.2×10^6 mi/h parece describir un círculo de radio igual a 60 años luz alrededor del punto B. Se sospecha que el punto B es una concentración de masa muy densa conocida como un hoyo negro. Determine el cociente M_B/M_S de la masa en B y la masa del Sol. (La masa del Sol es 330 000 veces la masa de la Tierra y un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año a la velocidad de 186 300 mi/s.)

13.93 Una bola de 200 g se puede deslizar sobre una superficie horizontal sin fricción que está unida a un punto fijo O por medio de una cuerda elástica de constante $k = 150$ N/m y longitud no deformada de 600 mm. La bola se coloca en el punto A, a 900 mm de O, y se le da una velocidad inicial v_A perpendicular a OA. Si se sabe que la bola pasa a una distancia $d = 100$ m de O, determine a) la rapidez inicial v_A de la bola, b) su rapidez v después de que la cuerda se pone flácida.

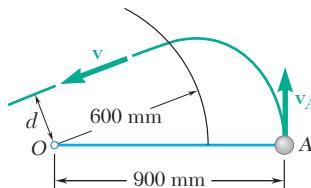


Figura P13.93

13.94 Para la bola del problema 13.93, determine a) la magnitud mínima de la velocidad inicial v_A de la bola, para la cual la cuerda elástica permanece tensa en cualquier momento, b) la rapidez máxima correspondiente que alcanza la bola.

13.95 El collarín A pesa 10 lb y está unido a un resorte de constante 50 lb/ft y una longitud sin deformar de 18 in. El sistema se pone en movimiento con $r = 12$ in., $v_\theta = 16$ ft/s y $v_r = 0$. Si se desprecia la masa de la varilla y el efecto de la fricción, determine las componentes radial y transversal de la velocidad del collarín cuando $r = 21$ in.

13.96 Para el movimiento descrito en el problema 13.95, determine *a)* la distancia máxima entre el origen y el collarín, *b)* la rapidez correspondiente. (*Sugerencia:* Resuelva por prueba y error la ecuación obtenida para r .)

13.97 Retome el problema 13.8, y ahora suponga que la cuerda elástica se sustituye por una fuerza central \mathbf{F} de magnitud $(80/r^2)$ N dirigida hacia O .

13.98 Un collarín A de 1.8 kg y un collarín B de 0.7 kg pueden deslizarse sin fricción sobre un armazón, compuesto por una varilla horizontal OE y una varilla vertical CD , la cual gira libremente alrededor de CD . Los dos collarines se conectan mediante una cuerda que corre sobre una polea unida al armazón en O . En el instante que se muestra, la velocidad \mathbf{v}_A del collarín A tiene una magnitud de 2.1 m/s y un tope evita el movimiento del collarín B. Si repentinamente se quita el tope, determine *a)* la velocidad del collarín A cuando está a 0.2 m de O , *b)* la velocidad del collarín A cuando el collarín B queda en reposo. (Suponga que el collarín B no golpea a O , que el collarín A no sale de la varilla OE y que la masa del armazón puede ignorarse.)

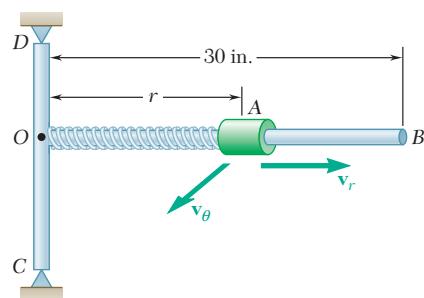


Figura P13.95

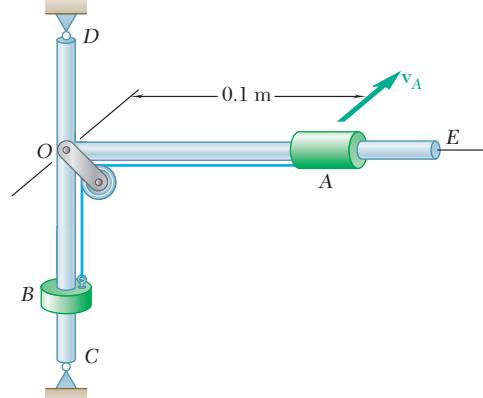


Figura P13.98

13.99 Utilice el principio de la conservación de la energía y de la conservación de la cantidad de movimiento angular, para resolver el inciso *a)* del problema resuelto 12.9.

13.100 Se espera que una nave espacial, que viaja a lo largo de una trayectoria parabólica hacia el planeta Júpiter, alcance el punto A con una velocidad \mathbf{v}_A de 26.9 km/s de magnitud. Sus motores se activarán entonces para frenarla, colocándola en una órbita elíptica que la pondrá a 100×10^3 km de Júpiter. Determine la reducción en la velocidad Δv en el punto A que colocará a la nave espacial en la órbita requerida. La masa de Júpiter es 319 veces la masa de la Tierra.

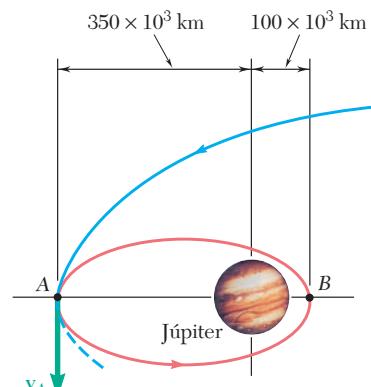


Figura P13.100

13.101 Despues de completar su misión exploratoria a la Luna, los dos astronautas que formaban la tripulación del módulo de excursión lunar (LEM) Apollo se preparaban para reunirse con el módulo de mando que se encontraba orbitando la Luna a una altura de 140 km. La tripulación encendió el motor del LEM, llevándolo a lo largo de una trayectoria curva hasta el punto A, 8 km sobre la superficie de la Luna, para después apagar el motor. Si se sabe que el LEM se movía en ese momento en una dirección paralela a la superficie de la Luna y que después se desplazó a lo largo de una trayectoria elíptica hacia un punto de encuentro en B con el módulo de mando, determine a) la rapidez del LEM al apagar el motor, b) la velocidad relativa con la que el módulo de mando se aproximó al LEM en B. (El radio de la Luna es de 1 740 km y su masa es 0.01230 veces la masa de la Tierra.)

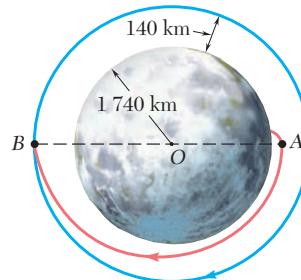


Figura P13.101

13.102 La manera óptima de transferir un vehículo espacial de una órbita circular a una órbita coplanar exterior es activar sus motores cuando pasa a través de A para aumentar su rapidez y ponerla en una órbita de transferencia elíptica. Otro incremento en la rapidez cuando pasa por B la colocará en la órbita circular deseada. Para un vehículo en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura $h_1 = 200$ mi, el cual se va a transferir a una órbita circular a una altura $h_2 = 500$ mi, determine a) el incremento de rapidez requerido en A y B, b) la energía total por unidad de masa requerida para ejecutar la transferencia.

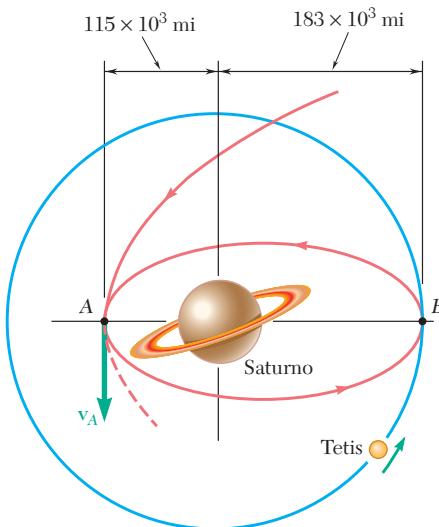


Figura P13.103

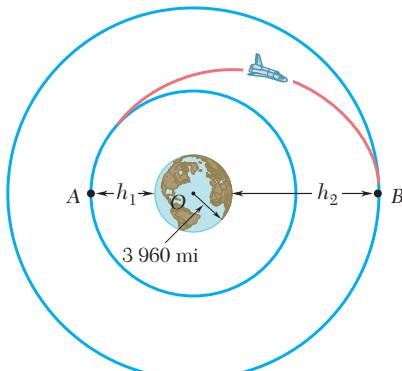


Figura P13.102

13.103 Una nave espacial que se aproxima al planeta Saturno alcanza el punto A con una velocidad \mathbf{v}_A de 68.8×10^3 ft/s de magnitud. Se pone en una órbita elíptica alrededor de Saturno de manera que será capaz de examinar periódicamente a Tetis, una de las lunas de Saturno. Tetis se ubica en una órbita circular de 183×10^3 mi de radio alrededor del centro de Saturno y viaja a una rapidez de 37.2×10^3 ft/s. Determine a) la reducción en la rapidez requerida por la nave espacial en A para que alcance la órbita deseada, b) la rapidez de la nave espacial cuando alcance la órbita de Tetis en B.

- 13.104** Una nave espacial describe una órbita elíptica de altura mínima $h_A = 2400$ km y altura máxima $h_B = 9600$ km sobre la superficie de la Tierra. Determine la rapidez de la nave espacial en A.

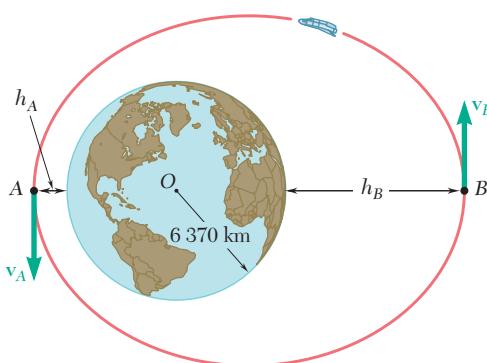


Figura P13.104

- 13.105** Una nave espacial que describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra tiene una rapidez máxima $v_A = 26.3 \times 10^3$ km/h en A y una rapidez mínima $v_B = 18.5 \times 10^3$ km/h en B. Determine la altitud de la nave espacial en B.

- 13.106** Cuando el LEM regresó al módulo de mando, la nave espacial Apollo del problema 13.101 se giró de modo que el LEM viera la parte trasera de la nave. Después el LEM se impulsó con una velocidad de 200 m/s con respecto al módulo de mando. Determine la magnitud y la dirección (ángulo ϕ formado con la vertical OC) de la velocidad v_C del LEM justo antes de estrellarse en C sobre la superficie de la Luna.

- 13.107** Se lanza un satélite al espacio con una velocidad v_0 a una distancia r_0 del centro de la Tierra mediante la última etapa de su cohete de lanzamiento. La velocidad v_0 se diseñó para enviar el satélite a una órbita circular de radio r_0 . Sin embargo, debido a un mal funcionamiento del control, el satélite no se lanzó de manera horizontal sino a un ángulo α con la horizontal y, como consecuencia, se impulsó hacia una órbita elíptica. Determine los valores máximo y mínimo de la distancia del centro de la Tierra al satélite.

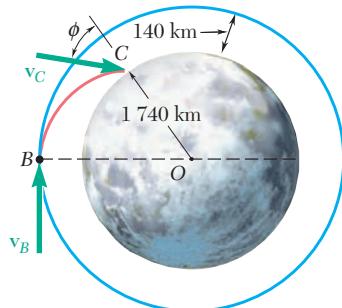


Figura P13.106

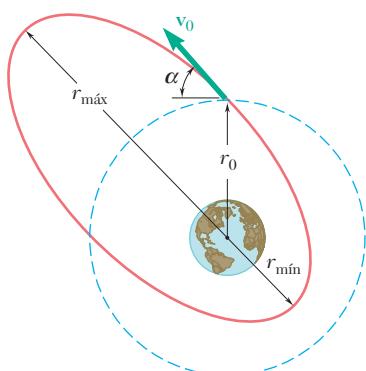


Figura P13.107

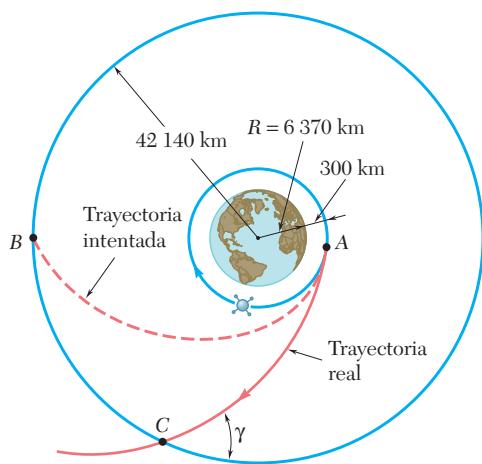


Figura P13.108

13.108 Una plataforma espacial se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura de 300 km. Cuando la plataforma pasa por A, un cohete que lleva un satélite de comunicación se lanza desde la plataforma con una velocidad relativa de 3.44 km/s de magnitud en una dirección tangente a la órbita de la plataforma. Esto se hizo para poner al cohete en una órbita de transferencia elíptica al colocarlo en el punto B, donde el cohete sería encendido de nuevo para situar al satélite en una órbita geo-síncrona de 42 140 km de radio. Después del lanzamiento se descubrió que la velocidad relativa que se impidió al cohete era demasiado grande. Determine el ángulo γ y al cual el cohete cruzará la órbita intentada en el punto C.

13.109 Un vehículo espacial se encuentra en una órbita circular a una altura de 225 mi sobre la Tierra. Para aterrizar disminuye su rapidez cuando pasa por A encendiendo su motor durante un breve intervalo en una dirección opuesta a la dirección de su movimiento. Si se sabe que la velocidad del vehículo espacial debe formar un ángulo $\phi_B = 60^\circ$ con la vertical cuando llegue al punto B a una altura de 40 mi, determine a) la rapidez requerida del vehículo cuando abandona su órbita circular en A, b) su rapidez en el punto B.

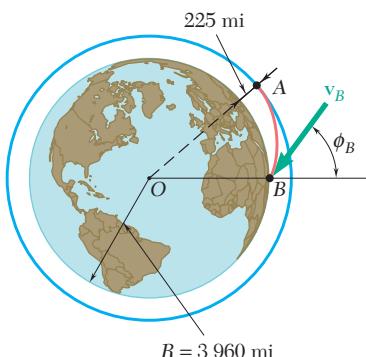


Figura P13.109

***13.110** En el problema 13.109 la rapidez del vehículo espacial se redujo cuando pasó por A y activó su motor en una dirección opuesta a la dirección de movimiento. Una estrategia alterna para sacar el vehículo espacial de su órbita circular sería girarlo de manera que su motor apuntara alejándose de la Tierra y darle después una velocidad incremental Δv_A hacia el centro O de la Tierra. Esto requeriría probablemente un gasto más pequeño de energía cuando se encendiera el motor en A, pero podría provocar un descenso demasiado rápido en B. Suponiendo que se recurre a esta estrategia con sólo 50 por ciento del gasto de energía correspondiente al problema 13.109, determine los valores resultantes de ϕ_B y v_B .

13.111 Cuando el módulo de excursión lunar (LEM) se puso a la deriva después del regreso de dos de los astronautas al módulo de comando de la nave Apolo, el cual orbitaba la Luna a una altura de 140 km, su rapidez se redujo para dejar que se estrellara con la superficie lunar. Determine a) la cantidad mínima a la cual la rapidez del LEM tendría que haberse reducido para asegurar que se estrellaría sobre la superficie de la Luna, b) la cantidad en la que la rapidez tendría que haberse reducido para provocar que golpearía la superficie lunar en un ángulo de 45° . (Sugerencia: El punto A está en el apogeo de la trayectoria de impacto elíptica. Recuerde también que la masa de la Luna es 0.0123 veces la masa de la Tierra.)

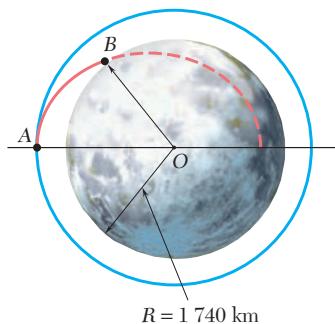


Figura P13.111

***13.112** Una sonda espacial describe una órbita circular de radio nR con una velocidad v_0 alrededor de un planeta con radio R y centro O . Demuestre que a) para que la sonda deje su órbita y golpee el planeta a un ángulo θ con la vertical, su velocidad puede reducirse a αv_0 , donde

$$\alpha = \operatorname{sen} \theta \sqrt{\frac{2(n-1)}{n^2 - \operatorname{sen}^2 \theta}}$$

b) la sonda no golpeará al planeta si α es mayor que $\sqrt{2/(1+n)}$.

13.113 Muestre que los valores v_A y v_P de la rapidez de un satélite terrestre en el apogeo A y en el perigeo P de una órbita elíptica se definen mediante las relaciones

$$v_A^2 = \frac{2GM}{r_A + r_p} \frac{r_p}{r_A} \quad v_P^2 = \frac{2GM}{r_A + r_p} \frac{r_A}{r_p}$$

donde M es la masa de la Tierra y r_A y r_p representan, respectivamente, las distancias máxima y mínima de la órbita al centro de la Tierra.

13.114 Muestre que la energía total E de un satélite terrestre de masa m que describe una órbita elíptica es $E = -GMm/(r_A + r_p)$, donde M es la masa de la Tierra, y r_A y r_p representan, respectivamente, las distancias máxima y mínima de la órbita al centro de la Tierra. (Recuerde que la energía potencial gravitacional del satélite se definió igual a cero a una distancia infinita de la Tierra.)

13.115 Una nave espacial de masa m describe una órbita circular de radio r_1 alrededor de la Tierra. a) Muestre que la energía adicional ΔE que debe impartirse a la nave espacial para transferirla a una órbita circular de radio r_2 mayor es

$$\Delta E = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1r_2}$$

donde M es la masa de la Tierra. b) Demuestre además que si la transfe- rencia de una órbita circular a otra órbita circular se ejecuta al colocar la nave espacial sobre una trayectoria semielíptica de transición AB , las cantidades de energía ΔE_A y ΔE_B que deben impartirse en A y B son, respectivamente, proporcionales a r_2 y r_1 :

$$\Delta E_A = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \Delta E \quad \Delta E_B = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \Delta E$$

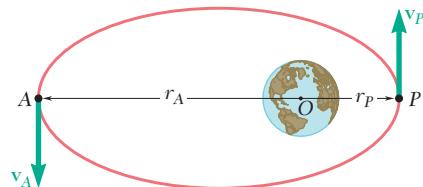


Figura P13.113 y P13.114

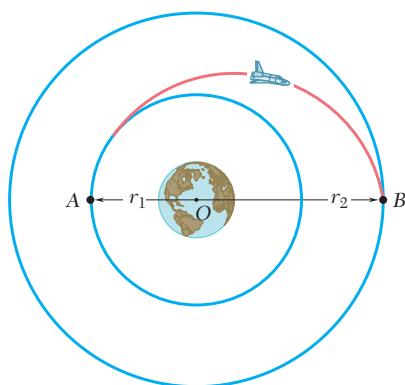


Figura P13.115

13.116 Se lanza un misil desde el suelo con una velocidad inicial v_0 formando un ángulo ϕ_0 con la vertical. Si el misil va a alcanzar una altura máxima igual a aR , donde R es el radio de la Tierra, a) muestre que el ángulo requerido ϕ_0 se define mediante la relación

$$\sin \phi_0 = (1 + \alpha) \sqrt{1 - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \left(\frac{v_{\text{esc}}}{v_0} \right)^2}$$

donde v_{esc} es la velocidad de escape, b) determine el intervalo de valores permisibles de v_0 .

***13.117** Utilice las respuestas obtenidas en el problema 13.107 para mostrar que la órbita circular intentada y que la órbita elíptica resultante se intersecan en los extremos del eje menor de la órbita elíptica.

***13.118** a) Exprese en términos de $r_{\text{mín}}$ y $v_{\text{máx}}$ la cantidad de movimiento angular por unidad de masa, h , y la energía total por unidad de masa, E/m , de un vehículo espacial que se mueve bajo la atracción gravitatoria de un planeta de masa M (figura 13.15). b) Eliminando $v_{\text{máx}}$ entre las ecuaciones obtenidas, deduzca la fórmula

$$\frac{1}{r_{\text{mín}}} = \frac{GM}{h^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \left(\frac{h}{GM} \right)^2} \right]$$

c) Demuestre que la excentricidad ϵ de la trayectoria del vehículo puede expresarse como

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \left(\frac{h}{GM} \right)^2}$$

d) Además muestre que la trayectoria del vehículo es una hipérbola, una elipse o una parábola, dependiendo de si E es positivo, negativo o cero.



Fotografía 13.1



Fotografía 13.2 Con esta prueba de impacto entre un F-4 Phantom y un objetivo rígido reforzado se determinó la fuerza del impacto en función del tiempo.

13.10. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

A continuación se considerará un tercer método básico útil para la solución de problemas que involucran movimiento de partículas. Este método se basa en el principio del impulso y la cantidad de movimiento, y se usa para resolver problemas que implican fuerza, masa, velocidad y tiempo. Es de particular interés en la resolución de problemas que implican movimiento impulsivo e impacto (secciones 13.11 y 13.12).

Considere una partícula de masa m sobre la que actúa una fuerza \mathbf{F} . Como se vio en la sección 12.3, la segunda ley de Newton puede expresarse en la forma

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (13.27)$$

donde $m\mathbf{v}$ es la cantidad de movimiento lineal de la partícula. Al multiplicar ambos lados de la ecuación (13.27) por dt e integrar a partir del tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 , se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{F} dt &= d(m\mathbf{v}) \\ \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt &= m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

o, al trasponer el último término,

$$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 \quad (13.28)$$

La integral en la ecuación (13.28) es un vector conocido como *impulso lineal*, o simplemente *impulso*, de la fuerza \mathbf{F} durante el intervalo considerado. Al descomponer \mathbf{F} en componentes rectangulares, se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \\ &= \mathbf{i} \int_{t_1}^{t_2} F_x dt + \mathbf{j} \int_{t_1}^{t_2} F_y dt + \mathbf{k} \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \quad (13.29)\end{aligned}$$

y se advierte que las componentes del impulso de la fuerza \mathbf{F} son, respectivamente, iguales a las áreas bajo las curvas que se obtienen al graficar las componentes F_x , F_y y F_z en función de t (figura 13.16). En el caso de una fuerza \mathbf{F} de magnitud y dirección constantes, el impulso se representa mediante el vector $\mathbf{F}(t_2 - t_1)$, que tiene la misma dirección que \mathbf{F} .

Si se usan unidades del SI, la magnitud del impulso de una fuerza se expresa en $\text{N} \cdot \text{s}$. Sin embargo, al recordar la definición del newton, se tiene

$$\text{N} \cdot \text{s} = (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2) \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

que es la unidad que se obtuvo en la sección 12.4 para la cantidad de movimiento lineal de una partícula. De tal modo, se verifica que la ecuación (13.28) es dimensionalmente correcta. Si se usan unidades de uso común en Estados Unidos, el impulso de una fuerza se expresa en $\text{lb} \cdot \text{s}$, la cual es también la unidad que se obtuvo en la sección 12.4 para la cantidad de movimiento lineal de una partícula.

La ecuación (13.28) expresa que cuando sobre una partícula actúa una fuerza \mathbf{F} durante un intervalo dado, la *cantidad de movimiento final* $m\mathbf{v}_2$ de la partícula puede obtenerse al sumar vectorialmente su *cantidad de movimiento inicial* $m\mathbf{v}_1$ y el *impulso* de la fuerza \mathbf{F} durante el intervalo considerado (figura 13.17).

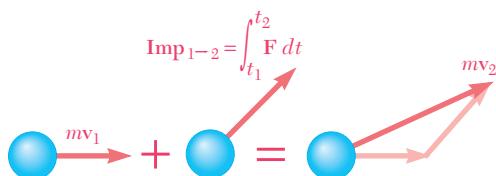


Figura 13.17

cantidad de movimiento inicial $m\mathbf{v}_1$ y el impulso de la fuerza \mathbf{F} durante el intervalo considerado (figura 13.17). Se escribe

$$m\mathbf{v}_1 + \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \quad (13.30)$$

Adviértase que si bien la energía cinética y el trabajo son cantidades escalares, la cantidad de movimiento y el impulso son cantidades vectoriales. Para obtener una solución analítica, es necesario entonces sustituir la ecuación (13.30) por las correspondientes ecuaciones de componentes

$$\begin{aligned}(mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x dt &= (mv_x)_2 \\ (mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y dt &= (mv_y)_2 \\ (mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_z dt &= (mv_z)_2 \quad (13.31)\end{aligned}$$

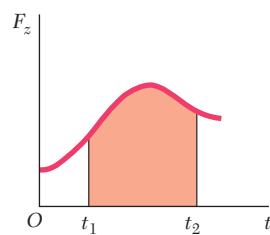
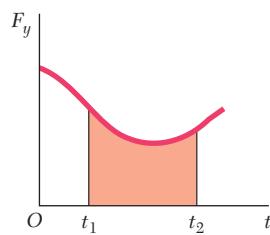
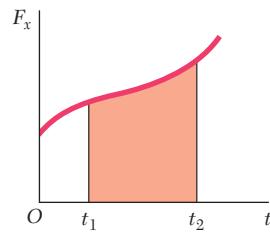


Figura 13.16

Cuando varias fuerzas actúan sobre una partícula, debe considerarse el impulso de cada una de las fuerzas. Se tiene

$$\mathbf{m}\mathbf{v}_1 + \sum \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{m}\mathbf{v}_2 \quad (13.32)$$

De nuevo, la ecuación que se obtuvo representa una relación entre cantidades vectoriales; en la solución real de un problema, ésta debe sustituirse por las correspondientes ecuaciones de las componentes.

Cuando un problema incluye dos o más partículas, cada partícula puede considerarse por separado y la ecuación (13.32) se escribe para cada partícula. También es posible sumar vectorialmente las cantidades de movimiento de todas las partículas y los impulsos de todas las fuerzas implicadas. Se escribe entonces

$$\sum m\mathbf{v}_1 + \sum \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \sum m\mathbf{v}_2 \quad (13.33)$$

Puesto que las fuerzas de acción y reacción ejercidas por las partículas entre sí forman pares de fuerzas iguales y opuestas, y puesto que el intervalo de t_1 a t_2 es común para todas las fuerzas implicadas, los impulsos de las fuerzas de acción y reacción se cancelan y sólo necesitan ser considerados los impulsos de las fuerzas externas.[†]

Si no se ejerce fuerza externa sobre las partículas o, de manera más general, si la suma de las fuerzas externas es cero, el segundo término en la ecuación (13.33) se anula y la ecuación (13.33) se reduce a

$$\sum m\mathbf{v}_1 = \sum m\mathbf{v}_2 \quad (13.34)$$

que expresa que *la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva*. Considere, por ejemplo, dos botes, de masa m_A y m_B , inicialmente en reposo, que están siendo jalados uno por el otro (figura 13.18).

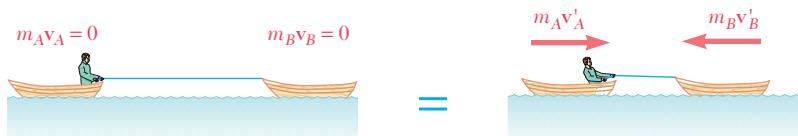


Figura 13.18

Si se ignora la resistencia del agua, las únicas fuerzas externas que actúan sobre los botes son sus pesos y las fuerzas de flotación ejercidas sobre ellos. Puesto que estas fuerzas están equilibradas, se escribe

$$\begin{aligned} \sum m\mathbf{v}_1 &= \sum m\mathbf{v}_2 \\ 0 &= m_A \mathbf{v}'_A + m_B \mathbf{v}'_B \end{aligned}$$

donde \mathbf{v}'_A y \mathbf{v}'_B representan las velocidades de los botes después de un intervalo finito. La ecuación obtenida indica que los botes se mueven en direcciones opuestas (uno hacia el otro) con velocidades inversamente proporcionales a sus masas.[‡]

[†]Se debe advertir la diferencia entre este enunciado y el correspondiente que se hizo en la sección 13.4 respecto al trabajo de las fuerzas de acción y reacción entre varias partículas. Si bien la suma de los impulsos de estas fuerzas siempre es cero, la suma de su trabajo es cero sólo bajo circunstancias especiales, por ejemplo, cuando los diversos cuerpos implicados se conectan por medio de cuerdas o eslabones inextensibles y están, en consecuencia, restringidos a moverse a lo largo de distancias iguales.

[‡]Los signos de igualdad azules usados en la figura 13.18 y en el resto de este capítulo se usan para expresar que dos sistemas de vectores son *equipolentes*, es decir, que tienen la misma resultante y momento resultante (véase la sección 3.19). Los signos de igualdad rojos se seguirán usando para indicar que los dos sistemas de vectores son *equivalentes*, esto es, que tienen el mismo efecto. Esto y el concepto de conservación de cantidad de movimiento para un sistema de partículas se estudiarán con gran detalle en el capítulo 14.

Una fuerza que actúa sobre una partícula durante un breve intervalo que es lo suficientemente grande para producir un cambio definido en la cantidad de movimiento se conoce como *fuerza impulsiva* y el movimiento resultante se denomina *movimiento impulsivo*. Por ejemplo, cuando se golpea una pelota de béisbol, el contacto entre el bate y la pelota se realiza durante un intervalo Δt muy corto. Sin embargo, el valor promedio de la fuerza \mathbf{F} ejercida por el bate sobre la pelota es muy grande, y el impulso resultante $\mathbf{F} \Delta t$ es lo suficientemente grande para cambiar el sentido de movimiento de la pelota (figura 13.19).

Cuando actúan fuerzas impulsivas sobre una partícula, la ecuación (13.32) se convierte en

$$m\mathbf{v}_1 + \sum \mathbf{F} \Delta t = m\mathbf{v}_2 \quad (13.35)$$

Es posible ignorar cualquier fuerza que no sea una fuerza impulsiva, puesto que el impulso correspondiente $\mathbf{F} \Delta t$ es muy pequeño. Las *fuerzas no impulsivas* incluyen el peso de un cuerpo, la fuerza ejercida por un resorte o cualquier otra fuerza que se *sabe* que es pequeña comparada con una fuerza impulsiva. Las reacciones desconocidas quizás sean o no impulsivas; sus impulsos deben consecuentemente incluirse en la ecuación (13.35) siempre que no se haya demostrado que se pueden ignorar. El impulso del peso de la pelota de béisbol considerada antes, por ejemplo, puede ignorarse. Si se analiza el movimiento del bate, también es factible ignorar el impulso del peso del bate. Los impulsos de las reacciones de las manos del jugador sobre el bate, sin embargo, deberán incluirse; estos impulsos no serán despreciables si la pelota se golpea de manera incorrecta.

Adviértase que el método del impulso y la cantidad de movimiento es en particular efectivo en el análisis del movimiento impulsivo de una partícula, ya que implica sólo las velocidades inicial y final de la partícula y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre la misma. Por otro lado, la aplicación directa de la segunda ley de Newton requeriría la determinación de las fuerzas como funciones del tiempo y la integración de las ecuaciones de movimiento sobre el intervalo Δt .

En el caso del movimiento impulsivo de varias partículas, es posible usar la ecuación (13.33), la cual se reduce a

$$\sum m\mathbf{v}_1 + \sum \mathbf{F} \Delta t = \sum m\mathbf{v}_2 \quad (13.36)$$

donde el segundo término implica sólo fuerzas impulsivas externas. Si todas las fuerzas externas que actúan sobre las diversas partículas son no impulsivas, se anula el segundo término en la ecuación (13.36) y esta ecuación se reduce a la ecuación (13.34). Se escribe

$$\sum m\mathbf{v}_1 = \sum m\mathbf{v}_2 \quad (13.34)$$

que expresa que la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva. Esta situación ocurre, por ejemplo, cuando dos partículas que se mueven libremente chocan entre sí. Sin embargo, se debe advertir que mientras se conserva la cantidad de movimiento total de las partículas, su energía total *no* se conserva en general. Los problemas que implican el choque o *impacto* de dos partículas se estudiarán en detalle en las secciones 13.12 a 13.14.

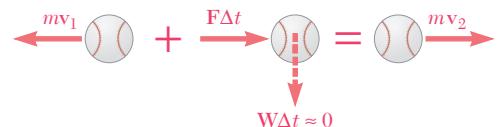
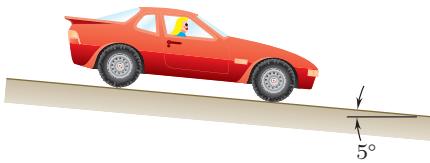


Figura 13.19



PROBLEMA RESUELTO 13.10

Un automóvil que pesa 4000 lb desciende por una pendiente de 5° a una rapidez de 60 mi/h cuando se aplican los frenos, lo que provoca una fuerza de frenado total constante (aplicada por el camino sobre los neumáticos) de 1500 lb. Determine el tiempo que se requiere para que el automóvil se detenga.

SOLUCIÓN

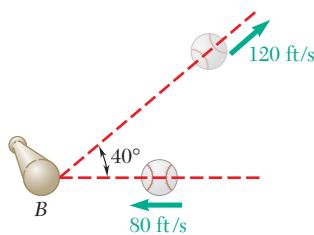
Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento. Puesto que cada una de las fuerzas es constante en magnitud y dirección, cada impulso correspondiente es igual al producto de la fuerza y al intervalo t .

$$mv_1 + \sum \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = mv_2$$

$$\downarrow \text{componentes: } mv_1 + (W \sin 5^\circ)t - Ft = 0$$

$$(4000/32.2)(88 \text{ ft/s}) + (4000 \sin 5^\circ)t - 1500t = 0$$

$$t = 9.49 \text{ s}$$

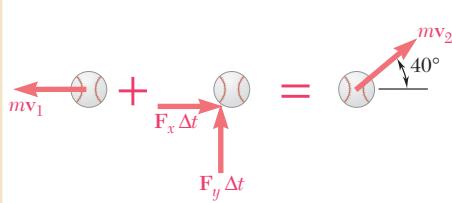


PROBLEMA RESUELTO 13.11

Una pelota de béisbol de 4 oz se lanza con una velocidad de 80 ft/s hacia un bateador. Después de que la bola es golpeada por el bate B , adquiere una velocidad de 120 ft/s en la dirección que se indica. Si el bate y la bola están en contacto 0.015 s, determine la fuerza impulsiva promedio ejercida sobre la pelota durante el impacto.

SOLUCIÓN

Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento a la pelota. Puesto que el peso de esta misma es una fuerza no impulsiva, puede ignorarse.



$$mv_1 + \sum \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = mv_2$$

$$\downarrow \text{componentes } x: \quad -mv_1 + F_x \Delta t = mv_2 \cos 40^\circ$$

$$-\frac{4}{32.2}(80 \text{ ft/s}) + F_x(0.015 \text{ s}) = \frac{4}{32.2}(120 \text{ ft/s}) \cos 40^\circ$$

$$F_x = +89.0 \text{ lb}$$

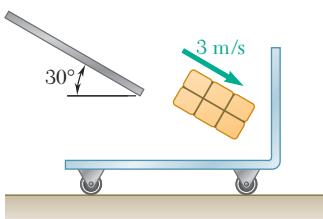
$$\downarrow \text{componentes } y: \quad 0 + F_y \Delta t = mv_2 \sin 40^\circ$$

$$F_y(0.015 \text{ s}) = \frac{4}{32.2}(120 \text{ ft/s}) \sin 40^\circ$$

$$F_y = +39.9 \text{ lb}$$

A partir de sus componentes F_x y F_y se determina la magnitud y dirección de la fuerza \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = 97.5 \text{ lb} \angle 24.2^\circ$$



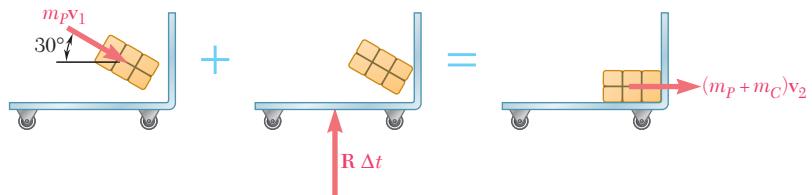
PROBLEMA RESUELTO 13.12

Un paquete de 10 kg cae desde una rampa a una velocidad de 3 m/s en un carro de 25 kg. Si el carro está al inicio en reposo y puede rodar libremente, determine a) la velocidad final del carro, b) el impulso ejercido por el carro sobre el paquete, c) la fracción de la energía inicial perdida en el impacto.

SOLUCIÓN

Se aplica primero el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema paquete-carro para determinar la velocidad \mathbf{v}_2 del carro y el paquete. Después se aplica el mismo principio al paquete sólo para determinar el impulso $\mathbf{F} \Delta t$ ejercido sobre éste.

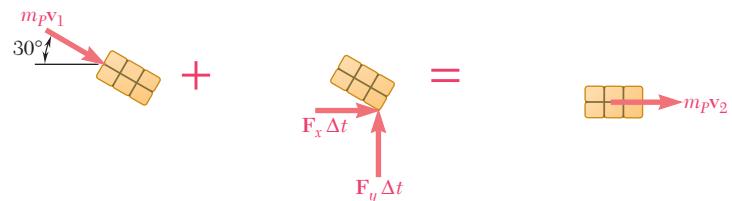
a) Principio del impulso-cantidad de movimiento: paquete y carro



$$\begin{aligned} \xrightarrow{\pm} \text{componentes } x: \quad & m_P v_1 + \Sigma \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = (m_P + m_C) v_2 \\ & m_P v_1 \cos 30^\circ + 0 = (m_P + m_C) v_2 \\ & (10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \cos 30^\circ = (10 \text{ kg} + 25 \text{ kg}) v_2 \\ & \mathbf{v}_2 = 0.742 \text{ m/s} \rightarrow \end{aligned}$$

Se advierte que la ecuación utilizada expresa la conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x .

b) Principio del impulso-cantidad de movimiento: paquete



$$\begin{aligned} \xrightarrow{\pm} \text{componentes } x: \quad & m_P v_1 + \Sigma \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m_P v_2 \\ & (10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \cos 30^\circ + F_x \Delta t = (10 \text{ kg})(0.742 \text{ m/s}) \\ & F_x \Delta t = -18.56 \text{ N} \cdot \text{s} \\ \xrightarrow{\uparrow} \text{componentes } y: \quad & -m_P v_1 \sin 30^\circ + F_y \Delta t = 0 \\ & -(10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \sin 30^\circ + F_y \Delta t = 0 \\ & F_y \Delta t = +15 \text{ N} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

El impulso ejercido sobre el paquete es $\mathbf{F} \Delta t = 23.9 \text{ N} \cdot \text{s} \triangleq 38.9^\circ$

c) Fracción de la energía perdida.

Las energías inicial y final son

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_P v_1^2 = \frac{1}{2}(10 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2 = 45 \text{ J} \\ T_2 &= \frac{1}{2} (m_P + m_C) v_2^2 = \frac{1}{2}(10 \text{ kg} + 25 \text{ kg})(0.742 \text{ m/s})^2 = 9.63 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\text{La fracción de energía perdida es } \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{45 \text{ J} - 9.63 \text{ J}}{45 \text{ J}} = 0.786$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se integró la segunda ley de Newton para deducir el *principio del impulso y la cantidad de movimiento* para una partícula. Si se recuerda que la cantidad de movimiento lineal de una partícula se definió como el producto de su masa m y su velocidad \mathbf{v} [sección 12.3], se escribe

$$m\mathbf{v}_1 + \sum \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \quad (13.32)$$

Esta ecuación expresa que la cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}_2$ de una partícula en el tiempo t_2 puede obtenerse sumando a su cantidad de movimiento lineal $m\mathbf{v}_1$ en el tiempo t_1 los *impulsos* de las fuerzas ejercidas sobre la partícula durante el intervalo t_1 a t_2 . Con fines de cálculo, las cantidades de movimiento y los impulsos pueden expresarse en términos de sus componentes rectangulares, y es posible sustituir la ecuación (13.32) por las ecuaciones escalares equivalentes. Las unidades de la cantidad de movimiento y del impulso son N · s en el SI y lb · s en las unidades de uso común en Estados Unidos. Para resolver problemas utilizando esta ecuación se pueden seguir los siguientes pasos:

1. **Dibujar un diagrama** que muestre la partícula, su cantidad de movimiento en t_1 y en t_2 , y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre la partícula durante el intervalo t_1 a t_2 .
2. **Calcular el impulso de cada fuerza**, expresándolo en términos de sus componentes rectangulares si está implicada más de una dirección. Es posible que encuentre los siguientes casos:

- a) **El intervalo es finito y la fuerza es constante.**

$$\mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{F}(t_2 - t_1)$$

- b) **El intervalo es finito y la fuerza es una función de t .**

$$\mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) dt$$

- c) **El intervalo es muy pequeño y la fuerza es muy grande.** La fuerza se denomina *una fuerza impulsiva* y su impulso sobre el intervalo $t_2 - t_1 = \Delta t$ es

$$\mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{F} \Delta t$$

Hay que observar que este impulso es *cero para una fuerza no impulsiva* tal como el *peso* de un cuerpo, la fuerza ejercida por un *resorte*, o cualquier otra fuerza que se sepa que es pequeña en comparación con las fuerzas impulsivas. Sin embargo, las reacciones desconocidas *no pueden suponerse* no impulsivas y sus impulsos deben tomarse en cuenta.

3. **Sustituir los valores obtenidos para los impulsos en la ecuación (13.32)** o en las ecuaciones escalares equivalentes. Encontrará que las fuerzas y las velocidades en los problemas de esta lección están contenidas en un plano. Por lo tanto, escribirá dos ecuaciones escalares y las resolverá para *dos incógnitas*. Estas incógnitas pueden ser un

tiempo [problema resuelto 13.10], una *velocidad* y un *impulso* [problema resuelto 13.12] o una *fuerza impulsiva promedio* [problema resuelto 13.11].

4. Cuando están implicadas varias partículas, debe dibujarse un diagrama independiente para cada una de ellas, en el que se muestren la cantidad de movimiento inicial y final de la partícula, así como los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre ésta.

a) **Sin embargo, suele ser conveniente** considerar primero un diagrama que incluya a todas las partículas. Este diagrama conduce a la ecuación

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = \Sigma m\mathbf{v}_2 \quad (13.33)$$

donde los impulsos de *únicamente las fuerzas externas al sistema* necesitan ser consideradas. Por lo tanto, las dos ecuaciones escalares equivalentes no contendrán ninguno de los impulsos de las fuerzas internas desconocidas.

b) **Si la suma de los impulsos de las fuerzas externas es cero**, la ecuación (13.33) se reduce a

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \quad (13.34)$$

que expresa que *se conserva la cantidad de movimiento total de las partículas*. Esto ocurre si la resultante de las fuerzas externas es cero o, cuando el intervalo Δt es muy corto (movimiento impulsivo), si todas las fuerzas externas son no impulsivas. No obstante, hay que tener presente que es posible que se conserve la cantidad de movimiento total *en una dirección*, pero no en la otra [problema resuelto 13.12].

Problemas

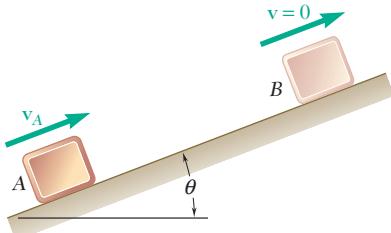


Figura P13.121



Figura P13.123

13.119 Un automóvil de 1 200 kg se mueve a una rapidez de 90 km/h cuando los frenos se aplican por completo, lo que ocasiona que las cuatro llantas patinen. Determine el tiempo requerido para detener el automóvil *a)* sobre pavimento seco ($\mu_k = 0.75$), *b)* sobre un camino congelado ($\mu_k = 0.10$).

13.120 Un trasatlántico de 40 000 ton tiene una velocidad inicial de 2.5 mi/h. Si se desprecia la resistencia por fricción del agua, determine el tiempo requerido para llevar al trasatlántico al reposo usando un solo remolcador que ejerce una fuerza de 35 kips.

13.121 La velocidad inicial del bloque en la posición *A* es de 30 ft/s. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.30$, determine el tiempo que tarda el bloque en alcanzar *B* con velocidad cero, si *a)* $\theta = 0$, *b)* $\theta = 20^\circ$.

13.122 Sobre una partícula de 2 kg actúa una fuerza $\mathbf{F} = (8 - 6t)\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j} + (4 + t)\mathbf{k}$, donde \mathbf{F} se expresa en newtons. Si se sabe que la velocidad de la partícula es $\mathbf{v} = (150 \text{ m/s})\mathbf{i} + (100 \text{ m/s})\mathbf{j} - (250 \text{ m/s})\mathbf{k}$ en $t = 0$, determine *a)* el tiempo en el cual la velocidad es paralela al plano yz , *b)* la velocidad correspondiente de la partícula.

13.123 Las marcas sobre una pista de carreras indican que las ruedas traseras (las de la tracción) de un automóvil patinaron en los primeros 60 ft de la pista de 1 320 ft. *a)* Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética es de 0.60, determine el menor tiempo posible en el que el automóvil puede recorrer los 60 ft iniciales si empieza desde el reposo y las ruedas frontales del automóvil apenas se despegan del suelo. *b)* Determine el tiempo mínimo para que el automóvil corra toda la carrera si, después de patinar durante 60 ft, las ruedas giran sin patinar por el resto de la carrera. Suponga que para la parte de la carrera con rodamiento 60 por ciento del peso del automóvil se apoya sobre las ruedas traseras y que el coeficiente de fricción estática es 0.85. No tome en cuenta la resistencia del aire y la resistencia al rodamiento.

13.124 Un camión viaja sobre un camino plano a una rapidez de 90 km/h cuando se aplican los frenos para frenarlo hasta 30 km/h. Un sistema de frenado antiderrapante limita la fuerza de frenado a un valor en el cual los neumáticos del camión están a punto de patinar. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el camino y los neumáticos es igual a 0.65, determine el tiempo más corto necesario para que el camión se frene.

13.125 Un camión desciende sobre un camino con un desnivel del 4 por ciento a una rapidez de 60 mi/h cuando se aplican los frenos para frenarlo hasta 20 mi/h. Un sistema de frenado antiderrapante limita la fuerza de frenado a un valor en el cual los neumáticos del camión están a punto de patinar. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el camino y los neumáticos es igual a 0.60, determine el tiempo más corto necesario para que el camión se frene.

13.126 El equipaje sobre el piso de un carro maletero de un tren de alta velocidad no cuenta con ningún medio para evitar su movimiento aparte de la fricción. Determine el valor mínimo permisible del coeficiente de fricción estática entre un baúl y el piso del carro si el baúl no debe deslizarse cuando el tren reduzca su velocidad a una razón constante de 200 a 90 km/h en un intervalo de 12 s.

13.127 Retome el problema 13.126, y ahora suponga que el tren está descendiendo por una pendiente del 5 por ciento.

13.128 Un velero y sus ocupantes con un peso de 980 lb navegan a favor del viento a 8 mi/h cuando se levanta otra vela para incrementar su rapidez. Determine la fuerza neta proporcionada por la segunda vela durante el intervalo de 10 s que requiere el velero para alcanzar una rapidez de 12 mi/h.

13.129 Un tren ligero formado por dos vagones viaja a 45 mi/h. El peso del vagón A es de 18 tons y el del vagón B es de 13 tons. Cuando se aplican repentinamente los frenos, se ejerce una fuerza de frenado constante de 4 300 lb en cada vagón. Determine *a)* el tiempo requerido para que el tren se detenga después de que se aplican los frenos, *b)* la fuerza en el acoplamiento entre los vagones mientras el tren está desacelerando.

13.130 Retome el problema 13.129, y ahora suponga que se aplica una fuerza de frenado constante de 4 300 lb al vagón B, pero que no se aplican los frenos en el vagón A.

13.131 Un tractocamión con una cabina de 2 000 kg y un remolque de 8 000 kg viaja sobre un camino plano a 90 km/h. Los frenos en el remolque fallan y el sistema antiderrapante de la cabina proporciona la mayor fuerza posible que no provocará que patinen los neumáticos. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.65, determine *a)* el tiempo más corto para que la cabina se detenga, *b)* la fuerza en el acoplamiento durante ese tiempo.

13.132 Un cilindro C de 8 kg descansa sobre una plataforma A de 4 kg sostenida por una cuerda que pasa sobre las poleas D y E y está unido a un bloque B de 4 kg. Si el sistema se suelta desde el reposo, determine *a)* la velocidad del bloque B después de 0.8 s, *b)* la fuerza ejercida por el cilindro sobre la plataforma.

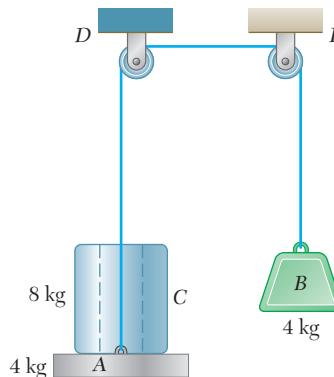


Figura P13.132

13.133 El sistema mostrado en la figura se suelta desde el reposo. Determine el tiempo que se requiere para que la velocidad de A llegue a 1 m/s. No tome en cuenta la fricción ni la masa de las poleas.

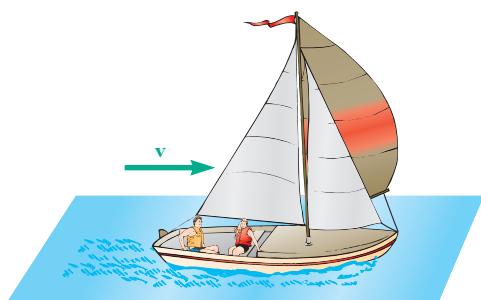


Figura P13.128

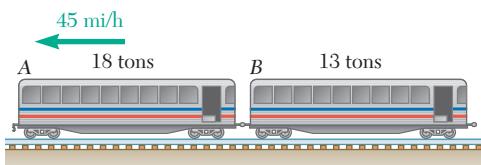


Figura P13.129

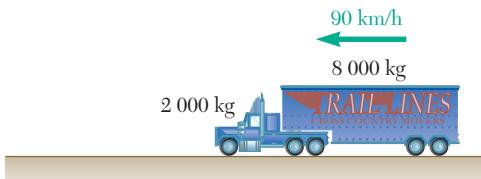


Figura P13.131

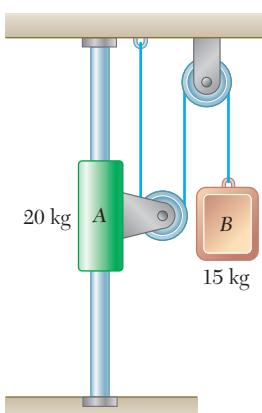


Figura P13.133

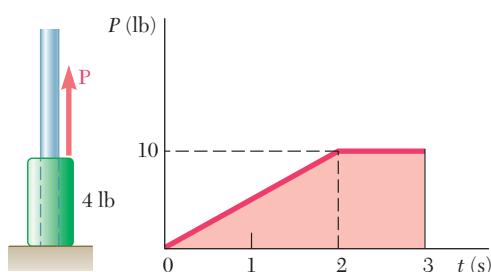


Figura P13.134 y P13.135

13.134 Sobre un collarín de 4 lb que puede deslizarse sobre una varilla vertical sin fricción actúa una fuerza \mathbf{P} que varía en magnitud de la manera que se indica en la figura. Si el collarín está inicialmente en reposo, determine su velocidad en a) $t = 2$ s, b) $t = 3$ s.

13.135 Sobre un collarín de 4 lb que puede deslizarse sobre una varilla vertical sin fricción actúa una fuerza \mathbf{P} que varía en magnitud de la manera que se indica en la figura. Si al principio el collarín está en reposo, determine a) la rapidez máxima del collarín, b) el tiempo en el que la velocidad es cero.

13.136 Sobre un bloque de 125 lb que inicialmente está en reposo se aplica una fuerza \mathbf{P} que varía como se muestra en la figura. Si se sabe que los coeficientes de fricción entre el bloque y la superficie horizontal son $\mu_s = 0.50$ y $\mu_k = 0.40$, determine a) el tiempo en el que el bloque comenzará a moverse, b) la rapidez máxima que alcanza el bloque, c) el tiempo en el que el bloque dejará de moverse.

13.137 Retome el problema 13.136, y ahora suponga que el peso del bloque es de 175 lb.

13.138 Se va a obtener un modelo simplificado consistente en una línea recta para la variación de la presión dentro del cañón de 10 mm de diámetro de un rifle cuando se lanza una bala de 20 g. Si se sabe que se requiere 1.6 ms para recorrer la longitud del cañón y que la velocidad de la bala al salir es de 700 m/s, determine el valor de p_0 .

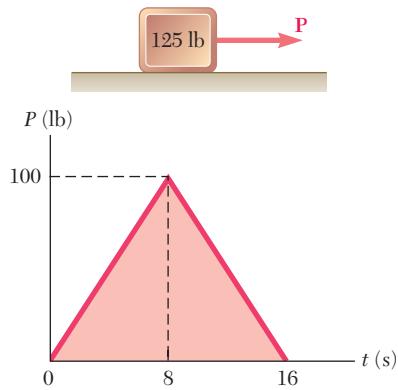


Figura P13.136

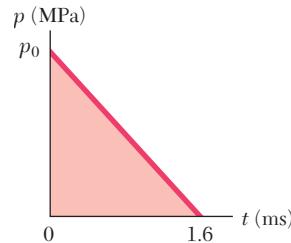


Figura P13.138

13.139 El siguiente modelo matemático se sugirió para la variación en la presión dentro del barril de un rifle con un diámetro de 10 mm, al disparar una bala de 25 g:

$$p(t) = (950 \text{ MPa})e^{-t/(0.16 \text{ ms})}$$

donde t se expresa en ms. Si se sabe que la bala tardó 1.44 ms en recorrer toda la longitud del barril y que la velocidad de la bala después de salir fue medida en 520 m/s, determine el error porcentual introducido si la ecuación anterior se usa para calcular la velocidad en la boca del rifle.

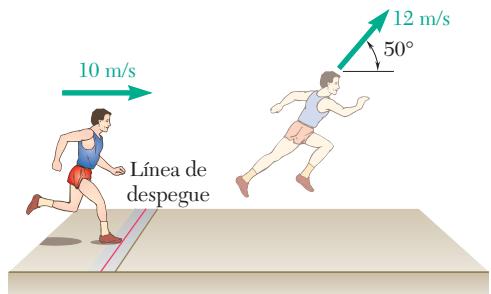


Figura P13.140

13.140 El salto triple es una prueba de pista y campo en la cual un atleta inicia una carrera y trata de llegar lo más lejos posible, con una zancada, un paso y un salto. En la figura se muestra la zancada inicial del atleta. Si se supone que éste se aproxima a la línea de despegue desde la izquierda con una velocidad horizontal de 10 m/s, permanece en contacto con el suelo durante 0.18 s, y despega a un ángulo de 50° con una velocidad de 12 m/s, determine la componente vertical de la fuerza impulsiva promedio ejercida por el suelo sobre su pie. Dé su respuesta en términos del peso W del atleta.

13.141 La última parte de la competencia atlética de salto triple es el salto, en el cual el atleta realiza el último de sus tres avances, aterrizando en un foso de arena. Si se supone que la velocidad de un atleta de 185 lb justo antes de aterrizar es de 30 ft/s a un ángulo de 35° con la horizontal y que el atleta se detiene por completo 0.22 s después del aterrizaje, determine la componente horizontal de la fuerza impulsiva promedio que se ejerce sobre sus pies durante el aterrizaje.

13.142 Antes de diseñar un prototipo de cinturón de seguridad que se evaluará en pruebas de choque de automóviles, se realiza una estimación de la carga esperada en el cinturón de seguridad que pasa por el hombro. Si un automóvil que viaja a 45 mi/h se detiene en 110 ms, determine *a)* la fuerza impulsiva promedio ejercida por un hombre de 200 lb sobre el cinturón, *b)* la fuerza máxima F_m que se ejerce sobre el cinturón si el diagrama fuerza-tiempo tiene la forma que se muestra en la figura.

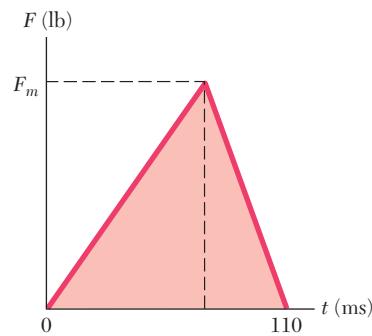
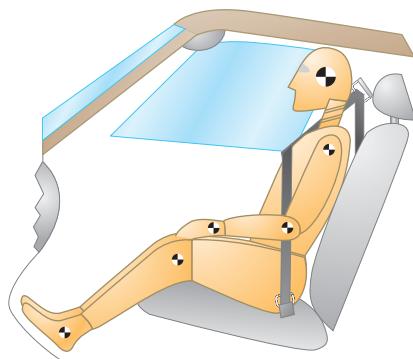


Figura P13.142

13.143 Una pelota de golf de 46 g se golpea con un palo de golf y sale con una velocidad de 50 m/s. Suponga que para $0 \leq t \leq t_0$, donde t_0 es la duración del impacto, la magnitud F de la fuerza ejercida sobre la pelota puede expresarse como $F = F_m \operatorname{sen}(\pi t/t_0)$. Si se sabe que $t_0 = 0.5$ ms, determine el valor máximo F_m , de la fuerza ejercida sobre la pelota.

13.144 El diseño de un nuevo implante de cadera sin cemento, se estudiará utilizando un implante instrumentado y un fémur simulado fijo. Si se supone que el cincel aplica una fuerza promedio de 2 kN por un tiempo de 2 ms sobre el implante de 200 g, determine *a)* la velocidad del implante inmediatamente después del impacto, *b)* la resistencia promedio del implante a la penetración si éste se mueve 1 mm antes de quedar en reposo.

13.145 Un carro de ferrocarril de 20 Mg que se mueve a 4 km/h se acoplará con un carro de 40 Mg que se encuentra en reposo con las ruedas aseguradas ($\mu_k = 0.30$). Determine *a)* la velocidad de ambos carros después de completar el acoplamiento, *b)* el tiempo que le toma a ambos carros quedar en reposo.

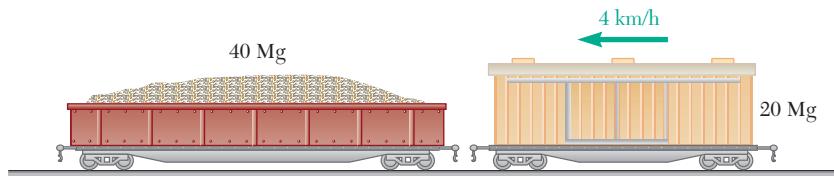


Figura P13.145

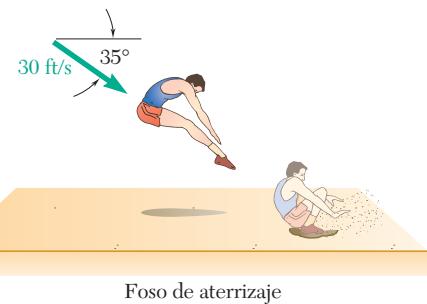


Figura P13.141



Figura P13.144

13.146 En un crucero el automóvil *B* viajaba hacia el sur y el automóvil *A* en dirección 30° al noreste cuando chocaron entre sí. Luego de la investigación se determinó que después del choque los dos automóviles quedaron trabados y patinaron a un ángulo de 10° noreste. Cada conductor afirmó que viajaba al límite de velocidad de 50 km/h y que trató de frenar, pero que no pudo evitar el choque debido a que el otro conductor iba bastante más rápido. Si se sabe que los pesos de los automóviles *A* y *B* eran, respectivamente, de $1\,500$ y $1\,200 \text{ kg}$, determine *a)* cuál de los automóviles iba más rápido, *b)* la rapidez del automóvil que iba a mayor velocidad si el vehículo más lento viajaba al límite de velocidad.

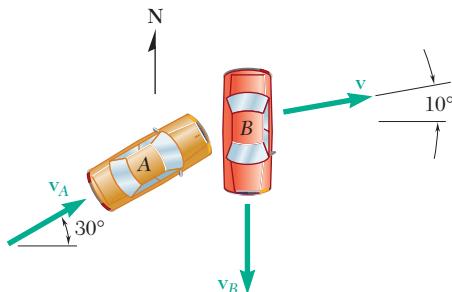


Figura P13.146

13.147 Una madre y su pequeño hijo esquían juntos, mientras la mujer sostiene el extremo de una cuerda atada a la cintura del niño. Se mueven a una rapidez de 7.2 km/h sobre una porción plana de la pista de esquí, cuando la madre observa que se están aproximando a una pendiente descendente. Decide jalar la cuerda para disminuir la velocidad de su hijo. Si se sabe que esta maniobra ocasiona que la rapidez del niño disminuya a la mitad en 3 s y se desprecia la fricción, determine *a)* la rapidez de la madre al final del intervalo de 3 s , *b)* el valor promedio de la tensión en la cuerda durante ese periodo.

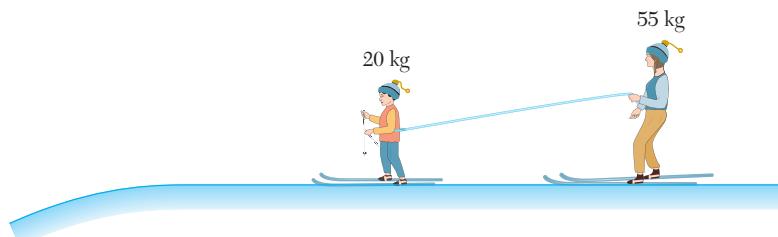


Figura P13.147

13.148 La bala *B* pesa 0.5 oz y los bloques *A* y *C* pesan 3 lb cada uno. El coeficiente de fricción entre los bloques y el plano es $\mu_k = 0.25$. En un inicio, la bala se mueve con una velocidad v_0 y los bloques *A* y *C* se encuentran en reposo (figura 1). Despues de que la bala pasa a través de *A* se incrusta en el bloque *C* y los tres objetos se detienen en las posiciones mostradas (figura 2). Determine la rapidez inicial v_0 de la bala.

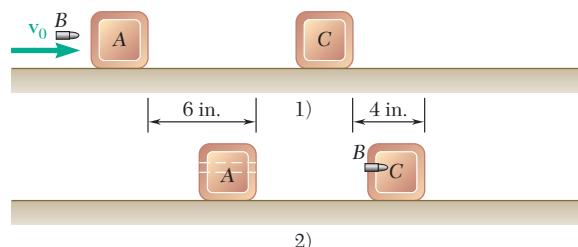


Figura P13.148

- 13.149** Dos esferas idénticas A y B , cada una con masa m , están unidas a una cuerda inextensible de longitud L , y se encuentran separadas por una distancia a sobre una superficie sin fricción. A la esfera B se le da una velocidad v_0 en una dirección perpendicular a la línea AB y se mueve sin fricción hasta que llega a B' cuando la cuerda se pone tensa. Determine *a)* la magnitud de la velocidad de cada esfera inmediatamente después de que la cuerda se pone tensa, *b)* la energía perdida cuando la cuerda se pone tensa.

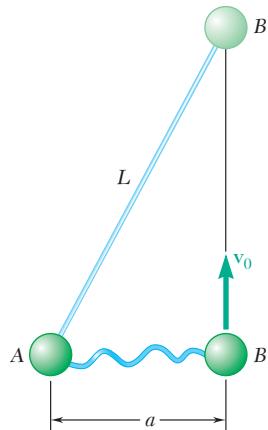


Figura P13.149

- 13.150** Dos nadadores A y B cuyo peso es, respectivamente, 190 lb y 125 lb, están en las esquinas diagonalmente opuestas de una balsa cuando se dan cuenta de que ésta se ha soltado de su ancla. El nadador A empieza a caminar de inmediato hacia B a una rapidez de 2 ft/s relativa a la balsa. Si se sabe que esta última pesa 300 lb, determine *a)* la rapidez de la balsa si B no se mueve, *b)* la rapidez con la cual B debe caminar hacia A para que la balsa no se mueva.



Figura P13.150

- 13.151** Una bola de 125 g que se mueve a una rapidez de 3 m/s golpea una placa de 250 g sostenida por medio de resortes. Si se supone que no se pierde energía en el impacto, determine *a)* la velocidad de la bola inmediatamente después del impacto, *b)* el impulso de la fuerza ejercida por la placa sobre la bola.

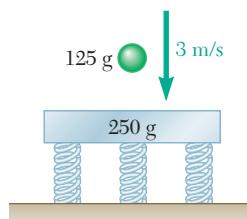


Figura P13.151

13.152 Una bala de masa m se dispara con una velocidad v_0 formando un ángulo θ con la horizontal y se incrusta en un bloque de madera con masa M . El bloque puede rodar sin fricción sobre un piso duro y mediante resortes se evita que golpee la pared. Determine las componentes horizontal y vertical del impulso de la fuerza ejercida por el bloque sobre la bala.

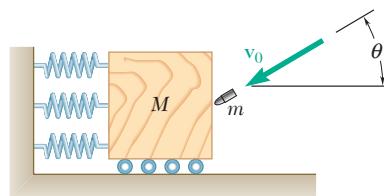


Figura P13.152

13.153 Con el fin de probar la resistencia al impacto de una cadena, ésta se suspende de una viga rígida de 240 lb sostenida mediante dos columnas. Una varilla unida al último eslabón es golpeada con un bloque de 60 lb que se deja caer desde una altura de 5 ft. Determine el impulso inicial ejercido sobre la cadena y la energía que absorbe, suponiendo que el bloque no rebota en la varilla y que las columnas que soportan la viga son *a*) perfectamente rígidas, *b*) equivalentes a dos resortes perfectamente elásticos.

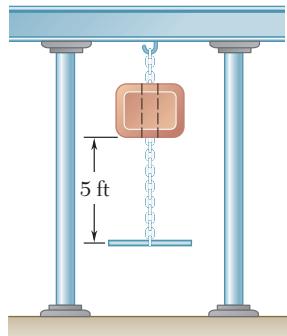


Figura P13.153

13.154 Al capturar una pelota, un jugador de béisbol puede suavizar el impacto jalando su mano hacia atrás. Si se supone que una pelota de 5 oz llega a la manopla a 90 mi/h y que el receptor jala hacia atrás su mano durante el impacto a una rapidez promedio de 30 ft/s sobre una distancia de 6 in., y la bola queda en reposo, determine la fuerza impulsiva promedio ejercida sobre la mano del jugador.

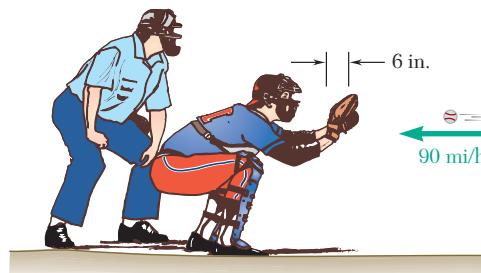


Figura P13.154

Un choque entre dos cuerpos que ocurre en un intervalo muy pequeño y durante el cual los dos cuerpos ejercen fuerzas relativamente grandes entre sí recibe el nombre de *impacto*. La normal común a las superficies en contacto durante el impacto se conoce como *línea de impacto*. Si los centros de masa en los dos cuerpos que chocan se ubican sobre esta línea, el impacto es un *impacto central*. En otro caso, se dice que el impacto es *excéntrico*. Nuestro estudio se limitará al impacto central de dos partículas. El análisis del impacto excéntrico de dos cuerpos rígidos se considerará después, en la sección 17.12.

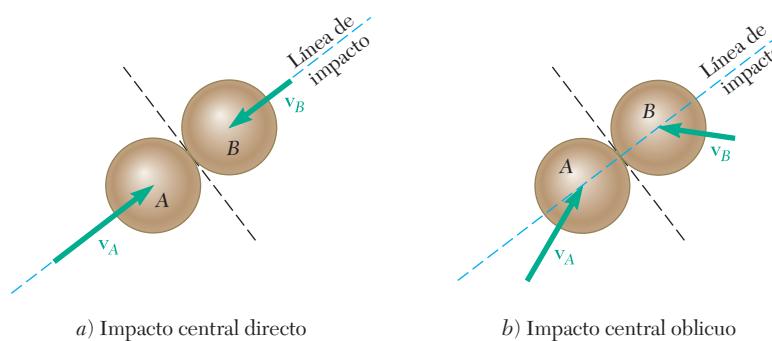


Figura 13.20

Si las velocidades de dos partículas se dirigen a lo largo de la línea de impacto, se dice que el impacto será *directo* (figura 13.20a). Si alguna o ambas partículas se mueven a lo largo de una línea que no sea la línea de impacto, se dice que el impacto será *oblicuo* (figura 13.20b).

13.13. IMPACTO CENTRAL DIRECTO

Considere dos partículas A y B, de masas m_A y m_B , las cuales se mueven en la misma línea recta y hacia la derecha con velocidades conocidas \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B (figura 13.21a). Si \mathbf{v}_A es mayor que \mathbf{v}_B , la partícula A golpeará finalmente a la partícula B. Por el impacto, las dos partículas se deformarán y, al final del periodo de deformación, tendrán la misma velocidad \mathbf{u} (figura 13.21b). Se presentará un periodo de *restitución*, al final del cual, dependiendo de la magnitud de las fuerzas de impacto y de los materiales implicados, las dos partículas habrán recobrado su forma original o permanecerán deformadas. El propósito aquí es determinar las velocidades \mathbf{v}'_A y \mathbf{v}'_B de las partículas al final del periodo de restitución (figura 13.21c).

Considerando primero las dos partículas como un solo sistema, se advierte que no hay fuerza impulsiva externa. De tal modo, se conserva la cantidad de movimiento total de las dos partículas y se escribe

$$m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B = m_A \mathbf{v}'_A + m_B \mathbf{v}'_B$$

Puesto que todas las velocidades consideradas están dirigidas a lo largo del mismo eje, es posible sustituir la ecuación que se obtuvo por la siguiente relación que incluye sólo componentes escalares

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (13.37)$$

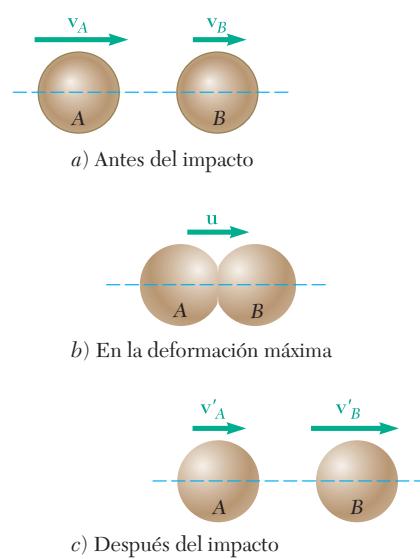


Figura 13.21

Un valor positivo para cualquiera de las cantidades escalares v_A , v_B , v'_A o v'_B significa que el vector correspondiente está dirigido hacia la derecha; un valor negativo indica que el vector correspondiente está dirigido hacia la izquierda.

Para obtener las velocidades v'_A y v'_B , es necesario establecer una segunda relación entre los escalares v_A y v'_B . Para este propósito, se considera ahora el movimiento de la partícula A durante el periodo de deformación y se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento. Puesto que la única fuerza impulsiva que actúa sobre A durante este periodo es la fuerza \mathbf{P} ejercida por B (figura 13.22a), se escribe, utilizando nuevo componentes escalares,

$$m_A v_A - \int P dt = m_A u \quad (13.38)$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de deformación. Al considerar ahora el movimiento de A durante el periodo de restitución, y denotar por \mathbf{R} la fuerza ejercida por B sobre A durante este periodo (figura 13.22b), se escribe

$$m_A u - \int R dt = m_A v'_A \quad (13.39)$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de restitución.

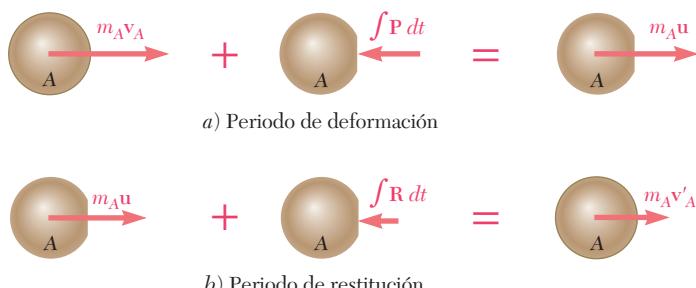


Figura 13.22

En general la fuerza \mathbf{R} ejercida sobre A durante el periodo de restitución difiere de la fuerza \mathbf{P} ejercida durante el periodo de deformación, y la magnitud $\int R dt$ de su impulso es menor que la magnitud $\int P dt$ del impulso de \mathbf{P} . El cociente de las magnitudes de los impulsos correspondientes, respectivamente, al periodo de restitución y al periodo de deformación se denomina *coeficiente de restitución* y se denota por e . Se escribe

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} \quad (13.40)$$

El valor del coeficiente e siempre está entre 0 y 1. Depende en gran medida de los materiales implicados, pero también varía de manera considerable con la velocidad de impacto y la forma y tamaño de los dos cuerpos que chocan.

Al resolver las ecuaciones (13.38) y (13.39) para los dos impulsos y sustituir en (13.40), se escribe

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u} \quad (13.41)$$

$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B} \quad (13.42)$$

Puesto que los cocientes en (13.41) y (13.42) son iguales, también lo son al cociente obtenido al sumar, respectivamente, sus numeradores y sus denominadores. Se tiene, por lo tanto

$$e = \frac{(u - v'_A) + (v'_B - u)}{(v_A - u) + (u - v_B)} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

y

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \quad (13.43)$$

En virtud de que $v'_B - v'_A$ representa la velocidad relativa de las dos partículas después del impacto y $v_A - v_B$ representa su velocidad relativa antes del impacto, la fórmula (13.43) expresa que *la velocidad relativa de dos partículas después del impacto puede obtenerse al multiplicar su velocidad relativa antes del impacto por el coeficiente de restitución*. Esta propiedad se utiliza para determinar experimentalmente el valor del coeficiente de restitución de dos materiales dados.

Las velocidades de las dos partículas después del impacto pueden obtenerse ahora al resolver simultáneamente las ecuaciones (13.37) y (13.43) para v'_A y v'_B . Hay que recordar que la deducción de las ecuaciones (13.37) y (13.43) se basa en la suposición de que la partícula B se localiza a la derecha de A , y que ambas partículas se están moviendo al principio hacia la derecha. Si la partícula B se mueve inicialmente hacia la izquierda, el escalar v_B debe considerarse negativo. La misma convención de signo se cumple para las velocidades después del impacto: un signo positivo para v'_A indicará que la partícula A se mueve hacia la derecha después del impacto, y un signo negativo señalará que se mueve hacia la izquierda.

Dos casos de impacto particulares son de especial interés:

1. *e = 0, impacto perfectamente plástico.* Cuando $e = 0$, la ecuación (13.43) produce $v'_B = v'_A$. No hay periodo de restitución y ambas partículas permanecen juntas después del impacto. Al sustituir $v'_B = v'_A = v'$ en la ecuación (13.37), la cual expresa que la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva, se escribe

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v' \quad (13.44)$$

Esta ecuación puede resolverse para la velocidad común v' de las dos partículas después del impacto.

2. *e = 1, impacto perfectamente elástico.* Cuando $e = 1$ la ecuación (13.43) se reduce a

$$v'_B - v'_A = v_A - v_B \quad (13.45)$$

que expresa que las velocidades relativas antes y después del impacto son iguales. Los impulsos recibidos por cada partícula durante el periodo de deformación y durante el periodo de restitución son los mismos. Las partículas se alejan una de la otra después del impacto con la misma velocidad con la cual



Fotografía 13.3 La altura de los rebotes de esta pelota de tenis disminuye después de cada impacto, debido a que tiene un coeficiente de restitución menor que uno y en cada rebote se pierde energía.

se aproximaban antes de él. Las velocidades v'_A y v'_B pueden obtenerse al resolver simultáneamente las ecuaciones (13.37) y (13.45).

Vale la pena notar que en el caso de un impacto perfectamente elástico, se conserva la energía total de las dos partículas, así como su cantidad de movimiento total. Las ecuaciones (13.37) y (13.45) pueden escribirse como sigue:

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B) \quad (13.37')$$

$$v_A + v'_A = v_B + v'_B \quad (13.45')$$

Al multiplicar (13.37') y (13.45') miembro por miembro, se tiene

$$\begin{aligned} m_A(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) &= m_B(v'_B - v_B)(v'_B + v_B) \\ m_A v_A^2 - m_A(v'_A)^2 &= m_B(v'_B)^2 - m_B v_B^2 \end{aligned}$$

Al reagrupar los términos en la ecuación que se obtuvo y multiplicar por $\frac{1}{2}$, se escribe

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A(v'_A)^2 + \frac{1}{2}m_B(v'_B)^2 \quad (13.46)$$

lo cual expresa que la energía cinética de las partículas se conserva. Sin embargo, hay que observar que en el caso general de un impacto, esto es, cuando e no es igual a 1, no se conserva la energía total de las partículas. Lo anterior puede demostrarse para cualquier caso dado al comparar las energías cinéticas antes y después del impacto. La energía cinética perdida en parte se transforma en calor y en parte se gasta en generar ondas elásticas dentro de los dos cuerpos que chocan.

13.14. IMPACTO CENTRAL OBLICUO

En seguida se estudiará el caso en el que las velocidades de las dos partículas que chocan no están dirigidas a lo largo de la línea de impacto

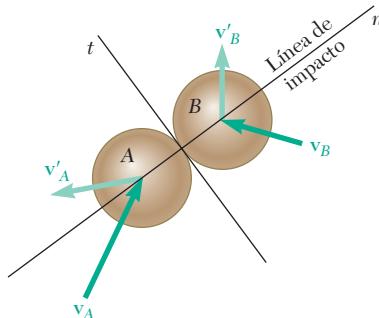


Figura 13.23



Fotografía 13.4 Cuando una bola de billar golpea a otra, existe una transferencia de cantidad de movimiento.

(figura 13.23). Como se indica en la sección 13.12, se afirma que el impacto será *oblicuo*. Puesto que no se conocen ni la dirección ni la magnitud de las velocidades v'_A y v'_B de las partículas después del impacto, su determinación requerirá el uso de cuatro ecuaciones independientes.

Se eligieron como ejes coordenados al eje n a lo largo de la línea de impacto, esto es, a lo largo de la normal común a las superficies en contacto, y el eje t a lo largo de su tangente común. Suponiendo que las partículas son perfectamente lisas y sin fricción, se observa que los

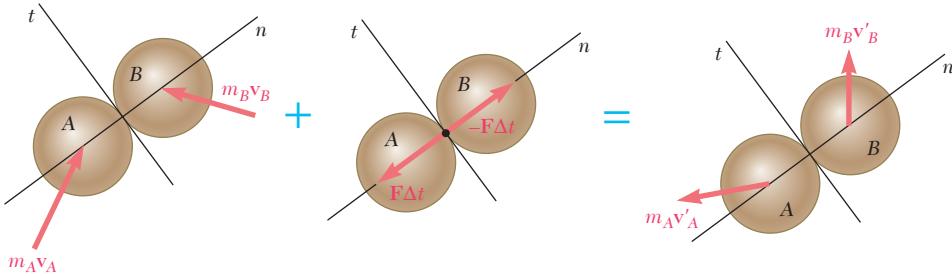


Figura 13.24

únicos impulsos que se ejercen sobre las partículas durante el impacto se deben a las fuerzas internas dirigidas a la línea de impacto, esto es, a lo largo del eje n (figura 13.24). Se concluye que

1. La componente de la cantidad de movimiento de cada partícula a lo largo del eje t , considerada por separado, se conserva; en consecuencia, la componente t de la velocidad de cada partícula permanece invariable. Se escribe

$$(v_A)_t = (v'_A)_t \quad (v_B)_t = (v'_B)_t \quad (13.47)$$

2. La componente a lo largo del eje n de la cantidad de movimiento total de las dos partículas se conserva. Se escribe

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \quad (13.48)$$

3. La componente a lo largo del eje n de la velocidad relativa de las dos partículas después del impacto se obtiene multiplicando la componente n de su velocidad relativa antes del impacto por el coeficiente de restitución. De hecho, una deducción similar a la que se dio en la sección 13.13 para el impacto central directo produce

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad (13.49)$$

De esta manera se han obtenido cuatro ecuaciones independientes que pueden resolverse para las componentes de las velocidades de A y B después del impacto. Este método de solución se ilustra en el problema resuelto 13.15.

El análisis del impacto central oblicuo de dos partículas se ha basado hasta ahora en la suposición de que ambas partículas se mueven libremente antes y después del impacto. A continuación se examinará el caso en el que una o ambas de las partículas que chocan tiene restricciones en su movimiento. Considere, por ejemplo, el choque entre el bloque A , que está restringido a moverse sobre una superficie horizontal y la bola B , que tiene libertad para moverse en el plano de la figura (figura 13.25). Si se supone que no hay fricción entre el bloque y la bola, o entre el bloque y la superficie horizontal, note que los impulsos ejercidos sobre el sistema consisten en los impulsos de las fuerzas internas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ dirigidos a lo largo de la línea de impacto, esto es, a lo largo del eje n , y del impulso de la fuerza externa \mathbf{F}_{ext} ejercido por la superficie horizontal sobre el bloque A y dirigido a lo largo de la vertical (figura 13.26).

Las velocidades del bloque A y de la bola B inmediatamente después del impacto se representan mediante tres incógnitas: la magnitud de la velocidad v'_A del bloque A , la cual se sabe que es horizontal, y la

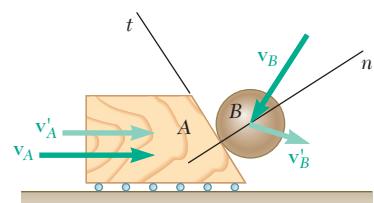


Figura 13.25

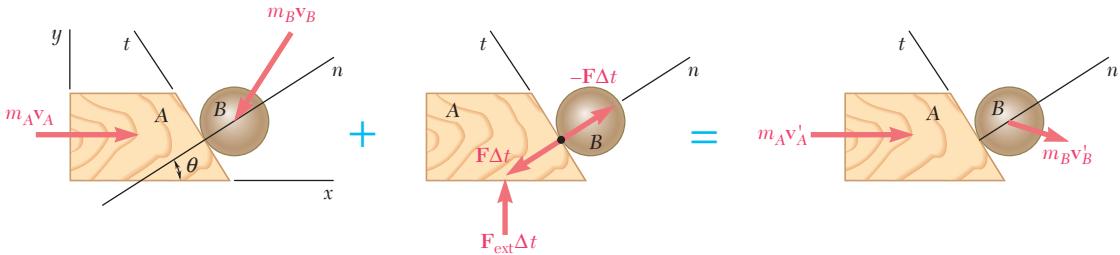


Figura 13.26

magnitud y dirección de la velocidad v'_B de la bola B . Por lo tanto, se deben escribir tres ecuaciones en las que se exprese que

1. La componente a lo largo del eje t de la cantidad de movimiento de la bola B se conserva; en consecuencia, la componente t de la velocidad de la bola B permanece invariable. Se escribe

$$(v_B)_t = (v'_B)_t \quad (13.50)$$

2. La componente a lo largo del eje x horizontal de la cantidad de movimiento total del bloque A y de la bola B se conserva. Se escribe

$$m_A v_A + m_B (v_B)_x = m_A v'_A + m_B (v'_B)_x \quad (13.51)$$

3. La componente a lo largo del eje n de la velocidad relativa del bloque A y de la bola B después del impacto se obtiene al multiplicar la componente n de su velocidad relativa antes del impacto por el coeficiente de restitución. Se escribe de nuevo

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad (13.49)$$

Sin embargo, se debe advertir que en el caso considerado aquí la validez de la ecuación (13.49) no puede establecerse a través de una mera extensión de la deducción que se dio en la sección 13.13 para el impacto central directo de dos partículas que se mueven en una línea recta. De hecho, estas partículas no estaban sujetas a ningún impulso externo, en tanto que el bloque A en el análisis presente está sujeto al impulso ejercido por la superficie horizontal. Para demostrar que la ecuación (13.49) sigue siendo válida, se aplica primero el principio del impulso y la cantidad de movimiento al bloque A sobre el periodo de deformación (figura 13.27). Al considerar sólo las componentes horizontales, se escribe

$$m_A v_A - (\int P dt) \cos \theta = m_A u \quad (13.52)$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de deformación y donde \mathbf{u} representa la velocidad del bloque A al final de ese periodo. Al considerar ahora el periodo de restitución, se escribe de manera similar

$$m_A u - (\int R dt) \cos \theta = m_A v'_A \quad (13.53)$$

donde la integral se extiende sobre el periodo de restitución.

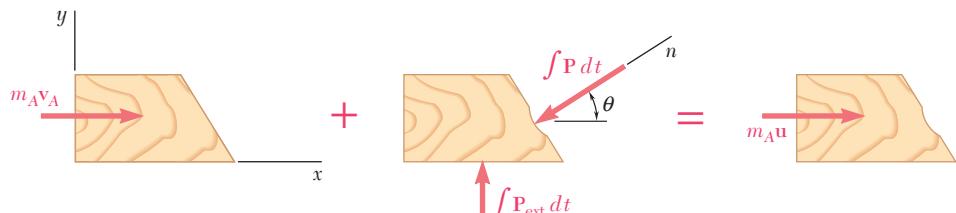


Figura 13.27

Al recordar de la sección 13.13 la definición del coeficiente de restitución, se escribe

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} \quad (13.40)$$

Al resolver las ecuaciones (13.52) y (13.53) para las integrales $\int P dt$ y $\int R dt$, y sustituir en la ecuación (13.40), se tiene, después de simplificaciones,

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

o multiplicar todas las velocidades por $\cos \theta$ para obtener sus proyecciones sobre la línea de impacto,

$$e = \frac{u_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - u_n} \quad (13.54)$$

Note que la ecuación (13.54) es idéntica a la ecuación (13.41) de la sección 13.13, excepto por los subíndices n que se usan aquí para indicar que se están considerando componentes de velocidad a lo largo de la línea de impacto. Puesto que el movimiento de la bola B no está restringido, la demostración de la ecuación (13.49) puede completarse de la misma manera que la deducción de la ecuación (13.43) de la sección 13.13. Así, se concluye que la relación (13.49) entre las componentes a lo largo de la línea de impacto de las velocidades relativas de las dos partículas que chocan permanece válida cuando se restringe el movimiento de una de las partículas. La validez de esta relación se extiende sin dificultad al caso en el que ambas partículas se restringen en su movimiento.

13.15. PROBLEMAS EN LOS QUE INTERVIENE LA ENERGÍA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Ahora ya se tienen tres métodos diferentes para la solución de problemas de cinética: la aplicación directa de la segunda ley de Newton, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$; el método del trabajo y la energía, y el método del impulso y la cantidad de movimiento. Para obtener el mayor beneficio de estos tres métodos, se debe ser capaz de elegir el método más adecuado para la solución de un problema determinado. También se debe estar preparado para utilizar diferentes métodos para resolver las diversas partes de un problema cuando uno de los procedimientos resulte aconsejable.

Ya se vio que el método del trabajo y la energía en muchos casos es más expedito que la aplicación directa de la segunda ley de Newton. Sin embargo, como se indicó en la sección 13.4, el método del trabajo y la energía tiene limitaciones y, en ocasiones, debe complementarse con el uso de $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Éste es el caso, por ejemplo, cuando se desea determinar una aceleración o una fuerza normal.

Para la solución de problemas en los que intervienen fuerzas no impulsivas, suele encontrarse que la ecuación $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ produce una solución igual de rápida que el método del impulso y cantidad de movimiento y que el método del trabajo y la energía, si se aplica, es más rápido y conveniente. Sin embargo, en problemas de impacto, el método del impulso y la cantidad de movimiento es el único que resulta

práctico. Una solución basada en la aplicación directa de $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sería tediosa, y el método del trabajo y la energía no puede utilizarse, puesto que el impacto (a menos que sea perfectamente elástico) implica una pérdida de energía mecánica.

Muchos problemas implican sólo fuerzas conservativas, salvo para una fase de impacto corta durante la cual actúan fuerzas impulsivas. La solución de problemas de este tipo se divide en varias partes. La parte correspondiente a la fase de impacto requiere el uso del método del impulso y la cantidad de movimiento y de la relación entre las velocidades relativas, en tanto que las otras partes suelen resolverse por el método del trabajo y la energía. Sin embargo, si el problema implica la determinación de una fuerza normal, es necesario el uso de $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Considere, por ejemplo, un péndulo A, de masa m_A y longitud l , que se suelta sin velocidad desde una posición A_1 (figura 13.28a). El péndulo oscila con libertad en un plano vertical y golpea a un segundo péndulo B, de masa m_B e igual longitud l , que está inicialmente en reposo. Luego del impacto (con coeficiente de restitución e), el péndulo B oscila un ángulo θ que se desea determinar.

La solución del problema puede dividirse en tres partes:

- 1. El péndulo A oscila de A_1 a A_2 .** Es posible utilizar el principio de la conservación de la energía para determinar la velocidad $(\mathbf{v}_A)_2$ del péndulo en A_2 (figura 13.28b).
- 2. El péndulo A golpea al péndulo B.** Utilizando el hecho de que se conserva la cantidad de movimiento total de los dos péndulos y la relación entre sus velocidades relativas, se determinan las velocidades $(\mathbf{v}_A)_3$ y $(\mathbf{v}_B)_3$ de los dos péndulos después del impacto (figura 13.28c).
- 3. El péndulo B oscila de B_3 a B_4 .** Aplicando el principio de la conservación de la energía al péndulo B, se determina la elevación máxima y_4 que alcanza este mismo (figura 13.28d). El ángulo θ puede determinarse entonces por trigonometría.

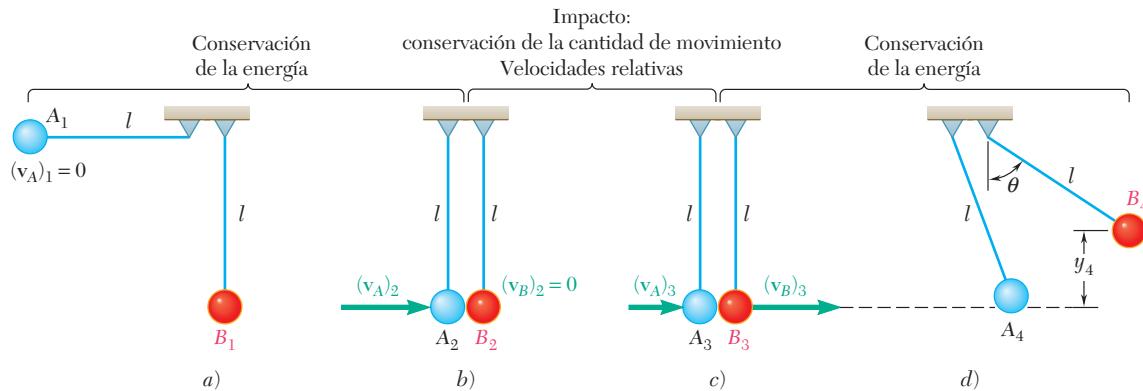


Figura 13.28

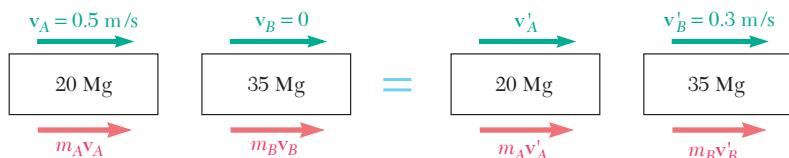
Advierta que si se van a determinar las tensiones en las cuerdas que sostienen a los péndulos, el método de solución que acaba de describirse debe complementarse con el uso de $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

PROBLEMA RESUELTO 13.13

Un vagón de ferrocarril de 20 Mg que se mueve a una rapidez de 0.5 m/s hacia la derecha choca con un vagón de 35 Mg que se encuentra en reposo. Si después del choque se observa que el vagón de 35 Mg se mueve hacia la derecha a una rapidez de 0.3 m/s, determine el coeficiente de restitución entre los dos vagones.

SOLUCIÓN

Se expresa la conservación de la cantidad de movimiento total de los dos vagones.



$$m_A \mathbf{v}_A + m_B \mathbf{v}_B = m_A \mathbf{v}'_A + m_B \mathbf{v}'_B$$

$$(20 \text{ Mg})(+0.5 \text{ m/s}) + (35 \text{ Mg})(0) = (20 \text{ Mg})v'_A + (35 \text{ Mg})(+0.3 \text{ m/s})$$

$$v'_A = -0.025 \text{ m/s} \quad v'_A = 0.025 \text{ m/s} \leftarrow$$

El coeficiente de restitución se obtiene al escribir

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = \frac{+0.3 - (-0.025)}{+0.5 - 0} = \frac{0.325}{0.5} \quad e = 0.65 \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 13.14

Se lanza una pelota contra una pared vertical sin fricción. Inmediatamente antes de que la pelota golpee la pared, su velocidad tiene una magnitud v y forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si se sabe que $e = 0.90$, determine la magnitud y dirección de la velocidad de la pelota cuando ésta rebota en la pared.

SOLUCIÓN

La velocidad inicial de la pelota se descompone en las componentes perpendicular y paralela a la pared

$$v_n = v \cos 30^\circ = 0.866v \quad v_t = v \sin 30^\circ = 0.500v$$

Movimiento paralelo hacia la pared. Puesto que no hay fricción en la pared, el impulso que ejerce sobre la pelota es perpendicular a aquélla. De tal modo, la componente paralela hacia la pared de la cantidad de movimiento de la pelota se conserva y se tiene

$$v'_t = v_t = 0.500v \uparrow$$

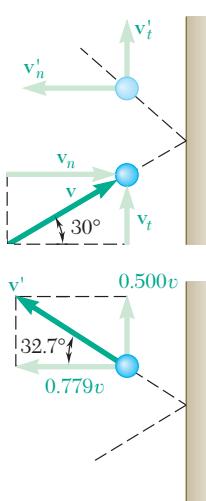
Movimiento perpendicular hacia la pared. Puesto que la masa de la pared (y la tierra) es esencialmente infinita, expresar que la cantidad de movimiento total de la pelota y la pared se conserva, no produciría información útil. Al utilizar la relación (13.49) entre las velocidades relativas, se escribe

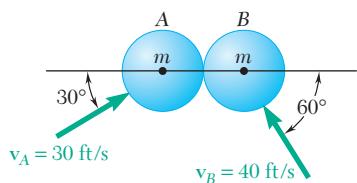
$$0 - v'_n = e(v_n - 0)$$

$$v'_n = -0.90(0.866v) = -0.779v \quad v'_n = 0.779v \leftarrow$$

Movimiento resultante. Al sumar vectorialmente las componentes v'_n y v'_t ,

$$\mathbf{v}' = 0.926v \angle 32.7^\circ \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESUELTO 13.15

La magnitud y dirección de las velocidades de dos pelotas idénticas sin fricción antes de que choquen entre sí son como se indica en la figura. Suponiendo que $e = 0.90$, determine la magnitud y dirección de la velocidad de cada pelota después del impacto.

SOLUCIÓN

Las fuerzas impulsivas que las pelotas ejercen entre sí durante el impacto están dirigidas a lo largo de la línea que une los centros de las pelotas y que recibe el nombre de *línea de impacto*. Al descomponer las velocidades en las componentes dirigidas, respectivamente, a lo largo de la línea de impacto y a lo largo de la tangente común a las superficies en contacto, se escribe

$$\begin{aligned}(v_A)_n &= v_A \cos 30^\circ = +26.0 \text{ ft/s} \\ (v_A)_t &= v_A \sin 30^\circ = +15.0 \text{ ft/s} \\ (v_B)_n &= -v_B \cos 60^\circ = -20.0 \text{ ft/s} \\ (v_B)_t &= v_B \sin 60^\circ = +34.6 \text{ ft/s}\end{aligned}$$

Principio del impulso y la cantidad de movimiento. En las figuras adjuntas se muestran las cantidades de movimiento iniciales, los impulsos y las cantidades de movimientos finales.

Movimiento a lo largo de la tangente común. Al considerar sólo las componentes t , se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento a cada pelota *por separado*. Puesto que las fuerzas impulsivas están dirigidas a lo largo de la línea de impacto, la componente t de la cantidad de movimiento y, en consecuencia, la componente t de la velocidad de cada pelota, no se alteran. Así,

$$(\mathbf{v}'_A)_t = 15.0 \text{ ft/s} \uparrow \quad (\mathbf{v}'_B)_t = 34.6 \text{ ft/s} \uparrow$$

Movimiento a lo largo de la línea de impacto. En la dirección n , se considera a las dos pelotas como un solo sistema y se nota que por la tercera ley de Newton, los impulsos internos son, respectivamente, $\mathbf{F} \Delta t$ y $-\mathbf{F} \Delta t$ y se cancelan. De tal modo, se escribe que la cantidad de movimiento total de las pelotas se conserva

$$\begin{aligned}m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n &= m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \\ m(26.0) + m(-20.0) &= m(v'_A)_n + m(v'_B)_n \\ (v_A)_n + (v_B)_n &= 6.0 \quad (1)\end{aligned}$$

Si se utiliza la relación (13.49) entre velocidades relativas, se escribe

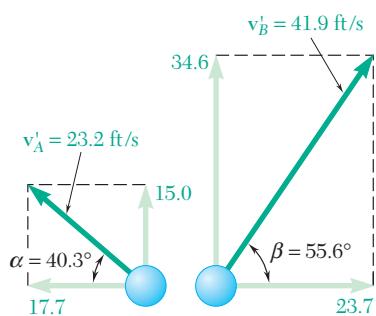
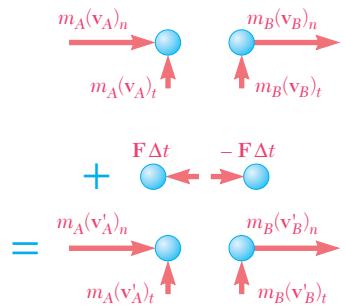
$$\begin{aligned}(v'_B)_n - (v'_A)_n &= e[(v_A)_n - (v_B)_n] \\ (v'_B)_n - (v'_A)_n &= (0.90)[26.0 - (-20.0)] \\ (v'_B)_n - (v'_A)_n &= 41.4 \quad (2)\end{aligned}$$

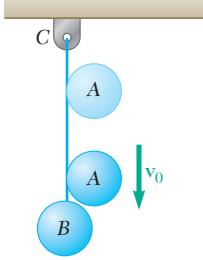
Al resolver las ecuaciones (1) y (2) de manera simultánea, se obtiene

$$\begin{aligned}(v'_A)_n &= -17.7 \quad (v'_B)_n = +23.7 \\ (v'_A)_n &= 17.7 \text{ ft/s} \leftarrow \quad (v'_B)_n = 23.7 \text{ ft/s} \rightarrow\end{aligned}$$

Movimiento resultante. Al sumar vectorialmente las componentes de la velocidad de cada pelota, se obtiene

$$\mathbf{v}'_A = 23.2 \text{ ft/s} \angle 40.3^\circ \quad \mathbf{v}'_B = 41.9 \text{ ft/s} \angle 55.6^\circ \quad \blacktriangleleft$$

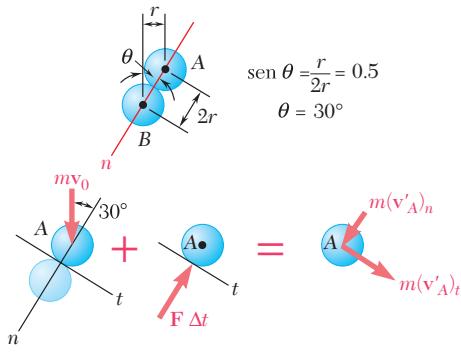




PROBLEMA RESUELTO 13.16

La pelota *B* cuelga de una cuerda inextensible *BC*. Una pelota idéntica *A* se suelta desde el reposo cuando apenas toca la cuerda y adquiere una velocidad \mathbf{v}_0 antes de chocar con la pelota *B*. Suponiendo un impacto perfectamente elástico ($e = 1$) y ninguna fricción, determine la velocidad de cada pelota inmediatamente después del impacto.

SOLUCIÓN



Puesto que la pelota *B* está restringida a moverse en un círculo de centro *C*, su velocidad \mathbf{v}_B después del impacto debe ser horizontal. En consecuencia, el problema implica tres incógnitas: la magnitud v'_B de la velocidad de *B* y la magnitud y dirección de la velocidad \mathbf{v}'_A de *A* después del impacto.

Principio del impulso-cantidad: pelota *A*

$$+ \downarrow \text{componentes } t: \quad m\mathbf{v}_A + \mathbf{F} \Delta t = m\mathbf{v}'_A$$

$$(v'_A)_t = 0.5v_0 \quad (1)$$

Observe que la ecuación utilizada expresa la conservación de la cantidad de movimiento de la pelota *A* a lo largo de la tangente común a las pelotas *A* y *B*.

Principio del impulso-cantidad de movimiento: pelotas *A* y *B*

$$m\mathbf{v}_A + \mathbf{T} \Delta t = m\mathbf{v}'_A + m\mathbf{v}'_B$$

$$\rightarrow \text{componentes } x: \quad 0 = (v'_A)_t \cos 30^\circ - (v'_A)_n \sin 30^\circ - v'_B \quad (2)$$

Observe que la ecuación obtenida expresa la conservación de la cantidad de movimiento total en la dirección *x*. Al sustituir $(v'_A)_t$ de la ecuación (1) y regresar términos, se escribe

$$0.5(v'_A)_n + v'_B = 0.433v_0 \quad (2)$$

Velocidades relativas a lo largo de la línea de impacto. Puesto que $e = 1$, la ecuación (13.49) produce

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = (v_A)_n - (v_B)_n$$

$$v'_B \sin 30^\circ - (v'_A)_n = v_0 \cos 30^\circ - 0$$

$$0.5v'_B - (v'_A)_n = 0.866v_0 \quad (3)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (2) y (3), se obtiene

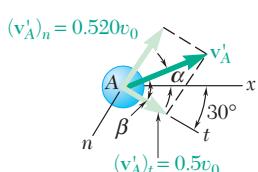
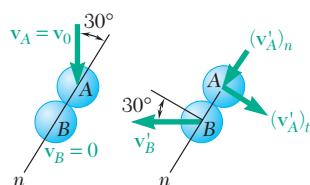
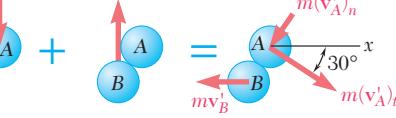
$$(v'_A)_n = -0.520v_0 \quad v'_B = 0.693v_0$$

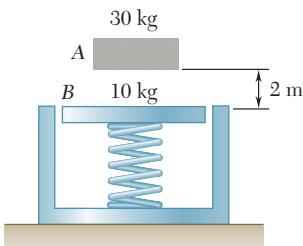
$$\mathbf{v}'_B = 0.693v_0 \leftarrow$$

Al recordar la ecuación (1) se realiza el dibujo adjunto y se obtiene por trigonometría

$$v'_A = 0.721v_0 \quad \beta = 46.1^\circ \quad \alpha = 46.1^\circ - 30^\circ = 16.1^\circ$$

$$\mathbf{v}'_A = 0.721v_0 \angle 16.1^\circ \leftarrow$$



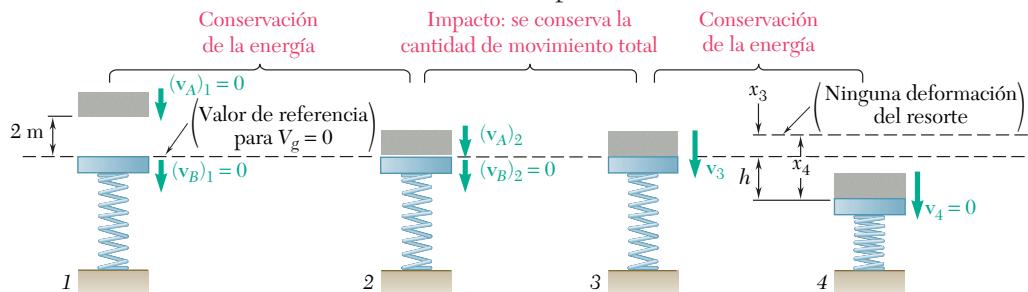


PROBLEMA RESUELTO 13.17

Un bloque de 30 kg se deja caer desde una altura de 2 m sobre el plato de 10 kg de una balanza de resorte. Suponiendo que el impacto es perfectamente plástico, determine el desplazamiento máximo del plato. La constante de resorte es $k = 20 \text{ kN/m}$.

SOLUCIÓN

El impacto entre el bloque y el plato *debe* tratarse por separado; por lo tanto, se divide la solución en tres partes.



Conservación de la energía. Bloque: $W_A = (30 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 294 \text{ N}$

$$T_1 = \frac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 = 0 \quad V_1 = W_Ay = (294 \text{ N})(2 \text{ m}) = 588 \text{ J}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 = \frac{1}{2}(30 \text{ kg})(v_A)_2^2 \quad V_2 = 0$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2: \quad 0 + 588 \text{ J} = \frac{1}{2}(30 \text{ kg})(v_A)_2^2 + 0$$

$$(v_A)_2 = +6.26 \text{ m/s} \quad (v_A)_2 = 6.26 \text{ m/s} \downarrow$$

Impacto: conservación de la cantidad de movimiento. Puesto que el impacto es perfectamente plástico, $e = 0$; el bloque y el plato se mueven juntos después del impacto.

$$\begin{aligned} m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 &= (m_A + m_B)v_3 \\ (30 \text{ kg})(6.26 \text{ m/s}) + 0 &= (30 \text{ kg} + 10 \text{ kg})v_3 \\ v_3 &= +4.70 \text{ m/s} \quad \mathbf{v}_3 = 4.70 \text{ m/s} \downarrow \end{aligned}$$

Conservación de la energía. Inicialmente el resorte sostiene al peso W_B del plato; en consecuencia, la deformación inicial del resorte es

$$x_3 = \frac{W_B}{k} = \frac{(10 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{20 \times 10^3 \text{ N/m}} = \frac{98.1 \text{ N}}{20 \times 10^3 \text{ N/m}} = 4.91 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Al denotar por x_4 la deformación máxima total del resorte, se escribe

$$T_3 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_3^2 = \frac{1}{2}(30 \text{ kg} + 10 \text{ kg})(4.70 \text{ m/s})^2 = 442 \text{ J}$$

$$V_3 = V_g + V_e = 0 + \frac{1}{2}kx_3^2 = \frac{1}{2}(20 \times 10^3)(4.91 \times 10^{-3})^2 = 0.241 \text{ J}$$

$$T_4 = 0$$

$$V_4 = V_g + V_e = (W_A + W_B)(-h) + \frac{1}{2}kx_4^2 = -(392)h + \frac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

Al advertir que el desplazamiento del plato es $h = x_4 - x_3$ se escribe

$$T_3 + V_3 = T_4 + V_4:$$

$$442 + 0.241 = 0 - 392(x_4 - 4.91 \times 10^{-3}) + \frac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

$$x_4 = 0.230 \text{ m} \quad h = x_4 - x_3 = 0.230 \text{ m} - 4.91 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$h = 0.225 \text{ m} \quad \mathbf{h = 225 \text{ mm}}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudia el *impacto de dos cuerpos*, esto es, el choque que ocurre en un intervalo muy pequeño. Se resolverá un gran número de problemas de impacto al expresar que se conserva la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos y al advertir la relación que existe entre las velocidades relativas de los cuerpos antes y después del impacto.

1. Como primer paso en la solución debe elegir y dibujar los siguientes ejes de coordenadas: el eje t , el cual es tangente a las superficies de contacto de los dos cuerpos que chocan, y el eje n , que es normal a las superficies de contacto y define la *línea de impacto*. En todos los problemas de esta lección la línea de impacto pasa por los centros de masa de los cuerpos que chocan, y el impacto se refiere a un *impacto central*.

2. El siguiente paso es dibujar un diagrama en el que se muestran las cantidades de movimiento de los cuerpos antes del impacto, los impulsos ejercidos sobre los cuerpos durante el impacto y las cantidades de movimiento finales de los cuerpos luego del impacto (figura 13.24). Después se observará si el impacto es un *impacto central directo* o un *impacto central oblicuo*.

3. Impacto central directo. Ocurre cuando las velocidades de los cuerpos A y B antes del impacto están dirigidas a lo largo de la *línea de impacto* (figura 13.20a).

a) Conservación de la cantidad de movimiento. Puesto que las fuerzas impulsivas son internas al sistema, es posible escribir que la *cantidad de movimiento total de A y B se conserva*,

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (13.37)$$

donde v_A y v_B denotan las velocidades de los cuerpos A y B antes del impacto y v'_A y v'_B denotan sus velocidades después del impacto.

b) Coeficiente de restitución. También es posible escribir la siguiente relación entre las *velocidades relativas* de los dos cuerpos antes y después del impacto,

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \quad (13.43)$$

donde e es el coeficiente de restitución entre los dos cuerpos.

Hay que observar que las ecuaciones (13.37) y (13.43) son ecuaciones escalares que pueden resolverse para dos incógnitas. Además, es necesario tener cuidado y adoptar una convención de signos consistente para todas las velocidades.

4. Impacto central oblicuo. Ocurre cuando *una o ambas* de las velocidades iniciales de los cuerpos *no está dirigida* a lo largo de la *línea de impacto* (figura 13.20b). Para resolver problemas de este tipo, es necesario *descomponer primero en componentes* a lo largo del eje t y del eje n las cantidades de movimiento y los impulsos indicados en el diagrama.

(continúa)

a) Conservación de la cantidad de movimiento. Puesto que las fuerzas impulsivas actúan a lo largo de la línea de impacto, esto es, a lo largo del eje n , se conserva la componente a lo largo del eje t de la cantidad de movimiento *de cada cuerpo*. Por lo tanto, es posible escribir para cada cuerpo que las componentes t de su velocidad antes y después del impacto son iguales,

$$(v_A)_t = (v'_A)_t \quad (v_B)_t = (v'_B)_t \quad (13.47)$$

Además, la componente a lo largo del eje n de la *cantidad de movimiento total* del sistema se conserva,

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \quad (13.48)$$

b) Coeficiente de restitución. La relación entre las velocidades relativas de los dos cuerpos antes y después del impacto puede escribirse sólo en la dirección n ,

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad (13.49)$$

Ahora se cuenta con cuatro ecuaciones que es posible resolver para cuatro incógnitas. Observe que después de encontrar todas las velocidades, es factible determinar el impulso ejercido por el cuerpo A sobre el cuerpo B dibujando un diagrama de impulso-cantidad de movimiento sólo para B e igualando las componentes en la dirección n .

c) Cuando está restringido el movimiento de uno de los cuerpos que choca, es necesario incluir los impulsos de las fuerzas externas en el diagrama dibujado. En esas condiciones se observará que algunas de las relaciones anteriores no se cumplen. Sin embargo, en el ejemplo que se muestra en la figura 13.26 la cantidad de movimiento total del sistema se conserva en una dirección perpendicular al impulso externo. Es necesario advertir que cuando el cuerpo A rebota en una superficie fija B la única ecuación de conservación de la cantidad de movimiento que puede utilizarse es la primera de las ecuaciones (13.47) [problema resuelto 13.14].

5. Hay que recordar que se pierde energía durante la mayoría de los impactos.

La única excepción corresponde a los *impactos perfectamente elásticos* ($e = 1$), donde se conserva la energía. De tal modo, en el caso general de impacto, donde $e < 1$, la energía no se conserva. Por lo tanto, es necesario tener cuidado y *no aplicar* el principio de conservación de la energía en una situación de impacto. En vez de eso, aplique este principio por separado a los movimientos precedentes y siguientes al impacto [problema resuelto 13.17].

Problemas

13.155 Se sabe que el coeficiente de restitución entre dos collarines es de 0.80. Determine *a*) sus velocidades después del impacto, *b*) la energía perdida durante el impacto.

13.156 Los collarines A y B, de la misma masa m , se mueven uno hacia el otro con las velocidades que se indican. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre los collarines es 0 (impacto plástico), demuestre que después del impacto *a*) la velocidad común de los collarines es igual a la mitad de la diferencia de sus velocidades antes del impacto, *b*) la pérdida en la energía cinética es $\frac{1}{4}m(v_A + v_B)^2$.

13.157 Dos bloques de acero se deslizan sin fricción sobre una superficie horizontal con las velocidades que se muestran en la figura. Si se observa que después del impacto la velocidad del bloque B es de 10.5 ft/s hacia la derecha, determine el coeficiente de restitución entre los dos bloques.

13.158 Dos bloques de acero se deslizan sin fricción sobre una superficie horizontal con las velocidades que se muestran en la figura. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre los dos bloques es de 0.75, determine *a*) las velocidades de cada bloque después del impacto, *b*) la pérdida de energía cinética debida al impacto.

13.159 Dos automóviles idénticos A y B están en reposo sobre un muelle de descarga, sin que actúen los frenos. El automóvil C, de estilo un poco diferente pero del mismo peso, ha sido empujado por los trabajadores del muelle y golpea al automóvil B con una velocidad de 1.5 m/s. Si se sabe que el coeficiente de restitución es de 0.8 entre B y C y 0.5 entre A y B, determine la velocidad de cada automóvil después de que han ocurrido los choques.



Figura P13.159

13.160 Tres esferas de acero de igual masa se suspenden del techo mediante cuerdas de la misma longitud que están espaciadas a una distancia ligeramente mayor que el diámetro de las esferas. Después de jalarla y soltarla, la esfera A golpea a la esfera B, la cual luego golpea a la esfera C. Si se denota por e el coeficiente de restitución entre las esferas y por v_0 la velocidad de A justo antes de que golpee a B, determine *a*) las velocidades de A y B inmediatamente después del primer choque, *b*) las velocidades de B y C inmediatamente después del segundo choque. *c*) Si ahora se supone que se suspenden n esferas del techo y que la primera se jala y suelta como se describió, determine la velocidad de la última esfera después de que recibe el primer golpe. *d*) Utilice el resultado del inciso *c*) para obtener la velocidad de la última esfera cuando $n = 6$ y $e = 0.95$.

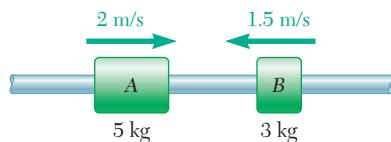


Figura P13.155

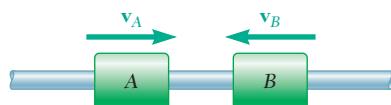


Figura P13.156

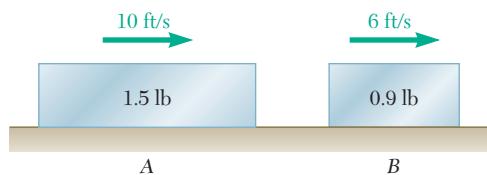


Figura P13.157 y P13.158

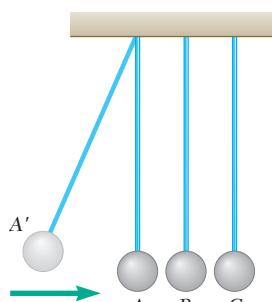


Figura P13.160

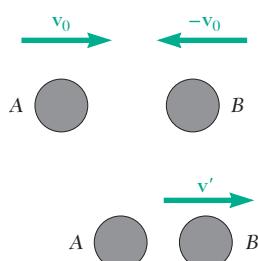


Figura P13.161

13.161 Dos discos que se deslizan sobre un plano horizontal sin fricción con velocidades opuestas de la misma magnitud v_0 chocan entre sí de manera frontal. Se sabe que el disco A tiene una masa de 3 kg y se observa que su velocidad es cero después del impacto. Determine a) la masa del disco B si se sabe que el coeficiente de restitución entre los dos discos es de 0.5, b) el intervalo de posibles valores de la masa del disco B si se desconoce el coeficiente de restitución entre los dos discos.

13.162 Los paquetes de una fábrica de refacciones para automóviles se transportan hacia el muelle de descarga empujándolos a lo largo de una pista de rodillos con muy poca fricción. En el instante que se indica los paquetes B y C se encuentran en reposo y el paquete A tiene una velocidad de 2 m/s. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre los paquetes es de 0.3, determine a) la velocidad del paquete C después de que A golpea a B y B golpea a C, b) la velocidad de A después de que éste golpea a B por segunda vez.

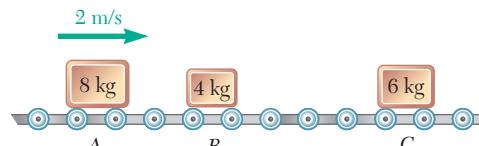


Figura P13.162

13.163 Uno de los requerimientos para que se utilicen pelotas de tenis en una competencia oficial es que, cuando se dejen caer sobre una superficie rígida desde una altura de 100 in., la altura del primer rebote de la pelota debe estar en el intervalo $53 \text{ in.} \leq h \leq 58 \text{ in.}$. Determine el intervalo del coeficiente de restitución de las pelotas de tenis que cumpla con este requisito.

13.164 Demuestre que para una pelota que golpea una superficie fija sin fricción, $\alpha > \theta$. También demuestre que el porcentaje perdido en energía cinética debido al impacto es $100(1 - e^2) \cos^2 \theta$.

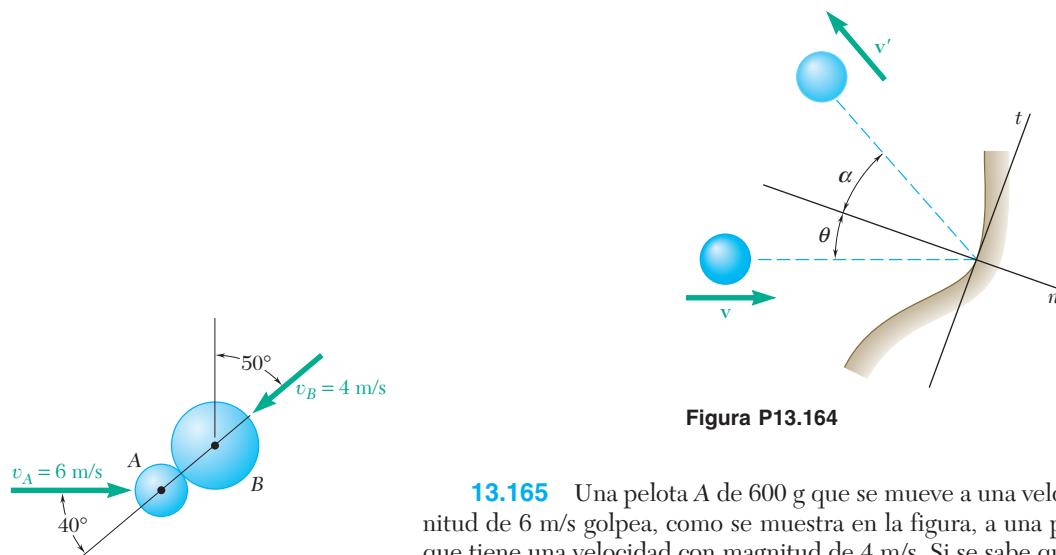


Figura P13.165

13.165 Una pelota A de 600 g que se mueve a una velocidad con magnitud de 6 m/s golpea, como se muestra en la figura, a una pelota B de 1 kg que tiene una velocidad con magnitud de 4 m/s. Si se sabe que el coeficiente de restitución es de 0.8 y se supone que no hay fricción, determine la velocidad de cada pelota después del impacto.

13.166 Dos discos de hockey idénticos se mueven sobre una pista a la misma rapidez de 3 m/s en direcciones paralelas y opuestas cuando chocan entre sí en la forma indicada. Si se supone un coeficiente de restitución $e = 1$, determine la magnitud y dirección de la velocidad de cada disco después del impacto.

13.167 Dos bolas de billar idénticas con un diámetro de 2.37 in., pueden moverse libremente sobre una mesa de billar. La bola B se encuentra en reposo y la bola A tiene una velocidad inicial $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{i}$. *a)* Si se sabe que $b = 2$ in. y $e = 0.7$, determine la velocidad de cada bola después del impacto. *b)* Demuestre que si $e = 1$, las velocidades finales de las bolas forman un ángulo recto para todos los valores de b .

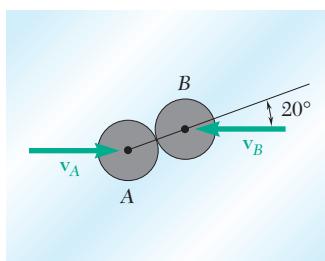


Figura P13.166

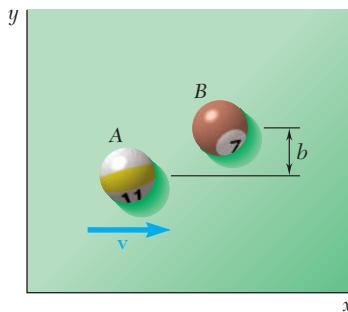


Figura P13.167

13.168 El coeficiente de restitución entre dos bolas de billar A y B de 2.37 in. de diámetro es igual a 0.9. La bola A se mueve en la dirección indicada con una velocidad de 3 ft/s cuando golpea a la bola B , que está en reposo. Si se sabe que después del impacto B se mueve en la dirección x , determine *a)* el ángulo θ , *b)* la velocidad de B después del impacto.

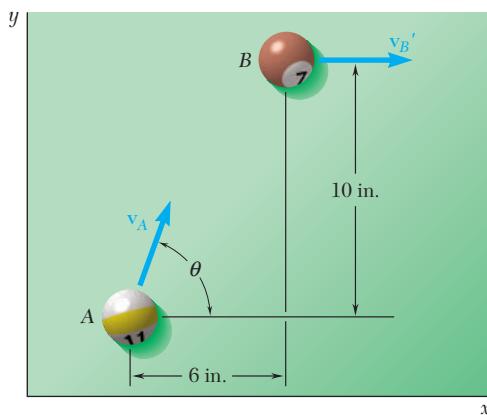


Figura P13.168

13.169 Un muchacho ubicado en A , que es el punto medio entre el centro O de una pared semicircular y la propia pared, lanza una pelota hacia la pared en una dirección que forma un ángulo de 45° con OA . Si se sabe que después de golpear la pared la pelota rebota en una dirección paralela a OA , determine el coeficiente de restitución entre la pelota y la pared.

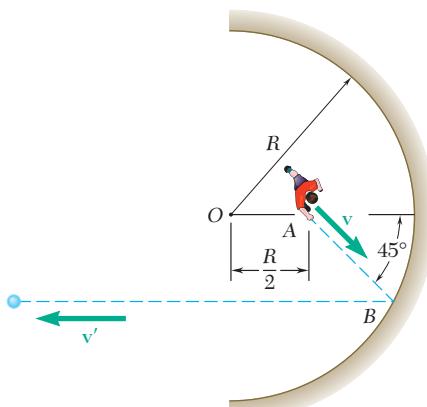


Figura P13.169

- 13.170** Una niña lanza una pelota en una pared inclinada desde una altura de 1.2 m, golpeando la pared en A con una velocidad horizontal v_0 de 15 m/s de magnitud. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre la pelota y la pared es de 0.9 y se ignora la fricción, determine la distancia d desde el pie de la pared hasta el punto B donde la pelota golpea el suelo después de rebotar en la pared.

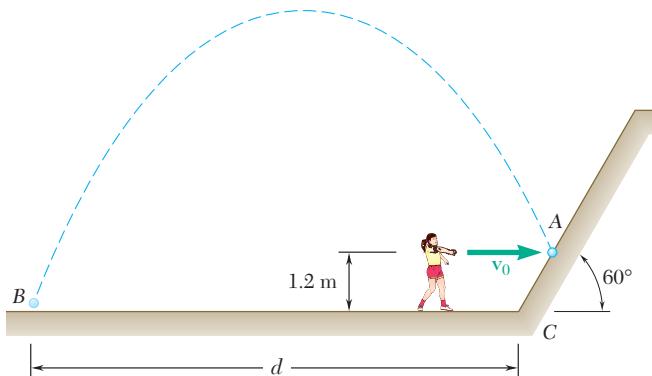


Figura P13.170

- 13.171** Una pelota golpea el suelo en A con una velocidad v_0 de 16 ft/s a un ángulo de 60° con la horizontal. Si se sabe que $e = 0.6$ entre la pelota y el suelo y que después del rebote la pelota llega al punto B con una velocidad horizontal, determine a) las distancias h y d , b) la velocidad de la pelota cuando llega a B.

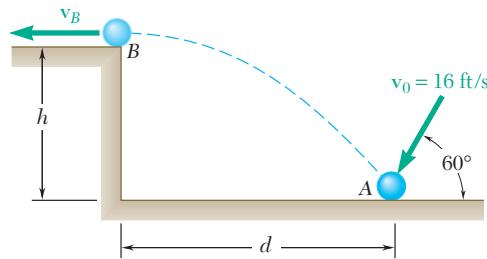


Figura P13.171

- 13.172** Una esfera rebota como se muestra en la figura, después de golpear un plano inclinado con una velocidad vertical v_0 de magnitud $v_0 = 15$ ft/s. Si se sabe que $\alpha = 30^\circ$ y $e = 0.8$ entre la esfera y el plano, determine la altura h que alcanza la esfera.

- 13.173** Una esfera rebota como se muestra en la figura, después de golpear un plano inclinado con una velocidad vertical v_0 de magnitud $v_0 = 20$ ft/s. Determine el valor de α que maximizará la distancia horizontal que recorre la pelota antes de alcanzar su máxima altura h suponiendo que el coeficiente de restitución entre la pelota y el suelo es a) $e = 1$, b) $e = 0.8$.

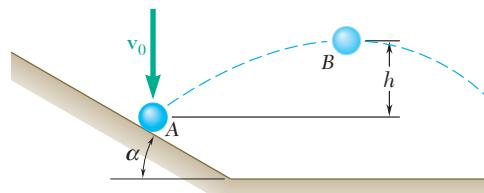


Figura P13.172 y P13.173

13.174 Un bloque B de 1 kg se mueve con una velocidad v_0 de magnitud $v_0 = 2 \text{ m/s}$ cuando golpea una esfera A de 0.5 kg, la cual está en reposo y cuelga de una cuerda amarrada en O . Si se sabe que $\mu_k = 0.6$ entre el bloque y la superficie horizontal y que $e = 0.8$ entre el bloque y la esfera, determine después del impacto, a) la altura máxima h alcanzada por la esfera, b) la distancia x recorrida por el bloque.

13.175 Un bloque B de 1.5 kg está unido a un resorte no deformado de constante $k = 80 \text{ N/m}$ y está en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción cuando lo golpea un bloque idéntico A que se mueve a una rapidez de 5 m/s. Considerando de manera sucesiva los casos en los que el coeficiente de restitución entre los dos bloques es 1) $e = 1$, 2) $e = 0$, determine a) la deflexión máxima del resorte, b) la velocidad final del bloque A .

13.176 El bloque A se libera desde el reposo y se desliza hacia abajo sobre la superficie sin fricción de B hasta que golpea un tope en el extremo derecho de B . El bloque A tiene una masa de 10 kg y el objeto B tiene una masa de 30 kg, además B puede rodar libremente sobre el suelo. Determine las velocidades de A y B inmediatamente después del impacto cuando a) $e = 0$, b) $e = 0.7$.

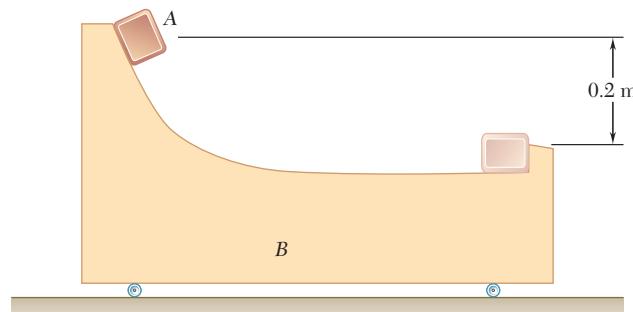


Figura P13.176

13.177 Una pelota de 90 g que se lanza con una velocidad horizontal v_0 golpea una placa de 720 g empotrada en una pared vertical a una altura de 900 mm sobre el suelo. Se observa que, después del rebote, la pelota golpea el suelo a una distancia de 480 mm de la pared cuando la placa está unida rígidamente a la pared (figura 1) y a una distancia de 220 mm cuando entre la placa y la pared se coloca un colchón de caucho (figura 2). Determine a) el coeficiente de restitución e entre la pelota y la placa, b) la velocidad inicial v_0 , de la pelota.

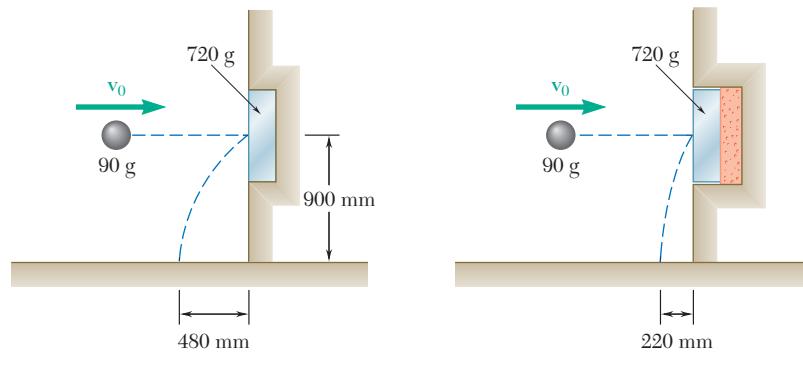


Figura P13.177

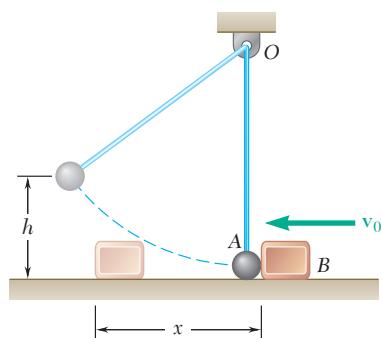


Figura P13.174

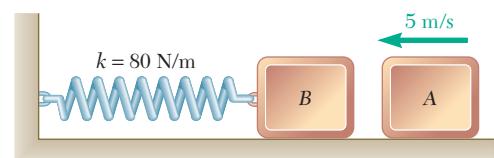


Figura P13.175

- 13.178** Una esfera A de 1.3 lb se deja caer desde una altura de 1.8 ft sobre una placa B de 2.6 lb, la cual se sostiene mediante un conjunto de resortes entrelazados y está inicialmente en reposo. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre la esfera y la placa es $e = 0.8$, determine *a)* la altura h que alcanza la esfera después del rebote, *b)* la constante k de un solo resorte que sea equivalente al conjunto dado si se observó que la máxima deflexión de la placa es igual a $3h$.

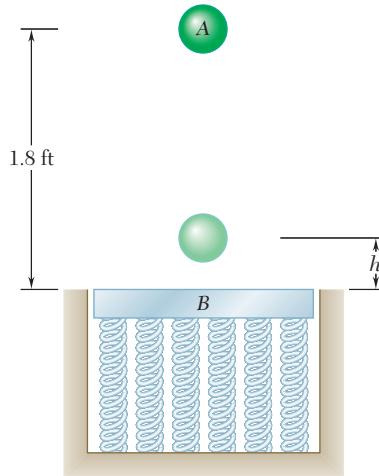


Figura P13.178 y P13.179

- 13.179** Una esfera A de 1.3 lb se deja caer desde una altura de 1.8 ft sobre una placa B de 2.6 lb, la cual se sostiene mediante un conjunto de resortes entrelazados y está inicialmente en reposo. Si se sabe que el conjunto de resortes es equivalente a un solo resorte de constante $k = 5 \text{ lb/in.}$, determine *a)* el valor del coeficiente de restitución entre la esfera y la placa para el cual la altura h que alcanza la esfera después de rebotar es máxima, *b)* el valor correspondiente de h , *c)* el valor correspondiente de la deflexión máxima de la placa.

- 13.180** Dos automóviles de la misma masa chocan frontalmente en el punto C. Despues del choque, los automóviles patinan con los frenos aplicados y se detienen en la posición que se indica en la parte inferior de la figura. Si se sabe que la rapidez del automóvil A justo antes del impacto era de 5 mi/h y que el coeficiente de fricción cinética entre el pavimento y los neumáticos de ambos automóviles es de 0.30, determine *a)* la rapidez del automóvil B justo antes del impacto, *b)* el coeficiente de restitución efectivo entre los dos automóviles.

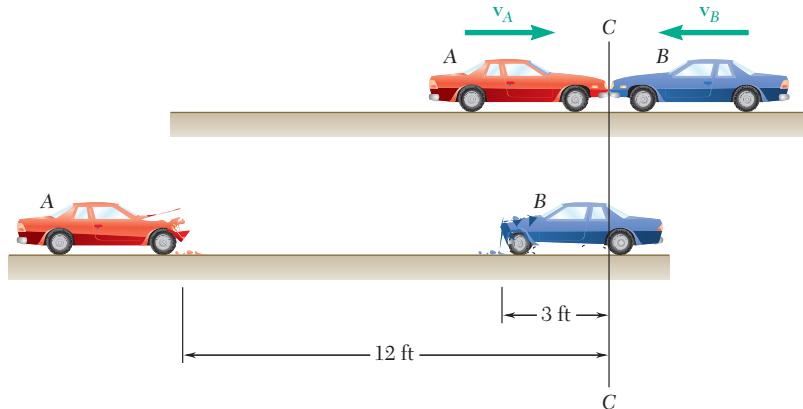


Figura P13.180

13.181 Cada uno de los bloques A y B tiene una masa de 0.8 lb y la masa del bloque C es igual a 2.4 lb. El coeficiente de fricción entre los bloques y el plano es $\mu_k = 0.30$. En un principio el bloque A se mueve a una rapidez $v_0 = 15 \text{ ft/s}$ y el bloque B y el C están en reposo (figura 1). Después de que A choca con B y B choca con C, los tres bloques quedan en reposo en la posición indicada (figura 2). Determine a) los coeficientes de restitución entre A y B y entre B y C, b) el desplazamiento x del bloque C.

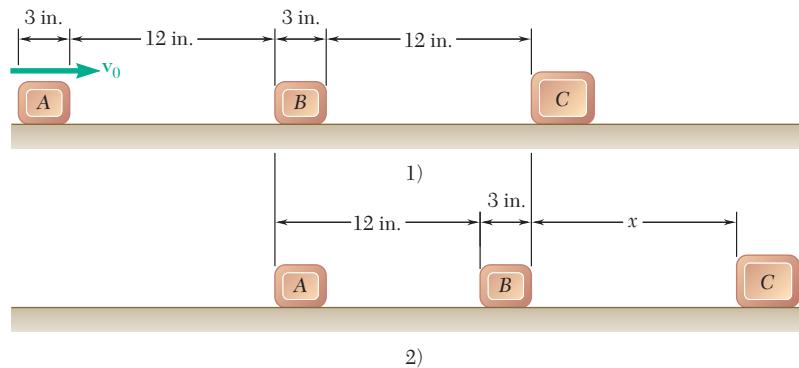


Figura P13.181

13.182 Los tres bloques que se muestran son idénticos. Los bloques B y C están en reposo cuando al bloque B golpea el bloque A, el cual se mueve con una velocidad v_A de 3 ft/s. Luego del impacto, que se supone perfectamente plástico ($e = 0$), la velocidad de los bloques A y B disminuye debido a la fricción, mientras que el bloque C adquiere rapidez, hasta que los tres bloques se mueven con la misma velocidad v . Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es $\mu_k = 0.20$, determine a) el tiempo requerido para que los tres bloques alcancen la misma velocidad, b) la distancia total recorrida por cada bloque durante ese tiempo.

13.183 Después de haber sido empujado por el empleado de una aerolínea, un carrito de equipaje A vacío de 40 kg golpea un carrito B idéntico con una velocidad de 5 m/s, el cual contiene una maleta de 15 kg equipada con ruedas. El impacto causa que la maleta ruede hacia la pared izquierda del carrito B. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre los dos carritos es de 0.80 y que el coeficiente de restitución entre la maleta y la pared del carrito es de 0.30, determine a) la velocidad del carrito B después de que la maleta golpea la pared por primera vez, b) la energía total perdida en el impacto.

13.184 Una bala de 20 g se dispara contra un bloque de madera de 4 kg que está suspendido de las cuerdas AC y BD, penetra el bloque en el punto E, a la mitad entre C y D, sin que golpee a la cuerda BD. Determine a) la altura máxima h a la cual el bloque y la bala incrustada oscilarán después del impacto, b) el impulso total ejercido sobre el bloque por las dos cuerdas durante el impacto.

13.185 Una pelota B de 70 g que se deja caer desde una altura $h_0 = 1.5 \text{ m}$ alcanza una altura $h_2 = 0.25 \text{ m}$ después de rebotar dos veces en placas idénticas de 210 g. La placa A descansa directamente sobre suelo duro, mientras que la placa C lo hace sobre un colchón de caucho. Determine a) el coeficiente de restitución entre la pelota y las placas, b) la altura h_1 del primer rebote de la pelota.

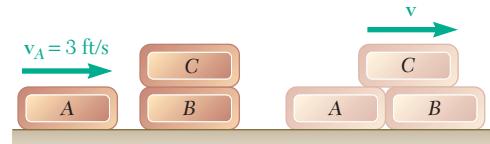


Figura P13.182

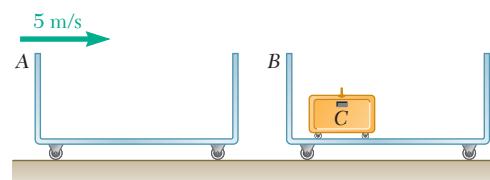


Figura P13.183

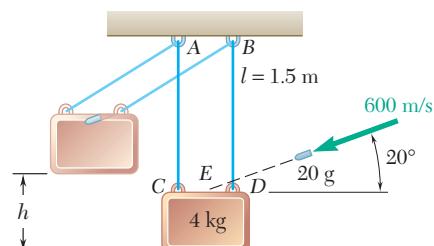


Figura P13.184

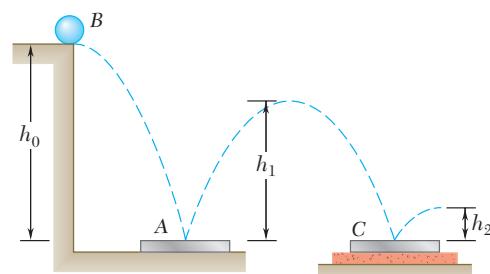


Figura P13.185

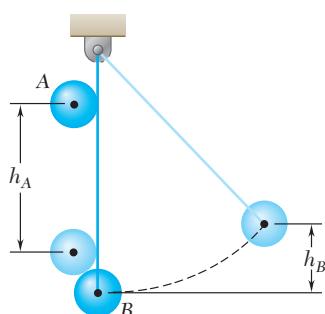


Figura P13.186

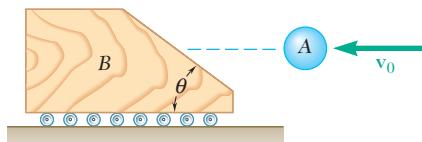


Figura P13.187

13.186 La pelota B cuelga de una cuerda inextensible. Una pelota idéntica A se suelta desde el reposo cuando justo toca la cuerda y cae a través de la distancia vertical $h_A = 8$ in. antes de golpear la pelota B . Si se supone que $e = 0.9$ y se considera que no hay fricción, determine el desplazamiento vertical máximo resultante h_B de la bola B .

13.187 Una esfera A de 700 g que se mueve con una velocidad v_0 paralela al suelo incide sobre la cara inclinada de una cuña B de 2.1 kg, la cual puede rodar libremente sobre el suelo y se encuentra en un principio en reposo. Después del impacto se observa desde el suelo que la esfera se mueve hacia arriba en línea recta. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre la esfera y la cuña es $e = 0.6$, determine *a)* el ángulo θ que la cara inclinada de la cuña forma con la horizontal, *b)* la energía que se pierde debido al impacto.

13.188 Cuando la cuerda que se muestra en la figura está a un ángulo de $\alpha = 30^\circ$ la esfera A de 2 lb tiene una rapidez $v_0 = 2$ ft/s. El coeficiente de restitución entre A y la cuña B de 4 lb es 0.8 y la longitud de la cuerda $l = 3$ ft. La constante del resorte tiene un valor de 100 lb/ft y $\theta = 20^\circ$. Determine la velocidad de A y B inmediatamente después del impacto.

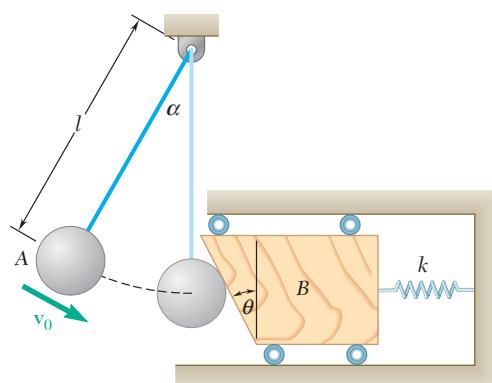


Figura P13.188

13.189 Cuando la cuerda que se muestra en la figura está a un ángulo de $\alpha = 30^\circ$ la esfera A de 0.5 kg tiene una rapidez $v_0 = 1.2$ m/s. El coeficiente de restitución entre A y la cuña B de 0.9 kg es 0.7 y la longitud de la cuerda $l = 0.8$ m. La constante del resorte tiene un valor de 500 N/m y $\theta = 20^\circ$. Determine la velocidad de A y B inmediatamente después del impacto.

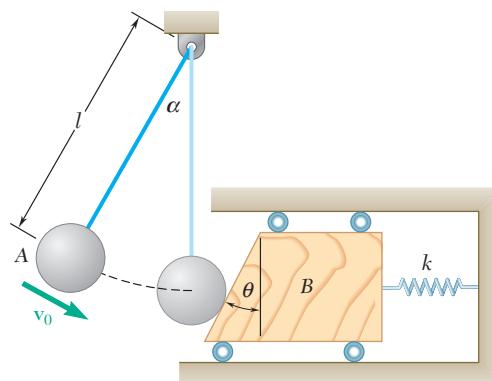


Figura P13.189

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 13

Este capítulo se dedicó al método del trabajo y la energía y al del impulso y la cantidad de movimiento. En la primera mitad del capítulo se estudió el método del trabajo y la energía y su aplicación al análisis del movimiento de las partículas.

Se consideró una fuerza \mathbf{F} que actuaba sobre una partícula A y se definió el *trabajo de \mathbf{F} correspondiente al pequeño desplazamiento $d\mathbf{r}$* [sección 13.2] como la cantidad

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.1)$$

o, si se recuerda la definición del producto escalar de dos vectores,

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (13.1')$$

donde α es el ángulo entre \mathbf{F} y $d\mathbf{r}$ (figura 13.29). El trabajo de \mathbf{F} durante un desplazamiento finito desde A_1 hasta A_2 , denotado por $U_{1 \rightarrow 2}$, se obtuvo al integrar la ecuación (13.1) a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (13.2)$$

Para una fuerza definida por sus componentes rectangulares, se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (13.2'')$$

El trabajo del peso \mathbf{W} de un cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve desde la altura y_1 hasta y_2 (figura 13.30) se obtuvo al sustituir $F_x = F_z = 0$ y $F_y = -W$ en la ecuación (13.2'') e integrar. Se encuentra

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{y_1}^{y_2} W dy = Wy_1 - Wy_2 \quad (13.4)$$

Trabajo de una fuerza

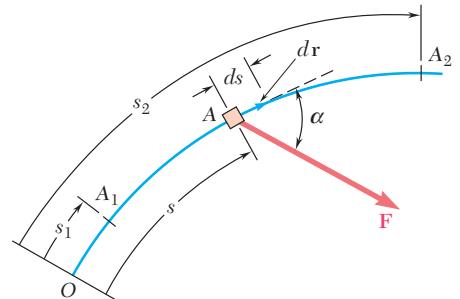


Figura 13.29

Trabajo de un peso

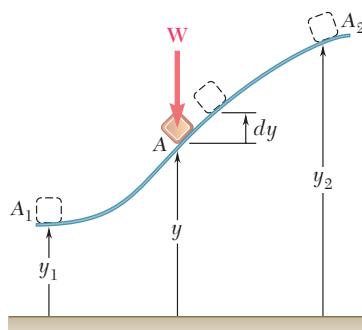


Figura 13.30

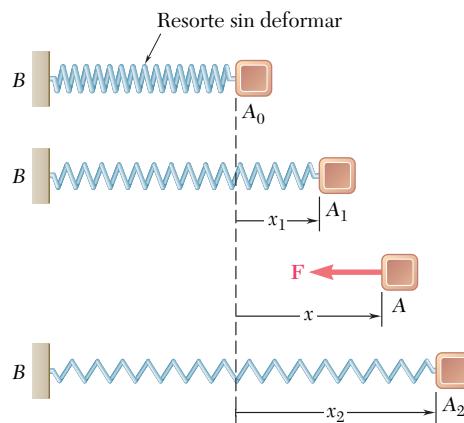


Figura 13.31

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte

El trabajo de una fuerza \mathbf{F} ejercida por un resorte sobre un cuerpo A durante un desplazamiento finito del cuerpo (figura 13.31) desde $A_1(x = x_1)$ hasta $A_2(x = x_2)$ se obtuvo al escribir

$$dU = -F dx = -kx dx$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \quad (13.6)$$

El trabajo de \mathbf{F} es por tanto positivo *cuando el resorte regresa a su posición no deformada*.

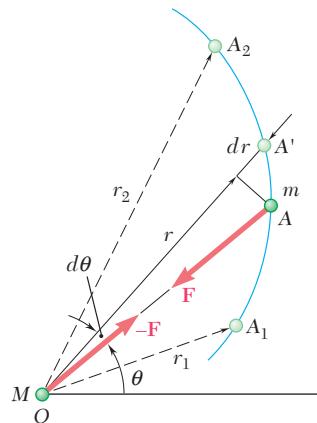


Figura 13.32

Trabajo de la fuerza gravitacional

El *trabajo de la fuerza gravitacional* \mathbf{F} ejercido por una partícula de masa M localizada en O sobre una partícula de masa m cuando la última se desplaza desde A_1 hasta A_2 (figura 13.32) se obtuvo al recordar de la sección 12.10 la expresión para la magnitud de \mathbf{F} y al escribir

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2} dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \quad (13.7)$$

La *energía cinética de una partícula* de masa m que se mueve con velocidad \mathbf{v} [sección 13.3] se definió como la cantidad escalar

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (13.9)$$

Energía cinética de una partícula

De la segunda ley de Newton se dedujo el *principio del trabajo y la energía*, el cual señala que *la cinética de una partícula en A₂ puede obtenerse sumando a su energía en A₁ el trabajo realizado durante el desplazamiento de A₁ a A₂ por la fuerza **F** ejercida sobre la partícula:*

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (13.11)$$

El método del trabajo y la energía simplifica la solución de muchos problemas que tienen que ver con fuerzas, desplazamientos y velocidades, ya que no requiere la determinación de aceleraciones [sección 13.4]. Además se advirtió que sólo incluye cantidades escalares y que las fuerzas que no realizan trabajo no necesitan considerarse [problemas resueltos 13.1 y 13.3]. Sin embargo, este método debe complementarse con la aplicación directa de la segunda ley de Newton para determinar una fuerza normal a la trayectoria de la partícula [problema resuelto 13.4].

La potencia desarrollada por una máquina y su eficiencia mecánica se estudiaron en la sección 13.5. La potencia se definió como la tasa en el tiempo a la cual se efectúa el trabajo:

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (13.12, 13.13)$$

donde **F** es la fuerza que se ejerce sobre la partícula y **v** la velocidad de esta misma [problema resuelto 13.5]. La *eficiencia mecánica*, denotada por η , se expresó como

$$\eta = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} \quad (13.15)$$

Cuando el trabajo de una fuerza **F** es independiente de la trayectoria que se sigue [secciones 13.6 y 13.7], se afirma que la fuerza **F** es una *fuerza conservativa*, y que su trabajo es igual al *negativo del cambio en la energía potencial V* asociado con **F**:

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (13.19')$$

Las siguientes expresiones se obtuvieron para la energía potencial asociada con cada una de las fuerzas consideradas antes:

Fuerza de gravedad (peso): $V_g = Wg$ (13.16)

Fuerza gravitacional: $V_g = -\frac{GMm}{r}$ (13.17)

Fuerza elástica ejercida por un resorte: $V_e = \frac{1}{2}kx^2$ (13.18)

Principio del trabajo y la energía

Método del trabajo y la energía

Potencia y eficiencia mecánica

Fuerza conservativa. Energía potencial

Principio de la conservación de la energía

Al sustituir $U_{1 \rightarrow 2}$ de la ecuación (13.19') en la ecuación (13.11) y reagrupar los términos [sección 13.8], se obtuvo

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (13.24)$$

Éste es el *principio de la conservación de la energía*, el cual establece que cuando una partícula se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, *la suma de sus energías cinética y potencial permanece constante*. La aplicación de este principio facilita la solución de problemas que incluyen únicamente fuerzas conservativas [problemas resueltos 13.6 y 13.7].

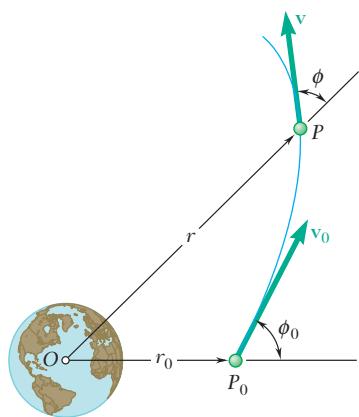
Movimiento bajo una fuerza gravitacional

Figura 13.33

Principio del impulso y la cantidad de movimiento para una partícula

Al recordar de la sección 12.9 que, cuando una partícula se mueve bajo la acción de una fuerza central \mathbf{F} , su cantidad de movimiento angular alrededor del centro de fuerza O permanece constante, se señaló [sección 13.9] que, si la fuerza central \mathbf{F} también es conservativa, es posible utilizar de manera conjunta los principios de la conservación de la cantidad de momento angular y de la conservación de la energía para analizar el movimiento de la partícula [problema resuelto 13.8]. Puesto que la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre un vehículo espacial es tanto central como conservativa, se utilizó este enfoque para estudiar el movimiento de tales vehículos [problema resuelto 13.9] y se encontró que era en particular efectivo en el caso de un *lanzamiento oblicuo*. Al considerar la posición inicial P_0 y una posición arbitraria P del vehículo (figura 13.33), se escribió

$$(H_O)_0 = H_O: \quad r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 = r m v \operatorname{sen} \phi \quad (13.25)$$

$$T_0 + V_0 = T + V: \quad \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \quad (13.26)$$

donde m fue la masa del vehículo y M la masa de la Tierra.

La segunda mitad del capítulo se dedicó al método del impulso y la cantidad de movimiento y su aplicación a la solución de diversos tipos de problemas que implican el movimiento de partículas.

La *cantidad de movimiento lineal de una partícula* se definió [sección 13.10] como el producto mv de la masa m de la partícula y su velocidad \mathbf{v} . De la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, se dedujo la relación

$$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_2 \quad (13.28)$$

donde $m\mathbf{v}_1$ y $m\mathbf{v}_2$ representan la cantidad de movimiento de la partícula en un tiempo t_1 y en un tiempo t_2 , respectivamente, y donde la integral define el *impulso lineal de la fuerza* \mathbf{F} durante el intervalo correspondiente. Por lo tanto, se escribió

$$m\mathbf{v}_1 + \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \quad (13.30)$$

que expresa el principio del impulso y la cantidad de movimiento para una partícula.

Cuando la partícula considerada está sujeta a varias fuerzas, es necesario usar la suma de los impulsos de estas fuerzas; se tuvo

$$m\mathbf{v}_1 + \sum \mathbf{Imp}_{1 \rightarrow 2} = m\mathbf{v}_2 \quad (13.32)$$

Puesto que las ecuaciones (13.30) y (13.32) implican *cantidades vectoriales*, es necesario considerar por separado sus componentes x y y cuando se aplican a la solución de un problema determinado [problemas resueltos 13.10 y 13.11].

El método del impulso y de la cantidad de movimiento es en particular efectivo en el estudio del *movimiento impulsivo* de una partícula, cuando fuerzas muy grandes, denominadas *fuerzas impulsivas*, se aplican durante el intervalo Δt , muy corto, ya que este método implica los impulsos $\mathbf{F} \Delta t$ de las fuerzas, más que las fuerzas mismas [sección 13.11]. Ignorando el impulso de toda fuerza no impulsiva, se escribió

$$m\mathbf{v}_1 + \sum \mathbf{F} \Delta t = m\mathbf{v}_2 \quad (13.35)$$

En el caso del movimiento impulsivo de varias partículas, se tuvo

$$\sum m\mathbf{v}_1 + \sum \mathbf{F} \Delta t = \sum m\mathbf{v}_2 \quad (13.36)$$

donde el segundo término implica sólo fuerzas externas impulsivas [problema resuelto 13.12].

En el caso particular *en el que la suma de los impulsos de las fuerzas externas es cero*, la ecuación (13.36) se reduce a $\sum m\mathbf{v}_1 = \sum m\mathbf{v}_2$; esto es, *la cantidad de movimiento total de las partículas se conserva*.

En las secciones 13.12 a 13.14 se consideró el *impacto central* de dos cuerpos que chocan. En el caso de un *impacto central directo* [sección 13.13], los dos cuerpos que chocan A y B se movían a lo largo de la *línea de impacto* con velocidades \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B , respectivamente (figura 13.34). Podrían usarse dos ecuaciones para determinar sus velocidades \mathbf{v}'_A y \mathbf{v}'_B después del impacto. La primera

Movimiento por impulso

Impacto central directo

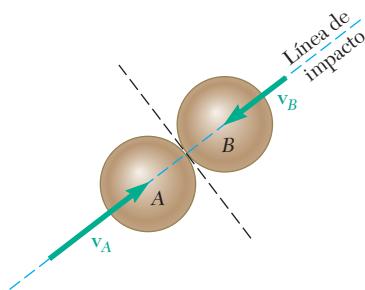


Figura 13.34

expresaba la conservación de la cantidad de movimiento total de los dos cuerpos,

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (13.37)$$

donde un signo positivo indica que la velocidad correspondiente está dirigida hacia la derecha, en tanto que la segunda relaciona las *velocidades relativas* de los dos cuerpos antes y después del impacto,

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \quad (13.43)$$

La constante e se conoce como el *coeficiente de restitución*; su valor se encuentra entre 0 y 1 y depende en gran medida de los materiales implicados. Cuando $e = 0$, se dice que el impacto es *perfectamente plástico*; cuando $e = 1$, se afirma que es *perfectamente elástico* [problema resuelto 13.13].

Impacto central oblicuo

En el caso de un *impacto central oblicuo* [sección 13.14], las velocidades de los dos cuerpos que chocan antes y después del impacto se descompusieron en las componentes n a lo largo de la línea de impacto y de las componentes t a lo largo de la tangente común a las superficies en contacto (figura 13.35). Se observó que la componente t de la velocidad de cada cuerpo permaneció inalterada, en

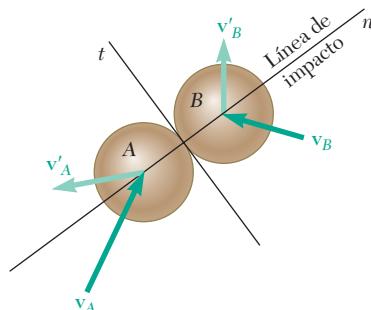


Figura 13.35

tanto que las componentes n satisfacían ecuaciones similares a la (13.37) y a la (13.43) [problemas resueltos 13.14 y 13.15]. Se demostró que aunque este método se desarrolló para cuerpos que se mueven con libertad antes y después del impacto, sería posible extenderlo al caso en el que uno o ambos de los cuerpos que chocan presentan restricciones en su movimiento [problema resuelto 13.16].

Empleo de los tres métodos fundamentales del análisis cinético

En la sección 13.15 se analizaron las ventajas relativas de los tres métodos fundamentales que se presentaron en este capítulo y en el precedente, esto es, la segunda ley de Newton, el trabajo y la energía, y el impulso y la cantidad de movimiento. Se señaló que el método del trabajo y la energía, y el método del impulso y la cantidad de movimiento pueden combinarse para resolver problemas que implican una fase corta de impacto durante la cual las fuerzas impulsivas deben tomarse en cuenta [problema resuelto 13.17].

Problemas de repaso

13.190 Una munición de 2 oz disparada verticalmente con una pistola de resortes en la superficie de la Tierra alcanza una altura de 300 ft. La misma munición disparada con la misma pistola en la superficie de la Luna alcanza una altura de 1 900 ft. Determine la energía disipada por el arrastre aerodinámico cuando la munición se dispara en la superficie de la Tierra. (La aceleración de la gravedad en la Luna es 0.165 veces la de la Tierra.)

13.191 Se desea diseñar un cable elástico para salto de *bungee* desde una torre de 130 ft. Las especificaciones exigen que el cable tenga una longitud de 85 ft cuando está sin deformar y que se estire hasta una longitud total de 100 ft cuando se le amarra un peso de 600 lb y se deja caer desde la torre. Determine *a)* la constante k requerida para el cable, *b)* qué tan cerca del suelo llegará un hombre de 185 lb si utiliza este cable para saltar de la torre.

13.192 Una esfera hueca de 2 oz hecha de acero está unida a una cuerda de 8 in., puede oscilar alrededor del punto O en un plano vertical. La esfera está sometida a su propio peso y a la fuerza \mathbf{F} ejercida por un pequeño imán empotrado en el suelo. La magnitud de esa fuerza expresada en libras es $F = 0.1/r^2$, donde r es la distancia expresada en pulgadas desde el imán hasta la esfera. Si la esfera se suelta desde el reposo en A , determine su rapidez cuando pasa por el punto B .

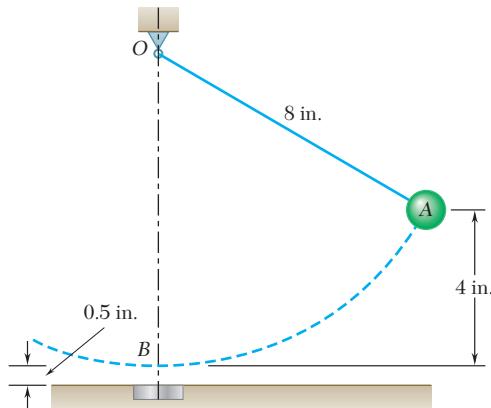


Figura P13.192

13.193 Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de un planeta de masa M . Los valores mínimo y máximo de la distancia r desde el satélite hasta el centro del planeta son, respectivamente, r_0 y r_1 . Utilice los principios de la conservación de la energía y la conservación de la cantidad de movimiento angular para obtener la relación

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

donde h es la cantidad de movimiento angular por unidad de masa del satélite y G es la constante de gravitación.



Figura P13.191

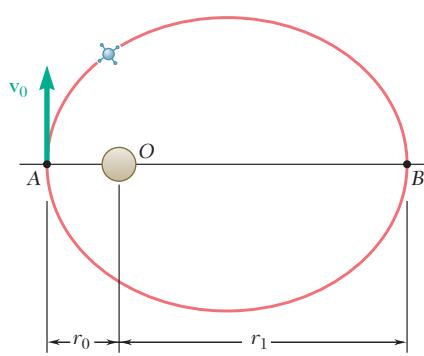


Figura P13.193

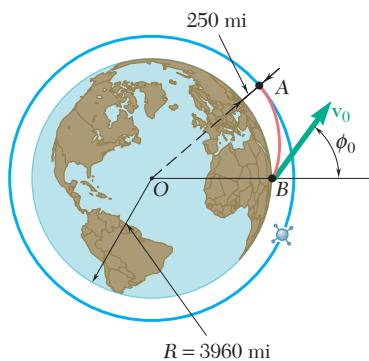


Figura P13.194

13.194 Un transbordador espacial se encontrará con una estación espacial que está en órbita a una altura de 250 mi sobre la superficie de la Tierra. El transbordador ha alcanzado una altura de 40 mi cuando su motor es desactivado en el punto B . Si se sabe que en ese momento la velocidad \mathbf{v}_0 del transbordador forma un ángulo $\phi_0 = 55^\circ$ con la vertical, determine la magnitud requerida de \mathbf{v}_0 si la trayectoria del transbordador debe ser tangente en A a la órbita de la estación espacial.

13.195 Una bala de 25 g, recubierta con acero, se dispara horizontalmente con una velocidad de 600 m/s hacia una placa de acero y rebota a lo largo de una trayectoria CD con una velocidad de 400 m/s. Si se sabe que la bala deja una marca de 10 mm sobre la superficie de la placa y se supone que tiene una rapidez promedio de 500 m/s mientras está en contacto con la placa, determine la magnitud y dirección de la fuerza impulsiva promedio ejercida por la bala sobre la placa.

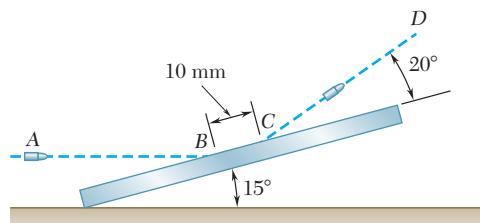


Figura P13.195

13.196 La maza de 650 kg de un martinete usado para clavar pilotes cae desde una altura de 1.2 m sobre la parte superior de un pilote de 140 kg, incrustándolo 110 mm en el suelo. Si se supone un impacto perfectamente plástico ($e = 0$), determine la resistencia promedio del suelo a la penetración.

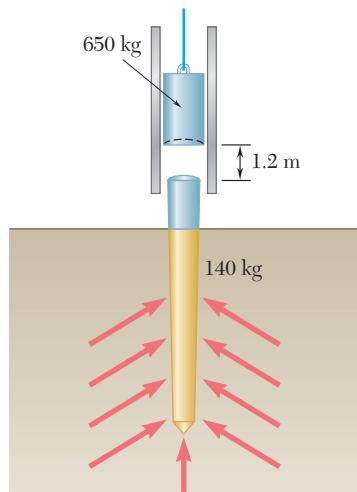


Figura P13.196

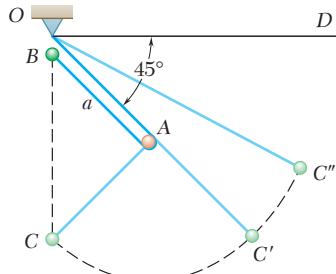


Figura P13.197

13.197 Una pequeña esfera B de masa m está unida a una cuerda inextensible con longitud $2a$, la cual pasa alrededor de la clavija fija A y está unida a un soporte fijo en O . La esfera se mantiene cerca del soporte en O y se libera sin velocidad inicial. Cae libremente hasta el punto C , donde la cuerda se pone tensa y oscila en un plano vertical, primero alrededor de A y después alrededor de O . Determine la distancia vertical desde la línea OD hasta el punto C'' más alto que alcanzará la esfera.

13.198 Los discos A y B cuyas masas son m_A y m_B , respectivamente, pueden deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin fricción. El disco B está en reposo cuando es golpeado por un disco A que se mueve a una velocidad v_0 en una dirección que forma un ángulo θ con la línea de impacto. Si se denota con e el coeficiente de restitución entre los dos discos, demuestre que la componente n de la velocidad de A después del impacto es a) positiva si $m_A < em_B$, b) negativa si $m_A < em_B$, c) cero si $m_A = em_B$.

13.199 Los bloques A y B están conectados mediante una cuerda que pasa sobre poleas y a través de un collarín C. El sistema se suelta desde el reposo cuando $x = 1.7$ m. Mientras el bloque A sube, golpea al collarín C con un impacto perfectamente plástico ($e = 0$). Despues del impacto los dos bloques y el collarín siguen moviéndose hasta que se detienen e invierten su movimiento. Cuando A y C se mueven hacia abajo, C golpea la repisa y los bloques A y B siguen moviéndose hasta que llegan a otro tope. Determine a) la velocidad de los bloques y el collarín, inmediatamente después de que A golpea a C, b) la distancia que recorren los bloques y el collarín después del impacto y antes de detenerse, c) el valor de x al final de un ciclo completo.

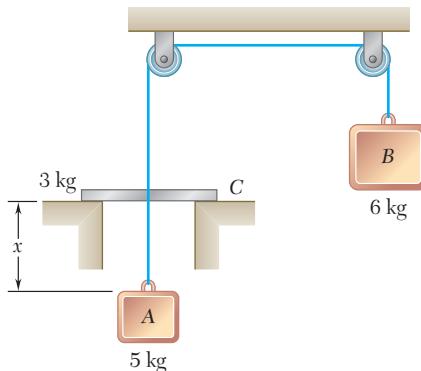


Figura P13.199

13.200 Una pequeña esfera A unida a una cuerda AC se suelta desde el reposo en la posición mostrada y golpea una esfera idéntica B que cuelga de una cuerda vertical BD. Si el ángulo máximo θ_B que forma la cuerda BD con la vertical en el movimiento subsecuente de la esfera B debe ser igual al ángulo θ_A , determine el valor requerido de la razón l_B/l_A de las longitudes de las dos cuerdas en términos del coeficiente de restitución e entre las dos esferas.

13.201 Un bloque A de 2 kg se empuja hacia arriba contra un resorte, comprimiéndolo una distancia $x = 0.1$ m. Despues el bloque se libera desde el reposo y se desliza hacia abajo sobre el plano inclinado de 20° hasta que golpea una esfera B de 1 kg que se encuentra suspendida de una cuerda inextensible de 1 m. La constante del resorte es $k = 800$ N/m, el coeficiente de fricción entre A y el suelo es 0.2, la distancia que se desliza A desde la longitud sin estirar del resorte es $d = 1.5$ m y el coeficiente de restitución entre A y B es 0.8. Cuando $\alpha = 40^\circ$, determine a) la rapidez de B, b) la tensión en la cuerda.

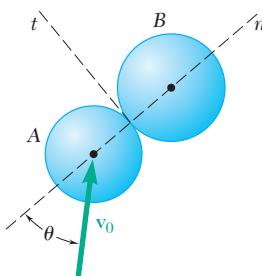


Figura P13.198

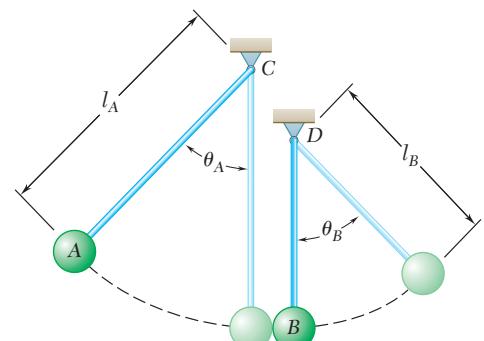


Figura P13.200

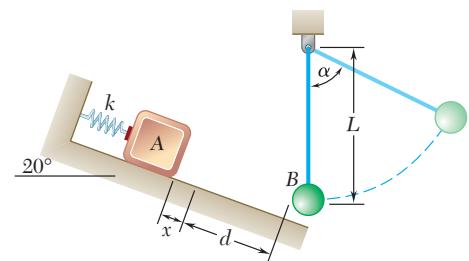


Figura P13.201

Problemas de computadora

13.C1 Un collarín de 12 lb está unido a un resorte anclado en el punto C y puede deslizarse sobre una varilla sin fricción que forma un ángulo de 30° con la vertical. El resorte tiene una constante k y no está estirado cuando el collarín se encuentra en A. Si se sabe que el collarín se suelta desde el reposo en A, utilice software para determinar la velocidad del collarín en el punto B para valores de k desde 0.1 hasta 2.0 lb/in.

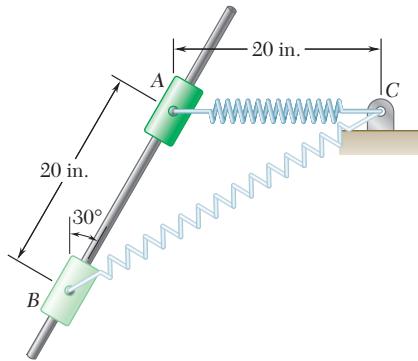


Figura P13.C1

13.C2 Las marcas que se dejaron sobre una pista de carreras indican que las ruedas traseras (las de la tracción) de un automóvil de 2 000 lb patinaron, con las llantas delanteras apenas despegadas del suelo, en los primeros 60 ft de la pista de 1 320 ft. El automóvil se condujo a punto de patinar, con 60 por ciento de su peso sobre las ruedas traseras durante los restantes 1 260 ft de la pista. Si se sabe que los coeficientes de fricción cinética y estática son de 0.60 y 0.85, respectivamente, y que la fuerza debida al arrastre aerodinámico es $F_d = 0.0098v^2$, donde la velocidad v se expresa en ft/s y la fuerza F_d en lb, use software para determinar el tiempo transcurrido y la rapidez del automóvil en diferentes puntos a lo largo de la pista, a) tomando en cuenta la fuerza F_d , b) despreciando la fuerza F_d . Para sus cálculos utilice incrementos de distancia $\Delta x = 0.1$ ft, y tabule sus resultados cada 5 ft para los primeros 60 ft y cada 90 ft para los restantes 1 260 ft. [(Sugerencia: El tiempo Δt_i requerido para que el automóvil recorra el incremento de distancia Δx_i puede obtenerse al dividir Δx_i entre la velocidad promedio $\frac{1}{2}(v_i + v_{i+1})$ del automóvil a través de Δx_i si se supone que la aceleración del automóvil permanece constante a lo largo de Δx .]

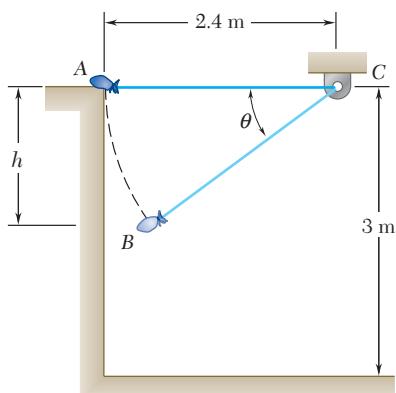


Figura P13.C3

13.C3 Un saco de 5 kg se empuja suavemente desde el borde de una pared y oscila en un plano vertical en el extremo de una cuerda de 2.4 m que puede soportar una tensión máxima F_m . Para valores de F_m desde 40 hasta 140 N, use software para determinar a) la diferencia en elevación h entre el punto A y el punto B donde la cuerda se romperá, b) la distancia d desde la pared vertical hasta el punto donde el saco golpeará el suelo.

13.C4 Use software para determinar *a*) el tiempo requerido para que el sistema del problema 13.199 complete 10 ciclos sucesivos del movimiento descrito en ese problema, comenzando con $x = 1.7$ m, *b*) el valor de x al final del décimo ciclo.

13.C5 Una pelota *B* de 700 g cuelga de una cuerda inextensible que está unida a un soporte en *C*. Una pelota *A* de 350 g golpea a *B* con una velocidad \mathbf{v}_0 y forma un ángulo θ_0 con la vertical. Si se supone que no hay fricción y se denota con e el coeficiente de restitución, use software para determinar las magnitudes v'_A y v'_B de las velocidades de las pelotas inmediatamente después del impacto y el porcentaje de energía perdida en la colisión para $v_0 = 6$ m/s y valores de θ_0 desde 20° hasta 150° . Suponga que *a*) $e = 1$, *b*) $e = 0.75$, *c*) $e = 0$.

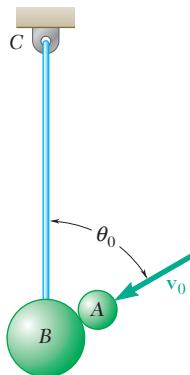


Figura P13.C5

13.C6 En el problema 13.109, un vehículo espacial se encontraba en una órbita circular a una altura de 225 mi sobre la superficie de la Tierra. Para regresar a esta última, disminuyó su rapidez cuando pasó por *A* encendiendo su motor durante un breve intervalo en una dirección opuesta a la dirección de su movimiento. Su velocidad resultante al llegar al punto *B*, a una altura de 40 mi, formó un ángulo $\phi_B = 60^\circ$ con la vertical. Una estrategia alterna para sacar al vehículo espacial de su órbita circular sería girarlo de manera que su motor apuntara en dirección contraria a la Tierra y después aplicar una velocidad incremental $\Delta\mathbf{v}_A$ hacia el centro *O* de la Tierra. Es probable que esto requiriera un menor gasto de energía al encender el motor en *A*, pero podría ocasionar un descenso demasiado rápido en *B*. Suponiendo que se usa esta estrategia, use software para determinar los valores de ϕ_B y v_B para un gasto de energía que va desde 5 hasta 100 por ciento de la necesaria en el problema 13.109.

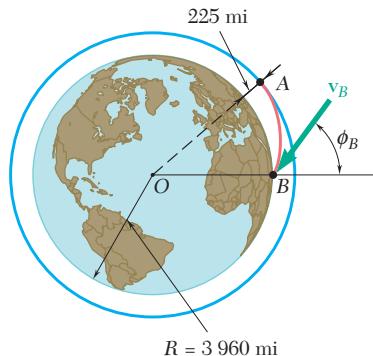


Figura P13.C6

El empuje para este prototipo de motor XR-5M15 se produce por medio de partículas de gas expulsadas a gran velocidad. La determinación de las fuerzas en el puesto de pruebas se basa en el análisis del movimiento de un *sistema de partículas variable*, es decir, se considera el movimiento conjunto de un gran número de partículas de aire en vez de hacerlo por separado.



CAPÍTULO **14**

Sistemas de partículas



CAPÍTULO 14 SISTEMAS DE PARTÍCULAS

- 14.1 Introducción
- 14.2 Aplicación de las leyes de Newton al movimiento de un sistema de partículas. Fuerzas efectivas
- 14.3 Cantidad de movimiento lineal y angular de un sistema de partículas
- 14.4 Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas
- 14.5 Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas alrededor de su centro de masa
- 14.6 Conservación de la cantidad de movimiento para sistemas de partículas
- 14.7 Energía cinética de un sistema de partículas
- 14.8 Principio del trabajo y la energía. Conservación de la energía para un sistema de partículas
- 14.9 Principio del impulso y la cantidad de movimiento de un sistema de partículas
- 14.10 Sistemas variables de partículas
- 14.11 Corriente estacionaria de partículas
- 14.12 Sistemas que ganan o pierden masa

14.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudia el movimiento de *sistemas de partículas*, esto es, el movimiento de un gran número de partículas consideradas en conjunto. La primera parte del capítulo se dedica a sistemas consistentes en partículas bien definidas; la segunda considera el movimiento de sistemas variables, esto es, sistemas en los cuales se ganan o pierden partículas de manera continua, o en los que ocurren ambas situaciones de manera simultánea.

En la sección 14.2, la segunda ley de Newton se aplicará primero a cada partícula del sistema. Al definir la *fuerza efectiva* de una partícula como el producto $m_i \mathbf{a}_i$ de su masa m_i y su aceleración \mathbf{a}_i , se demostrará que las *fuerzas externas* que actúan sobre diversas partículas forman un sistema equipolente al sistema de las fuerzas efectivas, esto es, ambos sistemas tienen la misma resultante y el mismo momento resultante alrededor de cualquier punto dado. En la sección 14.3 se mostrará que la resultante y el momento resultante de las fuerzas externas son iguales, respectivamente, a la razón de cambio de la cantidad de movimiento lineal total y a la cantidad de movimiento angular total de las partículas del sistema.

En la sección 14.4 se define el *centro de masa* del sistema de partículas y se describe su movimiento. En tanto que en la sección 14.5 se analiza el movimiento de las partículas alrededor de su centro de masa. Las condiciones bajo las cuales se conserva la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas se estudian en la sección 14.6, y los resultados obtenidos en esa sección se aplican a la solución de diversos problemas.

Las secciones 14.7 y 14.8 abordan la aplicación del principio del trabajo y la energía en un sistema de partículas, y en la sección 14.9 se estudia la aplicación del principio del impulso y la cantidad de movimiento. Estas secciones contienen también varios problemas de interés práctico.

Hay que observar que si bien las deducciones dadas en la primera parte de este capítulo se refieren a un sistema de partículas independientes, éstas siguen siendo válidas cuando las partículas del sistema están conectadas rígidamente, esto es, cuando forman un cuerpo rígido. De hecho, los resultados obtenidos aquí contienen los fundamentos del estudio de la cinética de cuerpos rígidos presente en los capítulos 16 a 18.

La segunda parte de este capítulo se dedica al estudio de sistemas variables de partículas. En la sección 14.11 se considerarán corrientes estacionarias de partículas, como un chorro de agua desviado por una paleta o el flujo de aire que pasa por un motor de reacción, y se aprenderá a determinar la fuerza que ejerce la corriente sobre la paleta y el empuje desarrollado por el motor. Por último, en la sección 14.12 se aprenderá cómo analizar los sistemas que ganan masa de manera continua al absorber partículas, o que pierden masa al desechar partículas de manera continua. Entre las diversas aplicaciones prácticas de este análisis se encuentra la determinación del empuje desarrollado por un motor de cohete.

14.2. APlicación DE LAS LEYES DE NEWTON AL MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS. FUERZAS EFECTIVAS

Para deducir las ecuaciones de movimiento de un sistema de n partículas se empieza escribiendo la segunda ley de Newton para cada partícula individual del sistema. Considere la partícula P_i , donde $1 \leq i \leq n$. Sea m_i la masa de P_i y \mathbf{a}_i su aceleración con respecto al sistema de refe-

rencia newtoniano $Oxyz$. La fuerza ejercida sobre P_i por otra partícula P_j del sistema (figura 14.1), denominada *fuerza interna*, se denotará por \mathbf{f}_{ij} . La resultante de las fuerzas internas ejercidas sobre P_i por todas las demás partículas del sistema es entonces $\sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij}$ (donde \mathbf{f}_{ij} no tiene significado y se supone que será igual a cero). Al denotar, por otro lado, mediante \mathbf{F}_i la resultante de todas las *fuerzas externas* que actúan sobre P_i , se escribe la segunda ley de Newton para la partícula P_i en la forma siguiente

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} = m_i \mathbf{a}_i \quad (14.1)$$

Al denotar por \mathbf{r}_i el vector de posición de P_i y tomar los momentos alrededor de O de los diversos términos en la ecuación (14.1), también se escribe

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i \quad (14.2)$$

Si se repite este procedimiento para cada partícula P_i del sistema, se obtienen n ecuaciones del tipo (14.1) y n ecuaciones del tipo (14.2), donde i toma sucesivamente los valores $1, 2, \dots, n$. Los vectores $m_i \mathbf{a}_i$ se denominan las *fuerzas efectivas* de las partículas.[†] En consecuencia, las ecuaciones que se obtienen expresan el hecho de que las fuerzas externas \mathbf{F}_i y las fuerzas internas \mathbf{f}_{ij} que actúan sobre las diversas partículas forman un sistema equivalente al sistema de las fuerzas efectivas $m_i \mathbf{a}_i$ (esto es, un sistema puede sustituirse por el otro) (figura 14.2).

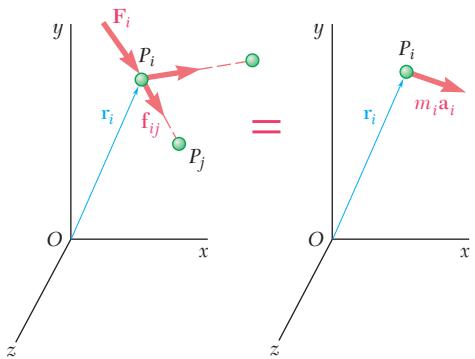


Figura 14.1

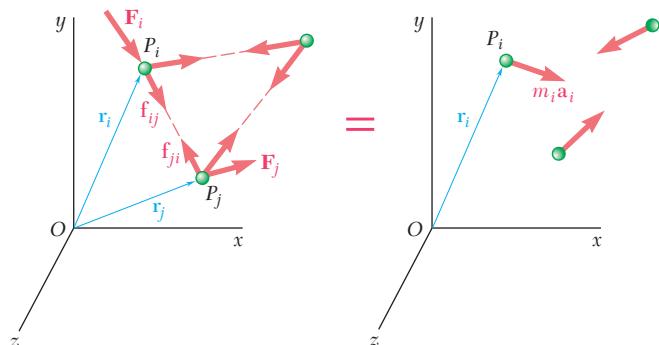


Figura 14.2

Antes de continuar con la deducción, hay que examinar las fuerzas internas \mathbf{f}_{ij} . Advierta que estas fuerzas ocurren en pares $\mathbf{f}_{ij}, \mathbf{f}_{ji}$, donde \mathbf{f}_{ij} representa la fuerza ejercida por la partícula P_j sobre la partícula P_i y \mathbf{f}_{ji} representa la fuerza ejercida por P_i sobre P_j (figura 14.2). Ahora bien, de acuerdo con la tercera ley de Newton (sección 6.1), ampliada por la ley de la gravitación de Newton a partículas que actúan a distancia (sección 12.10), las fuerzas \mathbf{f}_{ij} y \mathbf{f}_{ji} son iguales y opuestas y tienen la misma línea de acción. Por lo tanto, su suma es $\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = 0$, y la suma de sus momentos alrededor de O es

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}) + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{f}_{ji} = 0$$

ya que los vectores $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ y \mathbf{f}_{ji} en el último término son colineales. Al

[†]Puesto que estos vectores representan las resultantes de fuerzas que actúan sobre las diferentes partículas del sistema, pueden realmente considerarse como fuerzas.

agregar todas las fuerzas internas del sistema y sumar sus momentos alrededor de O , se obtienen las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{f}_{ij} = 0 \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = 0 \quad (14.3)$$

que expresa el hecho de que la resultante y el momento resultante de las fuerzas internas del sistema son cero.

Al volver ahora a las n ecuaciones (14.1), donde $i = 1, 2, \dots, n$, se suman sus miembros del lazo izquierdo y los del lado derecho. Tomando en cuenta la primera de las ecuaciones (14.3), se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \quad (14.4)$$

Al proceder de manera similar con las ecuaciones (14.2) y tomar en cuenta la segunda de las ecuaciones (14.3), se tiene

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) \quad (14.5)$$

Las ecuaciones (14.4) y (14.5) expresan el hecho de que el sistema de las fuerzas externas \mathbf{F}_i y el sistema de las fuerzas efectivas $m_i \mathbf{a}_i$ tienen la misma resultante y el mismo momento resultante. Al recordar la definición dada en la sección 3.19 para dos sistemas equipolentes de vectores, se puede consecuentemente enunciar que *el sistema de fuerzas externas que actúan sobre las partículas y el sistema de las fuerzas efectivas de las partículas son equipolentes*[†] (figura 14.3).

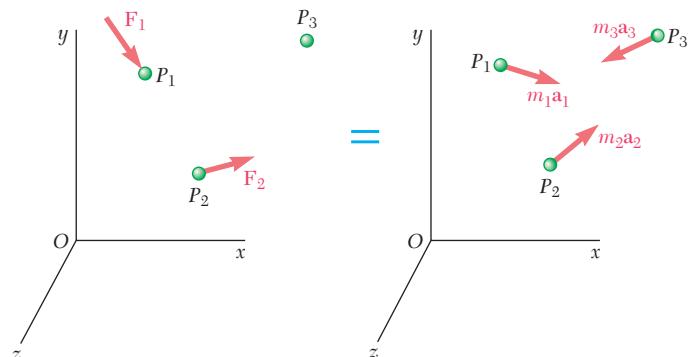


Figura 14.3

[†]El resultado que acaba de obtenerse con frecuencia recibe el nombre de *principio d'Alembert*, en honor al matemático francés Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Sin embargo, el enunciado original de d'Alembert se refiere a un sistema de cuerpos conectados, con \mathbf{f}_{ij} representando las fuerzas restrictivas, las cuales si las aplican a ellos mismos no provocarán el movimiento del sistema. Puesto que, como se demostrará a continuación, éste no es en general el caso para las fuerzas internas que actúan sobre un sistema de partículas libres, la consideración del principio de d'Alembert se postergará hasta que se considere el movimiento de cuerpos rígidos (capítulo 16).

Las ecuaciones (14.3) expresan el hecho de que el sistema de las fuerzas internas \mathbf{f}_{ij} es equipolente a cero. Sin embargo, observe que *no* se afirma que las fuerzas internas no tengan efecto sobre las partículas que se están considerando. De hecho, las fuerzas gravitacionales que el Sol y los planetas ejercen entre sí son internas al sistema solar y equipolentes a cero. A pesar de eso, estas fuerzas son únicamente responsables del movimiento de los planetas alrededor del Sol.

De manera similar, no se indica a partir de las ecuaciones (14.4) y (14.5) que los dos sistemas de fuerzas externas que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante tendrán el mismo efecto sobre un sistema determinado de partículas. Es claro que los sistemas que se muestran en las figuras 14.4a y 14.4b tienen la misma resultan-

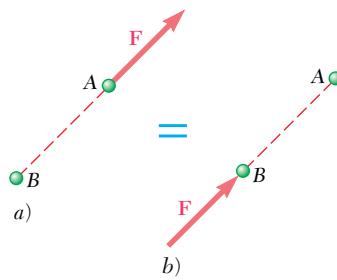


Figura 14.4

te y el mismo momento resultante; sin embargo, el primer sistema acelera la partícula A y deja inalterada a la partícula B, en tanto que el segundo acelera a B y no afecta a A. Es importante recordar que cuando se señaló en la sección 3.19 que dos sistemas de fuerzas equipolentes que actúan sobre un cuerpo rígido también son equivalentes, se advirtió de manera específica que esta propiedad *no* podría extenderse a un sistema de fuerzas que actuaba sobre un conjunto de partículas independientes como las consideradas en este capítulo.

Para evitar cualquier confusión, se utilizarán signos de igualdad de tono claro para conectar sistemas de vectores equipolentes, como los que se indican en las figuras 14.3 y 14.4. Estos signos indican que los dos sistemas de vectores tienen la misma resultante y el mismo momento resultante. Los signos de igualdad se continuarán utilizando para indicar que dos sistemas de vectores son equivalentes, esto es, que un sistema puede realmente sustituirse por el otro (figura 14.2).

14.3. CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL Y ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Las ecuaciones (14.4) y (14.5), que se obtuvieron en la sección anterior para el movimiento de un sistema de partículas, pueden expresarse en una forma más condensada si se introduce la cantidad de movimiento lineal y angular del sistema de partículas. Al definir la cantidad de movimiento lineal \mathbf{L} del sistema de partículas como la suma de las cantidades de movimiento lineal de las diversas partículas del sistema (sección 12.3), se escribe

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (14.6)$$

Si se define la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O alrededor de O del sistema de partículas de una manera similar (sección 12.7), se tiene

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (14.7)$$

Al diferenciar ambos miembros de las ecuaciones (14.6) y (14.7) con respecto a t , se escribe

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \quad (14.8)$$

y

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_O &= \sum_{i=1}^n (\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) \end{aligned}$$

que se reduce a

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) \quad (14.9)$$

ya que los vectores \mathbf{v}_i y $m_i \mathbf{v}_i$ son colineales.

Observe que los miembros del lado derecho de las ecuaciones (14.8) y (14.9) son respectivamente idénticos a los miembros del lado derecho de las ecuaciones (14.4) y (14.5). Se concluye que los miembros del lado izquierdo de estas ecuaciones son respectivamente iguales. Al recordar que el miembro del lado izquierdo de la ecuación (14.5) representa la suma de los momentos \mathbf{M}_O alrededor de O de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema, y al omitir el subíndice i de las sumatorias, se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \quad (14.10)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (14.11)$$

Estas ecuaciones expresan que *la resultante y el momento resultante alrededor del punto fijo O de las fuerzas externas son, respectivamente, iguales a las razones de cambio de la cantidad de movimiento lineal y de la cantidad de movimiento angular alrededor de O del sistema de partículas.*

14.4. MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

La ecuación (14.10) puede escribirse en una forma alternativa si se considera el *centro de masa* del sistema de partículas. El centro de masa

del sistema es el punto G definido por el vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$, el cual satisface la relación

$$m\bar{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (14.12)$$

donde m representa la masa total $\sum_{i=1}^n m_i$ de las partículas. Al descomponer los vectores de posición $\bar{\mathbf{r}}$ y \mathbf{r}_i en componentes rectangulares, se obtienen las siguientes tres ecuaciones escalares, las cuales se utilizan para determinar las coordenadas $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ del centro de masa:

$$m\bar{x} = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad m\bar{y} = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad m\bar{z} = \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (14.12')$$

Puesto que $m_i g$ representa el peso de la partícula P_i y mg el peso total de las partículas, G es también el centro de gravedad del sistema de partículas. Sin embargo, para evitar cualquier confusión, a G se le referirá como el *centro de masa* del sistema de partículas cuando se estudien propiedades asociadas con la *masa* de las partículas, y como el *centro de gravedad* del sistema cuando se consideren propiedades asociadas con el *peso* de las partículas. Las partículas localizadas fuera del campo gravitacional de la Tierra, por ejemplo, tienen masa pero no peso. En ese caso es posible referirse de manera apropiada a su centro de masa, pero, evidentemente, no a su centro de gravedad.[†]

Al diferenciar ambos miembros de la ecuación (14.12) con respecto a t , se escribe

$$m\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

o

$$m\bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (14.13)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ representa la velocidad del centro de masa G del sistema de partículas. Pero el miembro del lado derecho de la ecuación (14.13) es, por definición, la cantidad de movimiento lineal \mathbf{L} del sistema (sección 14.3). Por lo tanto, se tiene

$$\mathbf{L} = m\bar{\mathbf{v}} \quad (14.14)$$

y, al diferenciar ambos miembros con respecto a t ,

$$\dot{\mathbf{L}} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (14.15)$$

[†]También es posible señalar que el centro de masa y el centro de gravedad de un sistema de partículas no coinciden exactamente, ya que los pesos de las partículas están dirigidos hacia el centro de la Tierra y, por ello, no forman realmente un sistema de fuerzas paralelas.

donde $\bar{\mathbf{a}}$ representa la aceleración del centro de masa G . Sustituyendo $\dot{\mathbf{L}}$ de (14.15) en (14.10), se escribe la ecuación

$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (14.16)$$

que define el movimiento del centro de masa G del sistema de partículas.

La ecuación (14.16) es idéntica a la ecuación obtenida para una partícula de masa m igual a la masa total de las partículas del sistema, sobre la cual actúan todas las fuerzas externas. Por lo tanto, *el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa total del sistema y todas las fuerzas externas estuvieran concentradas en ese punto*.

Este principio se ilustra mejor mediante el movimiento de una bomba que explota. Si se ignora la resistencia del aire, es posible suponer que una bomba describirá una trayectoria parabólica. Luego de la explosión, el centro de masa G de los fragmentos de la bomba continuará moviéndose a lo largo de la misma trayectoria. En realidad, el punto G se mueve como si la masa y el peso de todos los fragmentos estuvieran concentrados en G ; en consecuencia, se mueve como si no hubiera explotado la bomba.

Es necesario señalar que la conclusión anterior no incluye los momentos de las fuerzas externas. Por consiguiente, *sería erróneo suponer* que las fuerzas externas son equipolentes a un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ unido al centro de masa G . Éste no es el caso en general, ya que, como se verá en la siguiente sección, la suma de los momentos alrededor de G de las fuerzas externas no es en general igual a cero.

14.5. CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS ALREDEDOR DE SU CENTRO DE MASA

En algunas aplicaciones (por ejemplo, en el análisis del movimiento de un cuerpo rígido) es conveniente considerar el movimiento de las partículas del sistema con respecto a un sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$ que se traslada con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ (figura 14.5). Si bien el sistema de referencia centroidal no es, en general, un sistema de referencia newtoniano, se observará que la relación fundamental (14.11) se cumple cuando el sistema de referencia $Oxyz$ se sustituye por $Gx'y'z'$.

Al denotar, respectivamente, mediante \mathbf{r}'_i y \mathbf{v}'_i el vector de posición y la velocidad de la partícula P_i relativos al sistema de referencia en movimiento $Gx'y'z'$, se define la *cantidad de movimiento angular* \mathbf{H}'_G del sistema de partículas *alrededor del centro de masa G* de la manera siguiente

$$\mathbf{H}'_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) \quad (14.17)$$

Después de esto se diferencian ambos miembros de la ecuación (14.17) con respecto a t . Esta operación es similar a la que se efectuó en la sección 14.3 en la ecuación (14.7), y por ello se escribe de inmediato

$$\dot{\mathbf{H}}'_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{a}'_i) \quad (14.18)$$

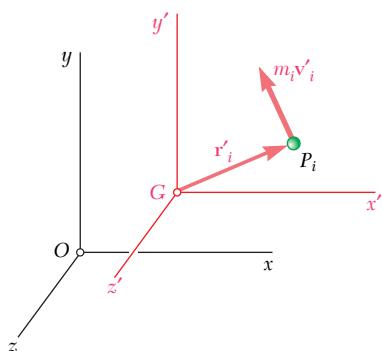


Figura 14.5

donde \mathbf{a}'_i denota la aceleración de P_i relativa al sistema de referencia en movimiento. Con referencia a la sección 11.12, se escribe

$$\mathbf{a}_i = \bar{\mathbf{a}} + \mathbf{a}'_i$$

donde \mathbf{a}_i y $\bar{\mathbf{a}}$ denotan, respectivamente, las aceleraciones de P_i y G relativas al sistema de referencia $Oxyz$. Al resolver para \mathbf{a}'_i y sustituir entre (14.18), se tiene

$$\dot{\mathbf{H}}'_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{a}_i) - \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \bar{\mathbf{a}} \quad (14.19)$$

Sin embargo, por (14.12), la segunda sumatoria en la ecuación (14.19) es igual a $m\bar{\mathbf{r}}'$ y, por consiguiente, a cero, ya que el vector de posición $\bar{\mathbf{r}}'$ de G relativo al sistema de referencia $Gx'y'z'$ es claramente cero. Por otro lado, puesto que \mathbf{a}_i representa la aceleración de P_i relativa a un sistema de referencia newtoniano, se puede usar la ecuación (14.1) y sustituir $m_i \mathbf{a}_i$ por la suma de las fuerzas internas \mathbf{f}_{ij} y de la resultante \mathbf{F}_i de las fuerzas externas que actúan sobre P_i . Pero un razonamiento similar al que se usó en la sección 14.2 demuestra que el momento resultante alrededor de G de las fuerzas internas \mathbf{f}_{ij} del sistema completo es cero. La primera sumatoria en la ecuación (14.19) se reduce consecuentemente al momento resultante alrededor de G de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema, y se escribe

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}'_G \quad (14.20)$$

que expresa que *el momento resultante alrededor de G de las fuerzas externas es igual a la razón de cambio, de la cantidad de movimiento angular alrededor de G del sistema de partículas.*

Debe observarse que en la ecuación (14.17) se define la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}'_G como la suma de los momentos alrededor de G de los momentos de las partículas $m_i \mathbf{v}'_i$ en su movimiento relativo al sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$. Es posible que algunas veces necesitemos calcular la suma \mathbf{H}_G de los momentos alrededor de G de las cantidades de movimiento de las partículas $m_i \mathbf{v}_i$ en su movimiento absoluto, esto es, en su movimiento según se observa desde el sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ (figura 14.6):

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (14.21)$$

Resulta notable que las cantidades de movimiento angular \mathbf{H}'_G y \mathbf{H}_G sean idénticamente iguales. Esto puede verificarse al referirse a la sección 11.2 y escribir

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i \quad (14.22)$$

Al sustituir \mathbf{v}_i de (14.22) en la ecuación (14.21), se encuentra

$$\mathbf{H}_G = \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i \right) \times \bar{\mathbf{v}} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i)$$

Sin embargo, como se señaló antes, la primera sumatoria es igual a cero. De tal modo \mathbf{H}_G se reduce a la segunda sumatoria, la cual por definición es igual a \mathbf{H}'_G .[†]

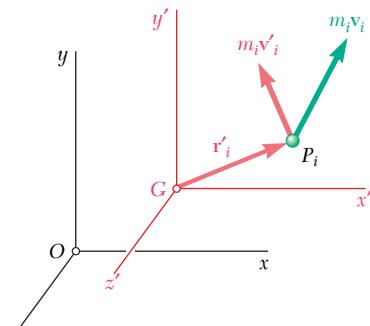


Figura 14.6

[†]Advierta que esta propiedad es particular del sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$ y, en general, no se cumple para otro sistema de referencia (véase el problema 14.29).

Si se aprovecha la propiedad acabada de establecer, se simplifica la notación al eliminar la prima (') de la ecuación (14.20) y se escribe

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (14.23)$$

donde se entiende que la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G puede calcularse al evaluar los momentos alrededor de G de las cantidades de movimiento de las partículas en su movimiento con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ o al sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$:

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) \quad (14.24)$$

14.6. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Si no actúa una fuerza externa sobre las partículas de un sistema, los miembros del lado izquierdo de las ecuaciones (14.10) y (14.11) son iguales a cero y estas ecuaciones se reducen a $\dot{\mathbf{L}} = 0$ y $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$. Se concluye que

$$\mathbf{L} = \text{constante} \quad \mathbf{H}_O = \text{constante} \quad (14.25)$$

Las ecuaciones que se obtienen expresan que la cantidad de movimiento lineal del sistema de partículas y su cantidad de movimiento angular alrededor del punto fijo O se conservan.

En algunas aplicaciones, como los problemas en los que intervienen fuerzas centrales, el momento alrededor del punto fijo O de cada una de las fuerzas externas puede ser cero sin que ninguna de las fuerzas sea cero. En tales casos, se sigue cumpliendo la segunda de las ecuaciones (14.25); la cantidad de movimiento angular del sistema de partículas alrededor de O se conserva.

También es posible aplicar el concepto de conservación de la cantidad de movimiento al análisis del movimiento del centro de masa G de un sistema de partículas y al análisis del movimiento del sistema alrededor de G . Por ejemplo, si la suma de las fuerzas externas es cero, se aplica la primera de las ecuaciones (14.25). Al recordar la ecuación (14.14), se escribe

$$\bar{\mathbf{v}} = \text{constante} \quad (14.26)$$



Fotografía 14.1 Si no existen fuerzas externas que actúen sobre las dos etapas de este cohete, se conservarán las cantidades de movimiento lineal y angular del sistema.

que expresa que el centro de masa G del sistema se mueve en línea recta y a una velocidad constante. Por otro lado, si la suma de los momentos alrededor de G de las fuerzas externas es cero, se concluye de la ecuación (14.23) que se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor de su centro de masa:

$$\mathbf{H}_G = \text{constante} \quad (14.27)$$

PROBLEMA RESUELTO 14.1

Se observa que en $t = 0$ un vehículo espacial de 200 kg pasa por el origen de un sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ con velocidad $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$ relativa al sistema de referencia. Luego de la detonación de cargas explosivas, el vehículo se separa en tres partes A , B y C , de masas respectivas iguales a 100 kg, 60 kg y 40 kg. Si en $t = 2.5$ s se observa que las posiciones de las partes A y B son $A(555, -180, 240)$ y $B(255, 0, -120)$, donde las coordenadas se expresan en metros, determine la posición de la parte C en ese tiempo.

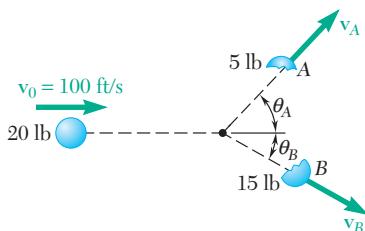
SOLUCIÓN

Puesto que no hay fuerza externa, el centro de masa G del sistema se mueve con la velocidad constante $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$. En $t = 2.5$ s, su posición es

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 t = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}(2.5 \text{ s}) = (375 \text{ m})\mathbf{i}$$

Al recordar la ecuación (14.12), se escribe

$$\begin{aligned} m\bar{\mathbf{r}} &= m_A \mathbf{r}_A + m_B \mathbf{r}_B + m_C \mathbf{r}_C \\ (200 \text{ kg})(375 \text{ m})\mathbf{i} &= (100 \text{ kg})[(555 \text{ m})\mathbf{i} - (180 \text{ m})\mathbf{j} + (240 \text{ m})\mathbf{k}] \\ &\quad + (60 \text{ kg})[(255 \text{ m})\mathbf{i} - (120 \text{ m})\mathbf{k}] + (40 \text{ kg})\mathbf{r}_C \\ \mathbf{r}_C &= (105 \text{ m})\mathbf{i} + (450 \text{ m})\mathbf{j} - (420 \text{ m})\mathbf{k} \end{aligned}$$

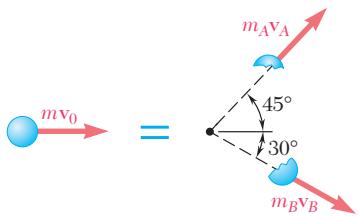


PROBLEMA RESUELTO 14.2

Un proyectil de 20 lb se mueve con una velocidad de 100 ft/s cuando explota en dos fragmentos A y B , que pesan, respectivamente, 5 y 15 lb. Si se sabe que inmediatamente después de la explosión, los fragmentos A y B viajan en direcciones definidas respectivamente por $\theta_A = 45^\circ$ y $\theta_B = 30^\circ$, determine la velocidad de cada fragmento.

SOLUCIÓN

Puesto que no hay fuerza externa, se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema, y se escribe



Al resolver simultáneamente las dos ecuaciones para v_A y v_B , se encuentra

$$v_A = 207 \text{ ft/s} \quad v_B = 97.6 \text{ ft/s}$$

$$\mathbf{v}_A = 207 \text{ ft/s} \angle 45^\circ \quad \mathbf{v}_B = 97.6 \text{ ft/s} \angle 30^\circ$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En este capítulo se estudia el movimiento de *sistemas de partículas*, esto es, el movimiento de un gran número de partículas consideradas en conjunto, y no en forma separada. En esta primera lección se aprendió a calcular la *cantidad de movimiento lineal* y la *cantidad de movimiento angular* de un sistema de partículas. Se definió la cantidad de movimiento lineal \mathbf{L} de un sistema de partículas como la suma de las cantidades de movimientos lineales de las partículas y la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del sistema como la suma de las cantidades de movimiento angular de las partículas alrededor de O :

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad \mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (14.6, 14.7)$$

En esta lección se resolverán varios problemas de interés práctico, al observar que se conserva la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas o al considerar el movimiento del centro de masa de un sistema de partículas.

1. Conservación de la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas.

Esto ocurre cuando la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema es cero. Es posible encontrar esta situación en los siguientes tipos de problemas.

a) **Problemas que implican el movimiento rectilíneo** de objetos como automóviles y vagones de ferrocarril sujetos a choques. Después de verificar que la resultante de las fuerzas externas es cero, es necesario igualar las sumas algebraicas de las cantidades de movimiento iniciales y de las cantidades de movimiento finales para obtener una ecuación que sea posible resolver para una de las incógnitas.

b) **Problemas que implican el movimiento bi o tridimensional** de objetos como bombas que explotan o aeronaves, automóviles o bolas de billar sujetos a choques. Después de verificar que la resultante de las fuerzas externas es cero, se suman vectorialmente las cantidades de movimiento iniciales de los objetos, así como sus cantidades de movimiento finales, y se igualan las dos sumas para obtener una ecuación vectorial que expresa que la cantidad de movimiento lineal del sistema se conserva.

En el caso de un movimiento bidimensional, esta ecuación puede sustituirse por dos ecuaciones escalares que se resuelven para dos incógnitas, en tanto que en el caso del movimiento tridimensional se sustituyen por tres ecuaciones escalares que se resuelven para tres incógnitas.

2. **Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas.** En la sección 14.4 se señaló que el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa completa del sistema y la totalidad de las fuerzas externas estuvieran concentradas en ese punto.

a) **En el caso de un cuerpo que explota mientras está en movimiento**, el centro de masa de los fragmentos resultantes se mueve como el mismo cuerpo se habría movido si la explosión no hubiera ocurrido. Los problemas de este tipo pueden resolverse escribiendo la ecuación de movimiento del centro de masa del sistema en forma vectorial y expresando el vector de posición del centro de masa en términos de los vectores de posición de los diversos fragmentos [ecuación (14.12)]. Es posible en ese caso reescribir la ecuación vectorial como dos o tres ecuaciones escalares y resolverlas para un número equivalente de incógnitas.

b) **En el caso del choque de varios cuerpos en movimiento**, el movimiento del centro de masa de diversos cuerpos no resulta alterado por el choque. Los problemas de este tipo pueden resolverse escribiendo la ecuación de movimiento del centro de masa del sistema en forma vectorial y expresando su vector de posición antes y después del choque en términos de los vectores de posición de los cuerpos importantes [ecuación (14.12)]. Luego se puede reescribir la ecuación vectorial como dos o tres ecuaciones escalares y resolver estas ecuaciones para un número equivalente de incógnitas.

Problemas

14.1 El empleado de una línea aérea lanza dos maletas, una de 15 kg y otra de 20 kg de masa, sobre un carrito para equipaje de 25 kg. Si se sabe que el carrito está al principio en reposo y que el empleado imparte una velocidad horizontal de 3 m/s a la maleta de 15 kg y una velocidad horizontal de 2 m/s a la maleta de 20 kg, determine la velocidad final del carrito si la primera maleta que se lanza sobre él es *a*) la de 15 kg, *b*) la de 20 kg.



Figura P14.1 y P14.2

14.2 El empleado de una línea aérea lanza dos maletas con una velocidad horizontal de 2.4 m/s, sobre un carrito para equipaje de 25 kg que inicialmente estaba en reposo. *a*) Si se sabe que la velocidad final del carrito es de 1.2 m/s y que la primera maleta que el empleado lanza tiene una masa de 15 kg, determine la masa de la otra maleta, *b*) ¿Cuál sería la velocidad final del carrito si el empleado invirtiera el orden en el cual lanza las maletas?

14.3 Un hombre de 180 lb y una mujer de 120 lb están de pie uno al lado del otro en el mismo extremo de un bote de 300 lb, listos para lanzarse al agua, cada uno con una velocidad de 16 ft/s en relación con el bote. Determine la velocidad del bote después de que se hayan lanzado ambos al agua, si *a*) la mujer se lanza primero y *b*) el hombre se lanza primero.

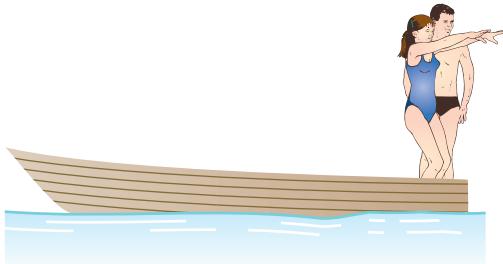


Figura P14.3

14.4 Un hombre de 180 lb y una mujer de 120 lb están de pie en extremos opuestos de un bote de 300 lb, listos para lanzarse, cada uno con una velocidad de 16 ft/s en relación con el bote. Determine la velocidad del bote después de que ambos se hayan lanzado, si *a)* la mujer se lanza primero, *b)* el hombre se lanza primero.

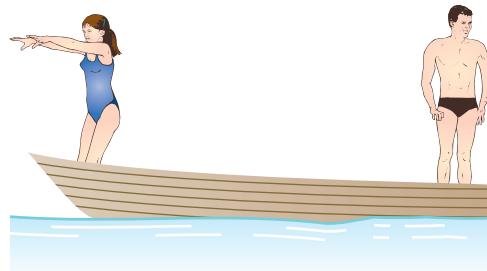


Figura P14.4

14.5 Se dispara una bala con una velocidad horizontal de 1 500 ft/s hacia un bloque *A* de 6 lb; la bala atraviesa el bloque y queda incrustada en otro bloque *B* de 4.95 lb. Si se sabe que los bloques *A* y *B* se empiezan a mover con velocidades respectivas de 5 ft/s y 9 ft/s, determine *a)* el peso de la bala, *b)* su velocidad cuando viaja del bloque *A* al bloque *B*.

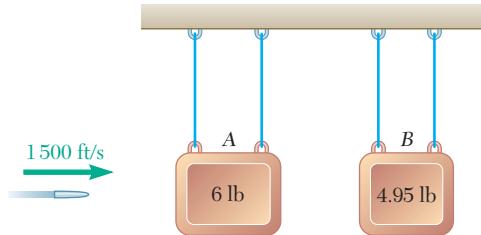


Figura P14.5

14.6 Un vagón de ferrocarril *A* de 45 ton se mueve en la vía de un patio de maniobras con una velocidad de 5.6 mi/h hacia los carros *B* y *C*, los cuales están en reposo con sus frenos desactivados a una corta distancia entre ellos. El carro *B* es una plataforma de 25 ton que soporta un contenedor de 30 ton y el carro *C* es otro vagón de 40 ton. Cuando los carros se golpean entre sí quedan estrechamente acoplados de manera automática. Determine la velocidad del carro *A* inmediatamente después de cada uno de los dos acoplamientos, si se supone que el contenedor *a)* no se desliza sobre la plataforma, *b)* se desliza después del primer acoplamiento pero golpea un tope antes de que ocurra el segundo acoplamiento, *c)* se desliza y golpea un tope sólo después de que ha ocurrido el segundo acoplamiento.

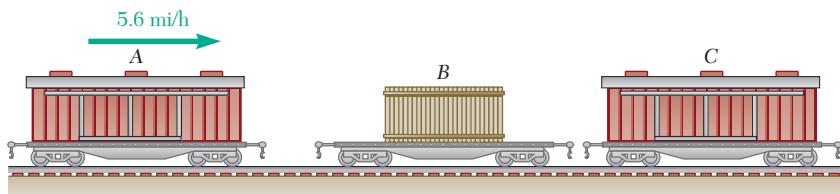


Figura P14.6

14.7 En un parque de diversiones están los “carritos chocones” de 200 kg A, B y C, los cuales tienen conductores con masas de 40, 60 y 35 kg, respectivamente. El carrito A se mueve a la derecha con una velocidad $\mathbf{v}_A = 2 \text{ m/s}$ y el carrito C tiene una velocidad $\mathbf{v}_B = 1.5 \text{ m/s}$ hacia la izquierda, pero el carrito B está inicialmente en reposo. El coeficiente de restitución entre cada carrito es de 0.8. Determine la velocidad final de cada carrito, después de todos los impactos, si se supone que a) los carritos A y C golpean al carrito B al mismo tiempo, b) el carrito A golpea al carrito B antes que al carrito C.



Figura P14.7 y P14.8

14.8 En un parque de diversiones están los “carritos chocones” de 200 kg A, B y C, los cuales tienen conductores con masas de 40, 60 y 35 kg, respectivamente. El carrito A se mueve a la derecha con una velocidad $\mathbf{v}_A = 2 \text{ m/s}$ cuando golpea al carrito B que está inicialmente en reposo. El coeficiente de restitución entre cada carrito es de 0.8. Determine la velocidad del carrito C de modo que después de que el carrito B choque con el C, la velocidad de B sea cero.

14.9 Un sistema consta de tres partículas A, B y C. Se sabe que $m_A = 3 \text{ kg}$, $m_B = 4 \text{ kg}$ y $m_C = 5 \text{ kg}$ y que las velocidades de las partículas, expresadas en m/s son, respectivamente, $\mathbf{v}_A = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_C = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Determine la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del sistema con respecto a O.

14.10 Para el sistema de partículas del problema 14.9, determine a) el vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$ del centro de masa C del sistema, b) la cantidad de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ del sistema y c) la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del sistema con respecto a G. Verifique también que las respuestas de este problema y del problema 14.9 satisfagan la ecuación dada en el problema 14.27.

14.11 Un sistema está formado por tres partículas A, B y C. Se sabe que $m_A = 3 \text{ kg}$, $m_B = 4 \text{ kg}$ y $m_C = 5 \text{ kg}$ y que las velocidades de las partículas expresadas en m/s son, respectivamente, $\mathbf{v}_A = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_C = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Determine a) las componentes v_x y v_y de la velocidad de la partícula B para las cuales la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del sistema con respecto a O es paralela al eje z, b) el valor correspondiente de \mathbf{H}_O .

14.12 Para el sistema de partículas del problema 14.11, determine a) las componentes v_x y v_y de la velocidad de la partícula B para las cuales la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del sistema con respecto a O es paralela al eje y, b) el valor correspondiente de \mathbf{H}_O .

14.13 Un sistema está formado por tres partículas A, B y C. Se sabe que $W_A = 5 \text{ lb}$, $W_B = 4 \text{ lb}$ y $W_C = 3 \text{ lb}$ y que las velocidades de las partículas expresadas en ft/s son, respectivamente, $\mathbf{v}_A = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_C = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Determine a) las componentes v_x y v_y de la velocidad de la partícula B para las cuales la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del sistema con respecto a O es paralela al eje x, b) el valor de \mathbf{H}_O .

14.14 Para el sistema de partículas del problema 14.13, determine a) las componentes v_x y v_z de la velocidad de la partícula B para las cuales la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del sistema con respecto a O es paralela al eje z, b) el valor de \mathbf{H}_O .

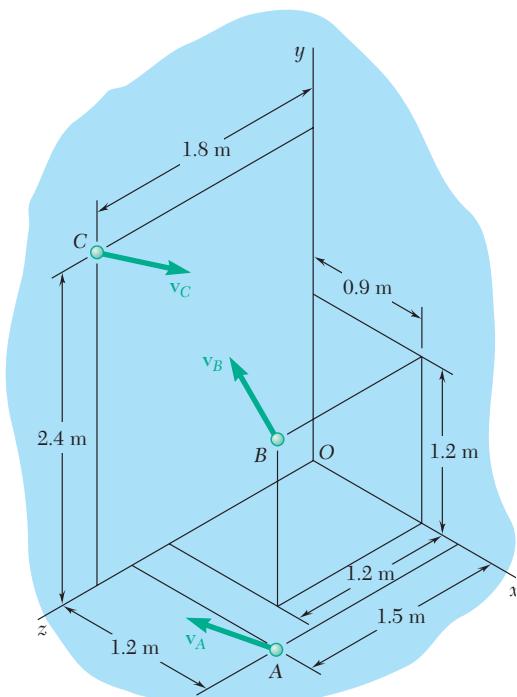


Figura P14.9 y P14.11

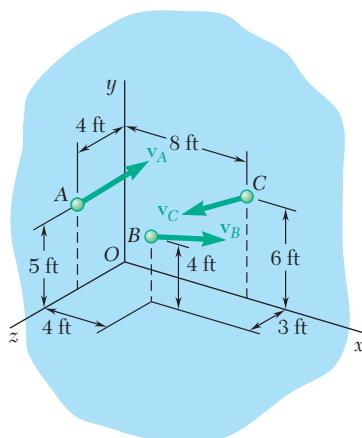


Figura P14.13

14.15 Un vehículo espacial de 900 lb viaja con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (1200 \text{ ft/s})\mathbf{i}$ que pasa por el origen O en $t = 0$. Debido a cargas explosivas el vehículo se fragmenta en tres partes A , B y C que pesan 450, 300 y 150 lb, respectivamente. Si se sabe que en $t = 4$ s, las posiciones observadas de las partes son A (3 840 ft, -960 ft, -1 920 ft) y B (6 480 ft, 1 200 ft, 2 640 ft), determine la posición correspondiente de la parte C . No tome en cuenta el efecto de la gravedad.

14.16 Un proyectil de 30 lb pasa por el origen O con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (120 \text{ ft/s})\mathbf{i}$ cuando explota en dos fragmentos A y B , de 12 y 18 lb, respectivamente. Si se sabe que 3 s después, la posición del fragmento A es (300 ft, 24 ft, -48 ft), determine la posición del fragmento B en el mismo instante. Suponga que $a_y = -g = -32.2 \text{ ft/s}^2$ e ignore la resistencia del aire.

14.17 Un pequeño avión de 1 500 kg y un helicóptero de 3 000 kg de masa vuelan a una altura de 1 200 m y chocan directamente arriba de una torre ubicada en O en un área boscosa. El helicóptero fue visto cuatro minutos antes a 8.4 km al oeste de la torre y el aeroplano a 16 km al oeste y 12 km al norte de la torre. Como consecuencia del choque, el helicóptero se partió en dos pedazos, H_1 y H_2 , de masa $m_1 = 1\,000 \text{ kg}$ y $m_2 = 2\,000 \text{ kg}$, respectivamente; el avión cayó al suelo pero no se fragmentó. Si se sabe que los dos fragmentos del helicóptero se localizaron en los puntos $H_1 = (500 \text{ m}, -100 \text{ m})$ y $H_2 = (600 \text{ m}, -500 \text{ m})$, y se supone que todos los fragmentos golpearon el suelo al mismo tiempo, determine las coordenadas del punto A donde se hallaron los restos del avión.

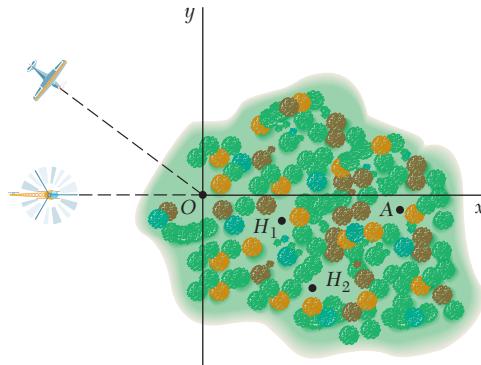


Figura P14.17

14.18 En el problema 14.17, si se sabe que los restos del pequeño avión se encontraron en A (1 200 m, 80 m) y el fragmento de 1 000 kg del helicóptero en el punto H_1 (400 m, -200 m), y se supone que todos los fragmentos golpearon el suelo al mismo tiempo, determine las coordenadas del punto H_2 donde se encontró el otro fragmento del helicóptero.

14.19 y 14.20 El automóvil A viajaba hacia el este a alta velocidad cuando chocó en el punto O con el automóvil B , que se dirigía hacia el norte a 72 km/h. El automóvil C que viajaba hacia el oeste a 90 km/h, se encontraba 10 m al este y 3 m al norte del punto O en el momento del choque. Como el pavimento estaba húmedo, el conductor del automóvil C no pudo evitar que el vehículo patinara hacia los otros dos automóviles, y los tres vehículos, atorados, se mantuvieron deslizándose hasta que chocaron contra el poste eléctrico P . Si se sabe que las masas de los automóviles A , B y C son, respectivamente, 1 500, 1 300 y 1 200 kg, y despreciando las fuerzas ejercidas sobre los automóviles por el pavimento húmedo, resuelva los problemas indicados.

14.19 Si se sabe que las coordenadas del poste eléctrico son $x_p = 18 \text{ m}$ y $y_p = 13.9 \text{ m}$, determine *a)* el tiempo transcurrido desde el primer choque hasta el impacto en *P*, *b)* la rapidez del automóvil *A*.

14.20 Si se sabe que la velocidad del automóvil *A* fue de 129.6 km/h y que el tiempo transcurrido desde el primer choque hasta el impacto en *P* fue de 2.4 s , determine las coordenadas del poste eléctrico *P*.

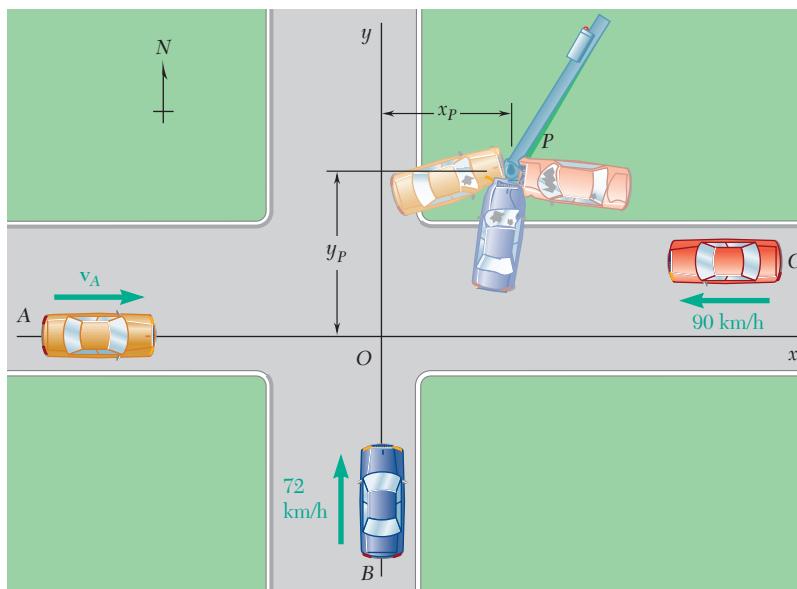


Figura P14.19 y P14.20

14.21 y 14.22 En un juego de billar la bola *A* viaja con una velocidad \mathbf{v}_0 cuando choca con las bolas *B* y *C*, que están en reposo y alineadas como se indica. Si se sabe que después del choque las tres bolas se mueven en las direcciones señaladas y que $v_0 = 12 \text{ ft/s}$ y $v_C = 6.29 \text{ ft/s}$, determine la magnitud de la velocidad de *a)* la bola *A* y *b)* la bola *B*.

14.23 Un arquero experto demuestra su habilidad atravesando pelotas de tenis lanzadas por un asistente. Una pelota de tenis de 58 g tiene una velocidad de $(10 \text{ m/s})\mathbf{i} - (2 \text{ m/s})\mathbf{j}$ y está a 10 m sobre el suelo cuando es alcanzada por una flecha de 40 g que viaja a una velocidad de $(50 \text{ m/s})\mathbf{j} + (70 \text{ m/s})\mathbf{k}$ donde \mathbf{j} está dirigida hacia arriba. Determine la posición *P* donde la bola y la flecha golpearán el suelo, con respecto al punto *O* ubicado directamente debajo del punto de impacto.

14.24 En un experimento de dispersión, una partícula alfa *A* se proyecta con la velocidad $\mathbf{u}_0 = -(600 \text{ m/s})\mathbf{i} + (750 \text{ m/s})\mathbf{j} - (800 \text{ m/s})\mathbf{k}$ dentro de una corriente de núcleos de oxígeno que se mueven con una velocidad común $\mathbf{v}_0 = (600 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Después de chocar sucesivamente con los núcleos *B* y *C*, se observa que la partícula *A* se mueve a lo largo de la trayectoria definida por los puntos *A*₁ (280, 240, 120) y *A*₂ (360, 320, 160), mientras que los núcleos *B* y *C* se mueven a lo largo de trayectorias definidas, respectivamente, por *B*₁ (147, 220, 130) y *B*₂ (114, 290, 120), y por *C*₁ (240, 232, 90) y *C*₂ (240, 280, 75). Todas las trayectorias son a lo largo de líneas rectas y todas las coordenadas se expresan en milímetros. Si se sabe que la masa de un núcleo de oxígeno es cuatro veces la de una partícula alfa, determine la rapidez de cada una de las tres partículas después de los choques.

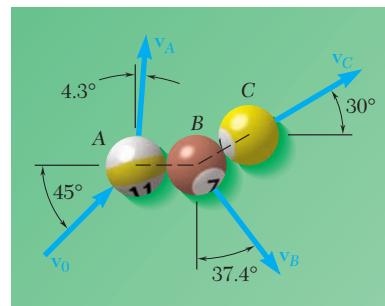


Figura P14.21

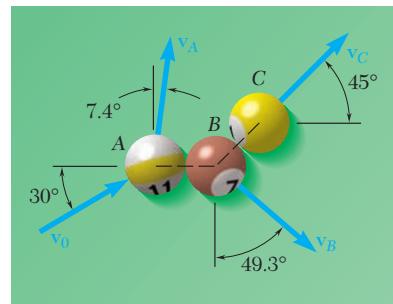


Figura P14.22

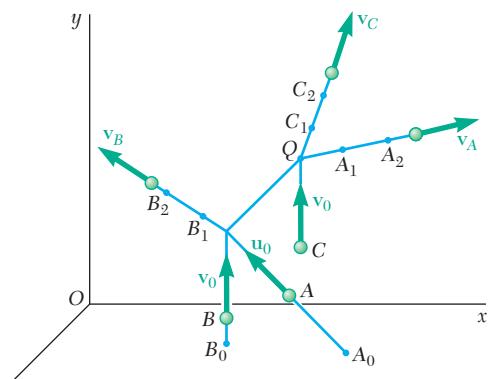


Figura P14.24

14.25 Una bomba de 12 lb que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (40 \text{ ft/s})\mathbf{i} - (30 \text{ ft/s})\mathbf{j} - (1200 \text{ ft/s})\mathbf{k}$ explota en el punto D en tres fragmentos A , B y C que pesan, respectivamente, 5, 4 y 3 lb. Si se sabe que los fragmentos se impactan contra la pared vertical en los puntos indicados, determine la rapidez de cada fragmento inmediatamente después de la explosión.

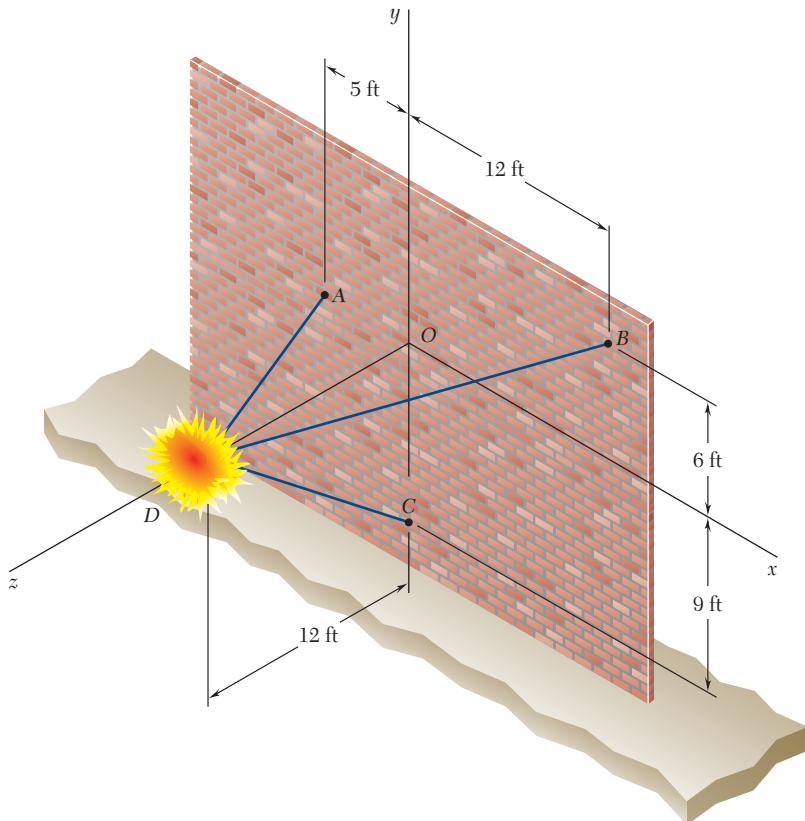


Figura P14.25 y P14.26

14.26 Una bomba de 12 lb que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (40 \text{ ft/s})\mathbf{i} - (30 \text{ ft/s})\mathbf{j} - (1200 \text{ ft/s})\mathbf{k}$ explota en el punto D en tres fragmentos A , B y C que pesan, respectivamente, 4, 3 y 5 lb. Si se sabe que los fragmentos se impactan contra la pared vertical en los puntos indicados, determine la rapidez de cada fragmento inmediatamente después de la explosión.

14.27 Obtenga la relación

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G$$

entre las cantidades de movimiento angular \mathbf{H}_O y \mathbf{H}_G definidas, cada una, en las ecuaciones (14.7) y (14.24). Los vectores $\bar{\mathbf{r}}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ definen, de manera respectiva, la posición y la velocidad del centro de masa G del sistema de partículas relativos al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$, y m representa la masa total del sistema.

14.28 Demuestre que la ecuación (14.23) puede obtenerse directamente de la ecuación (14.11) al sustituir la expresión dada en el problema 14.27 por \mathbf{H}_O .

14.29 Considere el marco de referencia $Ax'y'z'$ en traslación con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$. La cantidad de movimiento angular \mathbf{H}'_A de un sistema de n partículas alrededor de A se define como la suma

$$\mathbf{H}'_A = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \quad (1)$$

de los momentos alrededor de A de las cantidades de movimiento $m_i \mathbf{v}'_i$ de las partículas en su movimiento relativo al sistema de referencia $Ax'y'z'$. Si se denota con \mathbf{H}_A la suma

$$\mathbf{H}_A = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

de los momentos alrededor de A de las cantidades de movimiento $m_i \mathbf{v}_i$ de las partículas en su movimiento relativo al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$, demuestre que $\mathbf{H}_A = \mathbf{H}'_A$ en un instante dado, si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones en ese instante: a) A tiene velocidad cero con respecto al sistema de referencia $Oxyz$, b) A coincide con el centro de masa G del sistema, c) la velocidad \mathbf{v}_A relativa a $Oxyz$ está dirigida a lo largo de la línea AG .

14.30 Muestre que la relación $\Sigma \mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}'_A$, donde \mathbf{H}'_A está definida por la ecuación (1) del problema 14.29 y donde $\Sigma \mathbf{M}_A$ representa la suma de los momentos alrededor de A de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema de partículas, es válida si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones a) el mismo sistema de referencia $Ax'y'z'$ es un sistema de referencia newtoniano, b) A coincide con el centro de masa G , c) la aceleración \mathbf{a}_A de A relativa a $Oxyz$ está dirigida a lo largo de la línea AG .

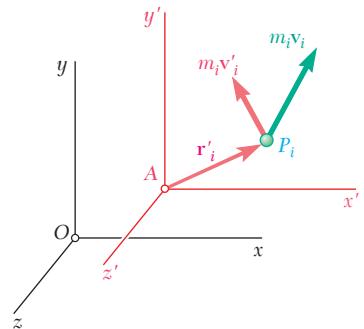


Figura P14.29

14.7. ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

La energía cinética T de un sistema de partículas se define como la suma de las energías cinéticas de las diversas partículas del sistema. Por lo tanto, con referencia a la sección 13.3, se escribe

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \quad (14.28)$$

Uso de un sistema de referencia centroidal. Al calcular la energía cinética de un sistema que consta de un gran número de partículas (como en el caso de un cuerpo rígido), a menudo resulta conveniente considerar por separado el movimiento del centro de masa G del sistema y el movimiento del sistema relativo al sistema de referencia unido a G .

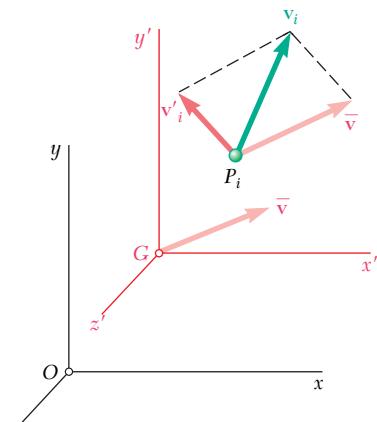


Figura 14.7

Sea P_i una partícula del sistema, \mathbf{v}_i su velocidad relativa al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ y \mathbf{v}'_i su velocidad relativa al sistema de referencia en movimiento $Gx'y'z'$ que está en traslación con respecto a $Oxyz$ (figura 14.7). Se recuerda de la sección anterior que

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i \quad (14.22)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ denota la velocidad del centro de masa G relativa al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$. Al observar que v_i^2 es igual al producto escalar $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$, se expresa la energía cinética T del sistema relativa al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ en la forma siguiente:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

o, al sustituir \mathbf{v}_i de (14.22),

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [m_i (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i)] \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \bar{\mathbf{v}}^2 + \bar{\mathbf{v}} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v'^2_i \end{aligned}$$

La primera sumatoria representa la masa total m del sistema. Al recordar la ecuación (14.13), se nota que la segunda sumatoria es igual a $m\bar{\mathbf{v}}'$ y, en consecuencia, a cero, ya que $\bar{\mathbf{v}}'$ representa la velocidad de G relativa al sistema de referencia $Gx'y'z'$, es claramente cero. Por lo tanto, se escribe

$$T = \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{v}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v'^2_i \quad (14.29)$$

Esta ecuación muestra que la energía cinética T de un sistema de partículas puede obtenerse *al sumar la energía cinética del centro de masa G (suponiendo que toda la masa está concentrada en G) y la energía cinética del sistema en su movimiento relativo al sistema de referencia $Gx'y'z'$.*

14.8. PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

14.9. Principio del impulso y la cantidad de movimiento de un sistema de partículas

879

El principio del trabajo y la energía puede aplicarse a cada partícula P_i de un sistema de partículas. Se escribe

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (14.30)$$

para cada partícula P_i , donde $U_{1 \rightarrow 2}$ representa el trabajo realizado por las fuerzas internas \mathbf{f}_{ij} y la fuerza externa resultante \mathbf{F}_i actuando sobre P_i . Al sumar las energías cinéticas de las diferentes partículas del sistema y al considerar el trabajo de todas las fuerzas implicadas, se puede aplicar la ecuación (14.30) al sistema completo. Las cantidades T_1 y T_2 representan ahora la energía cinética del sistema entero y se calculan de la ecuación (14.28) o de la (14.29). La cantidad $U_{1 \rightarrow 2}$ representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema. Hay que observar que si bien las fuerzas internas \mathbf{f}_{ij} y \mathbf{f}_{ji} son iguales y opuestas, el trabajo de estas fuerzas en general no se cancelarán, ya que las partículas P_i y P_j sobre las cuales actúan experimentarán, en general, desplazamientos diferentes. Por lo tanto, al calcular $U_{1 \rightarrow 2}$ se debe considerar el trabajo de las fuerzas internas \mathbf{f}_{ij} así como el trabajo de las fuerzas externas \mathbf{F}_i .

Si todas las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema son conservativas, la ecuación (14.30) puede sustituirse por

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (14.31)$$

donde V representa la energía potencial asociada con las fuerzas internas y externas que actúan sobre las partículas del sistema. La ecuación (14.31) expresa el principio de *conservación de la energía* para el sistema de partículas.

14.9. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Al integrar las ecuaciones (14.10) y (14.11) en t desde t_1 hasta t_2 , se escribe

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 \quad (14.32)$$

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1 \quad (14.33)$$

Al recordar la definición del impulso lineal de una fuerza que se dio en la sección 13.10, se nota que las integrales en la ecuación (14.32) representan los impulsos lineales de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas del sistema. Hay que referirse de manera similar a las integrales en la ecuación (14.33) como los *impulsos angulares* alrededor de O de las fuerzas externas. De tal modo, la ecuación (14.32) expresa que la suma de los impulsos lineales de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es igual al cambio en la cantidad de movimiento lineal del sistema. De manera similar, la ecuación (14.33) expresa que la suma de los impulsos angulares alrededor de O de las fuerzas externas es igual al cambio en el momento angular alrededor de O del sistema.



Fotografía 14.2 Cuando una pelota de golf es golpeada fuera de la trampa de arena, cierta parte de la cantidad de movimiento del palo se transfiere a la pelota y a la arena que también es golpeada.

Para clarificar el significado físico de las ecuaciones (14.32) y (14.33), se rearreglan los términos en estas ecuaciones y se escribe

$$\mathbf{L}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{L}_2 \quad (14.34)$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O dt = (\mathbf{H}_O)_2 \quad (14.35)$$

En los incisos *a*) y *c*) de la figura 14.8 están dibujadas las cantidades de movimiento de las partículas del sistema en los tiempos t_1 y t_2 , respectivamente. En el inciso *b*) se indica un vector igual a la suma de los impulsos lineales de las fuerzas externas y un momento de par igual a la suma de los impulsos angulares alrededor de O de las fuerzas externas. Por simplicidad, se ha supuesto que las partículas se mueven en el plano de la

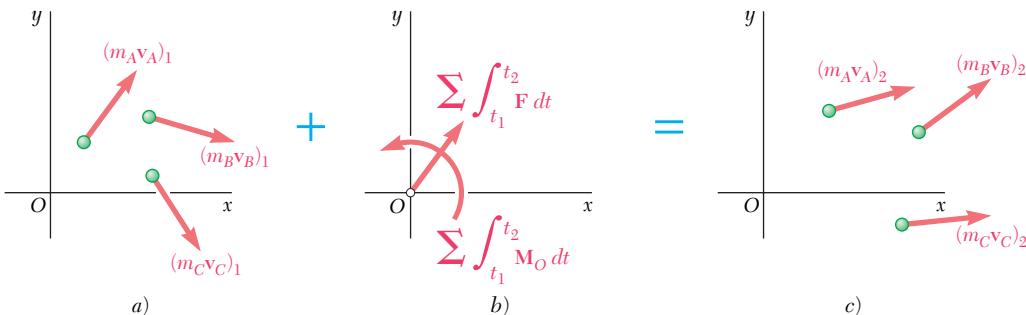


Figura 14.8

figura, aunque el análisis presente sigue siendo válido en el caso de partículas que se mueven en el espacio. Al recordar de la ecuación (14.6) que \mathbf{L} , por definición, es la resultante de la cantidad de movimiento $m_i \mathbf{v}_i$, se nota que la ecuación (14.34) expresa que la resultante de los vectores mostrados en los incisos *a*) y *b*) de la figura 14.8 es igual a la resultante de los vectores indicados en el inciso *c*) de la misma figura. Si se recuerda de la ecuación (14.7) que \mathbf{H}_O es el momento resultante de las cantidades de movimiento $m_i \mathbf{v}_i$, se advierte que la ecuación (14.35) expresa de manera similar que el momento resultante de los vectores en los incisos *a*) y *b*) de la figura 14.8 es igual al momento resultante de los vectores en el inciso *c*). Juntas, las ecuaciones (14.34) y (14.35) expresan entonces que *las cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo t_1 y los impulsos de las fuerzas externas desde t_1 hasta t_2 forman un sistema de vectores equipolente al sistema de las cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo t_2* . Esto se ha indicado en la figura 14.8 mediante el uso de signos de más y de igualdad en color azul.

Si ninguna fuerza externa actúa sobre las partículas del sistema, las integrales en las ecuaciones (14.34) y (14.35) son cero, y estas ecuaciones producen

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 \quad (14.36)$$

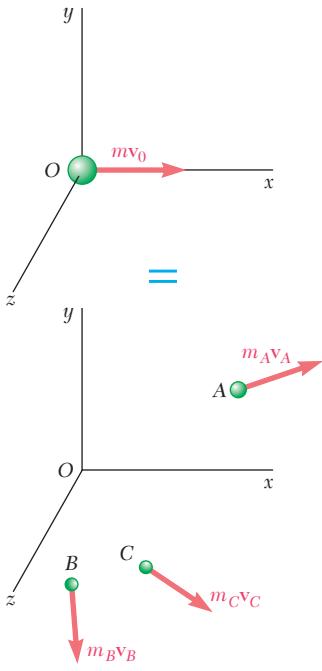
$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \quad (14.37)$$

De este modo se verifica el resultado obtenido en la sección 14.6: si ninguna fuerza externa actúa sobre las partículas de un sistema, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular alrededor de O del sistema de partículas se conservan. El sistema de la cantidad de movimiento inicial es equipolente al sistema de la cantidad de movimiento final y, por lo tanto, la cantidad del movimiento angular del sistema de partículas alrededor de *cualquier* punto fijo se conserva.

PROBLEMA RESUELTO 14.3

Para el vehículo espacial de 200 kg del problema resuelto 14.1, se sabe que en $t = 2.5$ s, si la velocidad de la parte A es $\mathbf{v}_A = (270 \text{ m/s})\mathbf{i} - (120 \text{ m/s})\mathbf{j} + (160 \text{ m/s})\mathbf{k}$ y la velocidad de la parte B es paralela al plano xz . Determine la velocidad de la parte C.

SOLUCIÓN



Puesto que no hay fuerza externa, la cantidad de movimiento inicial $m\mathbf{v}_0$ es equipolente al sistema de las cantidades de movimiento finales. Igualando primero las sumas de los vectores en ambas partes del dibujo adjunto y después las sumas de sus momentos alrededor de O , se escribe

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2: \quad m\mathbf{v}_0 = m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B + m_C\mathbf{v}_C \quad (1)$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2: \quad 0 = \mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A + \mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B + \mathbf{r}_C \times m_C\mathbf{v}_C \quad (2)$$

Al recordar del problema resuelto 14.1 que $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$,

$$\begin{aligned} m_A &= 100 \text{ kg} & m_B &= 60 \text{ kg} & m_C &= 40 \text{ kg} \\ \mathbf{r}_A &= (555 \text{ m})\mathbf{i} - (180 \text{ m})\mathbf{j} + (240 \text{ m})\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_B &= (255 \text{ m})\mathbf{i} - (120 \text{ m})\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_C &= (105 \text{ m})\mathbf{i} + (450 \text{ m})\mathbf{j} - (420 \text{ m})\mathbf{k} \end{aligned}$$

y utilizar la información que se dio en el enunciado de este problema, se reescriben las ecuaciones (1) y (2) del modo siguiente:

$$200(150\mathbf{i}) = 100(270\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 160\mathbf{k}) + 60[(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_z\mathbf{k}] + 40[(v_C)_x\mathbf{i} + (v_C)_y\mathbf{j} + (v_C)_z\mathbf{k}] \quad (1')$$

$$\begin{aligned} 0 &= 100 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 555 & -180 & 240 \\ 270 & -120 & 160 \end{vmatrix} + 60 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 255 & 0 & -120 \\ (v_B)_x & 0 & (v_B)_z \end{vmatrix} \\ &\quad + 40 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 105 & 450 & -420 \\ (v_C)_x & (v_C)_y & (v_C)_z \end{vmatrix} \quad (2') \end{aligned}$$

Al igualar a cero el coeficiente de \mathbf{j} en (1') y los coeficientes de \mathbf{i} y \mathbf{k} en (2'), se escribe, después de simplificaciones, las tres ecuaciones escalares

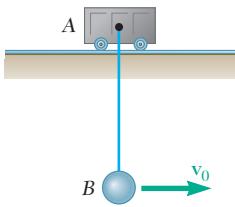
$$\begin{aligned} (v_C)_y - 300 &= 0 \\ 450(v_C)_z + 420(v_C)_y &= 0 \\ 105(v_C)_y - 450(v_C)_x - 45000 &= 0 \end{aligned}$$

las cuales producen, respectivamente,

$$(v_C)_y = 300 \quad (v_C)_z = -280 \quad (v_C)_x = -30$$

La velocidad de la parte C es entonces

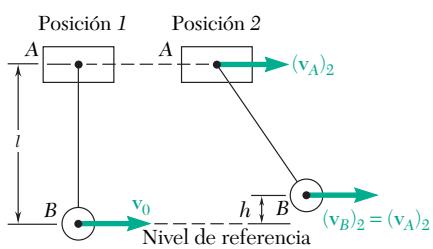
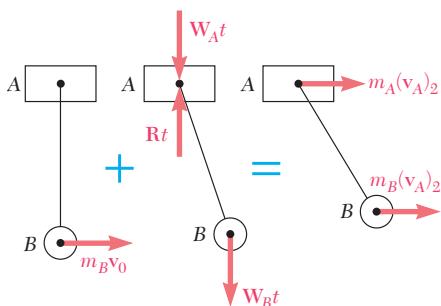
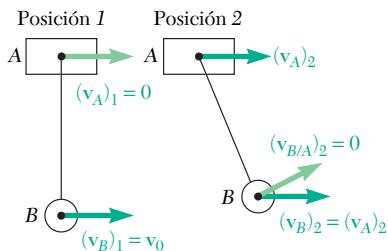
$$\mathbf{v}_C = -(30 \text{ m/s})\mathbf{i} + (300 \text{ m/s})\mathbf{j} - (280 \text{ m/s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 14.4

La bola B , de masa m_B , se suspende de una cuerda de longitud l unida al carro A , de masa m_A , que rueda con libertad sobre una pista horizontal sin fricción. Si a la bola se le da una velocidad horizontal inicial v_0 mientras el carro está en reposo, determine *a)* la velocidad de B cuando ésta alcanza su elevación máxima, *b)* la distancia vertical h a que se elevará B . (Se supone que $v_0^2 < 2gl$.)

SOLUCIÓN



El principio del impulso-cantidad de movimiento y el principio de conservación de la energía se aplicarán al sistema carro-bola entre su posición inicial 1 y la posición 2, cuando B alcanza su elevación máxima.

$$\text{Velocidades Posición 1: } (\mathbf{v}_A)_1 = 0 \quad (\mathbf{v}_B)_1 = \mathbf{v}_0 \quad (1)$$

Posición 2: Cuando la bola B alcanza su elevación máxima, su velocidad ($\mathbf{v}_{B/A}$)₂ relativa a su soporte A es cero. De tal modo, en ese instante, su velocidad absoluta es

$$(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 + (\mathbf{v}_{B/A})_2 = (\mathbf{v}_A)_2 \quad (2)$$

Principio del impulso-cantidad de movimiento. Al observar que los impulsos externos consisten en \mathbf{W}_{At} , \mathbf{W}_{Bt} y $\mathbf{R}t$, donde \mathbf{R} es la reacción de la pista sobre el carro y recordando (1) y (2) se dibuja el diagrama de impulso-cantidad de movimiento y se escribe

$$\sum m\mathbf{v}_1 + \sum \text{Ext Imp}_{1 \rightarrow 2} = \sum m\mathbf{v}_2$$

$$\Rightarrow \text{componentes } x: \quad m_B v_0 = (m_A + m_B)(v_A)_2$$

que expresa que la cantidad de movimiento lineal del sistema se conserva en la dirección horizontal. Al resolver para $(v_A)_2$:

$$(v_A)_2 = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0 \quad (\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0 \rightarrow \blacktriangleleft$$

Conservación de energía

$$\text{Posición 1. Energía potencial: } V_1 = m_A gl$$

$$\text{Energía cinética: } T_1 = \frac{1}{2} m_B v_0^2$$

$$\text{Posición 2. Energía potencial: } V_2 = m_A gl + m_B gh$$

$$\text{Energía cinética: } T_2 = \frac{1}{2} (m_A + m_B) (v_A)_2^2$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2: \quad \frac{1}{2} m_B v_0^2 + m_A gl = \frac{1}{2} (m_A + m_B) (v_A)_2^2 + m_A gl + m_B gh$$

Al resolver para h , se tiene

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m_A + m_B}{m_B} \frac{(v_A)_2^2}{2g}$$

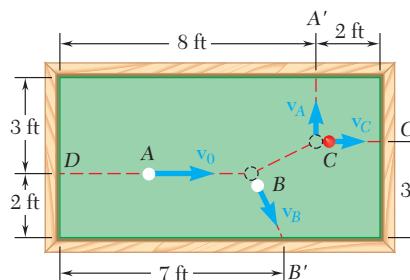
o, al sustituir para $(v_A)_2$ la expresión que se encontró arriba,

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m_B}{m_A + m_B} \frac{v_0^2}{2g} \quad h = \frac{m_A}{m_A + m_B} \frac{v_0^2}{2g} \quad \blacktriangleleft$$

Comentarios. 1) Al recordar que $v_0^2 < 2gl$, de acuerdo con la última ecuación $h < l$, se verifica de tal modo que B permanece debajo de A como se supuso en la solución.

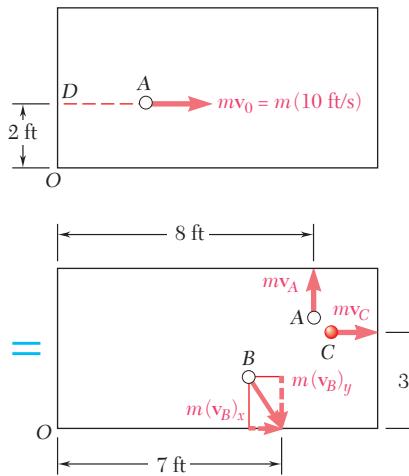
2) para $m_A \gg m_B$, la respuesta que se obtuvo se reduce a $(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = 0$ y $h = v_0^2/2g$; B oscila como un péndulo simple con A fijo. Para $m_A \ll m_B$, el problema se reduce a $(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = \mathbf{v}_0$ y $h = 0$; A y B se mueven con la misma velocidad constante \mathbf{v}_0 .

PROBLEMA RESUELTO 14.5



En un juego de billar, a la bola A se le da una velocidad inicial \mathbf{v}_0 de magnitud $v_0 = 10 \text{ ft/s}$ a lo largo de la línea DA paralela al eje de la mesa. Esta bola choca con la bola B y luego con la bola C, las cuales se encuentran en reposo. Si se sabe que A y C inciden perpendicularmente en las laterales de la mesa en los puntos A' y C', respectivamente, que B choca con la lateral de manera oblicua en B', y se suponen superficies sin fricción, así como impactos perfectamente elásticos, determine las velocidades \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_B y \mathbf{v}_C con las cuales las bolas chocan con las laterales de la mesa. (Comentario. En este problema resuelto y en varios de los problemas que siguen, se supone que las bolas de billar son partículas que se mueven con libertad en un plano horizontal, y no como las esferas rodantes y deslizantes que realmente son.)

SOLUCIÓN



Conservación de la cantidad de movimiento. Puesto que no hay fuerza externa, el momento inicial mv_0 es equipolente al sistema de cantidades de movimiento después de los dos choques (y antes de que cualquiera de las bolas golpee las laterales de la mesa). Con referencia al dibujo adjunto, se escribe

$$\pm \rightarrow \text{componentes } x: \quad m(10 \text{ ft/s}) = m(v_B)_x + mv_C \quad (1)$$

$$+\uparrow \text{componentes } y: \quad 0 = mv_A - m(v_B)_y \quad (2)$$

$$+\uparrow \text{momentos alrededor de } O: -(2 \text{ ft})m(10 \text{ ft/s}) = (8 \text{ ft})mv_A \\ - (7 \text{ ft})m(v_B)_y - (3 \text{ ft})mv_C \quad (3)$$

Al resolver las tres ecuaciones para v_A , $(v_B)_x$ y $(v_B)_y$ en términos de v_C ,

$$v_A = (v_B)_y = 3v_C - 20 \quad (v_B)_x = 10 - v_C \quad (4)$$

Conservación de la energía. Puesto que las superficies son sin fricción y los impactos perfectamente elásticos, la energía cinética inicial $\frac{1}{2}mv_0^2$ es igual a la energía cinética final del sistema:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m_Av_A^2 + \frac{1}{2}m_Bv_B^2 + \frac{1}{2}m_Cv_C^2 \\ v_A^2 + (v_B)_x^2 + (v_B)_y^2 + v_C^2 = (10 \text{ ft/s})^2 \quad (5)$$

Al sustituir v_A , $(v_B)_x$ y $(v_B)_y$ de (4) en (5), se tiene

$$2(3v_C - 20)^2 + (10 - v_C)^2 + v_C^2 = 100 \\ 20v_C^2 - 260v_C + 800 = 0$$

Al resolver para v_C , se encuentra que $v_C = 5 \text{ ft/s}$ y $v_C = 8 \text{ ft/s}$. Puesto que sólo la segunda raíz produce un valor positivo de v_A después de sustituir en las ecuaciones (4), se concluye que $v_C = 8 \text{ ft/s}$ y

$$v_A = (v_B)_y = 3(8) - 20 = 4 \text{ ft/s} \quad (v_B)_x = 10 - 8 = 2 \text{ ft/s}$$

$$\mathbf{v}_A = 4 \text{ ft/s} \uparrow \quad \mathbf{v}_B = 4.47 \text{ ft/s} \angle 63.4^\circ \quad \mathbf{v}_C = 8 \text{ ft/s} \rightarrow \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la lección anterior se definió la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas. En esa lección se definió la *energía cinética* T de un sistema de partículas:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \quad (14.28)$$

La solución de los problemas en la sección anterior se basó en la conservación de la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas o en la observación del movimiento del centro de masa de un sistema de partículas. En esta lección se resolverán problemas que implican lo siguiente:

1. Cálculo de la energía cinética perdida en choques. La energía cinética T_1 del sistema de partículas antes de los choques y su energía cinética T_2 después de los mismos se calcula a partir de la ecuación (14.28) y se resta una de la otra. Teniendo presente que, si bien la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular son cantidades vectoriales, la energía cinética es una cantidad *escalar*.

2. Conservación de la cantidad de movimiento lineal y conservación de la energía. Como se estudió en la lección anterior, cuando la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas es cero, se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema. En problemas que implican movimiento en dos dimensiones, el señalamiento de que la cantidad de movimiento lineal inicial y la cantidad de movimiento lineal final del sistema son equipolentes produce dos ecuaciones algebraicas. La igualación de la energía total inicial del sistema de partículas (incluyendo la energía potencial, así como la energía cinética) con su energía total final produce una ecuación adicional. En consecuencia, es posible escribir tres ecuaciones que pueden resolverse para tres incógnitas [problema resuelto 14.5]. Hay que observar que si la resultante de las fuerzas externas no es cero y tiene una dirección fija, la componente de la cantidad de movimiento lineal en una dirección perpendicular a la resultante se sigue conservando; el número de ecuaciones que es posible utilizar se reduce entonces a dos [problema resuelto 14.4].

3. Conservación de las cantidades de movimiento lineal y angular. Cuando no actúan fuerzas externas sobre un sistema de partículas, se conservan tanto la cantidad de movimiento lineal del sistema como su cantidad de movimiento angular alrededor de algún punto arbitrario. En el caso de movimiento en tres dimensiones, lo anterior permitirá escribir hasta seis ecuaciones, aunque quizás sea necesario resolver únicamente alguna de ellas para obtener las respuestas deseadas [problema resuelto 14.3]. En el caso de movimiento bidimensional, será factible escribir tres ecuaciones que podrán resolverse para tres incógnitas.

4. Conservación de las cantidades de movimiento lineal y angular y conservación de la energía. En el caso de movimiento en dos dimensiones de un sistema de partículas que no está sujeto a ninguna fuerza externa, se obtendrán dos ecuaciones algebraicas al expresar la conservación de la cantidad de movimiento lineal del sistema, una ecuación al escribir que se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor de algún punto arbitrario, y una cuarta ecuación al expresar que se conserva la energía total del sistema. Con estas ecuaciones se pueden despejar cuatro incógnitas.

Problemas

14.31 Si el empleado de la línea aérea del problema 14.1 primero lanza la maleta de 15 kg sobre el carrito para equipaje, determine la energía perdida *a)* cuando la primera maleta entra en contacto con el carrito, *b)* cuando la segunda maleta hace contacto con el carrito.

14.32 Determine la energía perdida como resultado de la serie de choques que se describe en el problema 14.7.

14.33 En el problema 14.3, determine el trabajo realizado por la mujer y por el hombre cuando se lanzan del bote, suponiendo que la mujer se lanza primero.

14.34 En el problema 14.5, determine la energía que se pierde cuando la bala *a)* pasa a través del bloque A y *b)* queda incrustada en el bloque B.

14.35 Dos automóviles A y B, de masa m_A y m_B viajan en direcciones opuestas cuando chocan de frente. El impacto se supone perfectamente plástico y, además, se considera que la energía absorbida por cada automóvil es igual a su pérdida de energía cinética con respecto a un sistema de referencia en movimiento unido al centro de masa del sistema de los dos vehículos. Si se denota con E_A y E_B la energía que absorben los automóviles A y B, *a)* demuestre que $E_A/E_B = m_B/m_A$, es decir, la cantidad de energía que absorbe cada vehículo es inversamente proporcional a su masa. *b)* Calcule E_A y E_B , si se sabe que $m_A = 1\,600 \text{ kg}$ y $m_B = 900 \text{ kg}$ y que las velocidades de A y B son, respectivamente, 90 y 60 km/h.

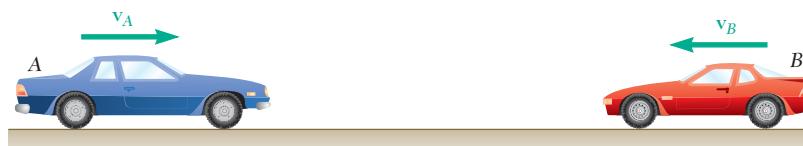


Figura P14.35

14.36 Se supone que cada uno de los dos automóviles implicados en el choque descrito en el problema 14.35 se han diseñado para soportar de manera segura una prueba en la cual se estrellan contra una pared sólida e inamovible, a la rapidez v_0 . La severidad del choque del problema 14.35 puede medirse entonces para cada vehículo por medio del cociente de la energía absorbida en el choque y la energía absorbida en la prueba. Sobre esa base, demuestre que el choque descrito en el problema 14.35 es $(m_A/m_B)^2$ veces más severo para el automóvil B que para el automóvil A.

14.37 Retome el problema resuelto 14.4, y ahora suponga que al carro A se le da una velocidad horizontal inicial v_0 mientras la bola B está en reposo.

14.38 En un juego de billar, la bola A se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{i}$ cuando golpea a las bolas B y C, las cuales están en reposo una al lado de la otra. Si se suponen superficies sin fricción y un impacto perfectamente elástico (esto es, conservación de energía), determine la velocidad final de cada bola, suponiendo que la trayectoria de A a) está perfectamente centrada y que A golpea de manera simultánea a B y C, b) no está perfectamente centrada y que A golpea a B un poco antes de golpear a C.

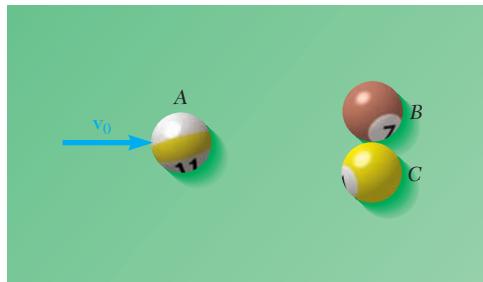


Figura P14.38

14.39 y 14.40 En un juego de billar la bola A se mueve con velocidad \mathbf{v}_0 de magnitud $v_0 = 15 \text{ ft/s}$ cuando choca contra las bolas B y C, las cuales se encuentran en reposo y alineadas como se muestra. Si después del choque las tres bolas se mueven en las direcciones indicadas y se suponen superficies sin fricción y un impacto perfectamente elástico (esto es, conservación de energía), determine las magnitudes de las velocidades \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_B y \mathbf{v}_C .

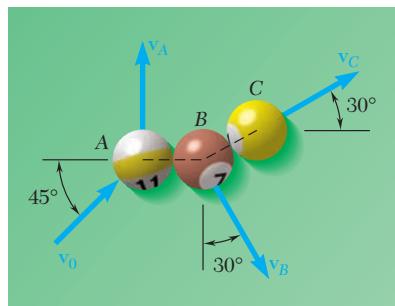


Figura P14.39

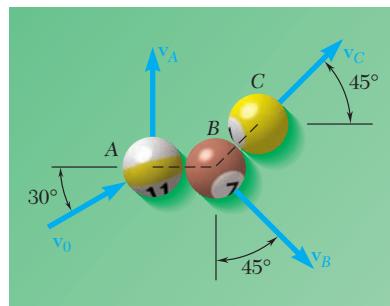


Figura P14.40

14.41 Dos hemisferios se conservan unidos mediante una cuerda que mantiene comprimido a un resorte (el resorte no está unido a los hemisferios). La energía potencial del resorte comprimido es igual a 120 J y el ensamble tiene una velocidad inicial \mathbf{v}_0 de magnitud $v_0 = 8 \text{ m/s}$. Si la cuerda se rompe cuando $\theta = 30^\circ$, lo que ocasiona que los hemisferios se separen, determine la velocidad resultante de cada hemisferio.

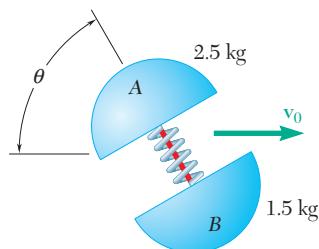


Figura P14.41

14.42 Retome el problema 14.41, si se sabe que la cuerda se rompe cuando $\theta = 120^\circ$.

14.43 Un bloque *B* de 40 lb está suspendido de una cuerda de 6 ft unida a un carrito *A* de 60 lb, el cual puede rodar libremente sobre una pista horizontal y sin fricción. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine las velocidades de *A* y *B* cuando *B* pasa directamente debajo de *A*.

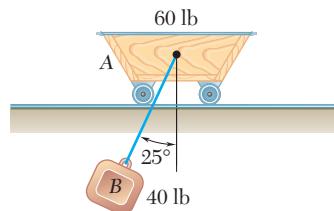


Figura P14.43

14.44 Tres esferas, cada una de masa m , se pueden deslizar con libertad sobre una superficie horizontal sin fricción. Las esferas *A* y *B* están unidas a una cuerda inextensible e inelástica de longitud l y se encuentran en reposo en la posición que se muestra cuando la esfera *C*, que se está moviendo a la derecha con una velocidad \mathbf{v}_0 , choca frontalmente contra la esfera *B*. Si la cuerda no está tensa cuando la esfera *C* choca con la esfera *B* y se supone un impacto perfectamente elástico entre *B* y *C*, determine *a*) la velocidad de cada esfera inmediatamente después de que la cuerda se tensa, *b*) la fracción de la energía cinética inicial del sistema que se disipa cuando la cuerda se pone tensa.

14.45 Un vehículo espacial de 360 kg que viaja con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (450 \text{ m/s})\mathbf{k}$ pasa por el origen *O*. Después, mediante cargas explosivas se separa al vehículo en tres partes *A*, *B* y *C*, con masas respectivas de 60, 120 y 180 kg. Si poco tiempo después las posiciones de las tres partes son *A*(72, 72, 648), *B*(180, 396, 972) y *C*(−144, −288, 576), donde las coordenadas se expresan en metros, y se sabe que la velocidad de *B* es $\mathbf{v}_B = (150 \text{ m/s})\mathbf{i} + (330 \text{ m/s})\mathbf{j} + (660 \text{ m/s})\mathbf{k}$, y que la componente *x* de la velocidad de *C* es −120 m/s, determine la velocidad de la parte *A*.

14.46 En el experimento de dispersión del problema 14.24, se sabe que la partícula alfa se proyecta desde $A_0(300, 0, 300)$ y que choca con el núcleo de oxígeno *C* en $Q(240, 200, 100)$, donde todas las coordenadas se expresan en milímetros. Determine las coordenadas del punto *B*₀ donde la trayectoria original del núcleo *B* interseca el plano *zx*. (*Sugerencia:* Exprese que la cantidad de movimiento angular de las tres partículas alrededor de *Q* se conserva.)

14.47 Dos pequeñas esferas *A* y *B*, que pesan 5 y 2 lb, respectivamente, se conectan mediante una varilla rígida de longitud l y de peso despreciable. Las dos esferas descansan sobre una superficie horizontal sin fricción cuando a *A* se le imparte repentinamente la velocidad $\mathbf{v}_0 = (10.5 \text{ ft/s})\mathbf{i}$. Determine *a*) la cantidad de movimiento lineal del sistema y su cantidad de movimiento angular alrededor de su centro de masa *G* y *b*) las velocidades de *A* y *B* después de que la varilla *AB* ha girado 180°.

14.48 Retome el problema 14.47, y ahora suponga que es a la esfera *B* a la que se le imparte repentinamente la velocidad $\mathbf{v}_0 = (10.5 \text{ ft/s})\mathbf{i}$.

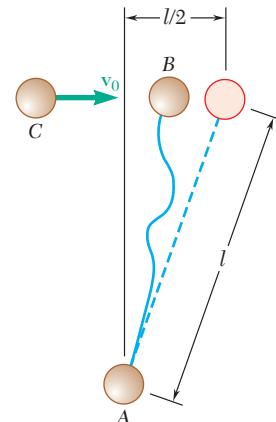


Figura P14.44

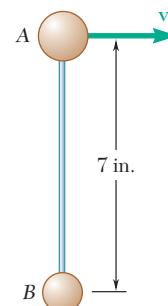


Figura P14.47

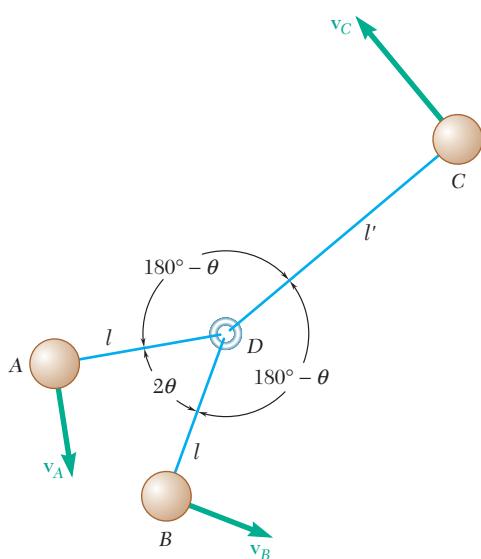


Figura P14.49

14.49 Tres esferas idénticas A , B y C , que pueden deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin fricción, se conectan mediante cuerdas inelásticas e inextensibles a un pequeño anillo D ubicado en el centro de masa de las tres esferas ($l' = 2l \cos \theta$). Las esferas están rotando inicialmente alrededor del anillo D , que está en reposo, a velocidades proporcionales a sus distancias de D . Se denota con v_0 la rapidez original de A y B y se supone que $\theta = 30^\circ$. Repentinamente se rompe la cuerda CD , lo que ocasiona que la esfera C se aleje deslizándose. Considere el movimiento de las esferas A y B y del anillo D después de que las otras dos cuerdas se han tensado de nuevo y determine *a)* la rapidez del anillo D , *b)* la rapidez relativa a la cual giran las esferas A y B alrededor de D y *c)* el porcentaje de la energía del sistema original que se disipa cuando las cuerdas AD y BD se vuelven a tensar.

14.50 Retome el problema 14.49, y ahora suponga que $\theta = 45^\circ$.

14.51 Dos discos pequeños, A y B , de 3 y 1.5 kg de masa, respectivamente, se pueden deslizar sobre una superficie horizontal sin fricción. Están conectados mediante una cuerda de 600 mm de largo, y giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de su centro de masa G a razón de 10 rad/s. En $t = 0$, las coordenadas de G son $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{y}_0 = 2$ m y su velocidad es $\bar{v}_0 = (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.96 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Poco tiempo después se rompe la cuerda; se observa luego que el disco A se mueve a lo largo de una trayectoria paralela al eje y y que el disco B lo hace por una trayectoria que interseca al eje x a una distancia $b = 7.5$ m de O . Determine *a)* las velocidades de A y B después de que se rompe la cuerda, *b)* la distancia a desde el eje y a la trayectoria de A .

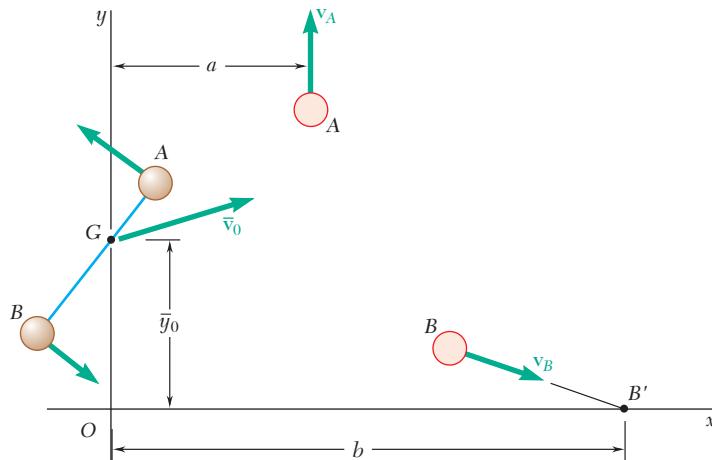


Figura P14.51 y P14.52

14.52 Dos discos pequeños, A y B , de 2 y 1 kg de masa, respectivamente, pueden deslizarse sobre una superficie horizontal sin fricción. Se conectan mediante una cuerda de masa despreciable y giran alrededor de su centro de masa G . En $t = 0$, G se mueve con la velocidad \bar{v}_0 y sus coordenadas son $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{y}_0 = 1.89$ m. Poco después se rompe la cuerda y se observa que el disco A se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_A = (5 \text{ m/s})\mathbf{j}$ en línea recta y a una distancia $a = 2.56$ m desde el eje y , en tanto que B lo hace con una velocidad $\mathbf{v}_B = (7.2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (4.6 \text{ m/s})\mathbf{j}$ a lo largo de una trayectoria que interseca al eje x a una distancia $b = 7.48$ m desde el origen O . Determine *a)* la velocidad inicial \bar{v}_0 del centro de masa G de los dos discos, *b)* la longitud de la cuerda que conecta inicialmente a los dos discos, *c)* la rapidez en rad/s a la cual los dos discos giraban alrededor de G .

14.53 En un juego de billar a la bola A se le da una velocidad inicial v_0 a lo largo del eje longitudinal de la mesa. Choca con la bola B y luego con la bola C, las cuales están en reposo. Se observa que las bolas A y C chocan de manera frontal con las laterales de la mesa en A' y C' , respectivamente, y que la bola B choca en forma oblicua con la lateral en B' . Si $v_0 = 12 \text{ ft/s}$, $v_A = 5.76 \text{ ft/s}$ y $a = 66 \text{ in.}$, determine a) las velocidades v_B y v_C de las bolas B y C, y b) el punto C' donde la bola C choca con la lateral de la mesa. Suponga superficies sin fricción e impactos perfectamente elásticos (esto es, conservación de energía).

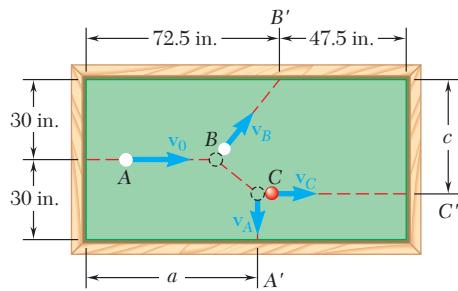


Figura P14.53

14.54 Para el juego de billar del problema 14.53, ahora suponga que $v_0 = 15 \text{ ft/s}$, $v_C = 9.6 \text{ ft/s}$ y $c = 48 \text{ in.}$. Determine a) las velocidades v_A y v_B de las bolas A y B, b) el punto A' donde la bola A hace contacto con la lateral de la mesa.

14.55 Tres pequeñas esferas idénticas A, B y C, que pueden deslizarse sobre una superficie horizontal sin fricción, están unidas a tres cuerdas, de 200 mm de largo, las cuales están amarradas a un anillo G. Al principio las esferas giran en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del anillo, con una velocidad relativa de 0.8 m/s y el anillo se mueve a lo largo del eje x con una velocidad $v_0 = (0.4 \text{ m/s})\mathbf{i}$. De repente se rompe el anillo y las tres esferas se mueven libremente en el plano xy con A y B siguiendo trayectorias paralelas al eje y a una distancia $a = 346 \text{ mm}$ una de la otra y C siguiendo una trayectoria paralela al eje x . Determine a) la velocidad de cada esfera y b) la distancia d .

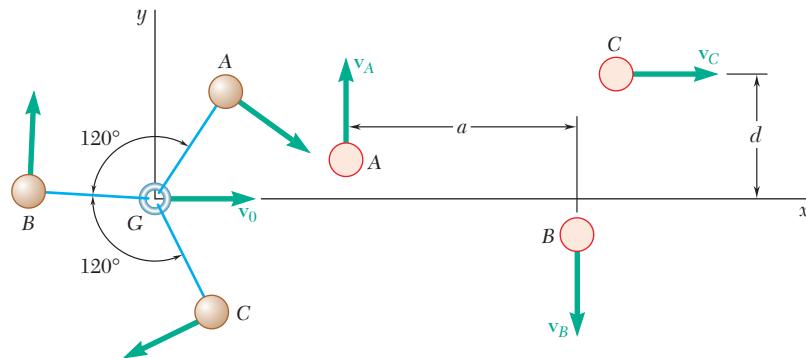


Figura P14.55 y P14.56

14.56 Tres pequeñas esferas idénticas A, B y C, que pueden deslizarse sobre una superficie horizontal sin fricción, están unidas a tres cuerdas de longitud l , las cuales se encuentran amarradas al anillo G. Al principio las esferas giran, en el sentido de las manecillas del reloj, alrededor del anillo que se mueve a lo largo del eje x con una velocidad v_0 . De repente el anillo se rompe y las tres esferas se mueven libremente en el plano xy . Si $v_A = (1.039 \text{ m/s})\mathbf{j}$, $v_C = (1.800 \text{ m/s})\mathbf{i}$, $a = 416 \text{ mm}$ y $d = 240 \text{ mm}$, determine a) la velocidad inicial del anillo, b) la longitud l de las cuerdas, c) la tasa en rad/s a la cual las esferas rotaban alrededor de G.

*14.10. SISTEMAS VARIABLES DE PARTÍCULAS

Todos los sistemas de partículas considerados hasta ahora están compuestos por partículas bien definidas. Estos sistemas no ganarán o perderán partículas durante su movimiento. Sin embargo, en un gran número de aplicaciones de ingeniería es necesario considerar *sistemas variables de partículas*, esto es, sistemas que están ganando o perdiendo continuamente partículas o ambas cosas al mismo tiempo. Consideré, por ejemplo, una turbina hidráulica. Su análisis implica la determinación de las fuerzas ejercidas por una corriente de agua sobre los álabes giratorios, y se advierte que las partículas de agua en contacto con los álabes forman un sistema que cambia en todo momento y que adquiere y pierde partículas de manera continua. Los cohetes proporcionan otro ejemplo de sistemas variables, ya que su propulsión depende de la expulsión continua de partículas de combustible.

Recuérdese que todos los principios de la cinética establecidos hasta ahora se dedujeron para sistemas constantes de partículas, los cuales ni las ganan ni las pierden. Por lo tanto, se debe encontrar una forma de reducir el análisis de un sistema variable de partículas al de un sistema constante auxiliar. El procedimiento seguido se indica en las secciones 14.11 y 14.12 para dos amplias categorías de aplicaciones: una corriente estacionaria de partículas y un sistema que gana o pierde masa.

*14.11. CORRIENTE ESTACIONARIA DE PARTÍCULAS

Consideré una corriente estacionaria de partículas, tal como un chorro de agua que desvía una paleta fija o un flujo de aire que pasa por un ducto o por un ventilador. Para determinar la resultante de las fuerzas ejercidas sobre las partículas en contacto con la paleta, el ducto o el ventilador, se aíslan estas partículas y se denota por S el sistema definido de esa manera (figura 14.9). Observe que S es un sistema variable de partículas, ya que de manera continua gana las partículas que fluyen hacia su interior e igualmente pierde un número igual de partículas que fluyen hacia afuera del sistema. Por lo tanto, los principios de la cinética que se han establecido hasta ahora no pueden aplicarse de manera directa a S .

Sin embargo, se puede definir con facilidad un sistema auxiliar de partículas que permanece constante durante un breve intervalo de tiempo Δt . Considere al tiempo t el sistema S más las partículas que entrarán a S durante el intervalo de tiempo Δt (figura 14.10a). A continuación, considere al tiempo $t + \Delta t$ el sistema S más las partículas que han salido de S durante el intervalo de tiempo Δt (figura 14.10c). Claramente, *las mismas partículas están implicadas en ambos casos*, y es posible aplicar a aquellas partículas el principio del impulso y la cantidad de movimiento. Puesto que la masa total m del sistema S permanece constante, las partículas que entran al sistema y aquellas que salen de él en el tiempo Δt deben tener la misma masa Δm . Denotando por \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B , respectivamente, las velocidades de las partículas que entran a S en A y las que salen de S en B , se representa en la figura 14.10a la cantidad de movimiento de las partículas que entran a S por $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ y la cantidad de movimiento de las partículas que salen de S por $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ (figura 14.10c). Se representan también mediante vectores apropiados las cantidades de movimiento $m_i\mathbf{v}_i$ de las partículas que forman a S y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre S y se indica mediante signos más e igual en azul que el sistema de las cantidades de movimientos e impulsos en los incisos a) y b) de la figura 14.10 es equipolente al sistema de las cantidades de movimiento en el inciso c) de la misma figura.

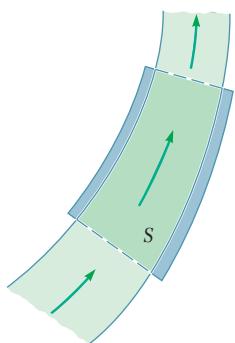


Figura 14.9

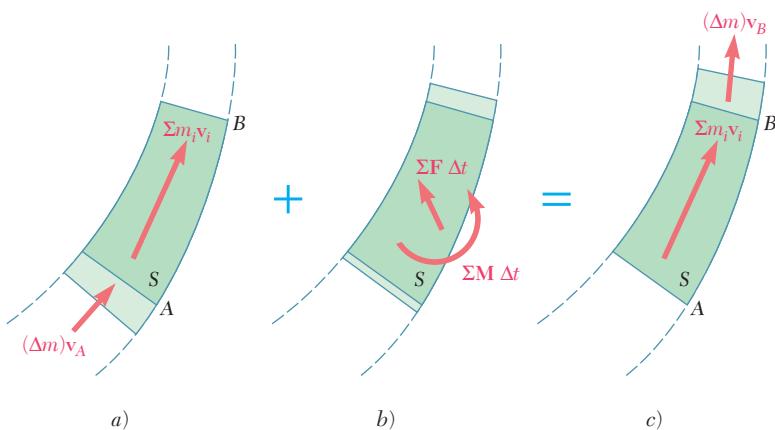


Figura 14.10

La sumatoria $\sum m_i \mathbf{v}_i$ de las cantidades de movimiento de las partículas de S se encuentra a ambos lados del signo de igualdad y por ello puede omitirse. Se concluye que *el sistema formado por la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ de las partículas que entran a S en el tiempo Δt y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre S durante ese tiempo es equipolente a la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ de las partículas que salen de S en el mismo tiempo Δt* . Por lo tanto, es posible escribir

$$(\Delta m)\mathbf{v}_A + \Sigma \mathbf{F} \Delta t = (\Delta m)\mathbf{v}_B \quad (14.38)$$

Se puede obtener una ecuación similar considerando los momentos de los vectores que intervienen (véase el problema resuelto 14.5). Al dividir todos los términos de la ecuación (14.38) entre Δt y dejando que Δt tienda a cero, se obtiene en el límite

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{dm}{dt} (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \quad (14.39)$$

donde $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ representa la diferencia entre el vector \mathbf{v}_B y el vector \mathbf{v}_A .

Si se usan unidades del SI, dm/dt se expresa en kg/s y las velocidades en m/s; se verifica que ambos miembros de la ecuación (14.39) se expresan en las mismas unidades (newtons). Si se recurre a unidades de uso común en Estados Unidos, dm/dt debe expresarse en slugs/s y las velocidades en ft/s. Se verifica de nuevo que ambos miembros de la ecuación se expresen en las mismas unidades (libras).†

El principio establecido se usa para analizar un gran número de aplicaciones de ingeniería. Algunas de las más comunes de estas aplicaciones se considerarán a continuación.

†Muchas veces es conveniente expresar el gasto de masa dm/dt como el producto ρQ , donde ρ es la densidad de la corriente (masa por unidad de volumen) y Q su gasto de volumen (volumen por unidad de tiempo). Si se usan unidades del SI, ρ se expresa en kg/m³ (por ejemplo, $\rho = 1000$ kg/m³ para el agua) y Q en m³/s. Sin embargo, si se recurre a unidades de uso común en Estados Unidos, ρ por lo general tendrá que calcularse a partir del peso específico correspondiente γ (peso por unidad de volumen) $\rho = \gamma/g$. Puesto que γ se expresa en lb/ft³ (por ejemplo, $\gamma = 62.4$ lb/ft³ para el agua), ρ se obtiene en slugs/ft³. El gasto de volumen Q se expresa en ft³/s.

Corriente de fluido desviada por una paleta. Si la paleta es-tá fija, el método de análisis que se indicó antes puede aplicarse de manera directa para determinar la fuerza \mathbf{F} ejercida por la paleta sobre la corriente. \mathbf{F} es la única fuerza que necesita considerarse, ya que la presión en la corriente es constante (presión atmosférica). La fuerza ejercida por la corriente sobre la paleta será igual y opuesta a \mathbf{F} . Si la paleta se mueve con una velocidad constante, la corriente no es estacionaria. Sin embargo, parecerá estacionaria para un observador que se mueve con la paleta. Por lo tanto, se debe elegir un sistema de ejes que se muevan con ella. Puesto que dicho sistema de ejes no está acelerado, la ecuación (14.38) puede seguirse usando, aunque \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B deben sustituirse por las *velocidades relativas* de la corriente con respecto a la paleta (véase el problema resuelto 14.7).

Flujo de fluido por el interior de un tubo. La fuerza que ejerce el fluido sobre una transición de un tubo tal como una curva o un estrechamiento puede determinarse al considerar el sistema de partículas S en contacto con la transición. Puesto que en general variará la presión en el flujo, también se deben considerar las fuerzas que ejercen sobre S las partes colindantes del fluido.

Motor a reacción. En un motor a reacción, el aire entra sin velocidad por el frente del motor y sale por la parte posterior con una velocidad elevada. La energía que se requiere para acelerar las partículas de aire se obtiene al quemar el combustible. La masa del combustible quemado en los gases de escape será de manera usual lo suficientemente pequeña comparada con la masa del aire que fluye por el motor y debido a ello será posible ignorarla. De tal modo, el análisis de un motor a reacción se reduce al de una corriente de aire. Ésta puede considerarse como una corriente estacionaria si todas las velocidades se miden con respecto al avión. En consecuencia, se supondrá que las corrientes de aire entran al motor con una velocidad \mathbf{v} de magnitud igual a la rapidez del avión y que salen con una velocidad \mathbf{u} igual

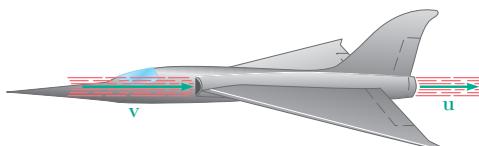


Figura 14.11

a la velocidad relativa de los gases de escape (figura 14.11). Como las presiones de entrada y salida son casi iguales a la atmosférica, la única fuerza externa que necesita considerarse es la ejercida por el motor sobre la corriente de aire. Esta fuerza es igual y opuesta al empuje.[†]

[†]Advierta que si se acelera el avión, no es posible utilizarlo como un sistema de referencia newtoniano. Sin embargo, se obtendrá el mismo resultado para el empuje, al recurrir a un sistema de referencia en reposo con respecto a la atmósfera, ya que en ese caso se observará que las partículas de aire entrarán al motor sin velocidad y saldrán de él con una velocidad de magnitud $u - v$.

Ventilador. Considere el sistema de partículas S que se muestra en la figura 14.12. La velocidad \mathbf{v}_A de las partículas que entran al sistema se supone igual a cero, y la velocidad \mathbf{v}_B de las partículas que salen del sistema es la velocidad del *viento de hélice o torbellino*. La velocidad del gasto se obtiene al multiplicar v_B por el área de la sección transversal del viento de hélice o torbellino. Puesto que toda la presión alrededor de S es la atmosférica, la única fuerza externa que actúa sobre S es el empuje del ventilador.

Helicóptero. La determinación del empuje creado por las hélices giratorias de un helicóptero en vuelo es similar a la determinación del empuje de un ventilador. La velocidad \mathbf{v}_A de las partículas de aire cuando éstas se aproximan a las hélices se supone igual a cero, y la velocidad del gasto se obtiene al multiplicar la magnitud de la velocidad \mathbf{v}_B del viento de hélice por su área de sección transversal.

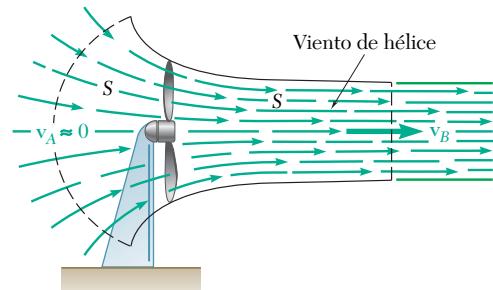


Figura 14.12

*14.12. SISTEMAS QUE GANAN O PIERDEN MASA

En seguida se analiza un tipo diferente de sistema variable de partículas, a saber, un sistema que gana masa al absorber continuamente partículas o que pierde masa al expulsar partículas de manera continua. Con-

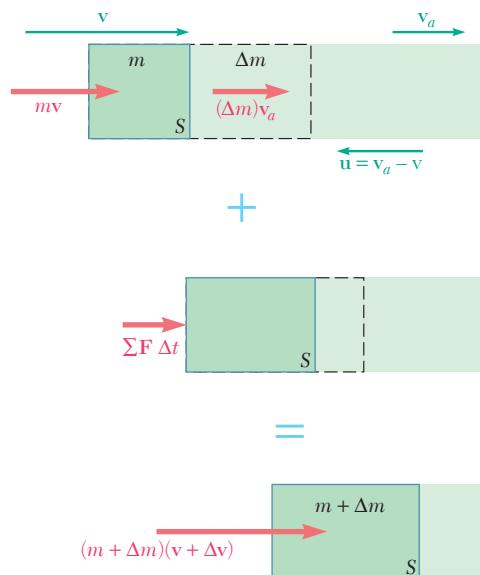


Figura 14.13

sidere el sistema S que se muestra en la figura 14.13. Su masa, igual a m en el instante t , aumenta en Δm en el intervalo de tiempo Δt . Para aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento al análisis de este sistema, se debe considerar en el tiempo t al sistema S más las partículas de masa Δm que absorbe S durante el intervalo de tiempo Δt . La velocidad de S en el tiempo t se denota mediante \mathbf{v} , la velocidad de S en el tiempo $t + \Delta t$ se denota mediante $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$, y la velocidad absoluta de las partículas absorbidas se denota por medio de \mathbf{v}_a . Al aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento, se escribe

$$mv + (\Delta m)\mathbf{v}_a + \Sigma\mathbf{F}\Delta t = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) \quad (14.40)$$



Fotografía 14.3 Cuando los cohetes de propulsión del transbordador se encienden, las partículas de gas que expulsan proporcionan el empuje requerido para el despegue.

Al resolver para la suma $\Sigma \mathbf{F} \Delta t$ de los impulsos de las fuerzas externas que actúan sobre S (excluyendo las fuerzas ejercidas por las partículas que se absorben), se tiene

$$\Sigma \mathbf{F} \Delta t = m \Delta \mathbf{v} + \Delta m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) + (\Delta m)(\Delta \mathbf{v}) \quad (14.41)$$

Al introducir la *velocidad relativa* \mathbf{u} con respecto a S de las partículas que se absorben, se escribe $\mathbf{u} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}$ y se anota, puesto que $v_a < v$, que la velocidad relativa \mathbf{u} está dirigida hacia la izquierda, como se muestra en la figura 14.13. Si se ignora el último término en la ecuación (14.41), que es de segundo orden, se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} \Delta t = m \Delta \mathbf{v} - (\Delta m)\mathbf{u}$$

Al dividir entre Δt y dejar que Δt tienda a cero, se tiene en el límite[†]

$$\Sigma \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \mathbf{u} \quad (14.42)$$

Al reagrupar los términos y recordar que $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$, donde \mathbf{a} es la aceleración del sistema S , se escribe

$$\Sigma \mathbf{F} + \frac{dm}{dt} \mathbf{u} = m \mathbf{a} \quad (14.43)$$

que muestra que la acción sobre S de las partículas que se están absorbiendo es equivalente a un empuje

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt} \mathbf{u} \quad (14.44)$$

que tiende a frenar el movimiento de S , ya que la velocidad relativa \mathbf{u} de las partículas está dirigida hacia la izquierda. Si se usan unidades del SI, dm/dt se expresa en kg/s, la velocidad relativa u en m/s y el empuje correspondiente en newtons. Si se recurre a unidades de uso común en Estados Unidos, dm/dt debe expresarse en slugs/s, u en ft/s y el empuje correspondiente en libras.[‡]

Las ecuaciones que se obtienen se usan también para determinar el movimiento de un sistema S que pierde masa. En este caso la tasa de cambio de masa es negativa y la acción sobre S de las partículas que se están expulsando es equivalente a un empuje en la dirección de $-\mathbf{u}$, esto es, en la dirección opuesta a aquella en que las partículas se están expulsando. Un *cohete* representa un caso característico de un sistema que pierde masa de manera continua (véase el problema resuelto 14.8).

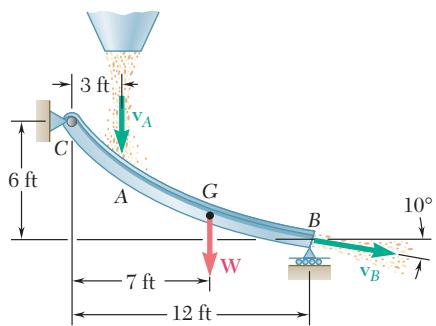
[†]Cuando la velocidad absoluta \mathbf{v}_a de las partículas que se absorben es cero, $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$, y la fórmula (14.42) se convierte en

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

Al comparar la fórmula obtenida para la ecuación (12.3) de la sección 12.3, se observa que es posible aplicar la segunda ley de Newton a un sistema que gana masa, *siempre que las partículas absorbidas estén inicialmente en reposo*. También puede aplicarse a sistemas que pierdan masa, *siempre que la velocidad de las partículas expulsadas sea cero* con respecto al sistema de referencia elegido.

[‡]Vea la nota al pie de la página 891.

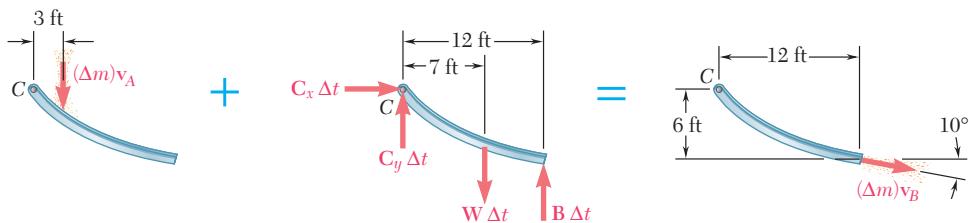
PROBLEMA RESUELTO 14.6



De una tolva cae grano sobre una rampa CB a razón de 240 lb/s. El grano golpea a la rampa en A con una velocidad de 20 ft/s y sale en B con una velocidad de 15 ft/s, formando un ángulo de 10° con la horizontal. Si el peso combinado de la rampa y el grano que se transporta es una fuerza \mathbf{W} de magnitud igual a 600 lb aplicada en G , determine la reacción en el rodillo de apoyo B y las componentes de la reacción en la articulación C .

SOLUCIÓN

Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento durante el intervalo de tiempo Δt al sistema compuesto por la rampa y el grano que transportan, y la cantidad de grano que golpea a la rampa en el intervalo Δt . Puesto que la rampa no se mueve, no tiene cantidad de movimiento. También se observa que la suma $\sum m_i \mathbf{v}_i$ de las cantidades de movimiento de las partículas que transporta la rampa es el mismo en t y $t + \Delta t$ y que, en consecuencia, es posible omitir.



Puesto que el sistema formado por la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ y los impulsos es equipolente a la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_B$, se escribe

$$\Rightarrow \text{componentes } x: \quad C_x \Delta t = (\Delta m)\mathbf{v}_B \cos 10^\circ \quad (1)$$

$$+\uparrow \text{componentes } y: \quad -(\Delta m)\mathbf{v}_A + C_y \Delta t - W \Delta t + B \Delta t \\ = -(\Delta m)\mathbf{v}_B \sin 10^\circ \quad (2)$$

$$+\uparrow \text{momentos alrededor de } C: \quad -3(\Delta m)\mathbf{v}_A - 7(W \Delta t) + 12(B \Delta t) \\ = 6(\Delta m)\mathbf{v}_B \cos 10^\circ - 12(\Delta m)\mathbf{v}_B \sin 10^\circ \quad (3)$$

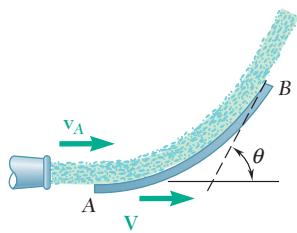
Al utilizar los datos proporcionados, $W = 600$ lb, $\mathbf{v}_A = 20$ ft/s, $\mathbf{v}_B = 15$ ft/s y $\Delta m/\Delta t = 240/32.2 = 7.45$ slugs/s, y resolver la ecuación (3) para B y la ecuación (1) para C_x ,

$$12B = 7(600) + 3(7.45)(20) + 6(7.45)(15)(\cos 10^\circ - 2 \sin 10^\circ) \\ 12B = 5075 \quad B = 423 \text{ lb} \quad \mathbf{B} = 423 \text{ lb} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

$$C_x = (7.45)(15) \cos 10^\circ = 110.1 \text{ lb} \quad \mathbf{C}_x = 110.1 \text{ lb} \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

Al sustituir B y resolver la ecuación (2) para C_y ,

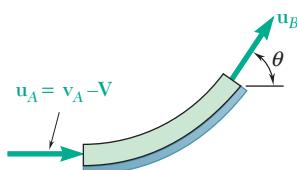
$$C_y = 600 - 423 + (7.45)(20 - 15 \sin 10^\circ) = 307 \text{ lb} \\ \mathbf{C}_y = 307 \text{ lb} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$



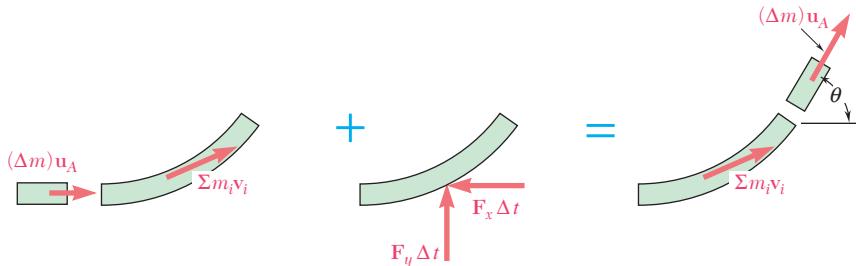
PROBLEMA RESUELTO 14.7

Una tobera descarga un chorro de agua de área de sección transversal A con velocidad v_A . La corriente se desvía por medio de una sola paleta que se mueve hacia la derecha con velocidad constante V . Suponiendo que el agua se mueve a lo largo de la paleta a velocidad constante, determine *a)* las componentes de la fuerza \mathbf{F} ejercida por la paleta sobre la corriente, *b)* la velocidad V para la cual se genera la potencia máxima.

SOLUCIÓN



a) Componentes de la fuerza ejercida sobre el chorro. Se elige un sistema de coordenadas que se mueve con la paleta a una velocidad constante \mathbf{V} . Las partículas de agua golpean la paleta con una velocidad relativa $\mathbf{u}_A = \mathbf{v}_A - \mathbf{V}$ y se alejan de la paleta con una velocidad relativa \mathbf{u}_B . Puesto que las partículas se mueven a lo largo de la paleta a una rapidez constante, las velocidades relativas \mathbf{u}_A y \mathbf{u}_B tienen la misma magnitud u . Al denotar la densidad de agua por ρ , la masa de las partículas que hacen contacto con la paleta durante el intervalo de tiempo Δt es $\Delta m = A\rho(v_A - V)\Delta t$; una masa igual de partículas se aleja de la paleta durante Δt . Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema formado por las partículas en contacto con la paleta y las partículas que inciden en esta misma en el intervalo Δt .



Al recordar que \mathbf{u}_A y \mathbf{u}_B tienen la misma magnitud u , y omitir la cantidad de movimiento $\sum m_i \mathbf{v}_i$ que aparece en ambos lados, se escribe

$$\Rightarrow \text{componentes } x: \quad (\Delta m)u - F_x \Delta t = (\Delta m)u \cos \theta$$

$$+\uparrow \text{componentes } y: \quad +F_y \Delta t = (\Delta m)u \sin \theta$$

Al sustituir $\Delta m = A\rho(v_A - V)\Delta t$ y $u = v_A - V$, se obtiene

$$\mathbf{F}_x = A\rho(v_A - V)^2(1 - \cos \theta) \leftarrow \quad \mathbf{F}_y = A\rho(v_A - V)^2 \sin \theta \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

b) Velocidad de la paleta para desarrollar la máxima potencia.

La potencia se obtiene al multiplicar la velocidad V de la paleta por la componente F_x de la fuerza ejercida por el chorro sobre la paleta.

$$\text{Potencia} = F_x V = A\rho(v_A - V)^2(1 - \cos \theta)V$$

Al diferenciar la potencia con respecto a V e igualar a cero la derivada, se obtiene

$$\frac{d(\text{potencia})}{dV} = A\rho(v_A^2 - 4v_A V + 3V^2)(1 - \cos \theta) = 0$$

$$V = v_A \quad V = \frac{1}{3}v_A \quad \text{Para potencia máxima } \mathbf{V} = \frac{1}{3}\mathbf{v}_A \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

Nota. Estos resultados sólo son válidos cuando una sola paleta desvía el chorro. Se obtienen resultados diferentes cuando una serie de paletas devían el chorro como en una turbina Pelton. (Véase el problema 14.81.)

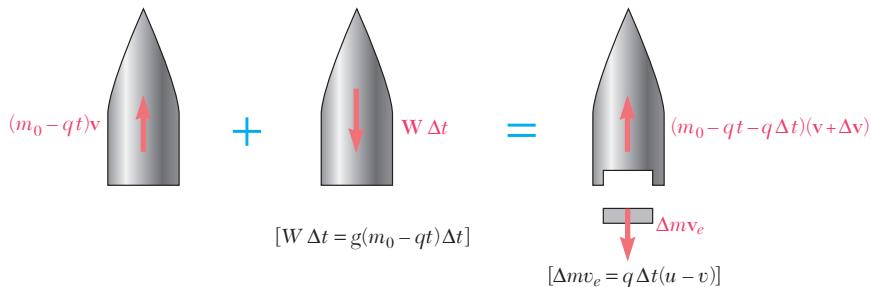
PROBLEMA RESUELTO 14.8



Un cohete de masa inicial m_0 (incluido el armazón y el combustible) se lanza verticalmente en el instante $t = 0$. El combustible se consume a una tasa constante $q = dm/dt$ y se expulsa a una velocidad constante u relativa al cohete. Obtenga una expresión para la magnitud de la velocidad del cohete en el tiempo t , ignorando la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

En el tiempo t , la masa del armazón del cohete que queda es $m = m_0 - qt$ y la velocidad es \mathbf{v} . Durante el intervalo de tiempo Δt se expulsa una masa de combustible $\Delta m = q \Delta t$ con una rapidez u relativa al cohete. Denotando por \mathbf{v}_e la velocidad absoluta del combustible expulsado, se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento entre el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$.



Se escribe

$$(m_0 - qt)v - g(m_0 - qt) \Delta t = (m_0 - qt - q \Delta t)(v + \Delta v) - q \Delta t(u - v)$$

Al dividir entre Δt y dejar que Δt tienda a cero, se obtiene

$$-g(m_0 - qt) = (m_0 - qt) \frac{dv}{dt} - qu$$

Al separar variables e integrar desde $t = 0$, $v = 0$ a $t = t$, $v = v$,

$$dv = \left(\frac{qu}{m_0 - qt} - g \right) dt \quad \int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{qu}{m_0 - qt} - g \right) dt$$

$$v = [-u \ln(m_0 - qt) - gt]_0^t \quad v = u \ln \frac{m_0}{m_0 - qt} - gt \quad \blacktriangleleft$$

Comentario. La masa que queda en el tiempo t_f después de que se ha consumido todo el combustible, es igual a la masa del armazón del cohete $m_s = m_0 - qt_f$ y la máxima velocidad que alcanza el cohete es $v_m = u \ln(m_0/m_s) - gt_f$. Suponiendo que el combustible se expulsa en un periodo relativamente corto, el término gt_f es pequeño y se tiene $v_m \approx u \ln(m_0/m_s)$. Para escapar el campo gravitacional terrestre, un cohete debe alcanzar una velocidad de 11.18 km/s. Si se supone que $u = 2200$ m/s y $v_m = 11.18$ km/s, se obtiene $m_0/m_s = 161$. En consecuencia, para lanzar cada kilogramo del armazón del cohete al espacio, es necesario consumir más de 161 kg de combustible si se usa un impulsor que produce $u = 2200$ m/s.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección se dedicó al estudio del movimiento de *sistemas variables de partículas*, esto es, sistemas que están *ganando o perdiendo partículas* en forma continua o en los que ambos procesos se producen al mismo tiempo. Los problemas que se proponen para resolver incluyen 1) *corrientes estacionarias de partículas* y 2) *sistemas que ganan o pierden masa*.

1. Para resolver problemas de corrientes estacionarias de partículas se considerará una parte S de la corriente y se expresará que el sistema formado por la cantidad de movimiento de las partículas que entran a S en A en el tiempo Δt y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre S durante ese tiempo es equipolente a la cantidad de movimiento de las partículas que salen de S en B en el mismo tiempo Δt (figura 14.10). Si se consideran sólo las resultantes de los sistemas vectoriales implicados, es posible escribir la ecuación vectorial

$$(\Delta m)\mathbf{v}_A + \Sigma \mathbf{F} \Delta t = (\Delta m)\mathbf{v}_B \quad (14.38)$$

Quizá también sea deseable considerar los momentos alrededor de un punto dado del sistema vectorial para obtener una ecuación adicional [problema resuelto 14.6], aunque muchos problemas se resuelven utilizando la ecuación (14.38) o la ecuación que se obtuvo al dividir todos los términos entre Δt y al dejar que Δt tienda a cero,

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{dm}{dt} (\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \quad (14.39)$$

donde $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ representa una *resta vectorial* y donde la tasa de masa de flujo dm/dt se expresa como el producto ρQ de la densidad ρ de la corriente (masa por unidad de volumen) y la tasa de flujo de volumen Q (volumen por unidad de tiempo). Si se recurre a las unidades de uso común en Estados Unidos, ρ se expresa como el cociente γ/g , donde γ es el peso específico del flujo y g es la aceleración de la gravedad.

Los problemas característicos que implican una corriente estacionaria de partículas se han descrito en la sección 14.11. Se le podría pedir que determinara lo siguiente:

a) Empuje causado por un flujo desviado. La ecuación (14.39) resulta aplicable, pero se obtendrá una mejor comprensión del problema si se usa una solución basada en la ecuación (14.38).

b) Reacciones en soportes de paletas o bandas transportadoras. Es necesario dibujar primero un diagrama que muestre a uno de los lados del signo de igualdad la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ de las partículas que inciden sobre la paleta o la banda en el tiempo Δt , así como los impulsos de las cargas y reacciones en los soportes durante ese tiempo, y que indique en el otro lado la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ de las partículas que se alejan de la paleta o la banda en el tiempo Δt [problema resuelto 14.6]. Al igualar las componentes x , las componentes y y los momentos de las cantidades en ambos lados del signo de igualdad se generarán tres ecuaciones escalares de las que es posible despejar tres incógnitas.

(continúa)

c) **Empuje desarrollado por un motor a reacción, un propulsor o un ventilador.** En la mayoría de los casos interviene una sola incógnita, la cual puede despejarse al resolver la ecuación escalar que se obtuvo de la ecuación (14.38) o de la (14.39).

2. Para resolver problemas en los que los sistemas ganan masa se considerará al sistema S , el cual tiene una masa m y se mueve con velocidad \mathbf{v} en el tiempo t , y las partículas de masa Δm con velocidad \mathbf{v}_a que S absorberá en el intervalo de tiempo Δt (figura 14.13). Luego se expresará que la cantidad de movimiento total de S y de las partículas que se absorberán, más el impulso de las fuerzas externas ejercidas sobre S , son equipolentes a la cantidad de movimiento S en el tiempo $t + \Delta t$. Al advertir que la masa de S y que su velocidad en ese tiempo son, respectivamente, $m + \Delta m$ y $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$, se escribe la ecuación vectorial

$$m\mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{v}_a + \Sigma \mathbf{F} \Delta t = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) \quad (14.40)$$

Como se mostró en la sección 14.12, si se introduce la velocidad relativa $\mathbf{u} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}$ de las partículas que se están absorbiendo, se obtiene la siguiente expresión para la resultante de las fuerzas externas aplicadas a S :

$$\Sigma \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt} \mathbf{u} \quad (14.42)$$

Además, se mostró que la acción sobre S de las partículas que están siendo absorbidas es equivalente a un empuje

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt} \mathbf{u} \quad (14.44)$$

ejercido en la dirección de la velocidad relativa de las partículas que se absorben.

Los ejemplos de los sistemas que ganan masa son las bandas transportadoras y los vagones de ferrocarril en movimiento que se están cargando con grava o arena, así como las cadenas que se están jalando de un carrete.

3. Para resolver problemas de sistemas que pierden masa, como los cohetes y los motores de cohetes, es posible recurrir a las ecuaciones (14.40) a (14.44), siempre que se den valores negativos a los incrementos de masa Δm y a la tasa de cambio de masa dm/dt . De este modo, el empuje definido por la ecuación (14.44) se ejercerá en una dirección opuesta a la dirección de la velocidad relativa de las partículas que se están expulsando.

Problemas

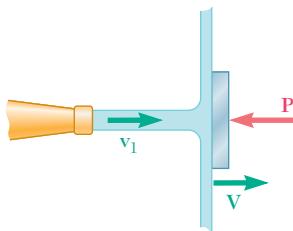


Figura P14.57 y P14.58

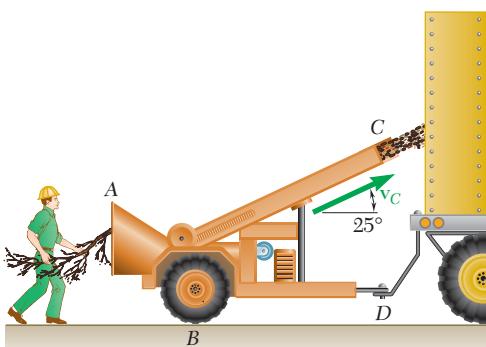


Figura P14.59

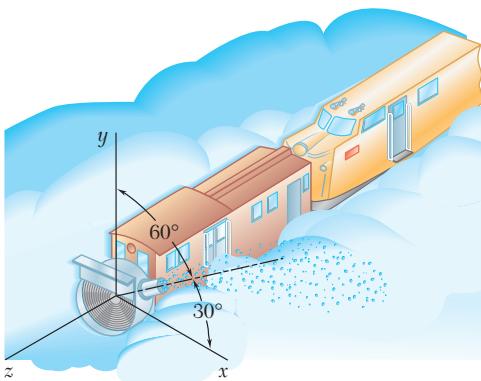


Figura P14.60

14.57 Un chorro de agua con un área de sección transversal A y una velocidad v_1 , golpea a una placa que permanece sin movimiento mediante una fuerza \mathbf{P} . Determine la magnitud de \mathbf{P} , si se sabe que $A = 500 \text{ mm}^2$, $v_1 = 25 \text{ m/s}$ y $V = 0$.

14.58 Un chorro de agua con un área de sección transversal A y una velocidad v_1 , golpea a una placa que se mueve a la derecha con velocidad \mathbf{V} . Determine la magnitud de \mathbf{V} , si se sabe que $A = 600 \text{ mm}^2$, $v_1 = 30 \text{ m/s}$ y $P = 400 \text{ N}$.

14.59 Se introducen troncos y ramas de árbol en A a razón de 5 kg/s en una picadora que lanza las astillas resultantes en C con una velocidad de 20 m/s . Determine la componente horizontal de la fuerza que ejerce la picadora sobre el camión en la unión en D .

14.60 Un arado giratorio eléctrico se usa para quitar la nieve de la sección horizontal de una vía. Esta máquina se coloca enfrente de una locomotora que la impulsa a una velocidad constante de 12 mi/h . La máquina quita 180 toneladas de nieve por minuto, lanzándola en la dirección que se muestra con una velocidad relativa a la máquina de 40 ft/s . Si se desprecia la fricción, determine *a)* la fuerza ejercida por la locomotora sobre la máquina, *b)* la fuerza lateral ejercida por la vía sobre la máquina.

14.61 Entre dos placas A y B fluye agua en una forma laminar con una velocidad \mathbf{v} de 30 m/s de magnitud. La corriente se divide en dos partes mediante una placa horizontal lisa C . Si se sabe que los gastos en cada una de las dos corrientes resultantes son, respectivamente, $Q_1 = 100 \text{ L/min}$ y $Q_2 = 500 \text{ L/min}$, determine *a)* el ángulo θ , *b)* la fuerza total ejercida por la corriente sobre la placa horizontal.

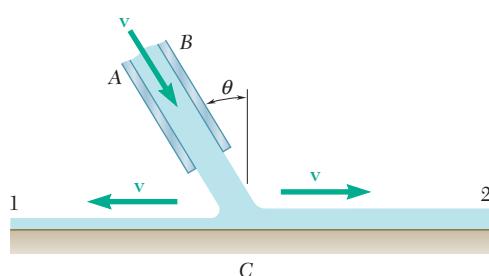


Figura P14.61 y P14.62

14.62 Entre dos placas A y B fluye agua en forma laminar con una velocidad \mathbf{v} de 40 m/s de magnitud. La corriente se divide en dos partes mediante una placa horizontal lisa C . Determine los gastos Q_1 y Q_2 en cada una de las dos corrientes resultantes, si se sabe que $\theta = 30^\circ$ y que la fuerza total ejercida por el chorro sobre la placa horizontal es una fuerza vertical de 500 N .

- 14.63** La manguera que se muestra en la figura descarga agua a razón de $1.3 \text{ m}^3/\text{min}$. Si se sabe que tanto en A como en B la corriente de agua se mueve con una velocidad de 20 m/s de magnitud y se desprecia el peso de la paleta, determine las componentes de las reacciones en C y D.

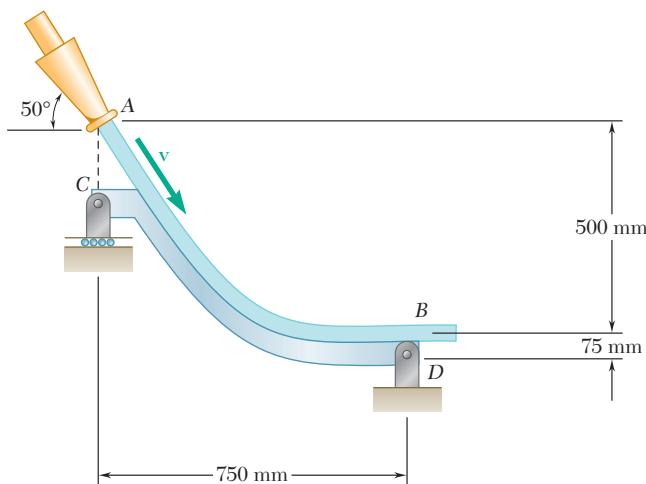


Figura P14.63

- 14.64** Si se sabe que la cuchilla AB del problema resuelto 14.7 tiene la forma de un arco de círculo, muestre que la fuerza resultante \mathbf{F} ejercida por la cuchilla sobre el chorro se aplica en el punto medio C del arco AB. (Sugerencia: Primero muestre que la línea de acción de \mathbf{F} debe pasar por el centro O del círculo.)

- 14.65** La corriente de agua que se muestra en la figura fluye a razón de 150 gal/min y se mueve con una velocidad de 60 ft/s de magnitud tanto en A como en B. La paleta está soportada por un pasador y una ménsula en C y por una celda de carga en D, la cual sólo puede ejercer una fuerza horizontal. Si se desprecia el peso de la paleta, determine las componentes de las reacciones en C y D ($1 \text{ ft}^3 = 7.48 \text{ gal}$).

- 14.66** La manguera que se muestra en la figura descarga agua a razón de 200 gal/min . Si se sabe que tanto en B como en C la corriente de agua se mueve con una velocidad de 100 ft/s de magnitud y se desprecia el peso de la paleta, determine el sistema fuerza-par que debe aplicarse en A para mantener fija la paleta ($1 \text{ ft}^3 = 7.48 \text{ gal}$).

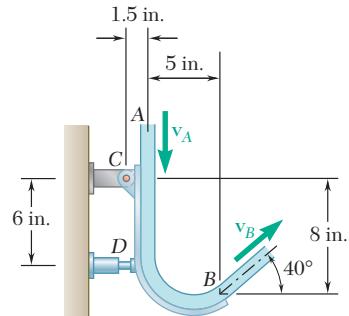


Figura P14.65

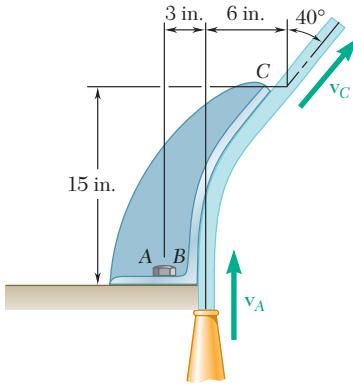


Figura P14.66

14.67 Un chorro de aire a alta velocidad sale de la boquilla A con una velocidad v_A y una razón de flujo de masa de 0.36 kg/s. El aire incide sobre una paleta ocasionando que gire hasta la posición mostrada. La paleta tiene una masa de 6 kg. Si se sabe que la magnitud de la velocidad del aire es igual en A y B, determine a) la magnitud de la velocidad en A, b) las componentes de las reacciones en O.

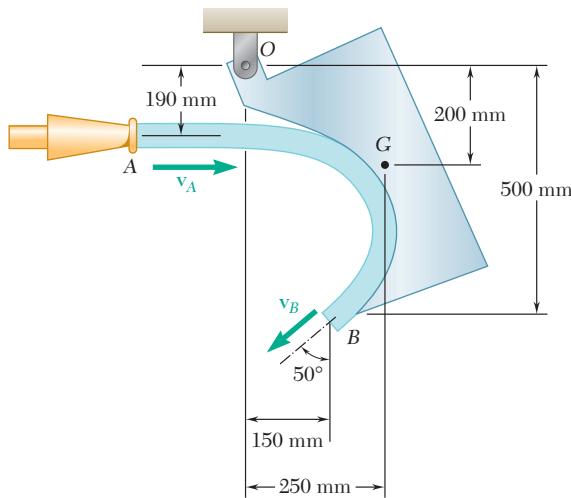


Figura P14.67

14.68 Se descarga carbón desde una banda transportadora a razón de 120 kg/s. Una segunda banda lo recibe en A y a su vez lo descarga en B. Si se sabe que $v_1 = 3 \text{ m/s}$ y $v_2 = 4.25 \text{ m/s}$ y que la segunda banda y el carbón que sostiene tienen una masa total de 472 kg, determine las componentes de las reacciones en C y en D.

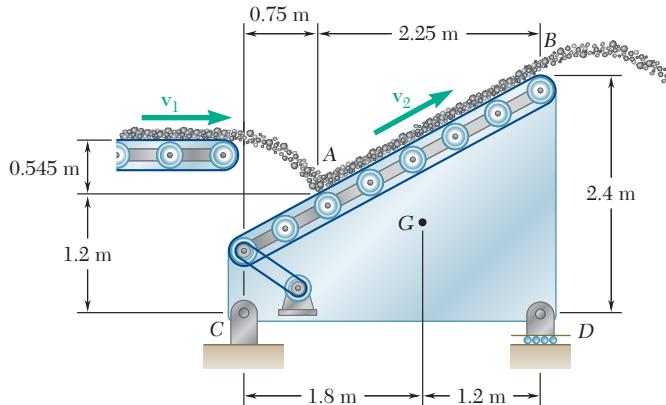


Figura P14.68

14.69 Mientras vuela a una rapidez de 900 km/h, un avión a propulsión succiona aire a razón de 90 kg/s y lo descarga a una velocidad con respecto al avión de 660 m/s. Determine el arrastre total debido a la fricción del aire sobre el aeroplano.

14.70 El arrastre total debido a la fricción del aire sobre un avión a propulsión que vuela a una rapidez de 570 mi/h es de 7 500 lb. Si se sabe que la velocidad de escape relativa al avión es de 1 800 ft/s, determine la razón en lb/s a la que el aire debe pasar a través del motor.

14.71 El avión a propulsión que se muestra succiona aire en A a razón de 200 lb/s y lo descarga en B a una velocidad con respecto al avión de 2 000 ft/s. Determine la magnitud y la línea de acción del empuje propulsor desarrollado por el motor cuando la rapidez del avión es a) 300 mi/h y b) 600 mi/h.

14.72 Con la finalidad de acortar la distancia requerida para aterrizar, un avión a propulsión está equipado con paletas móviles, las cuales invierten parcialmente la dirección del aire descargado por los motores. Cada uno de los motores succiona aire a razón de 120 kg/s y lo descarga a una velocidad de 600 m/s en relación con el motor. En un instante cuando la rapidez del avión es de 270 km/h, determine el empuje inverso proporcionado por cada uno de los motores.

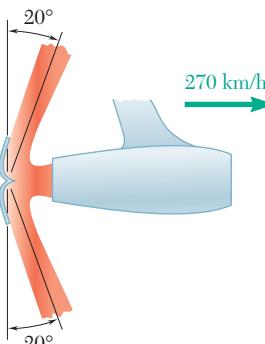


Figura P14.71

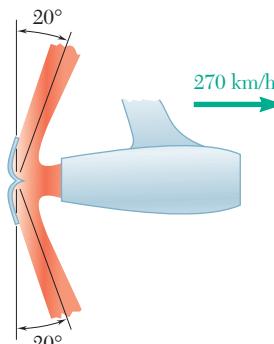


Figura P14.72

14.73 Un ventilador de piso, diseñado para arrojar aire a una velocidad máxima de 6 m/s en una estela de 400 mm de diámetro, está sostenido por una base circular de 200 mm de diámetro. Si se sabe que el peso total del ensamblaje es de 60 N y que su centro de gravedad se ubica directamente por encima del centro de la placa base, determine la altura h máxima a la cual debe operarse el ventilador para que no se vuelque. Suponga que la densidad del aire es $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$ y desprecie la velocidad de aproximación del aire.

14.74 El helicóptero que se muestra en la figura puede producir una rapidez máxima del aire hacia abajo de 80 ft/s en una estela de 30 ft de diámetro. Si el peso del helicóptero y la tripulación es de 3 500 lb y se supone que $\gamma = 0.076 \text{ lb/ft}^3$ para el aire, determine la carga máxima que el helicóptero puede levantar cuando está suspendido en el aire.

14.75 Un jet de línea viaja a una rapidez de 600 mi/h mientras cada uno de sus tres motores descarga aire con una velocidad relativa al avión de 2 000 ft/s. Determine la rapidez del jet después de haber perdido el uso de a) uno de sus motores, b) dos de sus motores. Suponga que el arrastre debido a la fricción del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez y que los motores restantes siguen operando al mismo ritmo.



Figura P14.75

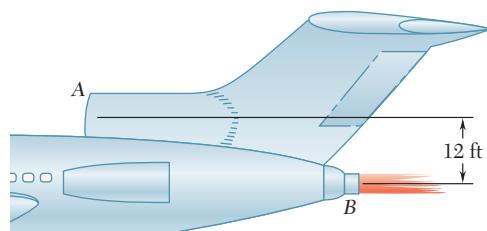


Figura P14.71

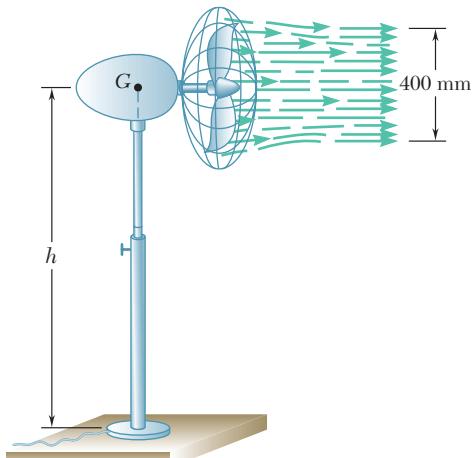


Figura P14.73

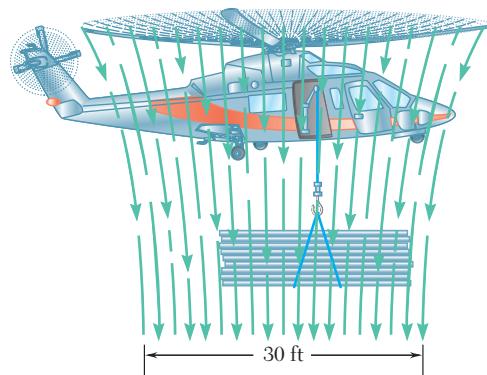


Figura P14.74

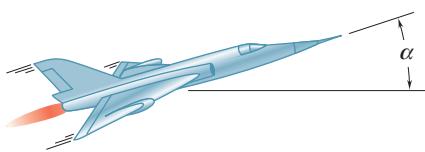


Figura P14.76

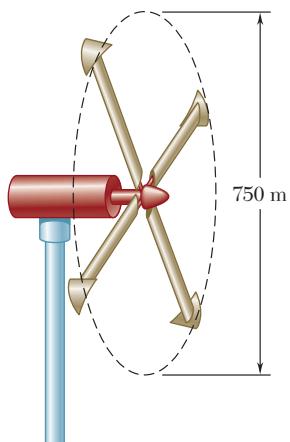


Figura P14.77 y P14.78

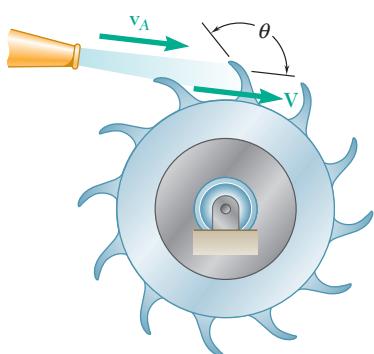


Figura P14.81

14.76 Un avión a propulsión de 16 Mg mantiene una rapidez constante de 774 km/h mientras asciende a un ángulo $\alpha = 18^\circ$. El avión succiona aire a razón de 300 kg/s y lo descarga con una velocidad relativa a la nave de 665 m/s. Si el piloto cambia a un vuelo horizontal mientras mantiene los motores funcionando igual que antes, determine *a)* la aceleración inicial del avión, *b)* la máxima rapidez horizontal que alcanzará. Suponga que el arrastre debido a la fricción del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez.

14.77 El aerogenerador que se muestra en la figura tiene una salida de potencia de 5 kW para una rapidez del viento de 30 km/h. Para la rapidez del viento dada, determine *a)* la energía cinética de las partículas de aire que entran por segundo al círculo de 7.50 m de diámetro y *b)* la eficiencia de este sistema de conversión de energía. Suponga que la densidad del aire es $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$.

14.78 Para cierta rapidez del viento el aerogenerador que se muestra en la figura produce 28 kW de potencia eléctrica y tiene una eficiencia de 0.35 como sistema de conversión de energía. Si la densidad del aire es $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$, determine *a)* la energía cinética de las partículas de aire que entran por segundo al círculo de 7.50 m de diámetro y *b)* la rapidez del viento.

14.79 Un avión a propulsión viaja en un vuelo plano a una rapidez de 570 mi/h, succiona aire a razón de 240 lb/s y lo descarga con una velocidad relativa al avión de 2 200 ft/s. Determine *a)* la potencia que en realidad se utiliza para impulsar al avión, *b)* la potencia total desarrollada por el motor, *c)* la eficiencia mecánica del avión.

14.80 La hélice de un pequeño avión tiene una estela de 6 ft de diámetro y produce un empuje de 800 lb cuando el avión está en reposo sobre el suelo. Si $y = 0.076 \text{ lb/ft}^3$ para el aire, determine *a)* la rapidez del aire en la estela, *b)* el volumen de aire que pasa por la hélice por segundo, *c)* la energía cinética por segundo impartida al aire en la estela.

14.81 En una turbina de acción una serie de cuchillas desvía un chorro de agua, de manera que la razón a la que el agua es desviada por las cuchillas es igual a la razón con la que el agua sale de la boquilla ($\Delta m/\Delta t = A\rho v_A$). Si se usa la misma notación que en el problema resuelto 14.7, *a)* determine la velocidad \mathbf{V} de las cuchillas para la cual se desarrolla la potencia máxima, *b)* obtenga una expresión para la potencia máxima, *c)* obtenga una expresión para la eficiencia mecánica.

14.82 Un orificio circular entrante (conocido también con el nombre de boquilla de Borda) de diámetro D se sitúa a una profundidad h por debajo de la superficie de un tanque. Si se sabe que la rapidez del chorro expulsado es $v = \sqrt{2gh}$ y se supone que la rapidez de aproximación v_1 es cero, muestre que el diámetro del chorro es $d = D/\sqrt{2}$. (Sugerencia: Considere la sección de agua indicada y observe que P es igual a la presión a una profundidad h multiplicada por el área del orificio.)

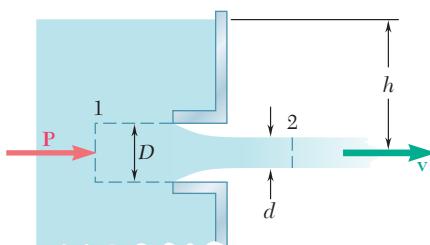


Figura P14.82