

Trabajo práctico: Procesos estocásticos

Licenciatura en ciencias de la computación, Universidad nacional de Rosario

Rossi, Martín

1.

Se define un suceso A tal que $P(A) = p$

y el proceso $\{N_k$: cantidad de ensayos independientes hasta obtener k éxitos consecutivos de $A\}$

a.

$$p = 0.25$$

$$1 < k < 5$$

10 simulaciones de trayectorias

##	k=2	k=3	k=4
## 1	39	193	25
## 2	75	305	473
## 3	2	18	715
## 4	4	73	302
## 5	10	81	36
## 6	9	12	823
## 7	13	213	251
## 8	34	125	1057
## 9	13	42	706
## 10	2	110	236

2.

a.

Simulación de 50 pasos del proceso $\{D_n\}$ con $p = 0.85$, asumiendo que se empieza a observar la partícula en el momento 0 y $D_0 = 0$

```
##      0  1  2  3 4 5  6  7  8  9
## 0   0  0  1  1  1 1 1  1  1 -1 -1
## 10  1  1  1  1 -1 1 1  1  1 -1  1
## 20  1  1  -1  1 1 1  -1 -1 -1  1
## 30  1  -1  1  1 1 1  1  1  1 -1
## 40  1  1  1  1 -1 1 1  -1  1  1  1
```

b.

Se define el proceso $\{S_n = D_0 + D_1 + \dots + D_n\}$ que corresponde a la posición de la partícula al momento n .

Una realización de un proceso estocástico es la sucesión de infinitos valores que toman las variables. Se simularán los primeros 100 pasos de la misma con $p = 0.85$:

```
##      0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
## 0   0  0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
## 10 10 11 12 13 14 13 12 13 14 15
## 20 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
## 30 24 25 26 27 28 29 30 31 30 29
## 40 30 31 32 33 34 35 36 35 36 37
## 50 38 39 38 39 38 39 40 39 38 39
## 60 38 39 40 41 42 41 42 43 44 45
## 70 44 45 46 47 48 49 50 49 48 47
## 80 48 49 50 51 52 51 52 53 54 55
## 90 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65
```

Se puede deducir que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ porque $p > 0.5$.

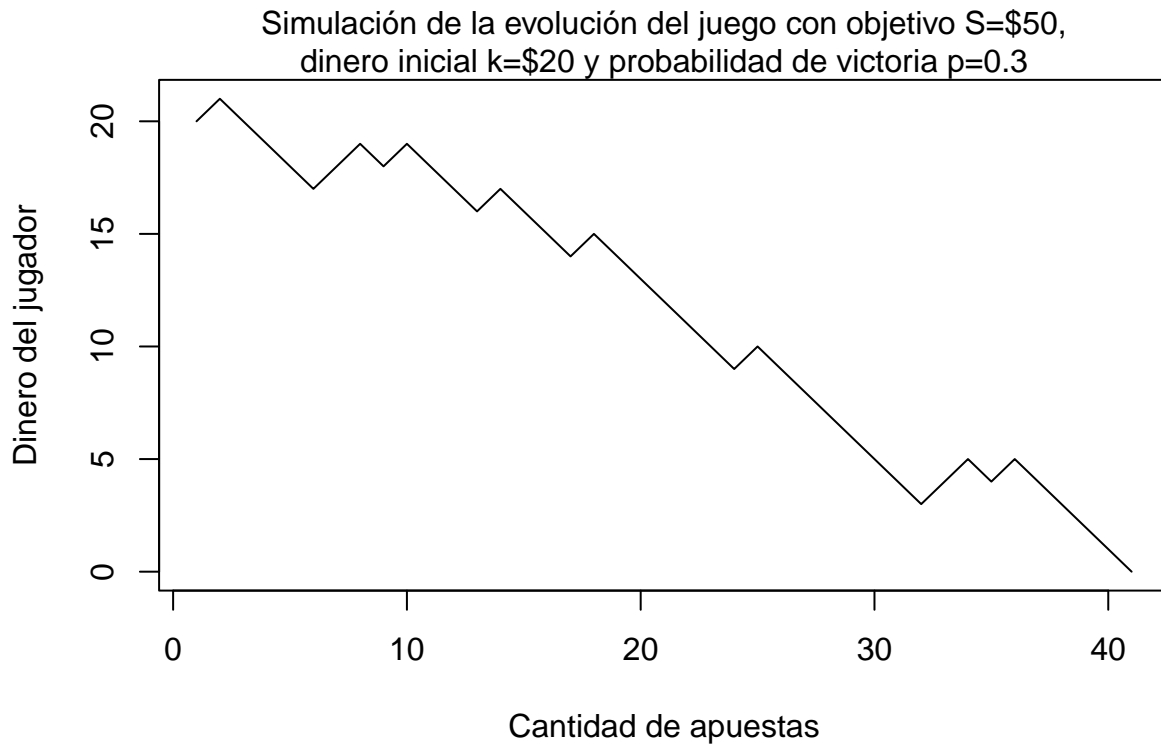
3.

Se define el proceso estocástico $\{X_n\}$ que representa el dinero que tiene el jugador al momento n .

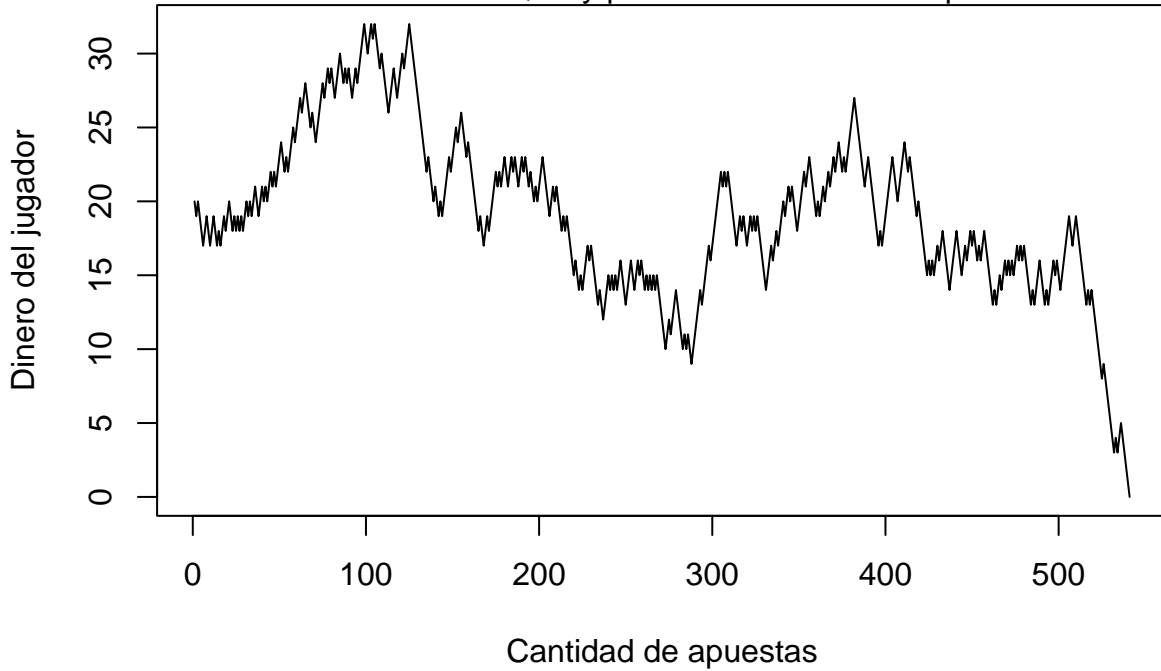
a.

$k = 20, S = 50$

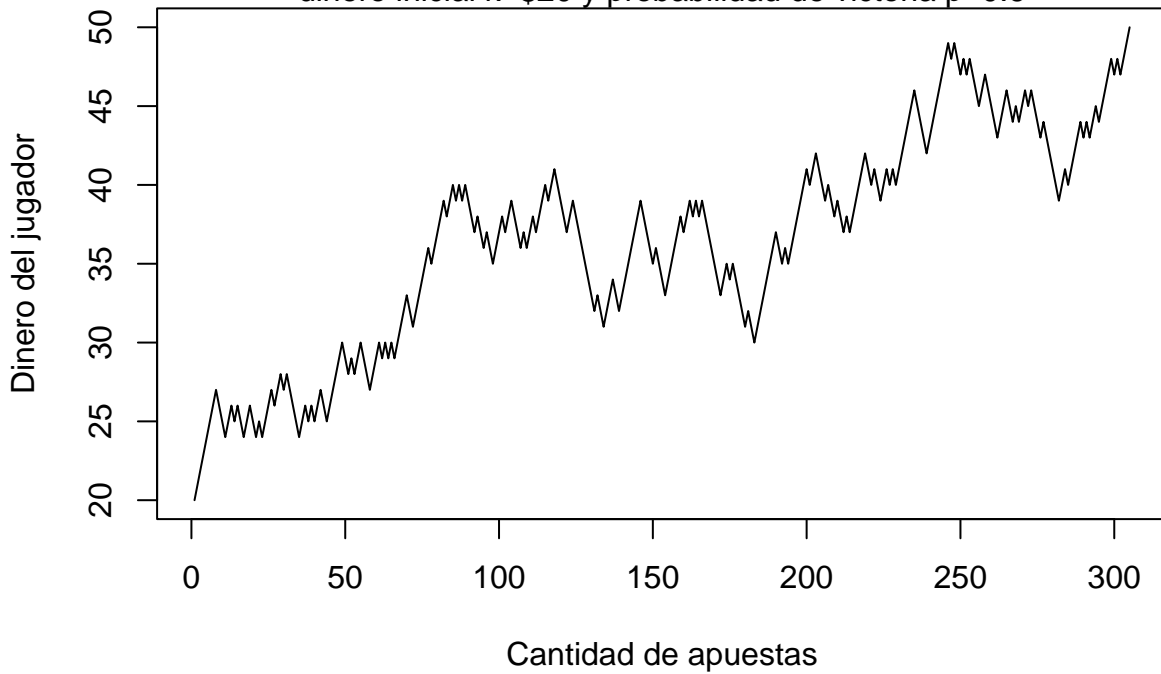
Se realizan las simulaciones para $p < 0.5$ ($p = 0.3$), $p = 0.5$ y $p > 0.5$ ($p = 0.6$)



Simulación de la evolución del juego con objetivo $S=\$50$,
dinero inicial $k=\$20$ y probabilidad de victoria $p=0.5$



Simulación de la evolución del juego con objetivo $S=\$50$,
dinero inicial $k=\$20$ y probabilidad de victoria $p=0.6$



b.

Para aproximar la probabilidad de ruina del jugador se simularán 1000 juegos para cada p y se contarán las veces que perdió todo el dinero sobre el total. Los otros parámetros seguirán siendo los mismos, $k = 20$ y $S = 50$.

$p = 0.3$:

[1] 1

$p = 0.5$:

[1] 0.612

$p = 0.6$:

[1] 0.001

Lo que significa que cuando $p = 0.3$, el jugador llegará a la ruina con probabilidad 1, si $p = 0.5$ llegará con probabilidad 0.612, y con $p = 0.6$ con probabilidad 0.001.

4.

a.

Conjunto usado: $\{12, 5, 18, 6, 8, 13, 16\}$

Simulando el algoritmo 1000 veces y sacando el promedio de comparaciones:

[1] 13.696

b.

Defino las variables aleatorias C_n : cantidad de comparaciones realizadas por el algoritmo Quick-Sort en una lista de tamaño n , con $n \geq 0$.

Sus distribuciones son:

$$S(C_0) = \{0\}, P(C_0 = 0) = 1$$

$$S(C_1) = \{0\}, P(C_1 = 0) = 1$$

$$S(C_2) = \{1\}, P(C_2 = 1) = 1$$

$$S(C_n) = \{n - 1 + C_k + C_l : k + l = n - 1\}, \text{ con igual probabilidad para cada combinación de } k \text{ y } l$$

Calculo las esperanzas hasta $n = 7$

$$E(C_0) = 0 * 1 = 0$$

$$E(C_1) = 0 * 1 = 0$$

$$E(C_2) = 1 * 1 = 1$$

$$E(C_3) = \frac{2}{3}E(2 + C_2 + C_0) + \frac{1}{3}E(2 + C_1 + C_1) = \frac{2}{3}(2 + 1 + 0) + \frac{1}{3}(2 + 0 + 0) = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$E(C_4) = \frac{2}{4}E(3 + C_1 + C_2) + \frac{2}{4}E(3 + C_0 + C_3) = \frac{1}{2}(3 + 0 + 1) + \frac{1}{2}(3 + 0 + \frac{8}{3}) = \frac{29}{6}$$

$$E(C_5) = \frac{2}{5}(4 + C_0 + C_4) + \frac{2}{5}(4 + C_1 + C_3) + \frac{1}{5}(4 + C_2 + C_2) = \frac{2}{5}(4 + 0 + \frac{29}{6}) + \frac{2}{5}(4 + 0 + \frac{8}{3}) + \frac{1}{5}(4 + 1 + 1) = \frac{37}{5}$$

$$E(C_6) = \frac{2}{6}(5 + C_0 + C_5) + \frac{2}{6}(5 + C_1 + C_4) + \frac{2}{6}(5 + C_2 + C_3) = \frac{1}{3}(5 + 0 + \frac{37}{5}) + \frac{1}{3}(5 + 0 + \frac{29}{6}) + \frac{1}{3}(5 + 1 + \frac{8}{3}) = \frac{103}{10}$$

$$E(C_7) = \frac{2}{7}(6 + C_0 + C_6) + \frac{2}{7}(6 + C_1 + C_5) + \frac{2}{7}(6 + C_2 + C_4) + \frac{1}{7}(6 + C_3 + C_3)$$

$$= \frac{2}{7}(6 + 0 + \frac{103}{10}) + \frac{2}{7}(6 + 0 + \frac{37}{5}) + \frac{2}{7}(6 + 1 + \frac{29}{6}) + \frac{1}{7}(6 + \frac{8}{3} + \frac{8}{3}) = \frac{472}{35} \approx 13.4857$$

5.

a.

Para modelar el comportamiento de visitas, se considera que el usuario tiene una probabilidad de saltar a una página cualquiera de manera aleatoria por más que no exista un enlace que lleve a ella. Se toma la probabilidad de salto como 0.15 y la de que elija un enlace 0.85, excepto en el estado g que no tiene enlaces. Y para cada acción que tome el usuario tendrá la misma probabilidad de llegar a la otra página entre las posibilidades.

Entonces para calcular la probabilidad en un paso $P(x, y)$ sería:

$$\text{Si } x \neq g: P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{G(x)} * 0.85 + \frac{1}{7} * 0.15 & \text{si existe el arco } x \rightarrow y \\ \frac{1}{7} * 0.15 & \text{sino} \end{cases}$$

$$P(g, y) = \frac{1}{7}, \text{ para todo } y$$

$$E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

La matriz de probabilidad en un paso queda:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{140} & \frac{3}{140} & \frac{3}{140} & \frac{3}{140} & \frac{25}{56} & \frac{25}{56} & \frac{3}{140} \\ \frac{105}{3} & \frac{140}{3} & \frac{105}{3} & \frac{140}{3} & \frac{140}{3} & \frac{105}{25} & \frac{140}{3} \\ \frac{140}{3} & \frac{140}{3} & \frac{140}{3} & \frac{56}{3} & \frac{140}{3} & \frac{56}{81} & \frac{140}{3} \\ \frac{140}{131} & \frac{140}{3} & \frac{140}{3} & \frac{140}{131} & \frac{140}{3} & \frac{70}{131} & \frac{140}{131} \\ \frac{560}{25} & \frac{140}{25} & \frac{140}{3} & \frac{560}{3} & \frac{140}{3} & \frac{560}{3} & \frac{560}{3} \\ \frac{56}{7} & \frac{56}{7} & \frac{140}{7} & \frac{140}{7} & \frac{140}{7} & \frac{140}{7} & \frac{140}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{1680} \begin{pmatrix} 36 & 36 & 36 & 36 & 750 & 750 & 36 \\ 512 & 36 & 512 & 36 & 36 & 512 & 36 \\ 36 & 36 & 36 & 750 & 36 & 750 & 36 \\ 36 & 36 & 36 & 36 & 36 & 1464 & 36 \\ 393 & 36 & 36 & 393 & 36 & 393 & 393 \\ 750 & 750 & 36 & 36 & 36 & 36 & 36 \\ 240 & 240 & 240 & 240 & 240 & 240 & 240 \end{pmatrix}$$

Al considerar la posibilidad de salto a cualquier nodo, todo el conjunto es cerrado irreducible y aperiódico.

b.

Simulación de 100 pasos partiendo del nodo a :

```
## [1] "e" "f" "b" "c" "f" "a" "e" "f" "a" "f" "b" "f" "c" "d" "f" "a" "e" "a"
## [19] "e" "a" "e" "g" "d" "f" "a" "e" "g" "b" "d" "f" "a" "e" "a" "f" "a" "f"
## [37] "d" "f" "a" "e" "d" "f" "b" "c" "d" "f" "a" "b" "f" "b" "a" "f" "a" "e"
## [55] "d" "f" "b" "d" "f" "b" "f" "b" "c" "f" "b" "g" "c" "f" "b" "a" "e" "a"
## [73] "e" "g" "d" "f" "b" "f" "a" "f" "a" "f" "a" "d" "b" "c" "g" "e" "g" "g"
## [91] "d" "f" "b" "b" "f" "a" "e" "g" "f" "a"
```

c.

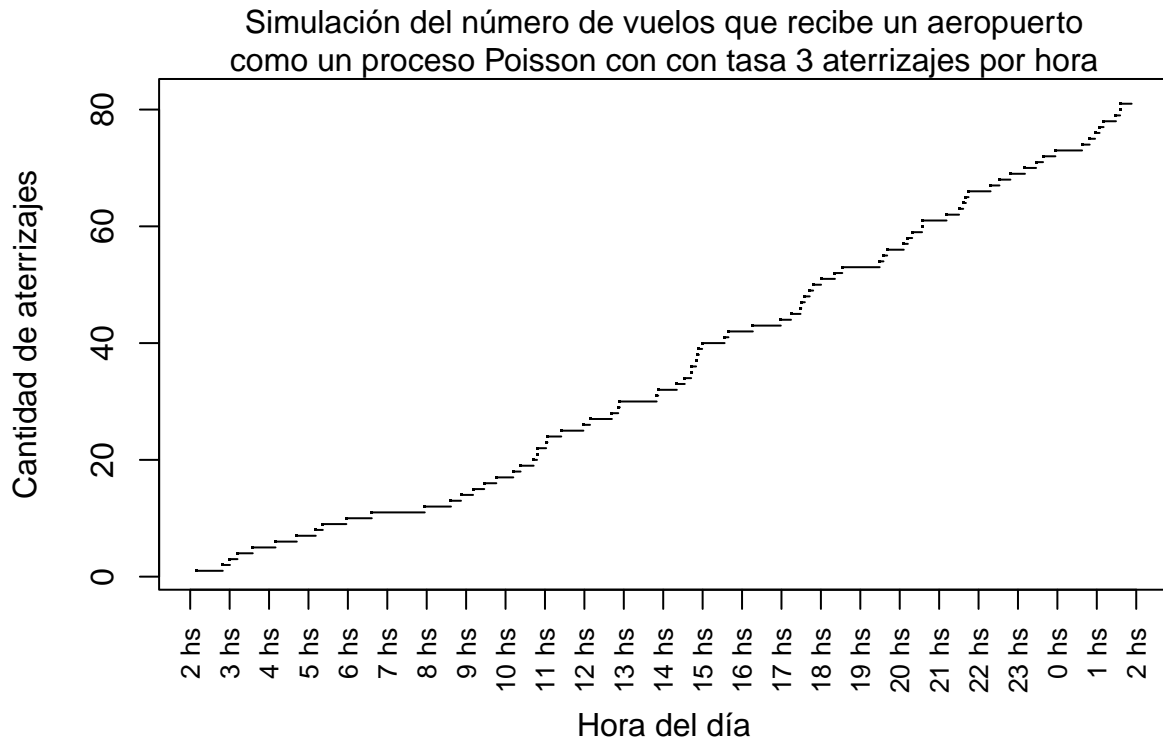
El rango de cada página es la probabilidad de llegar a ella a largo plazo, o sea, después de n pasos cuando $n \rightarrow \infty$. Se calcula la distribución límite π .

```
##          a          b          c          d          e          f          g
## [1,] 0.22198 0.1527164 0.07125255 0.08425917 0.1223244 0.2934906 0.05397684
```

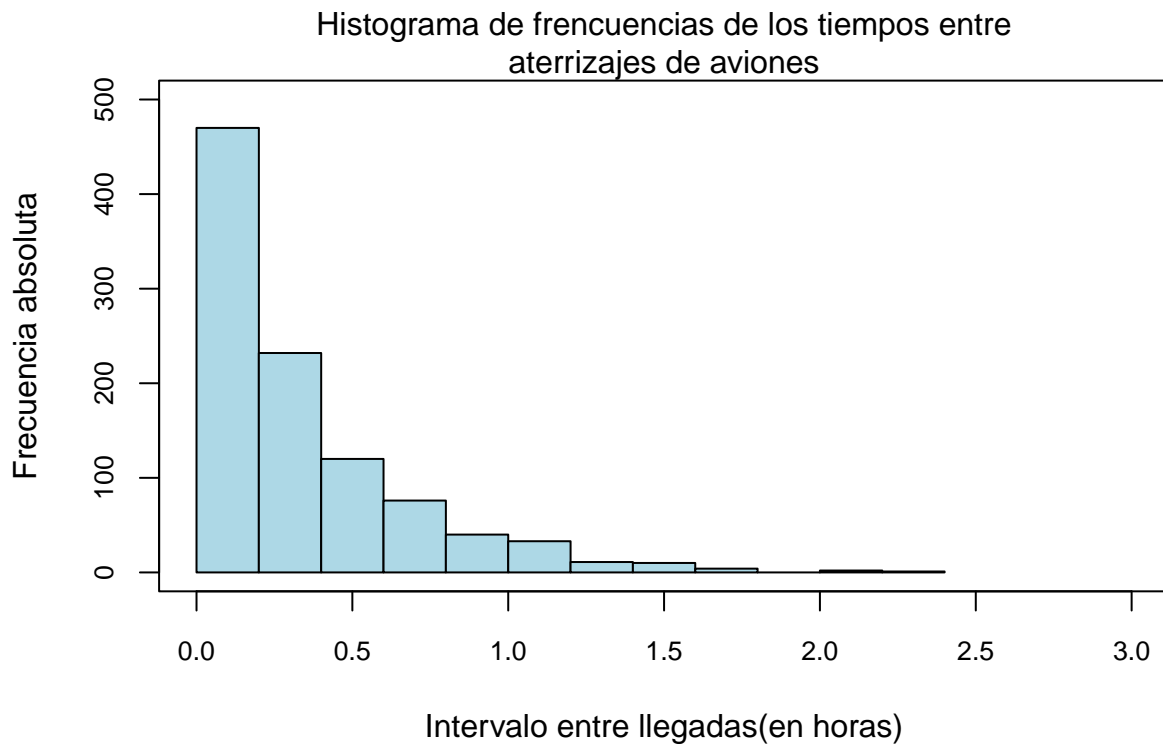
Se ve que la página que tiene el mayor rango es la f , que es aproximadamente 0.29, y que también es la que más arcos de entrada tiene.

6.

a.



b.



El histograma corresponde a una distribución exponencial, que es el modelo de la variable del tiempo entre

arribos en un proceso de Poisson.

7.

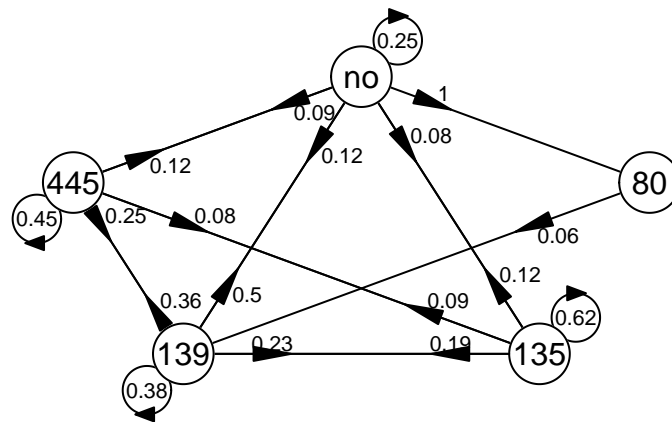
a.

Para conocer con qué probabilidad serán atacados los puertos al cabo de tres semanas se calcula la matriz de transición en tres pasos y se la multiplica por la distribución inicial, es decir, $\pi_0 P^3$.

```
##           80      135      139      445 no attack
## [1,] 0.02417504 0.2422698 0.3482356 0.232574 0.1527455
```

El puerto con más probabilidad de ser atacado (0.3482) es el 139, y el que tiene menor probabilidad (0.0241) es el 80.

b.



Se usa la función *steadyStates* del paquete *markovchain* para calcular la distribución límite.

```
##           80      135      139      445 no attack
## [1,] 0.02146667 0.2669333 0.3434667 0.2273333 0.1408
```