

Se notó también que en el caso de un cuerpo rígido *restringido a girar alrededor de un punto fijo O*, la energía cinética del cuerpo puede expresarse como

$$T = \frac{1}{2}(I_x' \omega_{x'}^2 + I_y' \omega_{y'}^2 + I_z' \omega_{z'}^2) \quad (18.20)$$

donde los ejes x' , y' y z' son los ejes principales de inercia del cuerpo en O . Los resultados que se obtuvieron en la sección 18.4 posibilitan extender al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido la aplicación del *principio del trabajo y la energía* y del *principio de la conservación de la energía*.

La segunda parte del capítulo se dedicó a la aplicación de las ecuaciones fundamentales

$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (18.1)$$

$$\sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (18.2)$$

al movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones. Se recordó [sección 18.5] que \mathbf{H}_G representa la cantidad de movimiento angular del cuerpo relativa al sistema de referencia centroidal $GX'Y'Z'$ de orientación fija (figura 18.27) y que $\dot{\mathbf{H}}_G$ en la ecuación (18.2) representa la razón de cambio de \mathbf{H}_G con respecto a ese sistema de referen-

Utilización de un sistema de referencia en rotación para escribir las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido en el espacio

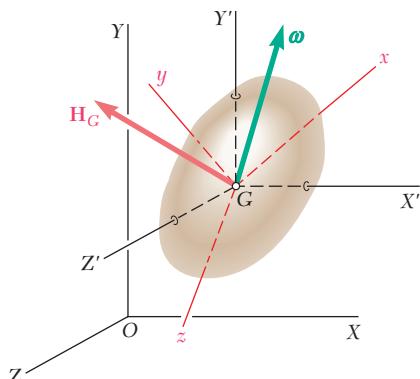


Figura 18.27

cía. Se vio que, cuando el cuerpo gira, sus momentos y productos de inercia con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ cambian en forma continua. Por lo tanto, resulta más conveniente utilizar un sistema de referencia en rotación $Gxyz$ cuando se descompone $\boldsymbol{\omega}$ en componentes y se calculan los momentos y productos de inercia que se usarán para determinar \mathbf{H}_G de las ecuaciones (18.7) o (18.10). Sin embargo, puesto que $\dot{\mathbf{H}}_G$ en la ecuación (18.2) representa la razón de cambio de \mathbf{H}_G con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ de orientación fija, se debe utilizar el método de la sección 15.10 para determinar su valor. Recordando la ecuación (15.31), se escribió

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \quad (18.22)$$

donde \mathbf{H}_G = cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ de orientación fija

$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ = razón de cambio de \mathbf{H}_G con respecto al sistema de referencia en rotación $Gxyz$, que se calculó de las relaciones (18.7)

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del sistema de referencia en rotación $Gxyz$

Al sustituir $\dot{\mathbf{H}}_G$ de (18.22) en (18.2), se obtiene

$$\Sigma \mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \quad (18.23)$$

Si el sistema de referencia en rotación está realmente sujeto al cuerpo, su velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es idénticamente igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Sin embargo, hay muchas aplicaciones en las que tiene ventajas utilizar un sistema de referencia que no está asociado con el cuerpo, sino que gira de una manera independiente [problema resuelto 18.5].

Ecuaciones de movimiento de Euler. Principio de d'Alembert

Con $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ en la ecuación (18.23) utilizando los ejes principales y escribiendo esta ecuación en forma escalar, se obtienen las *ecuaciones de movimiento de Euler* [sección 18.6]. Un análisis de la solución de estas ecuaciones y de las ecuaciones escalares correspondientes a la ecuación (18.1) lleva a extender el principio de d'Alembert al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido y a concluir que el sistema de fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rígido no es sólo equipolente, sino en verdad *equivalente* a las fuerzas efectivas del cuerpo representado por el vector $m\bar{a}$ y el par $\dot{\mathbf{H}}_G$ (figura 18.28). Los problemas que implican el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido pueden resolverse considerando la ecuación de diagramas de cuerpo libre representada en la figura 18.28 y escribiendo ecuaciones escalares apropiadas que relacionen las componentes o momentos de las fuerzas externas y las fuerzas efectivas [problemas resueltos 18.3 y 18.5].

Ecuación de diagramas de cuerpo libre

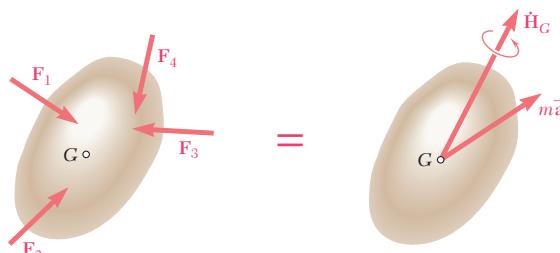


Figura 18.28

Cuerpo rígido con un punto fijo

En el caso de un cuerpo rígido *restringido a girar alrededor de un punto fijo O*, un método alternativo de solución, que incluye los momentos de las fuerzas y la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular alrededor del punto *O*, puede utilizarse. Se escribió [sección 18.7]:

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \quad (18.28)$$

donde $\Sigma \mathbf{M}_O$ = suma de momentos alrededor de *O* de las fuerzas aplicadas al cuerpo rígido

\mathbf{H}_O = cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto al sistema de referencia fijo *OXYZ*

$(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ = razón de cambio de \mathbf{H}_O con respecto a un sistema de referencia en rotación *Oxyz*, que se calculará de las relaciones (18.13)

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del sistema de referencia en rotación *Oxyz*

Este planteamiento puede utilizarse para resolver ciertos problemas que implican la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo [sección 18.8], por ejemplo, una flecha rotatoria desbalanceada [problema resuelto 18.4].

Movimiento de un giroscopio

En la última parte del capítulo se consideró el movimiento de *giroscopios y otros cuerpos simétricos con respecto a un eje*. Al introducir los *ángulos de Euler* ϕ , θ y ψ para definir la posición de un giroscopio (figura 18.29), se observó que sus derivadas $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ representan, respectivamente, las velocidades de *precesión*, *nutación* y *giro* del giroscopio [sección 18.9]. Al expresar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en términos de estas derivadas, se escribió

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{k} \quad (18.35)$$

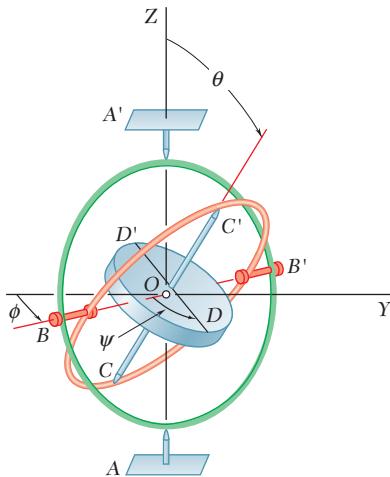


Figura 18.29

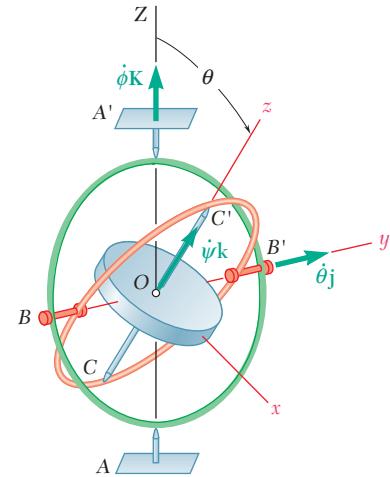


Figura 18.30

donde los vectores unitarios se asocian con el sistema de referencia *Oxyz* asociado con el balancín interno del giroscopio (figura 18.30) y gira, en consecuencia, con la velocidad angular

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{k} \quad (18.38)$$

Al denotar por I el momento de inercia del giroscopio con respecto a su eje de giro z y por I' su momento de inercia con respecto a un eje transversal que pasa por O , se escribió

$$\mathbf{H}_O = -I' \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + I' \dot{\theta} \mathbf{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{k} \quad (18.36)$$

Al sustituir \mathbf{H}_O y $\boldsymbol{\Omega}$ en la ecuación (18.28) lleva a ecuaciones diferenciales que definen el movimiento del giroscopio.

En el caso particular de la *precesión estable* del giroscopio [sección 18.10], el ángulo θ , la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ y la velocidad de giro $\dot{\psi}$ permanecen constantes. Se vio que un movimiento de este tipo sólo es posible si los momentos de las fuerzas externas alrededor de O satisfacen la relación

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (I\omega_z - I' \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{j} \quad (18.44)$$

esto es, si las fuerzas externas se reducen a un par de momento igual al miembro del lado derecho de la ecuación (18.44) y se aplican *alrededor de un eje perpendicular al eje de precesión y al eje de giro* (figura 18.31). El capítulo finalizó con el análisis del movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje que gira y precede *sin someterse a ninguna fuerza* [sección 18.11; problema resuelto 18.6].

Precesión estable

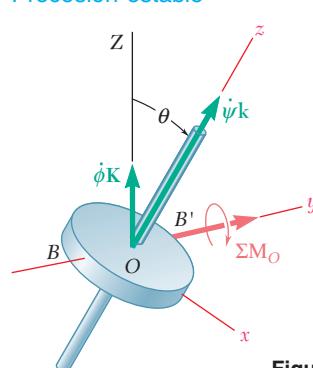


Figura 18.31

Problemas de repaso

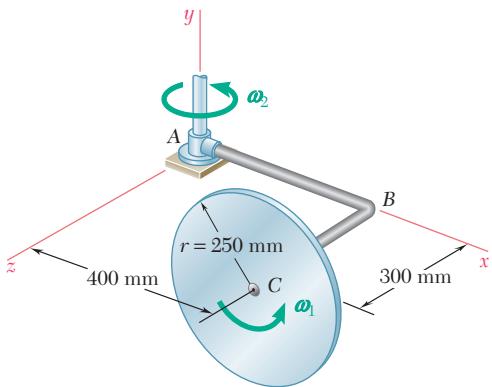


Figura P18.147

18.147 Un disco homogéneo de masa $m = 5 \text{ kg}$ gira a la razón constante $\omega_1 = 8 \text{ rad/s}$ con respecto al eje doblado ABC , el cual a su vez rota a la velocidad constante $\omega_2 = 3 \text{ rad/s}$ alrededor del eje *y*. Determine la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_C del disco alrededor de su centro *C*.

18.148 Dos brazos en forma de L, cada uno con un peso de 5 lb, se sueldan a los puntos que dividen en tercios a la flecha AB de 24 in. Si se sabe que la flecha AB gira a la razón constante $\omega = 180 \text{ rpm}$, determine *a*) la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_A del cuerpo alrededor de *A*, *b*) el ángulo que forma \mathbf{H}_A con la flecha.

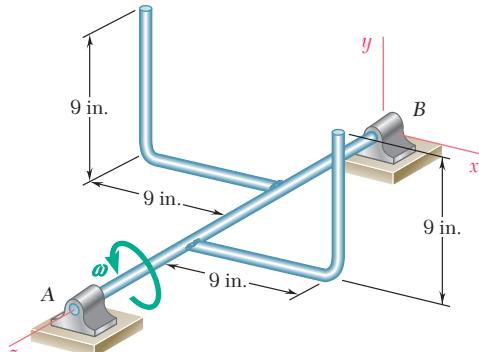


Figura P18.148

18.149 Una barra uniforme de masa m y longitud $5a$ se dobla en la forma mostrada y se suspende de un alambre conectado al punto *B*. Si la barra se golpea en el punto *C* en la dirección *z* negativa y se denota al impulso correspondiente con $-(F \Delta t) \mathbf{k}$, determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad angular de la barra, *b*) la velocidad de su centro de masa *G*.

18.150 Un disco homogéneo de radio a y masa m está soportado por una articulación de rótula en el punto *A* gira alrededor de su diámetro vertical con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{j}$ cuando se introduce de manera repentina una obstrucción en el punto *B*. Si se supone que el impacto será perfectamente plástico ($e = 0$), determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad angular del disco, *b*) la velocidad de su centro de masa *G*.

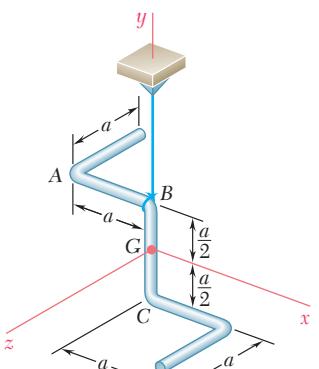


Figura P18.149

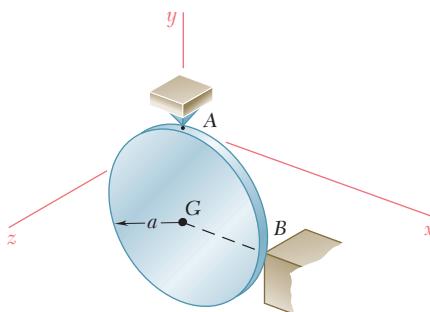


Figura P18.150

18.151 Determine la energía cinética perdida cuando el disco del problema 18.150 golpea la obstrucción en *B*.

18.152 Cada una de las dos placas triangulares que se muestran en la figura tiene una masa de 5 kg y están soldadas a una flecha vertical *AB*. Si se sabe que el ensamblaje gira a la velocidad constante $\omega = 8 \text{ rad/s}$, determine las reacciones dinámicas en *A* y en *B*.

18.153 Una pieza de lámina de acero de 2.4 kg, con dimensiones de $160 \times 640 \text{ mm}$ se dobló para formar el componente mostrado. El componente está en reposo ($\omega = 0$) cuando se le aplica un par $\mathbf{M}_0 = 0.8 \text{ N} \cdot \text{m} \mathbf{k}$. Determine *a*) la aceleración angular del componente, *b*) las reacciones dinámicas en *A* y *B* inmediatamente después de que el par ha sido aplicado.

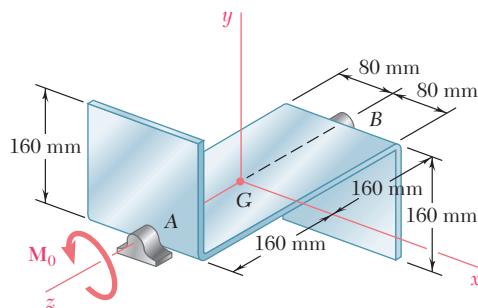


Figura P18.153

18.154 Un anillo delgado de 3 in. de radio se conecta mediante un collarín en el punto *A* a una flecha vertical que gira con una velocidad angular constante ω . Determine *a*) el ángulo constante β que forma el plano del anillo con la vertical cuando $\omega = 12 \text{ rad/s}$, *b*) el valor máximo de ω para el cual el anillo permanecerá vertical ($\beta = 0$).

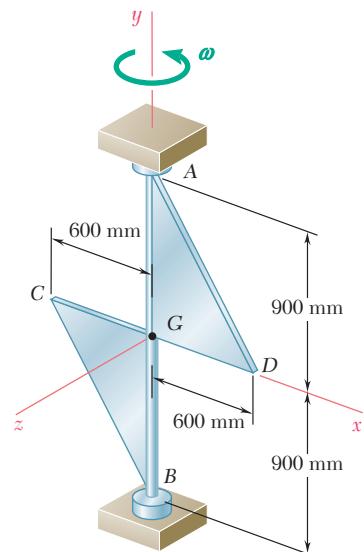


Figura P18.152

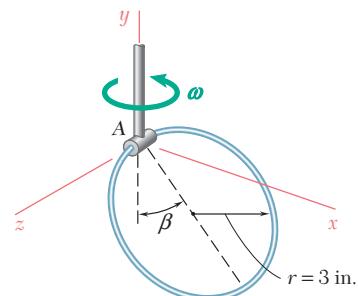


Figura P18.154

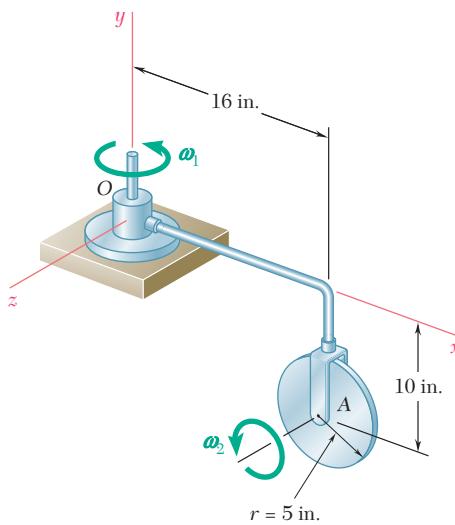


Figura P18.155

18.155 Un disco delgado de peso $W = 8 \text{ lb}$ gira con una velocidad angular ω_2 con respecto al brazo *OA*, el cual a su vez rota con una velocidad angular ω_1 alrededor del eje *y*. Determine *a*) el par $M_O \mathbf{j}$ que debe aplicarse al brazo *OA* para darle una aceleración angular $\alpha_1 = (6 \text{ rad/s}^2) \mathbf{j}$ con $\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$, si se sabe que el disco gira a la razón constante $\omega_2 = 12 \text{ rad/s}$, *b*) el sistema fuerza-par que representa la reacción dinámica en *O* en ese instante. Suponga que el brazo *OA* tiene una masa insignificante.

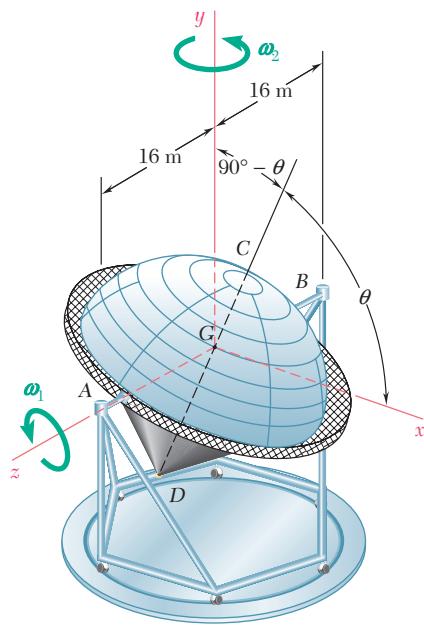


Figura P18.156

18.156 Un concentrador de energía solar experimental de lentes Fresnel puede girar alrededor del eje horizontal AB que pasa a través de su centro de masa G . Está soportado en A y B por una estructura de acero que puede girar alrededor del eje vertical y . El concentrador tiene una masa de 30 Mg, un radio de giro de 12 m alrededor de su eje de simetría CD y un radio de giro de 10 m alrededor de cualquier eje transversal que pasa por G . Si las velocidades angulares ω_1 y ω_2 tienen magnitudes constantes iguales a 0.20 rad/s y 0.25 rad/s, respectivamente, determine para la posición $\theta = 60^\circ$ a) las fuerzas ejercidas sobre el concentrador en A y B , b) el par $M_2\mathbf{k}$ aplicado al concentrador en ese instante.

18.157 Un disco de 2 kg y 150 mm de diámetro se conecta al extremo de una barra AB de masa despreciable que se soporta mediante una articulación de rótula en el punto A . Si se observa que el disco precede alrededor del eje vertical en el sentido indicado y a la velocidad constante de 36 rpm, determine la velocidad de giro $\dot{\psi}$ del disco alrededor de AB .

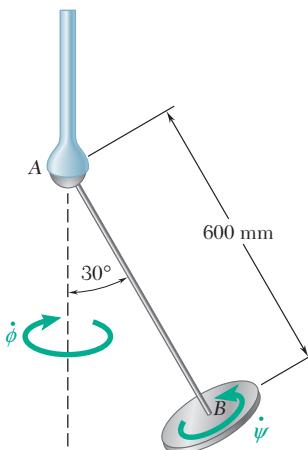


Figura P18.157

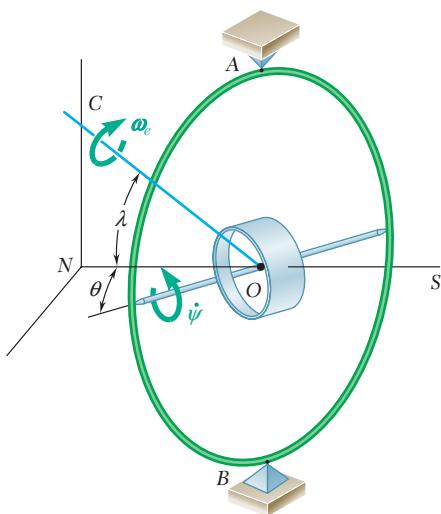


Figura P18.158

18.158 En la figura se muestran las características esenciales del girocompás. El rotor gira a la razón $\dot{\psi}$ alrededor de un eje montado en una sola junta universal, que puede girar libremente alrededor del eje vertical AB . El ángulo formado por el eje del rotor y el plano del meridiano se denota con θ , y la latitud de la posición sobre la Tierra se denota con λ . Se observa que la línea OC es paralela al eje de la Tierra y con ω_e se denota la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje.

a) Demuestre que las ecuaciones de movimiento del girocompás son

$$I'\ddot{\theta} + I\omega_z\omega_e \cos \lambda \sin \theta - I'\omega_e^2 \cos^2 \lambda \sin \theta \cos \theta = 0$$

$$I\dot{\omega}_z = 0$$

donde ω_z es la componente rectangular de la velocidad angular total ω a lo largo del eje del rotor, y I e I' son los momentos de inercia del rotor con respecto a su eje de simetría y un eje transversal que pasa por O , respectivamente.

b) Si se desprecia el término que contiene ω_e^2 , demuestre que para valores pequeños de θ , se tiene

$$\ddot{\theta} + \frac{I\omega_z\omega_e \cos \lambda}{I'} \theta = 0$$

y que el eje del girocompás oscila alrededor de la dirección norte-sur.

Problemas de computadora

18.C1 Un alambre de sección transversal uniforme y peso por unidad de longitud de $\frac{5}{8}$ oz./ft se usa para formar la figura de alambre que se muestra, la cual se suspende de la cuerda AD . Se aplica un impulso $\mathbf{F} \Delta t = (0.5 \text{ lb} \cdot \text{s})\mathbf{j}$ a la figura de alambre en el punto E . Utilice software para calcular y graficar, inmediatamente después del impacto, para valores de θ desde 0 hasta 180° , a) la velocidad del centro de masa de la figura de alambre, b) la velocidad angular de la figura.

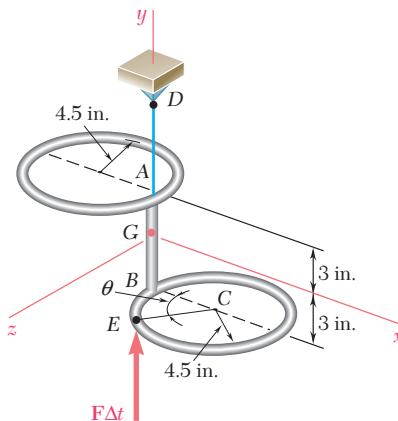


Figura P18.C1

18.C2 Una sonda de 2 500 kg en órbita alrededor de la Luna mide 2.4 m de altura y tiene una base octagonal de lados de 1.2 m. Los ejes de coordenadas que se muestran son los ejes de inercia centroidales de la sonda, y sus radios de giro son $k_x = 0.98 \text{ m}$, $k_y = 1.06 \text{ m}$ y $k_z = 1.02 \text{ m}$. La sonda está equipada con un propulsor principal E de 500 N y con cuatro propulsores A , B , C y D de 20 N que pueden expeler combustible en la dirección y positiva. La sonda tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_z \mathbf{k}$ cuando se usan dos de los propulsores de 20 N para reducir la velocidad angular a cero. Use software a fin de determinar, para cualquier par de valores de ω_x y ω_z menor o igual que 0.06 rad/s, cuáles de los propulsores deben utilizarse y por cuánto tiempo deben activarse. Aplique este programa con el supuesto de que $\boldsymbol{\omega}$ es a) la velocidad angular dada en el problema 18.33, b) la velocidad angular dada en el problema 18.34, c) $\boldsymbol{\omega} = (0.06 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (0.02 \text{ rad/s})\mathbf{k}$, d) $\boldsymbol{\omega} = (0.06 \text{ rad/s})\mathbf{i} - (0.02 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.

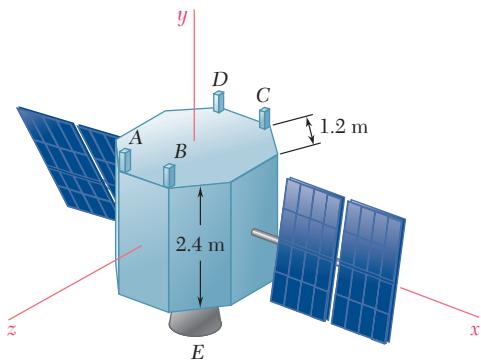


Figura P18.C2

18.C3 Un par $\mathbf{M}_0 = (0.03 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i}$ se aplica a un ensamble compuesto de piezas de hoja de aluminio de espesor uniforme y 2.7 lb de peso total, las cuales se sueldan a un eje ligero soportado por los cojinetes en A y B. Use software para determinar las reacciones dinámicas ejercidas por los cojinetes sobre el eje en cualquier tiempo t después que se ha aplicado el par. Descomponga estas reacciones en componentes dirigidas a lo largo de los ejes y y z que giran con el ensamble. *a)* Calcule y grafique las componentes de las reacciones desde $t = 0$ hasta $t = 2 \text{ s}$ con intervalos de 0.1 s. *b)* Determine el tiempo en el cual las componentes z de las reacciones en A y B son iguales a cero.

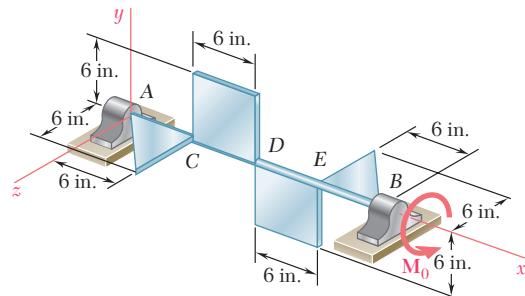


Figura P18.C3

18.C4 Un disco homogéneo de 2.5 kg de 80 mm de radio puede girar con respecto al brazo ABC , el cual está soldado a la flecha DCE soportada mediante los cojinetes en D y E . Tanto el brazo como la flecha tienen masa insignificante. En el tiempo $t = 0$ se aplica un par $\mathbf{M}_0 = (0.5 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ a la flecha DCE . Si se sabe que en $t = 0$ la velocidad angular del disco es $\omega_1 = (60 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ y esa fricción en el cojinete en A ocasiona que la magnitud de ω_1 disminuya a razón de 15 rad/s^2 , determine las reacciones dinámicas ejercidas sobre la flecha por los cojinetes en D y E en cualquier tiempo t . Descomponga estas reacciones en componentes dirigidas a lo largo de los ejes x y y que giran con la flecha. Utilice software *a)* para calcular y graficar las componentes de las reacciones desde $t = 0$ hasta $t = 4 \text{ s}$, *b)* para determinar los tiempos t_1 y t_2 en los cuales las componentes x y y de las reacciones en E son, respectivamente, iguales a cero.

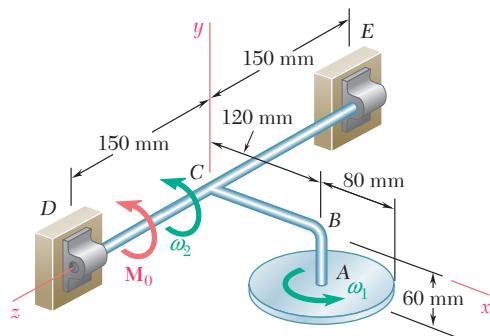


Figura P18.C4

18.C5 Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra AG de 360 mm de longitud y de masa insignificante que se conecta mediante una horquilla a un eje vertical AB. La barra y el disco pueden girar con libertad alrededor de un eje horizontal AC, y la flecha AB gira libremente alrededor de un eje vertical. En un principio la barra AG forma un ángulo dado θ_0 con la vertical descendente y su velocidad angular $\dot{\theta}_0$ alrededor de AC es cero. A la flecha AB se le imprime después una velocidad angular $\dot{\phi}_0$ alrededor de la vertical. Emplee software *a)* para calcular el valor mínimo θ_m del ángulo θ en el movimiento subsecuente y el periodo de oscilación en θ , es decir, el tiempo requerido para que θ recupere su valor inicial θ_0 . *b)* para calcular y graficar la velocidad angular $\dot{\phi}$ de la flecha AB para valores de θ desde θ_0 hasta θ_m . Aplique este software con las condiciones iniciales *i)* $\theta_0 = 90^\circ$, $\dot{\phi}_0 = 5 \text{ rad/s}$, *ii)* $\theta_0 = 90^\circ$, $\dot{\phi}_0 = 10 \text{ rad/s}$, *iii)* $\theta_0 = 60^\circ$, $\dot{\phi}_0 = 5 \text{ rad/s}$. [Sugerencia: Utilice el principio de la conservación de la energía y el hecho de que la cantidad de momento angular del cuerpo respecto a la vertical que pasa por A se conserva para obtener una ecuación de la forma $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$. Esta ecuación puede integrarse mediante un método numérico.]

18.C6 Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra AG de 360 mm de longitud y de masa insignificante que se sostiene mediante una junta de rótula en A. El disco se suelta en la posición $\theta = \theta_0$, con una razón de giro $\dot{\psi}_0$, una razón de precesión $\dot{\phi}_0$ y una razón de nutación nula. Utilice software *a)* para calcular el valor mínimo θ_m del ángulo θ en el movimiento subsecuente y el periodo de oscilación en θ es decir, el tiempo que se requiere para que θ vuelva a su valor inicial θ_0 , *b)* para calcular y graficar la razón de giro $\dot{\psi}$ y la razón de precesión $\dot{\phi}$ para valores de θ desde θ_0 hasta θ_m usando decrementos de 2° . Aplique este software con las condiciones iniciales *i)* $\theta_0 = 90^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 50 \text{ rad/s}$, $\dot{\phi}_0 = 0$, *ii)* $\theta_0 = 90^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 0$, $\dot{\phi}_0 = 5 \text{ rad/s}$, *iii)* $\theta_0 = 90^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 50 \text{ rad/s}$, $\dot{\phi}_0 = 5 \text{ rad/s}$, *iv)* $\theta_0 = 90^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 10 \text{ rad/s}$, $\dot{\phi}_0 = 5 \text{ rad/s}$, *v)* $\theta_0 = 60^\circ$, $\dot{\psi}_0 = 50 \text{ rad/s}$, $\dot{\phi}_0 = 5 \text{ rad/s}$. [Sugerencia: Utilice el principio de la conservación de la energía y el hecho de que la cantidad de momento angular del cuerpo se conserva con respecto tanto al eje Z como al eje z para obtener una ecuación de la forma $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$. Esta ecuación puede integrarse mediante un método numérico.]

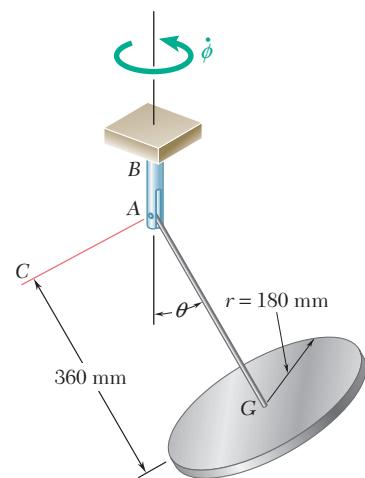


Figura P18.C5

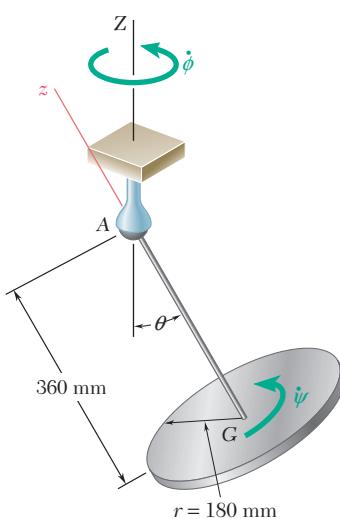


Figura P18.C6

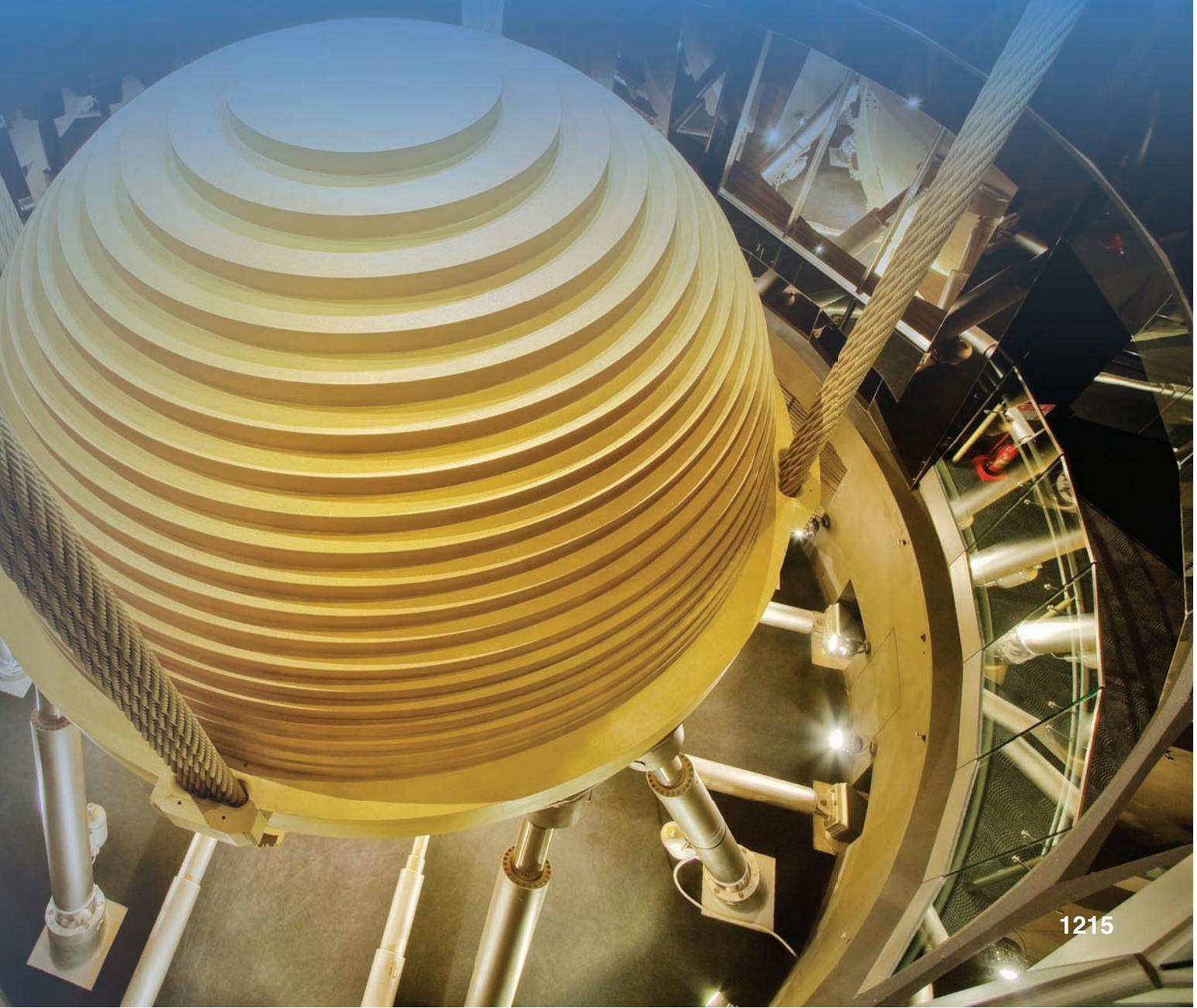


El amortiguador de viento dentro del Taipei 101 da protección contra tifones y terremotos al reducir los efectos del viento y las vibraciones sobre el edificio. Los sistemas mecánicos pueden experimentar *vibraciones libres* o pueden estar sometidos a *vibraciones forzadas*. Las vibraciones son *amortiguadas* cuando se presentan fuerzas de fricción y no *amortiguadas* en cualquier otro caso. Este capítulo es una introducción a muchos conceptos fundamentales en el análisis de vibraciones.

CAPÍTULO

19

Vibraciones mecánicas



CAPÍTULO 19 VIBRACIONES MECÁNICAS

- 19.1 Introducción
- 19.2 Vibraciones sin amortiguamiento
- 19.3 Vibraciones libres de partículas. Movimiento armónico simple
- 19.4 Péndulo simple (solución aproximada)
- 19.5 Péndulo simple (solución exacta)
- 19.6 Vibraciones libres de cuerpos rígidos
- 19.7 Aplicación del principio de la conservación de la energía
- 19.8 Vibraciones forzadas
- 19.9 Vibraciones amortiguadas
- 19.10 Analogías eléctricas

19.1. INTRODUCCIÓN

Una *vibración mecánica* es el movimiento de una partícula o cuerpo que oscila alrededor de una posición de equilibrio. La mayoría de las vibraciones en máquinas y estructuras son indeseables debido al aumento de los esfuerzos y a las pérdidas de energía que las acompañan. Por lo tanto, es necesario eliminarlas o reducirlas en el mayor grado posible mediante un diseño apropiado. El análisis de vibraciones se ha vuelto cada vez más importante en los últimos años debido a la tendencia actual para producir máquinas de más alta velocidad y estructuras más ligeras. Hay razones para esperar que esta tendencia continuará y que una incluso mayor necesidad de análisis de vibraciones se generará en el futuro.

El análisis de vibraciones es un tema muy amplio al cual se han dedicado textos completos. En consecuencia, este estudio se limitará a los tipos más simples de vibraciones, a saber, las vibraciones de un cuerpo o un sistema de cuerpos con un grado de libertad.

Una vibración mecánica se produce por lo general cuando un sistema se desplaza de una posición de equilibrio estable. El sistema tiende a retornar a su posición bajo la acción de fuerzas restauradoras (ya sea fuerzas elásticas, como en el caso de una masa unida a un resorte, o fuerzas gravitacionales, como en el caso de un péndulo). Pero el sistema por lo general alcanza su posición original con cierta velocidad adquirida que lo lleva más allá de esa posición. Puesto que el proceso puede repetirse de manera indefinida, el sistema se mantiene moviéndose de un lado a otro de su posición de equilibrio. El intervalo de tiempo requerido para que el sistema realice un ciclo de movimiento completo recibe el nombre de *periodo* de la vibración. El número de ciclos por unidad de tiempo define la *frecuencia* y el desplazamiento máximo del sistema a partir de su posición de equilibrio se conoce como *amplitud* de la vibración.

Cuando el movimiento se mantiene únicamente por medio de fuerzas restauradoras, se dice que la fricción es una *vibración libre* (secciones 19.2 a 19.6). Cuando se aplica una fuerza periódica al sistema, el movimiento resultante se describe como una *vibración forzada* (sección 19.7). Cuando es posible ignorar los efectos de la fricción se afirma que las vibraciones son *no amortiguadas*. Sin embargo, todas las vibraciones son en realidad *amortiguadas* hasta cierto grado. Si una vibración libre sólo se amortigua de manera ligera, su amplitud decrece de manera lenta hasta que, después de cierto tiempo, el movimiento se interrumpe. Pero si el amortiguamiento es suficientemente largo para evitar cualquier vibración verdadera, en ese caso el sistema recupera lentamente su posición original (sección 19.8). Una vibración forzada amortiguada se mantiene siempre y cuando se aplique la fuerza periódica que la produce. Sin embargo, la amplitud de la vibración se ve afectada por la magnitud de las fuerzas de amortiguamiento (sección 19.9).

VIBRACIONES SIN AMORTIGUAMIENTO

19.2. VIBRACIONES LIBRES DE PARTÍCULAS. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Considere un cuerpo de masa m unido a un resorte de constante k (figura 19.1a). Puesto que en el tiempo presente se considera sólo el movimiento de su centro de masa, a este cuerpo se le considerará como una partícula. Cuando la partícula está en equilibrio estático, las fuer-

zas que actúan sobre ella son su peso \mathbf{W} y la fuerza \mathbf{T} ejercida por el resorte, de magnitud $T = k\delta_{\text{estática}}$, donde $\delta_{\text{estática}}$ denota la elongación del resorte. Por lo tanto, se tiene,

$$W = k\delta_{\text{estática}}$$

Supóngase ahora que la partícula se desplaza a una distancia x_m desde su posición de equilibrio y se suelta sin velocidad inicial. Si x_m se ha elegido más pequeña que $\delta_{\text{estática}}$, la partícula se moverá hacia un lado y otro de su posición de equilibrio; se ha generado una vibración de amplitud x_m . Advierta que la vibración también puede producirse impariendo cierta velocidad inicial a la partícula cuando ésta se encuentra en la posición de equilibrio $x = 0$ o, de manera más general, al iniciar el movimiento de la partícula desde una posición dada $x = x_0$ con una velocidad inicial v_0 .

Para analizar la vibración, se considerará la partícula en una posición P en algún tiempo arbitrario t (figura 19.1b). Denotando por x el desplazamiento OP medido desde la posición de equilibrio O (positivo hacia abajo), se nota que las fuerzas que actúan sobre la partícula son su peso \mathbf{W} y la fuerza \mathbf{T} ejercida por el resorte que, en esta posición, tiene una magnitud $T = k(\delta_{\text{estática}} + x)$. Como $W = k\delta_{\text{estática}}$ se encuentra que la magnitud de la resultante \mathbf{F} de las dos fuerzas (positiva hacia abajo) es

$$F = W - k(\delta_{\text{estática}} + x) = -kx \quad (19.1)$$

De tal modo la *resultante* de las fuerzas ejercidas sobre la partícula es proporcional al desplazamiento OP medido desde la posición de equilibrio. Recordando la convención de signos, se advierte que \mathbf{F} está dirigida siempre *hacia* la posición de equilibrio O . Sustituyendo F en la ecuación fundamental $F = ma$ y recordando que a es la segunda derivada \ddot{x} de x con respecto a t , se escribe

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (19.2)$$

Hay que observar que debe usarse la misma convención de signos para la aceleración \ddot{x} y para el desplazamiento x , a saber, positivo hacia abajo.

El movimiento definido por la ecuación (19.2) recibe el nombre de *movimiento armónico simple*. Éste se caracteriza por el hecho de que la *aceleración es proporcional al desplazamiento y de dirección opuesta*. Se puede verificar que cada una de las funciones $x_1 = \sin(\sqrt{k/m}t)$ y $x_2 = \cos(\sqrt{k/m}t)$ satisface la ecuación (19.2). Por lo tanto, estas funciones constituyen dos *soluciones particulares* de la ecuación diferencial (19.2). La *solución general* de la ecuación 19.2 se obtiene al multiplicar cada una de las soluciones particulares por una constante arbitraria y sumando. De tal manera, la solución general se expresa como

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (19.3)$$

Observe que x es una *función periódica* del tiempo t y que, por lo tanto, representa una vibración de la partícula P . El coeficiente de t en la expresión obtenida se conoce como la *frecuencia circular natural* de la vibración y se denota por ω_n . Se tiene

$$\text{Frecuencia circular natural} = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (19.4)$$

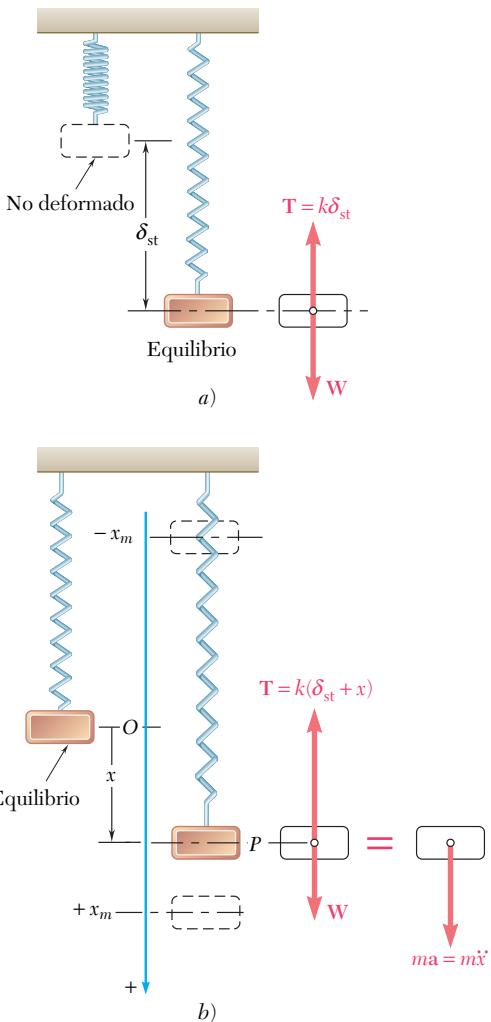


Figura 19.1

Al sustituir $\sqrt{k/m}$ en la ecuación (19.3), se escribe

$$x = C_1 \operatorname{sen} \omega_n t + C_2 \operatorname{cos} \omega_n t \quad (19.5)$$

Ésta es la solución general de la ecuación diferencial

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (19.6)$$

que puede obtenerse de la ecuación (19.2) al dividir ambos términos entre m y al observar que $k/m = \omega_n^2$. Al diferenciar dos veces ambos miembros de la ecuación (19.5) con respecto a t , se obtienen las siguientes expresiones para la velocidad y la aceleración en el tiempo t :

$$v = \dot{x} = C_1 \omega_n \operatorname{cos} \omega_n t - C_2 \omega_n \operatorname{sen} \omega_n t \quad (19.7)$$

$$a = \ddot{x} = -C_1 \omega_n^2 \operatorname{sen} \omega_n t - C_2 \omega_n^2 \operatorname{cos} \omega_n t \quad (19.8)$$

Los valores de las constantes C_1 y C_2 dependen de las *condiciones iniciales* del movimiento. Por ejemplo, se tiene $C_1 = 0$ si la partícula se desplaza desde su posición de equilibrio y se suelta en $t = 0$ sin ninguna velocidad inicial, y $C_2 = 0$ si la partícula empieza desde O en $t = 0$ con cierta velocidad inicial. En general, al sustituir $t = 0$ y los valores iniciales x_0 y v_0 del desplazamiento y la velocidad en las ecuaciones (19.5) y (19.7), se halla que $C_1 = v_0/\omega_n$ y $C_2 = x_0$.

Las expresiones obtenidas para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de una partícula pueden escribirse en una forma más compacta si se observa que la ecuación (19.5) expresa que el desplazamiento $x = OP$ es la suma de las componentes de dos vectores \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2 , respectivamente, de magnitud C_1 y C_2 , dirigidos como se muestra en la figura 19.2a. Cuando t varía, ambos vectores giran en el sentido de las manecillas del reloj; también se nota que la magnitud de su resultante \overline{OQ} es igual al desplazamiento máximo x_m . El movimiento armónico simple de P a lo largo del eje x puede obtenerse de esta manera proyectando sobre este eje el movimiento de un punto Q que describe un *círculo auxiliar* de radio x_m con una velocidad angular constante ω_n (lo cual explica el nombre de frecuencia *circular* natural dado a ω_n). Al denotar por ϕ el ángulo formado por los vectores \overline{OQ} y \mathbf{C}_1 , se escribe

$$OP = OQ \operatorname{sen} (\omega_n t + \phi) \quad (19.9)$$

que conduce a nuevas expresiones para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de P :

$$x = x_m \operatorname{sen} (\omega_n t + \phi) \quad (19.10)$$

$$v = \dot{x} = x_m \omega_n \operatorname{cos} (\omega_n t + \phi) \quad (19.11)$$

$$a = \ddot{x} = -x_m \omega_n^2 \operatorname{sen} (\omega_n t + \phi) \quad (19.12)$$

La curva desplazamiento-tiempo se representa por medio de una curva senoidal (figura 19.2b); el valor máximo x_m del desplazamiento se denomina la *amplitud* de la vibración, y el ángulo ϕ que define la posición inicial de Q en el círculo se llama *ángulo de fase*. En la figura 19.2 se advirtió que un *círculo* completo se describe cuando el ángulo $\omega_n t$ aumenta en 2π rad. El valor correspondiente de t , denotado por τ_n , se llama el *periodo* de la vibración libre y se mide en segundos. Se tiene

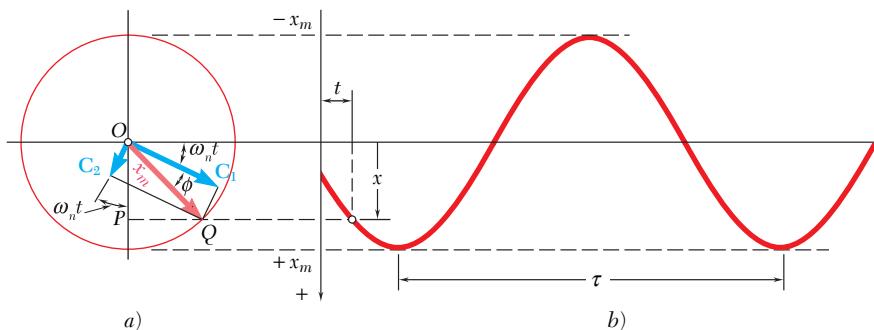


Figura 19.2

$$\text{Periodo} = \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (19.13)$$

El número de ciclos descritos por unidad de tiempo se denota mediante f_n y se conoce como *frecuencia natural* de la vibración. Se escribe

$$\text{Frecuencia natural} = f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (19.14)$$

La unidad de frecuencia es una frecuencia de 1 ciclo por segundo, correspondiendo a un periodo de 1 s. En términos de unidades fundamentales la unidad de frecuencia es consecuentemente $1/\text{s}$ o s^{-1} . Se denomina *hertz* (Hz) en el SI de unidades. También se concluye de la ecuación (19.14) que una frecuencia de 1 s^{-1} o 1 Hz corresponde a una frecuencia circular de $2\pi \text{ rad/s}$. En problemas que implican velocidades angulares expresadas en revoluciones por minuto (rpm), se tiene que $1 \text{ rpm} = \frac{1}{60} \text{ s}^{-1} = \frac{1}{60} \text{ Hz}$, o $1 \text{ rpm} = (2\pi/60) \text{ rad/s}$.

Al recordar que ω_n se definió en (19.4) en términos de la constante k del resorte y de la masa m de la partícula, se observa que el periodo y la frecuencia son independientes de las condiciones iniciales y de la amplitud de la vibración. Hay que observar que τ_n y f_n dependen de la *masa* y no del *peso* de la partícula y, por ello, son independientes del valor de g .

Las curvas velocidad-tiempo y aceleración-tiempo pueden representarse mediante curvas senoidales del mismo periodo que la curva desplazamiento-tiempo, pero con ángulos de fase diferentes. De las ecuaciones (19.11) y (19.12), se nota que los valores máximos de las magnitudes de la velocidad y la aceleración son

$$v_m = x_m \omega_n \quad a_m = x_m \omega_n^2 \quad (19.15)$$

Puesto que el punto Q describe al círculo auxiliar, de radio x_m a la velocidad angular constante ω_n , su velocidad y aceleración son iguales, respectivamente, a las expresiones (19.15). Si se recuerdan las ecuaciones (19.11) y (19.12), se halla, por tanto, que la velocidad y la aceleración de P pueden obtenerse en cualquier instante proyectando sobre el eje x vectores de magnitudes $v_m = x_m \omega_n$ y $a_m = x_m \omega_n^2$ que representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración de Q en el mismo instante (figura 19.3).

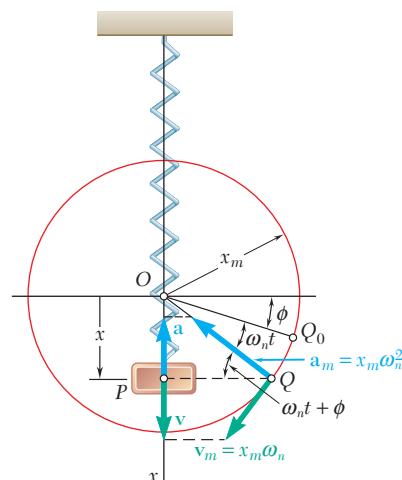


Figura 19.3

Los resultados que se obtienen no se limitan a la solución del problema de una masa o unidad para un resorte. Es posible utilizarlos para analizar el movimiento rectilíneo de una partícula *cada vez que la resultante \mathbf{F} de las fuerzas que actúan sobre una partícula es proporcional al desplazamiento x y está dirigida hacia O* . La ecuación fundamental de movimiento $F = ma$ puede escribirse entonces en la forma de la ecuación (19.6), que es característica de un movimiento armónico simple. Al observar que el coeficiente de x debe ser igual a ω_n^2 , es posible determinar con facilidad la frecuencia circular natural ω_n del movimiento. Sustituyendo el valor que se obtuvo para ω_n en las ecuaciones (19.13) y (19.14), se obtiene entonces el periodo τ_n y la frecuencia natural f_n del movimiento.

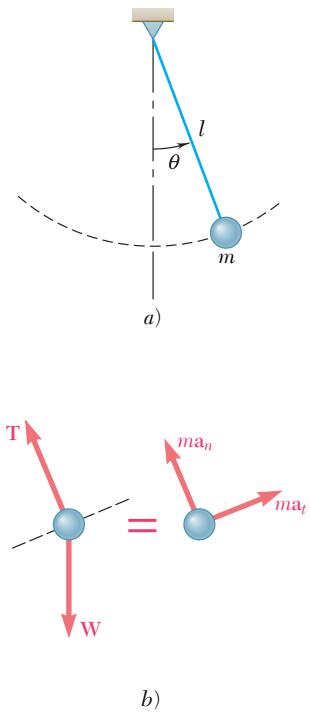


Figura 19.4

19.3. PÉNDULO SIMPLE (SOLUCIÓN APROXIMADA)

La mayor parte de las vibraciones encontradas en aplicaciones de ingeniería se representan mediante un movimiento armónico simple. Muchas otras, aunque de un tipo diferente, se *aproximan* por medio de un movimiento armónico simple, siempre que su amplitud permanezca pequeña. Considere, por ejemplo, un *péndulo simple*, consistente en una plomada de masa m unida a una cuerda de longitud l , que tiene la posibilidad de oscilar en un plano vertical (figura 19.4a). En un tiempo dado t , la cuerda forma un ángulo θ con la vertical. Las fuerzas que actúan sobre la plomada son su peso \mathbf{W} y la fuerza \mathbf{T} ejercida por la cuerda (figura 19.4b). Al descompensar el vector $m\mathbf{a}$ de las componentes tangencial y normal, con $m\mathbf{a}_t$ dirigida hacia la derecha, esto es, en la dirección que corresponde a valores crecientes de θ , y observar que $a_t = l\alpha = l\ddot{\theta}$, se escribe

$$\Sigma F_t = ma_t: \quad -W \sin \theta = ml\ddot{\theta}$$

Si se observa que $W = mg$ y se divide entre ml , se obtiene

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (19.16)$$

Para oscilaciones de amplitud pequeña, puede sustituirse $\sin \theta$ por θ , expresado en radianes, y escribirse

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (19.17)$$

La comparación con la ecuación (19.6) muestra que la ecuación diferencial (19.17) es la de un movimiento armónico simple con una frecuencia circular natural ω_n igual a $(g/l)^{1/2}$. La solución general de la ecuación (19.17) puede, por consiguiente, expresarse como

$$\theta = \theta_m \sin(\omega_n t + \phi)$$

donde θ_m es la amplitud de las oscilaciones y ϕ es el ángulo de paso. Al sustituir en la ecuación (19.13) el valor obtenido por ω_n , se obtiene la siguiente expresión por el periodo de las oscilaciones pequeñas de un péndulo de longitud l :

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (19.18)$$

La fórmula (19.18) es sólo aproximada. Para obtener una expresión exacta relativa al periodo de las oscilaciones de un péndulo simple, se debe volver a la ecuación (19.16). Multiplicando ambos términos por $2\dot{\theta}$ e integrando desde una posición inicial correspondiente a la máxima desviación, esto es, $\theta = \theta_m$ y $\dot{\theta} = 0$, se escribe

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_m)$$

Si se sustituye $\cos \theta$ por $1 - 2 \operatorname{sen}^2(\theta/2)$ y $\cos \theta_m$ por una expresión similar, resolviendo para dt , y se integra sobre un cuarto de periodo desde $t = 0$, $\theta = 0$ hasta $t = \tau_n/4$, $\theta = \theta_m$, se tiene

$$\tau_n = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta_m/2) - \operatorname{sen}^2(\theta/2)}}$$

La integral en el miembro del lado derecho se conoce como una *integral elíptica*; ésta no puede expresarse en términos de las funciones algebraicas o trigonométricas usuales. Sin embargo, al establecer

$$\operatorname{sen}(\theta/2) = \operatorname{sen}(\theta_m/2) \operatorname{sen} \phi$$

se puede escribir

$$\tau_n = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\theta_m/2) \operatorname{sen}^2 \phi}} \quad (19.19)$$

donde la integral que se obtiene, denominada comúnmente por K , puede calcularse utilizando métodos de integración numérica. También puede encontrarse en *tablas de integrales elípticas* para diversos valores de $\theta_m/2$.[†] Para comparar el resultado que acaba de obtenerse con el de la sección anterior, se escribe la ecuación (19.19) en la forma

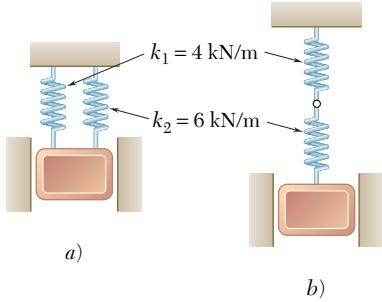
$$\tau_n = \frac{2K}{\pi} \left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right) \quad (19.20)$$

La fórmula (19.20) muestra que el valor real del periodo de un péndulo simple se puede obtener al multiplicar el valor aproximado dado en la ecuación (19.18) por el factor de corrección $2K/\pi$. Los valores del factor de corrección se dan en la tabla 19.1 para diversos valores de la amplitud θ_m . Advierta que para cálculos de ingeniería ordinarios el factor de corrección puede omitirse siempre y cuando la amplitud no supere 10° .

Tabla 19.1. Factor de corrección para el periodo de un péndulo simple

θ_m	0°	10°	20°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
K	1.571	1.574	1.583	1.598	1.686	1.854	2.157	2.768	∞
$2K/\pi$	1.000	1.002	1.008	1.017	1.073	1.180	1.373	1.762	∞

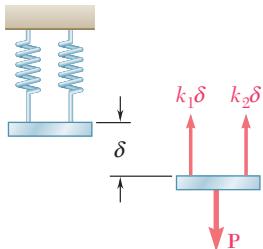
[†]Véase, por ejemplo, *Standard Mathematical Tables*, Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio.



PROBLEMA RESUELTO 19.1

Un bloque de 50 kg se mueve entre guías verticales como se muestra. El bloque es empujado 40 mm hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta. Para cada arreglo de resorte, determine el periodo de la vibración, la máxima velocidad del bloque y su máxima aceleración.

SOLUCIÓN



a) Resortes conectados en paralelo. Se determina primero la constante k de un solo resorte equivalente a los dos resortes *determinando la magnitud de la fuerza \mathbf{P}* que se requiere para causar una deformación δ . Puesto que para una deformación δ las magnitudes de las fuerzas ejercidas por el resorte son, respectivamente, $k_1\delta$ y $k_2\delta$, se tiene

$$P = k_1\delta + k_2\delta = (k_1 + k_2)\delta$$

La constante k del resorte equivalente es

$$k = \frac{P}{\delta} = k_1 + k_2 = 4 \text{ kN/m} + 6 \text{ kN/m} = 10 \text{ kN/m} = 10^4 \text{ N/m}$$

Periodo de vibración: Puesto que $m = 50 \text{ kg}$, la ecuación (19.4) produce

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{10^4 \text{ N/m}}{50 \text{ kg}} \quad \omega_n = 14.14 \text{ rad/s}$$

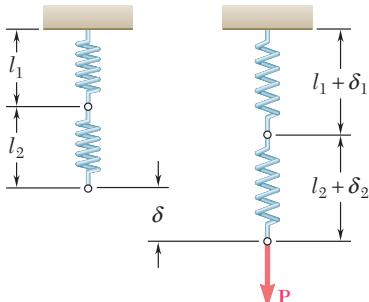
$$\tau_n = 2\pi/\omega_n \quad \tau_n = 0.444 \text{ s}$$

Velocidad máxima: $v_m = x_m\omega_n = (0.040 \text{ m})(14.14 \text{ rad/s})$

$$v_m = 0.566 \text{ m/s} \quad \mathbf{v}_m = 0.566 \text{ m/s} \uparrow$$

Aceleración máxima: $a_m = x_m\omega_n^2 = (0.040 \text{ m})(14.14 \text{ rad/s})^2$

$$a_m = 8.00 \text{ m/s}^2 \quad \mathbf{a}_m = 8.00 \text{ m/s}^2 \uparrow$$



b) Resortes conectados en serie. Se determina primero la constante k de un solo resorte equivalente para los dos resortes *determinando la elongación total δ de los resortes bajo una carga estática determinada \mathbf{P}* . Para facilitar el cálculo, se usa una carga estática de magnitud $P = 12 \text{ kN}$.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} = \frac{12 \text{ kN}}{4 \text{ kN/m}} + \frac{12 \text{ kN}}{6 \text{ kN/m}} = 5 \text{ m}$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{12 \text{ kN}}{5 \text{ m}} = 2.4 \text{ kN/m} = 2400 \text{ N/m}$$

Periodo de vibración: $\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{2400 \text{ N/m}}{50 \text{ kg}} \quad \omega_n = 6.93 \text{ rad/s}$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \tau_n = 0.907 \text{ s}$$

Velocidad máxima: $v_m = x_m\omega_n = (0.040 \text{ m})(6.93 \text{ rad/s})$

$$v_m = 0.277 \text{ m/s} \quad \mathbf{v}_m = 0.277 \text{ m/s} \uparrow$$

Aceleración máxima: $a_m = x_m\omega_n^2 = (0.040 \text{ m})(6.93 \text{ rad/s})^2$

$$a_m = 1.920 \text{ m/s}^2 \quad \mathbf{a}_m = 1.920 \text{ m/s}^2 \uparrow$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Este capítulo aborda las *vibraciones mecánicas*, esto es, el movimiento de una partícula o un cuerpo oscilante en torno a una posición de equilibrio.

En esta primera lección se dijo que una *vibración libre* de una partícula ocurre cuando ésta está sujeta a una fuerza proporcional a su desplazamiento y de dirección opuesta, como la fuerza que ejerce un resorte (figura 19.1). El movimiento resultante, llamado *movimiento armónico simple*, está caracterizado por la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (19.2)$$

donde x es el desplazamiento de la partícula, \ddot{x} su aceleración, m es su masa y k es la constante del resorte. Se encontró que la solución de esta ecuación diferencial es

$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (19.10)$$

donde x_m = amplitud de la vibración

$\omega_n = \sqrt{k/m}$ = frecuencia circular natural (rad/s)

ϕ = ángulo de fase (rad)

También se definió el *periodo* de la vibración como el tiempo $\tau_n = 2\pi/\omega_n$ necesario para que la partícula realizara un círculo completo, y la *frecuencia natural* como el número de ciclos por segundo, $f_n = 1/\tau_n = \omega_n/2\pi$, expresada en Hz o s^{-1} . Al diferenciar la ecuación (19.10) dos veces se obtiene la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo. Se encontró que los valores máximos de la velocidad y la aceleración fueron

$$v_m = x_m \omega_n \quad a_m = x_m \omega_n^2 \quad (19.15)$$

Para determinar los parámetros en la ecuación (19.10) pueden seguirse estos pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre como se muestra en las fuerzas ejercidas sobre la partícula cuando ésta se encuentra a una distancia x de su posición de equilibrio. La resultante de estas fuerzas será proporcional a x y su dirección será opuesta a la dirección positiva de x [ecuación (19.1)].

2. Escribir la ecuación diferencial de movimiento igualando a $m\ddot{x}$ la resultante de las fuerzas que se encontraron en el paso 1. Advierta que una vez que se ha elegido la dirección para x , debe usarse la misma convención de signos para la aceleración \ddot{x} . Después de la transposición, se obtendrá una ecuación de la forma de la ecuación (19.2).

3. Determinar la frecuencia circular natural ω_n dividiendo el coeficiente de x por el coeficiente de \ddot{x} en esta ecuación y tomando la raíz cuadrada del resultado que se obtenga. Asegurarse de que ω_n se exprese en rad/s.

(continúa)

4. Determinar la amplitud de x_m y el ángulo de fase ϕ sustituyendo el valor que se obtuvo para ω_n y los valores iniciales de x y \dot{x} en la ecuación (19.10) y la ecuación obtenida al diferenciar la ecuación 19.10 con respecto a t .

La ecuación (19.10) y las dos ecuaciones que se obtuvieron al diferenciar la ecuación (19.10) dos veces con respecto a t se pueden utilizar ahora para encontrar el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la partícula en cualquier tiempo. Las ecuaciones (19.15) producen la velocidad máxima v_m y la aceleración máxima a_m .

5. También para pequeñas oscilaciones del péndulo simple, el ángulo θ que la cuerda del péndulo forma con la vertical satisface la ecuación diferencial

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (19.17)$$

donde l es la longitud de la cuerda y θ se expresa en radianes [sección 19.3]. Esta ecuación define de nuevo un *movimiento armónico simple*, y su solución es de la misma forma que la ecuación (19.10),

$$\theta = \theta_m \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)$$

donde la frecuencia circular natural $\omega_n = \sqrt{g/l}$ se expresa en rad/s. La determinación de las diversas constantes en esta expresión se realiza de manera similar a la que se describió antes. Recuerde que la velocidad de la plomada es tangente a la trayectoria y que su magnitud corresponde a $v = l\dot{\theta}$, mientras que la aceleración de la plomada tiene una componente tangencial \mathbf{a}_t , de magnitud $a_t = l\ddot{\theta}$, y una componente \mathbf{a}_n , dirigida hacia el centro de la trayectoria y de magnitud $a_n = l\dot{\theta}^2$.

Problemas

19.1 Determine la velocidad máxima y la aceleración máxima de una partícula en movimiento armónico simple con una amplitud de 0.2 in. y un periodo de 0.1 s.

19.2 Determine la amplitud y la velocidad máxima de una partícula en movimiento armónico simple con una aceleración máxima de 60 m/s^2 y una frecuencia de 40 Hz.

19.3 Una partícula en movimiento armónico simple. Si la amplitud es de 300 mm y la aceleración máxima corresponde a 5 m/s^2 , determine la velocidad máxima de la partícula y la frecuencia de su movimiento.

19.4 Un bloque de 30 lb se sostiene mediante el resorte mostrado. Si el bloque se mueve verticalmente hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta, determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento resultante, *b*) la velocidad y la aceleración máximas del bloque si la amplitud de su movimiento es de 2.1 in.

19.5 Un bloque de 32 kg está unido a un resorte y puede moverse sin fricción en una ranura como se muestra en la figura. El bloque se encuentra en su posición de equilibrio cuando es golpeado con un martillo que le imprime una velocidad inicial de 250 mm/s. Determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento resultante y *b*) la amplitud del movimiento y la aceleración máxima del bloque.

19.6 Un péndulo simple consiste en una plomada conectada a una cuerda que oscila en un plano vertical con un periodo de 1.3 s. Si se supone un movimiento armónico simple y se sabe que la velocidad máxima de la plomada es de 15 in./s, determine *a*) la amplitud del movimiento en grados y *b*) la aceleración tangencial máxima de la plomada.

19.7 Un péndulo simple que consiste en una plomada conectada a una cuerda de longitud $l = 800 \text{ mm}$ oscila en un plano vertical. Si se supone movimiento armónico simple y se sabe que la plomada se suelta desde el reposo cuando $\theta = 6^\circ$, determine *a*) la frecuencia de oscilación, *b*) la velocidad máxima de la plomada.

19.8 Un instrumento de laboratorio A está atornillado en una mesa agitadora en la forma que se muestra. La mesa se mueve verticalmente en un movimiento armónico simple a la misma frecuencia que la del motor de velocidad variable que la impulsa. El instrumento se va a probar a una aceleración pico de 150 ft/s^2 . Si se sabe que la amplitud de la mesa agitadora es de 2.3 in., determine *a*) la velocidad requerida del motor en rpm, *b*) la velocidad máxima de la mesa.

19.9 El movimiento de una partícula se describe mediante la ecuación $x = 5 \operatorname{sen} 2t + 4 \cos 2t$, donde x se expresa en milímetros y t en segundos. Determine *a*) el periodo del movimiento resultante, *b*) su amplitud y *c*) su ángulo de fase.

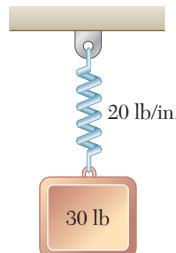


Figura P19.4

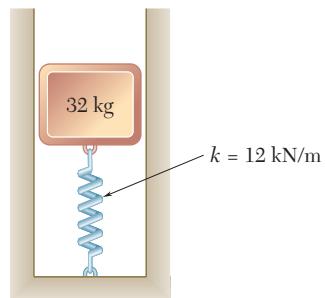


Figura P19.5

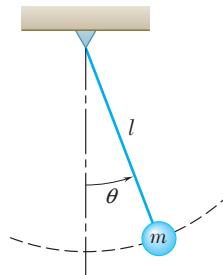


Figura P19.6 y P19.7

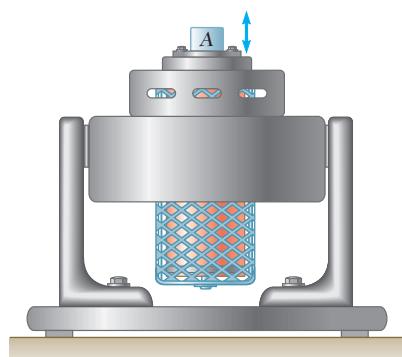


Figura P19.8

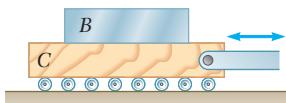


Figura P19.10

19.10 Un paquete *B* de instrumentos se coloca sobre la mesa agitadora *C* como se muestra en la figura. La mesa se mueve de manera horizontal en movimiento armónico simple con una frecuencia de 3 Hz. Si el coeficiente de fricción estática $\mu_s = 0.40$ entre el paquete y la mesa, determine la máxima amplitud permisible del movimiento si el paquete no debe deslizarse sobre la mesa. Dé su respuesta en unidades del SI así como en unidades de uso común en Estados Unidos.

19.11 Un bloque de 32 kg se conecta a un resorte de constante $k = 12 \text{ kN/m}$ y puede moverse sin fricción en una ranura como se muestra en la figura. El bloque se encuentra en su posición de equilibrio cuando se le desplaza 300 mm hacia abajo y se le suelta. Determine 1.5 s después de haber soltado el bloque *a)* la distancia total que viajó y *b)* su aceleración.

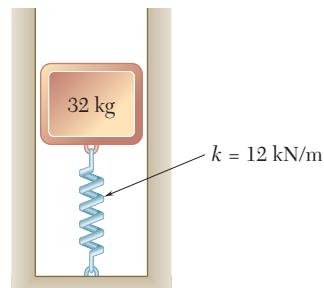


Figura P19.11

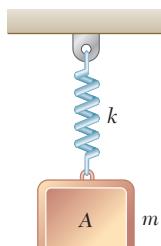


Figura P19.12

19.12 Un bloque de 3 lb se sostiene en la forma mostrada mediante un resorte de constante $k = 2 \text{ lb/in.}$ que puede actuar bajo tensión o compresión. El bloque se encuentra en la posición de equilibrio cuando se golpea desde abajo con un martillo que le imprime una velocidad hacia arriba de 90 in./s. Determine *a)* el tiempo que se requiere para que el bloque se mueva 3 in. hacia arriba y *b)* la velocidad y aceleración correspondientes del bloque.

19.13 En el problema 19.12, determine la posición, velocidad y aceleración del bloque 0.90 s después de que se golpea con el martillo.

19.14 La plomada de un péndulo simple de longitud $l = 800 \text{ mm}$ se suelta desde el reposo cuando $\theta = +5^\circ$. Si se supone movimiento armónico simple, determine 1.6 s después de la liberación *a)* el ángulo θ , *b)* las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la plomada.

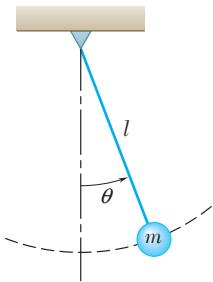


Figura P19.14

19.15 Un collarín de 5 kg descansa sobre el resorte que se muestra en la figura, al cual no está conectado. Se observa que cuando el collarín se empuja hacia abajo 180 mm o más y se suelta, pierde contacto con el resorte. Determine *a*) la constante del resorte y *b*) la posición, velocidad y aceleración del collarín 0.16 s después de que se empujó hacia abajo 180 mm y se soltó.

19.16 Un collarín *C* de 8 kg puede deslizarse sin fricción sobre una barra horizontal entre dos resortes idénticos *A* y *B* a los cuales no está conectado. Cada resorte tiene una constante de 600 N/m. El collarín se empuja a la izquierda contra el resorte *A*, comprimiéndolo 20 mm, y se suelta en la posición mostrada. Después se desliza a lo largo de la varilla a la derecha y golpea el resorte *B*. Después de comprimir ese resorte 20 mm, el collarín se desliza hacia la izquierda y golpea el resorte *A*, al cual comprime 20 mm. El ciclo se repite después. Determine *a*) el periodo del movimiento del collarín, *b*) la posición del collarín 1.5 s después de que fue empujado contra el resorte *A* y se soltó. (*Nota:* Éste es un movimiento periódico pero no un movimiento armónico simple.)

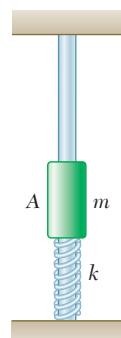


Figura P19.15

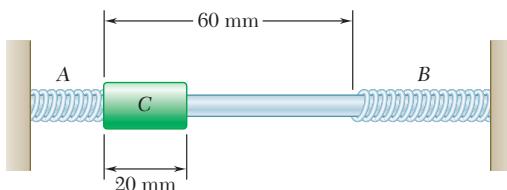


Figura P19.16

19.17 y 19.18 Un bloque de 50 kg se sostiene mediante el arreglo de resortes que se muestra. El bloque se desplaza verticalmente hacia abajo a partir de su posición de equilibrio y se suelta. Si la amplitud del movimiento resultante es igual a 45 mm, determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento y *b*) la velocidad y la aceleración máximas del bloque.

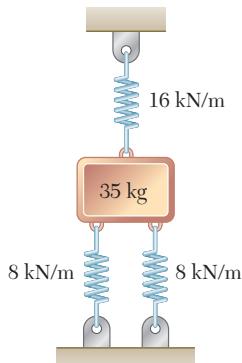


Figura P19.17

19.19 Un bloque de 30 lb se sostiene mediante el arreglo de resortes que se muestra. Si el bloque se mueve desde su posición de equilibrio 1.75 in. verticalmente hacia abajo y se suelta, determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento que resulta y *b*) la velocidad y la aceleración máximas del bloque.

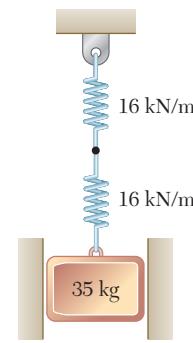


Figura P19.18

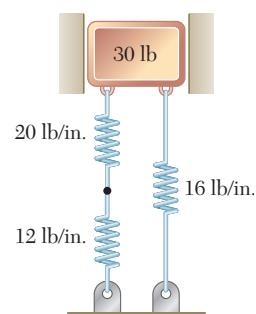


Figura P19.19

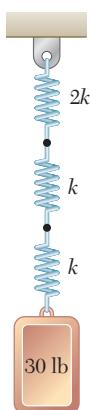


Figura P19.21

19.20 Un bloque de 5 kg, conectado al extremo inferior de un resorte cuyo extremo superior está fijo, vibra en un periodo de 6.8 s. Si la constante k del resorte es inversamente proporcional a su longitud, determine el periodo de un bloque de 3 kg que está conectado al centro del mismo resorte si los extremos superior e inferior del resorte están fijos.

19.21 Un bloque de 30 lb se sostiene por medio del arreglo de resortes que se muestra. El bloque se mueve a partir de su posición de equilibrio 0.8 in. verticalmente hacia abajo y después se suelta. Si el periodo del movimiento resultante es de 1.5 s, determine *a*) la constante k y *b*) la velocidad máxima y la aceleración máxima del bloque.

19.22 Dos resortes de constantes k_1 y k_2 se conectan en serie a un bloque A que vibra en un movimiento armónico simple con un periodo de 5 s. Cuando los dos resortes se conectan en paralelo al mismo bloque, éste vibra con un periodo de 2 s. Determine el cociente k_1/k_2 de las dos constantes de resorte.

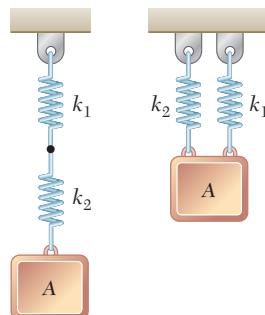


Figura P19.22

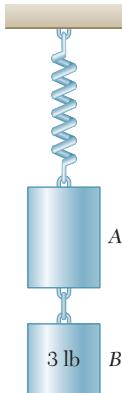


Figura P19.23

19.23 Se observa que el periodo de vibración del sistema mostrado es de 0.6 s. Después de que el cilindro B se retira, el periodo observado corresponde a 0.5 s. Determine *a*) el peso del cilindro A y *b*) la constante del resorte.

19.24 Se observa que el periodo de vibración del sistema mostrado es de 0.8 s. Si se retira el bloque A, el periodo resulta ser de 0.7 s. Determine *a*) la masa del bloque C, *b*) el periodo de vibración cuando se retiran los dos bloques A y B.

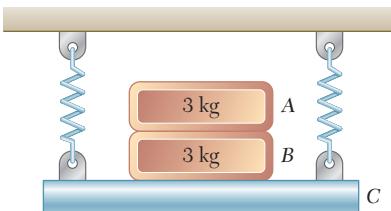


Figura P19.24

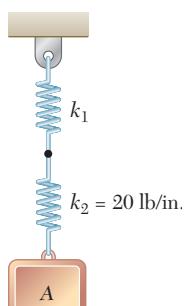


Figura P19.25

19.25 Se observa que el periodo de vibración del sistema mostrado es de 0.2 s. Después de que el resorte de constante $k_2 = 20 \text{ lb/in.}$ se retira del bloque A, se conecta a un resorte de constante k_1 , el periodo observado corresponde a 0.12 s. Determine *a*) la constante k_1 del resorte que queda y *b*) el peso del bloque A.

19.26 La plataforma *A* de 100 lb está unida a los resortes *B* y *D*, cada uno de los cuales tiene una constante $k = 120 \text{ lb/ft}$. Si la frecuencia de vibración de la plataforma debe permanecer sin cambio cuando se coloca sobre ella un bloque de 80 lb y se agrega un tercer resorte *C* entre los resortes *B* y *D*, determine la constante requerida del resorte *C*.

19.27 De acuerdo con la mecánica de materiales se sabe que cuando una carga estática \mathbf{P} se aplica en el extremo *B* de una barra metálica uniforme fija en el extremo *A*, la longitud de la barra aumentará en una cantidad $\delta = PL/AE$, donde L es la longitud de la barra no deformada, A es el área de la sección transversal y E es el módulo de elasticidad del material. Si $L = 450 \text{ mm}$ y $E = 200 \text{ GPa}$ y el diámetro de la barra corresponde a 8 mm y se desprecia el peso de esta misma, determine *a*) la constante de resorte equivalente de la barra y *b*) la frecuencia de las vibraciones verticales del bloque con masa $m = 8 \text{ kg}$ conectado al extremo *B* de la misma barra.

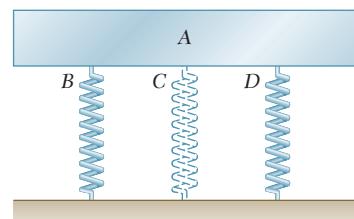


Figura P19.26

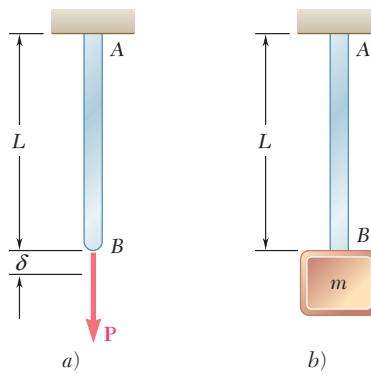


Figura P19.27

19.28 De acuerdo con la mecánica de materiales se sabe que para una viga en voladizo de sección transversal constante, una carga estática \mathbf{P} aplicada en el extremo *B* ocasionará una deflexión de $\delta_B = PL^3/3EI$, donde L es la longitud de la viga, E es el módulo de elasticidad y I es el momento de inercia del área de la sección transversal de la viga. Si $L = 10 \text{ ft}$, $E = 29 \times 10^6 \text{ lb/in.}^2$ e $I = 12.4 \text{ in.}^4$, determine *a*) la constante de resorte equivalente de la viga y *b*) la frecuencia de vibración de un bloque de 520 lb conectado al extremo *B* de la misma viga.

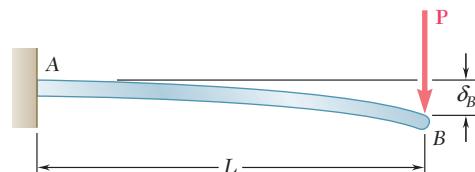


Figura P19.28

19.29 Una deflexión de 1.6 in. del segundo piso de un edificio se mide directamente bajo una pieza de máquina rotatoria recién instalada de 8 200 lb, la cual tiene un rotor ligeramente desbalanceado. Si se supone que la deflexión del piso es proporcional a la carga que soporta, determine *a*) la constante de resorte equivalente del sistema del piso, *b*) la velocidad en rpm de la máquina rotatoria que debe evitarse para que ésta no coincida con la frecuencia natural del sistema piso-máquina.

19.30 La ecuación de fuerza-deflexión de un resorte no lineal fijo en un extremo es $F = 5x^{1/2}$ donde F es la fuerza, expresada en newtons, que se aplica en el otro extremo y x es la deflexión expresada en metros. *a*) Determine la deflexión x_0 si se suspende un bloque de 120 g del resorte y se encuentra en reposo. *b*) Si se supone que la pendiente de la curva fuerza-deflexión en el punto correspondiente a esta carga pueda utilizarse como una constante de resorte equivalente, determine la frecuencia de vibración del bloque si éste se somete a un pequeño desplazamiento hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta.

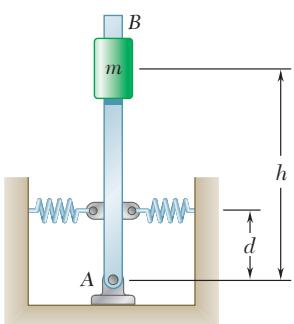


Figura P19.31

19.31 Si $h = 700$ mm, $d = 500$ mm y cada resorte tiene una constante $k = 600$ N/m, determine la masa m para la cual el periodo de pequeñas oscilaciones es a) de 0.50 s, b) infinito. No tome en cuenta la masa de la barra y suponga que cada resorte puede actuar a tensión o a compresión.

19.32 Si se denota por $\delta_{\text{estática}}$ la deflexión estática de una viga bajo una carga determinada, demuestre que la frecuencia de vibración de la carga es

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{estática}}}}$$

Desprecie la masa de la viga y suponga que la carga permanece en contacto con esta misma.

***19.33** Si el integrando de la ecuación (19.19) de la sección 19.4 se expande en una serie de potencias pares de $\sin \varphi$ y se integra, demuestre que el periodo de un péndulo simple de longitud l puede aproximarse mediante la fórmula

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_m}{2} \right)$$

donde θ_m es la amplitud de las oscilaciones.

***19.34** Con la fórmula dada en el problema 19.33 determine la amplitud θ_m para la cual el periodo de un péndulo simple es $\frac{1}{2}$ por ciento más largo que el periodo del mismo péndulo en el caso de pequeñas oscilaciones.

***19.35** Con los datos de la tabla 19.1, determine el periodo de un péndulo simple de longitud $l = 750$ mm a) para pequeñas oscilaciones, b) para oscilaciones de amplitud $\theta_m = 60^\circ$ y c) para oscilaciones de amplitud $\theta_m = 90^\circ$.

***19.36** Con los datos de la tabla 19.1, determine la longitud en pulgadas de un péndulo simple que oscila en un periodo de 2 s y una amplitud de 90° .

19.5. VIBRACIONES LIBRES DE CUERPOS RÍGIDOS

El análisis de las vibraciones de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos que posee un solo grado de libertad es similar al análisis de las vibraciones de una partícula. Una variable apropiada, como una distancia x o un ángulo θ , se elige para definir la posición del cuerpo o del sistema de cuerpos, y se escribe una ecuación que relacione esta variable y su segunda derivada respecto a t . Si la ecuación obtenida es de la misma forma que la ecuación (19.6), esto es, si se tiene

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (19.21)$$

la vibración considerada es un movimiento armónico simple. El periodo y la frecuencia natural de la vibración pueden obtenerse entonces identificando ω_n y sustituyendo su valor en las ecuaciones (19.13) y (19.14).

En general, una forma simple de obtener una de las ecuaciones (19.21) consiste en expresar que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas si se dibuja un diagrama de cuerpo libre para un valor arbitrario de la variable, y se escribe la ecuación de movimiento apropiada. Recuérdese que el objetivo debe

ser la determinación del coeficiente de la variable x o θ , no la determinación de la variable misma o de la derivada \ddot{x} o $\ddot{\theta}$. Al igualar este coeficiente a ω_n^2 , se obtiene la frecuencia circular natural ω_n de la cual es posible determinar τ_n y f_n .

El método descrito puede utilizarse para analizar vibraciones que son en verdad representadas mediante un movimiento armónico simple, o vibraciones de pequeña amplitud que es posible *aproximar* mediante un movimiento armónico simple. Como ejemplo, se determinará el periodo de pequeñas oscilaciones de una placa cuadrada de lado $2b$ que está suspendida del punto medio O de uno de sus lados (figura 19.5a). Se considera la placa en una posición arbitraria definida por el ángulo θ que forma la línea OG con la vertical y dibujamos una ecuación de diagramas de cuerpo libre para expresar que el peso W de la placa y que las componentes R_x y R_y de la reacción en O son equivalentes a los vectores ma_t y ma_n al par $I\alpha$ (figura 19.5b). Puesto que la velocidad y la aceleración angulares de la placa son iguales, respectivamente, a $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, las magnitudes respectivas de los dos vectores son $mb\ddot{\theta}$ y $mb\ddot{\theta}^2$, en tanto que el momento del par es $I\ddot{\theta}$. En las aplicaciones previas de este método (capítulo 16) se trató siempre que fue posible de suponer el sentido correcto de la aceleración. Sin embargo, en este caso se debe suponer el mismo sentido positivo para θ y $\dot{\theta}$ para obtener una ecuación de la forma (19.21). Consecuentemente, la aceleración angular $\ddot{\theta}$ se supondrá positiva en sentido contrario al de las manecillas del reloj, aun cuando esta suposición es evidentemente irreal. Al igualar los momentos con respecto a O , se escribe

$$-W(b \operatorname{sen} \theta) = (mb\ddot{\theta})b + I\ddot{\theta}$$

Si se observa que $I = \frac{1}{12}m[(2b)^2 + (2b)^2] = \frac{2}{3}mb^2$ y $W = mg$, se obtiene

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{5} \frac{g}{b} \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (19.22)$$

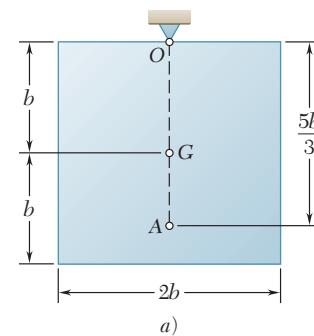
Para oscilaciones de pequeña amplitud, se puede sustituir $\operatorname{sen} \theta$ por θ , expresado en radianes, y escribir

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{5} \frac{g}{b} \theta = 0 \quad (19.23)$$

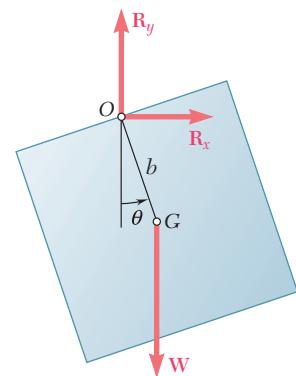
La comparación con (19.21) muestra que la ecuación obtenida es la de un movimiento armónico simple y que la frecuencia circular natural ω_n de las oscilaciones es igual a $(3g/5b)^{1/2}$. Al sustituir (19.13), se encuentra que el periodo de las oscilaciones es

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{5b}{3g}} \quad (19.24)$$

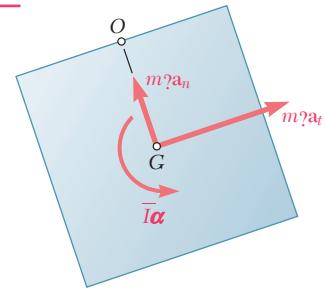
El resultado que se obtiene es válido sólo para oscilaciones de pequeña amplitud. Una descripción más exacta del movimiento de la placa se obtiene al comparar las ecuaciones (19.16) y (19.22). Hay que observar que las dos ecuaciones son idénticas si se elige l igual a $5b/3$. Esto significa que la placa oscilará como un péndulo simple de longitud $l = 5b/3$, y es posible utilizar los resultados de la sección 19.4 para corregir el valor del periodo dado en (19.24). El punto A de la placa localizado en la línea OG a una distancia $l = 5b/3$ desde O se define como el *centro de oscilación* correspondiente a O (figura 19.5a).



a)

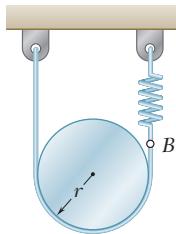


=



b)

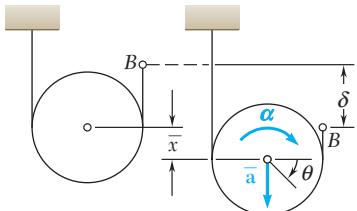
Figura 19.5



PROBLEMA RESUELTO 19.2

Un cilindro de peso W y radio r se suspende de una cuerda que le da vuelta como se indica. Un extremo de la cuerda se conecta directamente a un soporte rígido, en tanto que el otro extremo se une a un resorte de constante k . Determine el periodo y la frecuencia natural de las vibraciones del cilindro.

SOLUCIÓN



Cinemática del movimiento. Se expresa el desplazamiento lineal y la aceleración del cilindro en términos del desplazamiento angular θ . Al elegir el sentido positivo en el sentido de las manecillas del reloj y al medir los desplazamientos desde la posición de equilibrio, se escribe

$$\begin{aligned}\bar{x} &= r\theta & \delta &= 2\bar{x} = 2r\theta \\ \alpha &= \ddot{\theta} \downarrow & \bar{a} &= r\alpha = r\ddot{\theta} & \bar{a} &= r\ddot{\theta} \downarrow\end{aligned}\quad (1)$$

Ecuaciones de movimiento. El sistema de fuerzas externas que actúan sobre un cilindro consiste en el peso \mathbf{W} y las fuerzas \mathbf{T}_1 y \mathbf{T}_2 que ejerce la cuerda. Se expresa que este sistema es equivalente al de las fuerzas efectivas representado por el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ aplicado a G y al par $\bar{I}\alpha$.

$$+\sum M_A = \sum (M_A)_{\text{ef}}: \quad Wr - T_2(2r) = m\bar{a}r + \bar{I}\alpha \quad (2)$$

Cuando el cilindro está en su posición de equilibrio, la tensión en la cuerda es $T_0 = \frac{1}{2}W$. Note que para un desplazamiento angular θ , la magnitud de \mathbf{T}_2 es

$$T_2 = T_0 + k\delta = \frac{1}{2}W + k\delta = \frac{1}{2}W + k(2r\theta) \quad (3)$$

La sustitución de (1) y (3) en (2), y el hecho de que $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$, permiten escribir

$$\begin{aligned}Wr - (\frac{1}{2}W + 2kr\theta)(2r) &= m(r\ddot{\theta})r + \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} + \frac{8}{3}\frac{k}{m}\theta &= 0\end{aligned}$$

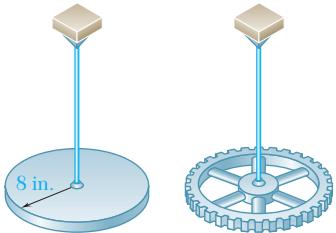
El movimiento se observa como armónico simple, y se tiene

$$\omega_n^2 = \frac{8}{3}\frac{k}{m} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{m}{k}} \quad \blacktriangleleft$$

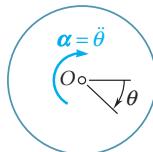
$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO 19.3



Un disco circular, que pesa 20 lb y tiene un radio de 8 in., se suspende de un alambre como se muestra. El disco se hace girar (de modo que se tuerce el alambre) y luego se suelta; se observa que el periodo de vibración torsional es de 1.13 s. Un engrane se suspende luego del mismo alambre, y el periodo de vibración torsional en este caso vale 1.93 s. Si se supone que el momento del par ejercido por el alambre es proporcional al ángulo de torsión, determine *a)* la constante de resorte torsional del alambre, *b)* el momento de inercia centroidal del engrane, *c)* la velocidad angular máxima que alcanza el engrane si se hace girar 90° y se suelta.

SOLUCIÓN



a) Vibración del disco. Denotando por θ el desplazamiento angular del disco, se expresa que la magnitud del par ejercido por el alambre es $M = K\theta$, donde K es la constante de resorte torsional del alambre. Puesto que este par debe ser equivalente al par $\bar{I}\alpha$ que representa las fuerzas efectivas del disco, se escribe

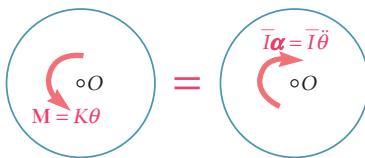
$$+\uparrow \sum M_O = \Sigma (M_O)_{\text{ef}}: \quad +K\theta = -\bar{I}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{\bar{I}}\theta = 0$$

Se puede observar que el movimiento es armónico simple y, por consiguiente,

$$\omega_n^2 = \frac{K}{\bar{I}} \quad \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{I}}{K}} \quad (1)$$

Para el disco, se tiene



$$\tau_n = 1.13 \text{ s} \quad \bar{I} = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}\right)\left(\frac{8}{12} \text{ ft}\right)^2 = 0.138 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Al sustituir (1), se obtiene

$$1.13 = 2\pi\sqrt{\frac{0.138}{K}} \quad K = 4.27 \text{ lb} \cdot \text{ft/rad} \quad \blacktriangleleft$$

b) Vibración del engrane. Puesto que el periodo de vibración del engrane es 1.93 y $K = 4.27 \text{ lb} \cdot \text{ft/rad}$, la ecuación (1) produce

$$1.93 = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{I}}{4.27}} \quad \bar{I}_{\text{engrane}} = 0.403 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \quad \blacktriangleleft$$

c) Velocidad angular máxima del engrane. Puesto que el movimiento es armónico simple, se tiene

$$\theta = \theta_m \sin \omega_n t \quad \omega = \theta_m \omega_n \cos \omega_n t \quad \omega_m = \theta_m \omega_n$$

Si se recuerda que $\theta_m = 90^\circ = 1.571 \text{ rad}$ y $\tau = 1.93 \text{ s}$, se escribe

$$\omega_m = \theta_m \omega_n = \theta_m \left(\frac{2\pi}{\tau} \right) = (1.571 \text{ rad}) \left(\frac{2\pi}{1.93 \text{ s}} \right)$$

$$\omega_m = 5.11 \text{ rad/s} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se vio que un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, cuya posición puede definirse mediante una sola coordenada x o θ , producirá un movimiento armónico simple si la ecuación diferencial que se obtiene al aplicar la segunda ley de Newton es de la forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (19.21)$$

La meta es determinar ω_n , a partir de la cual se obtiene el periodo τ_n y la frecuencia natural f_n . Al tomar en cuenta las condiciones iniciales, es posible escribir una ecuación de la forma

$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (19.10)$$

donde x debe sustituirse por θ si se incluye una rotación. Para resolver los problemas de esta lección, es necesario seguir estos pasos:

1. Elegir una coordenada que medirá el desplazamiento del cuerpo a partir de su posición de equilibrio. Se descubrirá que muchos de los problemas en esta lección implican la rotación de un cuerpo alrededor de un eje fijo y que el ángulo que mide la rotación del cuerpo desde su posición de equilibrio es la coordenada más conveniente. En problemas que implican el movimiento plano general de un cuerpo, donde se utiliza una coordenada x (y posiblemente una coordenada y) para definir la posición del centro de masa G del cuerpo, y se recurre a una coordenada θ para medir su rotación respecto a G , determine las relaciones cinemáticas que le permitirán expresar x (y y) en términos de θ [problema resuelto 19.2].

2. Dibujar una ecuación de diagramas de cuerpo libre para expresar que el sistema de fuerzas externas es equivalente al sistema de fuerzas efectivas, el cual consiste en el vector $m\bar{a}$ y el par $I\alpha$, donde $\bar{a} = \ddot{x}$ y $\alpha = \ddot{\theta}$. Asegúrese de que cada fuerza o par aplicado se dibuje en una dirección consistente con el desplazamiento supuesto y que los sentidos de \bar{a} y α sean, respectivamente, aquellos en los cuales las coordenadas x y θ están aumentando.

3. Escribir las ecuaciones diferenciales de movimiento igualando las sumas de las componentes de las fuerzas externas efectivas en las direcciones x y y y las sumas de sus momentos con respecto a un punto dado. Si es necesario, utilice las relaciones cinemáticas que se formularon en el paso 1 para obtener ecuaciones que implican sólo a la coordenada θ . Si θ es un ángulo pequeño reemplace $\operatorname{sen} \theta$ por θ y $\cos \theta$ por 1, si estas funciones aparecen en sus ecuaciones. Eliminando todas las reacciones desconocidas, se obtendrá una ecuación del tipo de las ecuaciones (19.21). Advierta que en problemas que implican un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo, es posible obtener de inmediato una ecuación de este tipo al igualar los momentos de las fuerzas externas efectivas con respecto al eje fijo.

4. Al comparar las ecuaciones que se han obtenido con una de las ecuaciones (19.21) se pueden identificar ω_n^2 y, por ello, determinar la frecuencia circular natural ω_n . Recuerde que el objeto del análisis *no es resolver* la ecuación diferencial que se obtiene, *sino identificar* ω_n^2 .

5. Determine la amplitud y el ángulo de fase ϕ sustituyendo el valor que se obtuvo para ω_n y los valores iniciales de las coordenadas y su primera derivada en la ecuación (19.10) y en la ecuación obtenida al diferenciar (19.10) con respecto a t . De la ecuación (19.10) y las dos ecuaciones que se obtuvieron al diferenciar (19.10) dos veces con respecto a t , y al usar la relación cinemática que se desarrolló en el paso 1, se podrá determinar la posición, velocidad y aceleración de cualquier tiempo dado.

6. En problemas que implican vibraciones torsionales la constante de resorte torsional K se expresa en N · m/rad o lb · ft/rad. El producto de K y el ángulo de torsión θ expresado en radianes produce el momento del par restaurador, el cual debe igualarse a la suma de los momentos de las fuerzas o pares efectivos con respecto al eje de rotación [problema resuelto 19.3].

Problemas

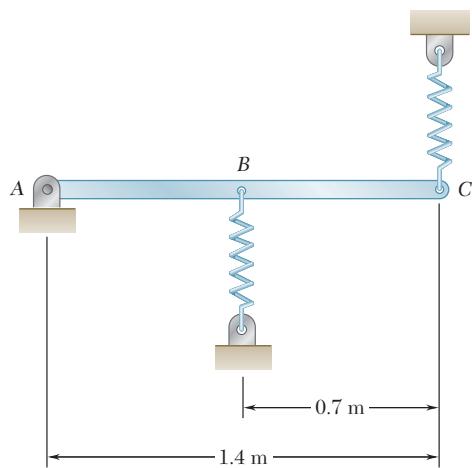


Figura P19.37

19.37 La barra uniforme AC de 5 kg está conectada a resortes de constante $k = 500 \text{ N/m}$ en B y $k = 620 \text{ N/m}$ en C , los cuales pueden actuar en tensión o en compresión. Si el extremo C se deforma ligeramente y se suelta, determine *a)* la frecuencia de vibración, *b)* la amplitud del movimiento del punto C , si la velocidad máxima de ese punto es de 0.9 m/s.

19.38 La barra uniforme que se muestra en la figura pesa 15 lb y está unida a un resorte de constante $k = 4 \text{ lb/in.}$ Si el extremo B de la barra se deforma 0.4 in y se suelta, determine *a)* el periodo de vibración, *b)* la velocidad máxima del extremo B .

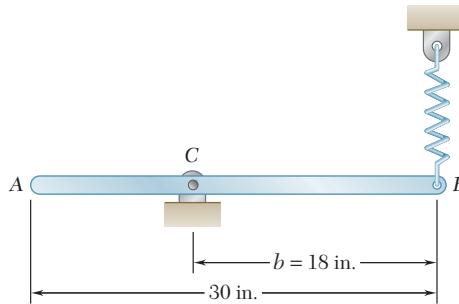


Figura P19.38

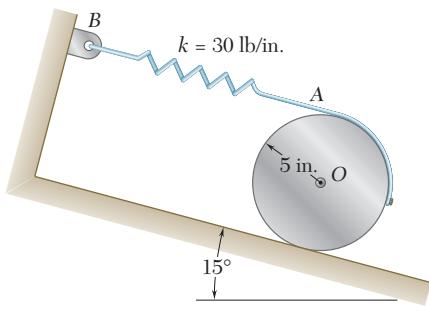


Figura P19.39

19.39 Un cilindro uniforme de 30 lb puede rodar sin deslizarse sobre una pendiente de 15° . Una banda está unida al borde del cilindro, y un resorte mantiene al cilindro en reposo en la posición mostrada. Si el centro del cilindro se mueve 2 in. hacia abajo por la pendiente y se suelta, determine *a)* el periodo de vibración, *b)* la aceleración máxima del centro del cilindro.

19.40 Una barra delgada AB de 15 lb está remachada a un disco uniforme de 12 lb como se muestra en la figura. Una banda se conecta al aro del disco y a un resorte que mantiene a la barra en reposo en la posición que se muestra en la figura. Si el extremo A de la barra se mueve 0.75 in. hacia abajo y se suelta, determine *a)* el periodo de vibración, *b)* la velocidad máxima del extremo A .

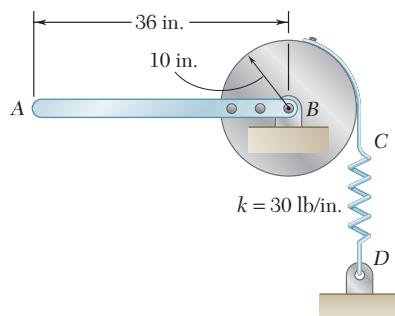


Figura P19.40

19.41 Una barra uniforme de 8 kg se articula a un soporte fijo en A y se conecta por medio de los pasadores B y C a un disco de 12 kg y 400 mm de radio. Un resorte unido en D mantiene a la barra en reposo en la posición mostrada. Si el punto B se mueve hacia abajo 25 mm y se suelta, determine a) el periodo de vibración, b) la velocidad máxima del punto B.

19.42 Retome el problema 19.41, y ahora suponga que el pasador C se retira y que el disco puede girar libremente alrededor del pasador B.

19.43 Una banda se coloca alrededor del aro de un volante de 240 kg y se une en la forma mostrada a dos resortes, cada uno de constante $k = 15 \text{ kN/m}$. Si el extremo C de la banda se jala 40 mm hacia abajo y se suelta, puede observarse que el periodo de vibración del volante es de 0.5 s. Si la tensión inicial en la banda es suficiente para evitar el deslizamiento, determine a) la velocidad angular máxima del volante, b) el radio de giro centroide del volante.

19.44 Un orificio de 75 mm de radio se corta en un disco uniforme de 200 mm de radio, el cual está unido a un pasador sin fricción en su centro geométrico O. Determine a) el periodo de pequeñas oscilaciones del disco, b) la longitud de un péndulo simple que tenga el mismo periodo.

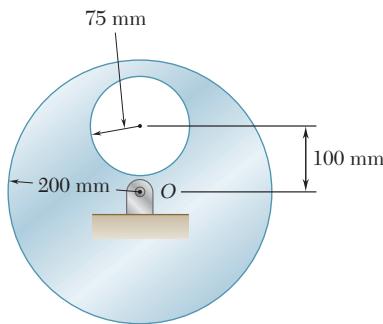


Figura P19.44

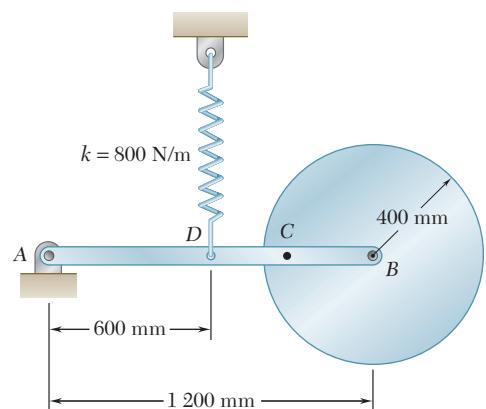


Figura P19.41

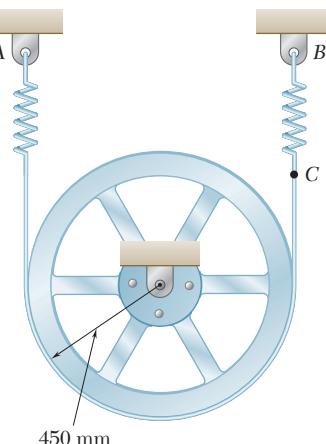


Figura P19.43

19.45 Dos pesos pequeños w se colocan en A y B en el borde de un disco uniforme de radio r y peso W . Si se denota con τ_0 el periodo de pequeñas oscilaciones cuando $\beta = 0$, determine el ángulo β para el cual el periodo de pequeñas oscilaciones es $2\tau_0$.

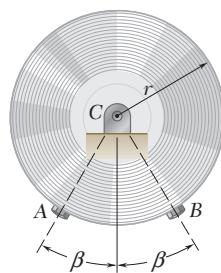


Figura P19.45 y P19.46

19.46 Dos pesos de 0.1 lb se colocan en A y B sobre el borde de un disco uniforme de 3 lb y radio $r = 4 \text{ in}$. Determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones cuando $\beta = 60^\circ$.

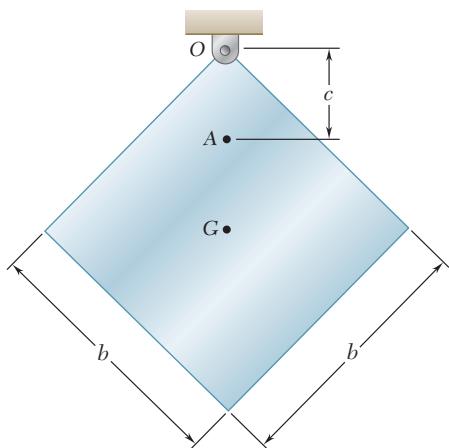


Figura P19.47

19.47 Para la placa cuadrada uniforme de lado $b = 300$ mm, determine *a*) el periodo de pequeñas oscilaciones si la placa está suspendida como se muestra en la figura, *b*) la distancia c desde O hasta el punto A de donde debe suspenderse la placa para que el periodo sea mínimo.

19.48 Una biela está soportada por el filo de un cuchillo en el punto A; se observa que el periodo de sus oscilaciones pequeñas es de 0.87 s. Luego se invierte la biela y se soporta mediante el filo del cuchillo en el punto B y el periodo de sus oscilaciones pequeñas en este caso es de 0.78 s. Si $r_a + r_b = 10$ in., determine *a*) la ubicación del centro de masa G, *b*) el radio de giro centroidal \bar{k} .

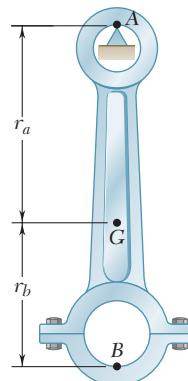


Figura P19.48

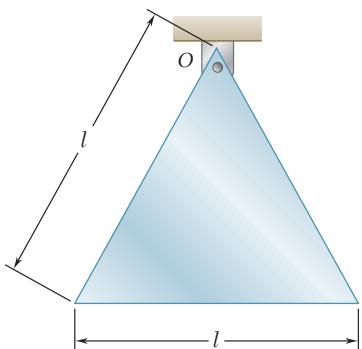


Figura P19.49

19.49 Para la placa triangular equilátera uniforme de lado $l = 300$ mm, determine el periodo de oscilaciones pequeñas si la placa está suspendida de *a*) uno de sus vértices, *b*) el punto medio de uno de sus lados.

19.50 Un disco uniforme de radio $r = 250$ mm se conecta en A a una barra AB de 650 mm y masa despreciable que puede girar con libertad en un plano vertical alrededor de B. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones *a*) si el disco tiene la libertad de girar en un cojinete en A y *b*) si la barra se remacha al disco en A.

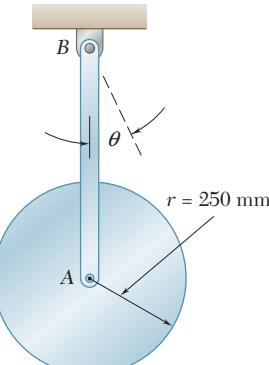


Figura P19.50

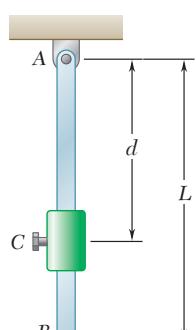


Figura P19.51

19.51 Un pequeño collarín que pesa 2 lb se conecta rígidamente a una barra uniforme de 6 lb y longitud $L = 3$ ft. Determine *a*) la distancia d para maximizar la frecuencia de oscilación cuando a la barra se le da un pequeño desplazamiento inicial, *b*) el periodo de oscilación correspondiente.

19.52 Un péndulo compuesto se define como una placa rígida que oscila alrededor de un punto fijo O , denominado centro de suspensión. Demuestre que el periodo de oscilación de un péndulo compuesto es igual al periodo de un péndulo simple de longitud OA , donde la distancia desde A hasta el centro de masa G es $GA = \bar{k}^2 \sqrt{r}$. El punto A se define como el centro de oscilación y coincide con el centro de percusión definido en el problema 17.66.

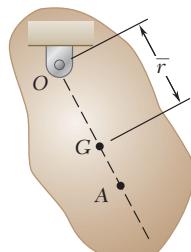


Figura P19.52 y P.19.53

19.53 Una placa rígida oscila alrededor del punto fijo O . Demuestre que el periodo de oscilación más pequeño ocurre cuando la distancia \bar{r} del punto O hasta el centro de masa G es igual a \bar{k} .

19.54 Demuestre que si el péndulo compuesto del problema 19.52 se suspende de A en vez de O , el periodo de oscilación es el mismo que antes y el nuevo centro de oscilación se ubica en O .

19.55 La barra uniforme AB de 8 kg se articula en C y está unida en A a un resorte de constante $k = 500$ N/m. Si el extremo A tiene un pequeño desplazamiento y se suelta, determine *a)* la frecuencia de las oscilaciones pequeñas y *b)* el valor mínimo de la constante del resorte k para la cual ocurrirán las oscilaciones.

19.56 Una placa cuadrada uniforme está suspendida de un pasador localizado en el punto medio A de uno de sus bordes de 1.2 ft y se encuentra unida a resortes, cada uno de constante $k = 8$ lb/in. Si a la esquina B se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine la frecuencia de la vibración resultante. Suponga que cada resorte puede actuar en tensión o en compresión.

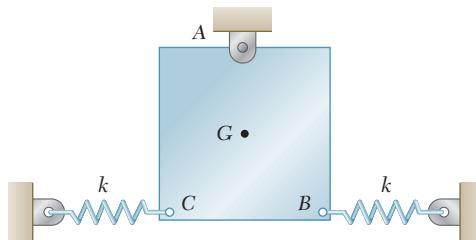


Figura P19.56

19.57 Dos barras uniformes, cada una de peso $m = 12$ kg y longitud $L = 800$ mm, se sueldan entre sí para formar el ensamblaje mostrado. Si la constante de cada resorte es $k = 500$ N/m y al extremo A se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine la frecuencia del movimiento resultante.

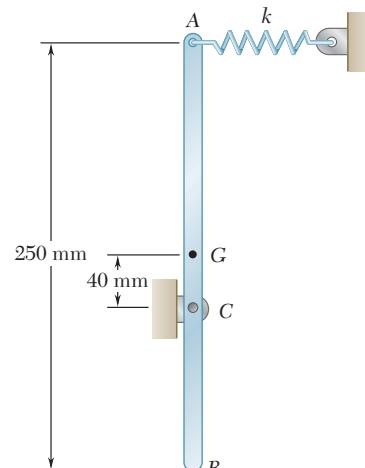


Figura P19.55

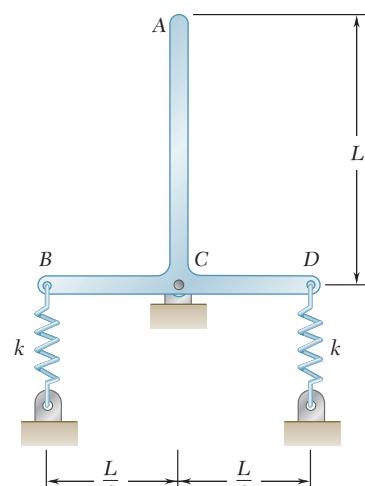


Figura P19.57

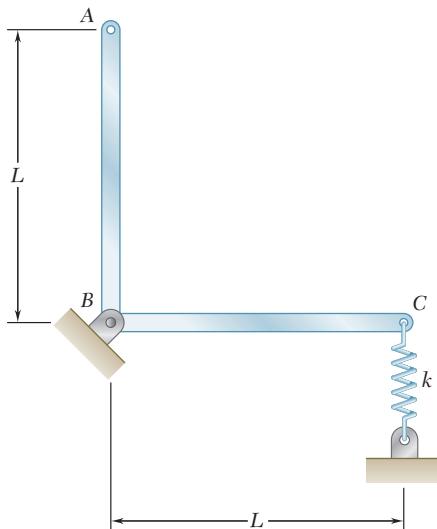


Figura P19.58

19.58 La barra ABC de masa total m se dobla en la forma mostrada y se sostiene en un plano vertical mediante un pasador en B y por medio de un resorte de constante k en C . Si al extremo C se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine la frecuencia del movimiento resultante en términos de m , L y k .

19.59 Un disco uniforme de radio $r = 250$ mm se conecta en A a una barra AB de 650 mm con masa insignificante, la cual puede girar libremente en un plano vertical alrededor de B . Si la barra se desplaza 2° a partir de la posición que se muestra y se suelta, determine la magnitud de la velocidad máxima del punto A , si se supone que el disco *a)* tiene la libertad de girar en un cojinete en A y *b)* se remacha a la barra en A .

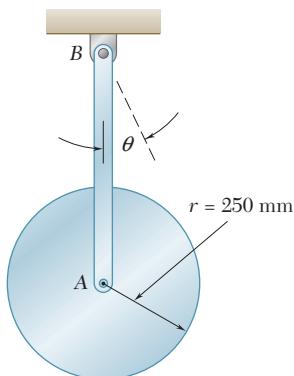


Figura P19.59

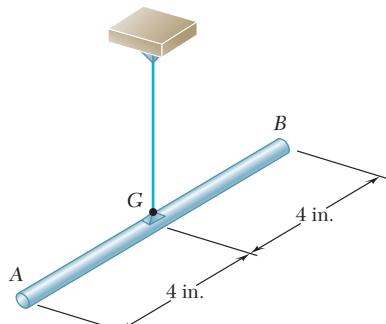


Figura P19.60

19.60 Una barra delgada de 6 lb se suspende de un alambre de acero, del cual se sabe que tiene una constante de resorte torsional $K = 1.5$ ft · lb/rad. Si la barra se gira a través de 180° alrededor de la vertical y luego se suelta, determine *a)* el periodo de oscilación, *b)* la velocidad máxima del extremo A de la barra.

19.61 Un alambre homogéneo se dobla para formar la figura mostrada y se conecta a un soporte de pasador en A . Si se sabe que $r = 220$ mm y que el punto B se empuja hacia abajo 20 mm y se suelta, determine la magnitud de la aceleración de B , 8 s después.

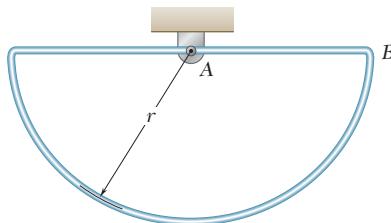


Figura P19.61 y P19.62

19.62 Un alambre homogéneo se dobla para formar la figura mostrada y se conecta a un soporte de pasador en A . Si se sabe que $r = 16$ in. y que el punto B se empuja hacia abajo 1.5 in. y se suelta, determine la magnitud de la aceleración de B , 10 s después.

- 19.63** Un disco uniforme de radio $r = 120$ mm se suelda en su centro a dos barras elásticas de igual longitud con extremos fijos en A y B. Si el disco gira un ángulo de 8° cuando se le aplica un par de $500 \text{ mN} \cdot \text{m}$ y oscila por un periodo de 1.3 s cuando se suprime el par, determine a) la masa del disco, b) el periodo de vibración si se elimina una de las barras.

- 19.64** Una barra uniforme CD de 10 lb y longitud $l = 2.2$ ft se suelda en C a dos barras elásticas, que tienen extremos fijos en A y B y se sabe que tienen una constante de resorte de torsión combinada $K = 18 \text{ lb} \cdot \text{ft/rad}$. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones, si la posición de equilibrio de CD es a) vertical como se muestra, b) horizontal.

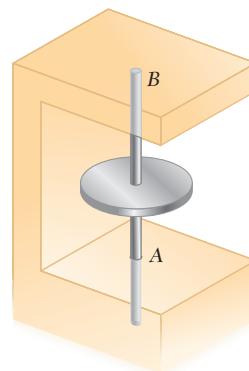


Figura P19.63

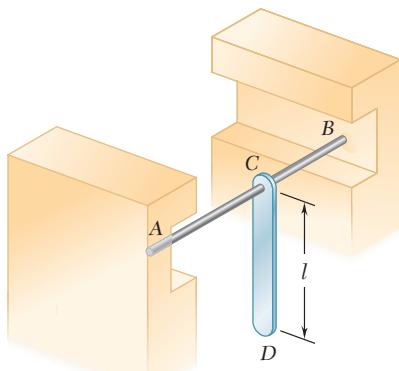


Figura P19.64

- 19.65** Una placa de 1.8 kg con la forma de un triángulo equilátero se suspende en su centro de gravedad de un alambre de acero, el cual tiene una constante de torsión $K = 35 \text{ mN} \cdot \text{m/rad}$. Si la placa se gira 360° alrededor de la vertical y luego se suelta, determine a) el periodo de oscilación, b) la velocidad máxima de uno de los vértices del triángulo.

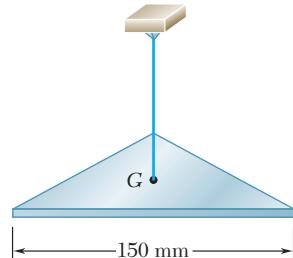


Figura P19.65

- 19.66** Una plataforma horizontal P se sostiene mediante varias barras rígidas que se conectan a un alambre vertical. Se encuentra que el periodo de oscilación de la plataforma corresponde a 2.2 s cuando la plataforma está vacía y 3.8 s cuando un objeto A de momento de inercia desconocido se coloca sobre la plataforma con su centro de masa directamente abajo del centro de la placa. Si el alambre tiene una constante de torsión $K = 20 \text{ lb} \cdot \text{ft/rad}$, determine el momento de inercia centroidal del objeto A.

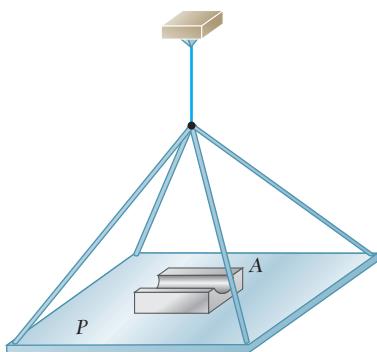


Figura P19.66

19.67 Una placa rectangular delgada de lados a y b está suspendida de cuatro alambres verticales con la misma longitud l . Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de la placa cuando *a)* se gira a un pequeño ángulo alrededor del eje vertical que pasa por su centro de masa G , *b)* se le da un pequeño desplazamiento horizontal en una dirección perpendicular a AB , *c)* se le da un pequeño desplazamiento horizontal en una dirección perpendicular a BC .

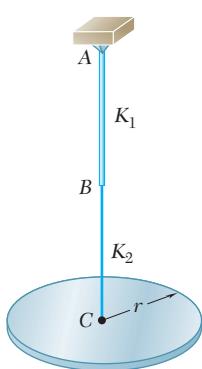


Figura P19.68

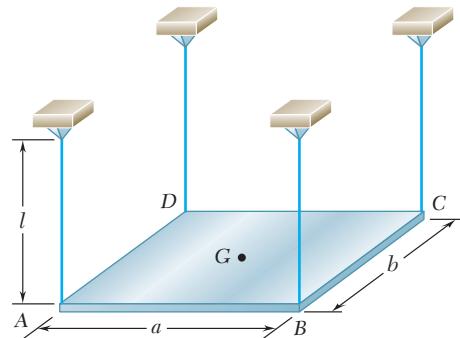


Figura P19.67

19.68 Un disco circular de radio $r = 0.8$ m se suspende en su centro C de los alambres AB y BC soldados entre sí en B . Las constantes de resorte torsionales de los alambres son $K_1 = 100$ N · m/rad para AB y $K_2 = 50$ N · m/rad para BC . Si el periodo de oscilación del disco alrededor del eje AC es de 0.5 s, determine la masa del disco.

19.6. APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En la sección 19.2 se vio que cuando una partícula de masa m está en movimiento armónico simple, la resultante \mathbf{F} de las fuerzas ejercidas sobre la partícula tiene una magnitud que es proporcional al desplazamiento x , medido desde la posición de equilibrio O , y está dirigida hacia O ; se escribió $F = -kx$. Con referencia a la sección 13.6, se advirtió que \mathbf{F} es una *fuerza conservativa* y que la energía potencial es $V = \frac{1}{2}kx^2$, donde V se supone igual a cero en la posición de equilibrio $x = 0$. Puesto que la velocidad de la partícula es igual a \dot{x} , su energía cinética es $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y es posible expresar que la energía total de la partícula se conserva al escribir

$$T + V = \text{constante} \quad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

Al dividir entre $m/2$ y recordar, de la sección 19.2 que $k/m = \omega_n^2$, donde ω_n es la frecuencia circular natural de la vibración, se tiene

$$\dot{x}^2 + \omega_n^2 x^2 = \text{constante} \quad (19.25)$$

La ecuación (19.25) es característica de un movimiento armónico simple, puesto que puede obtenerse a partir de la ecuación (19.6) al multiplicar ambos términos por $2\dot{x}$ e integrar.

El principio de conservación de la energía proporciona una forma conveniente de determinar el periodo de vibración de un cuerpo rígido o de un sistema de cuerpos rígidos que poseen un solo grado de libertad, una vez que se ha establecido que el movimiento del sistema es un movimiento armónico simple o que puede aproximarse mediante un movimiento armónico simple. Al elegir una variable apropiada, como la distancia x o el ángulo θ , se consideran dos posiciones particulares del sistema:

1. *El desplazamiento del sistema es máximo;* se tiene $T_1 = 0$, y V_1 puede expresarse en términos de la amplitud x_m o θ_m (al elegir $V = 0$ en la posición de equilibrio).
2. *El sistema pasa por su posición de equilibrio;* se tiene $V_2 = 0$, y T_2 puede expresarse en términos de la velocidad máxima o la velocidad angular máxima $\dot{\theta}_m$.

Se expresa entonces que la energía total del sistema se conserva y se escribe $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$. Al recordar de (19.15) que para un movimiento armónico simple la velocidad máxima es igual al producto de la amplitud y de la frecuencia circular natural ω_n , se encuentra que la ecuación que se obtiene puede resolverse para ω_n .

Como ejemplo, se considera de nuevo la placa cuadrada de la sección 19.5. En la posición de desplazamiento máximo (figura 19.6a), se tiene

$$T_1 = 0 \quad V_1 = W(b - b \cos \theta_m) = Wb(1 - \cos \theta_m)$$

o puesto que $1 - \cos \theta_m = 2 \sin^2(\theta_m/2) \approx 2(\theta_m/2)^2 = \theta_m^2/2$ para oscilaciones de pequeña amplitud,

$$T_1 = 0 \quad V_1 = \frac{1}{2}Wb\theta_m^2 \quad (19.26)$$

Cuando la placa pasa a través de su posición de equilibrio (figura 19.6b), su velocidad es máxima y se tiene

$$T_2 = \frac{1}{2}m\ddot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2 = \frac{1}{2}mb^2\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}_m^2 \quad V_2 = 0$$

o al recordar de la sección 19.5 que $\bar{I} = \frac{2}{3}mb^2$,

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}mb^2\right)\dot{\theta}_m^2 \quad V_2 = 0 \quad (19.27)$$

Al sustituir de (19.26) y (19.27) en $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, y al observar que la velocidad máxima $\dot{\theta}_m$ es igual al producto $\theta_m\omega_n$, se escribe

$$\frac{1}{2}Wb\theta_m^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}mb^2\right)\theta_m^2\omega_n^2 \quad (19.28)$$

la cual produce $\omega_n^2 = 3g/5b$ y

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{5b}{3g}} \quad (19.29)$$

como se obtuvo antes.

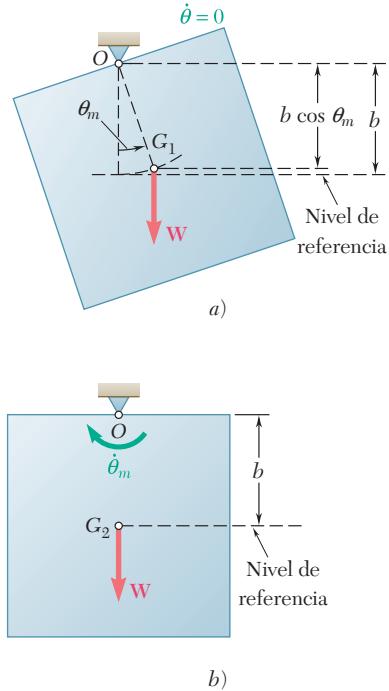
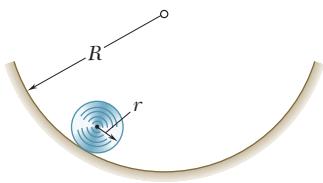


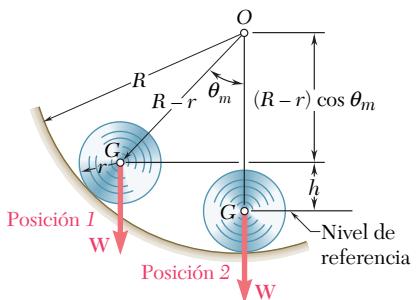
Figura 19.6



PROBLEMA RESUELTO 19.4

Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de un cilindro de radio r que rueda sin deslizarse dentro de una superficie curva de radio R .

SOLUCIÓN



Se denota por θ el ángulo que forma la línea OG con la vertical. Puesto que el cilindro rueda sin deslizarse, se puede aplicar el principio de la conservación de la energía entre la posición 1, donde $\theta = \theta_m$, y la posición 2, donde $\theta = 0$.

Posición 1

Energía cinética. Puesto que la velocidad del cilindro es cero, $T_1 = 0$.

Energía potencial. Al elegir el nivel de referencia como se muestra y denotar por W el peso del cilindro, se tiene

$$V_1 = Wh = W(R - r)(1 - \cos \theta)$$

Al observar que para pequeñas oscilaciones $(1 - \cos \theta) = 2 \sin^2(\theta/2) \approx \theta^2/2$, se tiene

$$V_1 = W(R - r) \frac{\theta_m^2}{2}$$

Posición 2. Si se denota por $\dot{\theta}_m$ la velocidad angular de la línea OG cuando el cilindro pasa por la posición 2, y se observa que el punto C es el centro de rotación instantáneo del cilindro, se escribe

$$\bar{v}_m = (R - r)\dot{\theta}_m \quad \omega_m = \frac{\bar{v}_m}{r} = \frac{R - r}{r}\dot{\theta}_m$$

Energía cinética

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m\bar{v}_m^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2 \\ &= \frac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\left(\frac{R - r}{r}\right)^2\dot{\theta}_m^2 \\ &= \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 \end{aligned}$$

Energía potencial

$$V_2 = 0$$

Conservación de la energía

$$\begin{aligned} T_1 + V_1 &= T_2 + V_2 \\ 0 + W(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} &= \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}_m^2 + 0 \end{aligned}$$

Puesto que $\dot{\theta}_m = \omega_n \theta_m$ y $W = mg$, se escribe

$$mg(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} = \frac{3}{4}m(R - r)^2(\omega_n \theta_m)^2 \quad \omega_n^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{R - r}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad \tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{R - r}{g}} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas siguientes se pedirá que utilice el *principio de la conservación de la energía* para determinar el periodo o frecuencia natural del movimiento armónico simple de una partícula o cuerpo rígido. Suponiendo que elige un ángulo θ para definir la posición del sistema (con $\theta = 0$ en la posición de equilibrio), lo cual se hará en la mayoría de los problemas de esta lección, se expresará que la energía total del sistema se conserva, $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, entre la posición 1 de desplazamiento máximo ($\theta_1 = \theta_m$, $\dot{\theta}_1 = 0$) y la posición 2 de velocidad máxima ($\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_m$, $\theta_2 = 0$). Se tiene que T_1 y V_2 serán ambas cero, y que la ecuación de la energía se reducirá a $V_1 = T_2$, donde V_1 y T_2 son las expresiones cuadráticas homogéneas en θ_m y $\dot{\theta}_m$, respectivamente. Como, para un movimiento armónico simple, $\theta_m = \theta_m \omega_n$ y al sustituir este producto en la ecuación de la energía se obtendrá, después de simplificar, una ecuación que es posible resolver para ω_n^2 . Una vez que se haya determinado la frecuencia circular natural ω_n , puede obtenerse el periodo τ_n y la frecuencia natural f_n de la vibración.

Los pasos que se deben seguir son éstos:

1. Calcular la energía potencial V_1 del sistema en su posición de desplazamiento máximo. Dibuje un bosquejo del sistema en su posición de desplazamiento máximo y exprese la energía potencial de todas las fuerzas implicadas (internas, así como externas) en términos del desplazamiento máximo x_m o θ_m .

a) La energía potencial asociada con el peso W de un cuerpo es $V_g = W_y$, donde y es la elevación del centro de gravedad G del cuerpo sobre su posición de equilibrio. Si el problema que se resuelve implica la oscilación de un cuerpo rígido alrededor de un eje horizontal que pasa por el punto O localizado a una distancia b de G (figura 19.6), exprese y en términos del ángulo θ que la línea del ángulo OG forma con la vertical: $y = b(1 - \cos \theta)$. Pero, para pequeños valores de θ , es posible sustituir esta expresión con $y = \frac{1}{2}b\theta^2$ [problema resuelto 19.4]. Por lo tanto, cuando θ alcanza su valor máximo θ_m , y para oscilaciones de pequeña amplitud, es posible expresar V_g como

$$V_g = \frac{1}{2}Wb\theta_m^2$$

Observe que si G se localiza sobre O en su posición de equilibrio (y no debajo de O , como se ha supuesto), el desplazamiento vertical y será negativo y deberá aproximarse como $y = -\frac{1}{2}b\theta^2$, el cual resultará en un valor negativo de V_g . En ausencia de otras fuerzas, la posición de equilibrio será inestable, y el sistema no oscilará. (Véase, por ejemplo, el problema 19.91.)

b) La energía potencial asociada con la fuerza elástica ejercida por un resorte es $V_e = \frac{1}{2}kx^2$, donde k es la constante del resorte y x es su deformación. En problemas que implican la rotación de un cuerpo alrededor de un eje, por lo general se tendrá $x = a\theta$, donde a es la distancia desde el eje de rotación hasta el punto del cuerpo donde el resorte está conectado, y donde θ es el ángulo de rotación. Por

(continúa)

lo tanto, cuando x alcanza su valor máximo x_m y θ llega a su valor máximo θ_m , es posible expresar V_e como

$$V_e = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}ka^2\theta_m^2$$

c) **La energía potencial V_1 del sistema en su posición de desplazamiento máximo** se obtiene sumando las diversas energías potenciales que se han calculado. Será igual al producto de una constante y θ_m^2 .

2. Calcular la energía cinética T_2 del sistema en su posición de velocidad máxima. Observe que esta posición es también la posición de equilibrio del sistema.

a) **Si el sistema está compuesto por un solo cuerpo rígido,** la energía cinética T_2 del sistema será la suma de la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masa G del cuerpo y la energía cinética asociada con la rotación del cuerpo alrededor de G . Por lo tanto, se escribirá

$$T_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_m^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2$$

Suponiendo que la posición del cuerpo se ha definido mediante un ángulo θ , exprese \bar{v}_m y ω_m en términos de la razón de cambio $\dot{\theta}_m$ de θ cuando el cuerpo pase por su posición de equilibrio. La energía cinética del cuerpo se expresará entonces como el producto de una constante y $\dot{\theta}_m^2$. Advierta que si θ mide la rotación del cuerpo alrededor de su centro de masa, como fue el caso para la placa de la figura 19.6, entonces $\omega_m = \dot{\theta}_m$. En otros casos, sin embargo, la cinemática del movimiento debe utilizarse para derivar una relación entre ω_m y $\dot{\theta}_m$ [problema resuelto 19.4].

b) **Si el sistema está compuesto de varios cuerpos rígidos,** repita el cálculo anterior para cada uno de los cuerpos, utilizando la misma coordenada θ , y sume los resultados que se obtienen.

3. Iguale la energía potencial V_1 del sistema a su energía cinética T_2 ,

$$V_1 = T_2$$

y, recordando la primera de las ecuaciones (19.15), sustituya $\dot{\theta}_m$ en el término del lado derecho por el producto de la amplitud θ_m y la frecuencia circular ω_n . Puesto que ambos términos contienen ahora al factor θ_m^2 , es posible cancelar este último y la ecuación resultante puede resolverse para la frecuencia circular ω_n .

Problemas

Todos los problemas deben resolverse usando el método de la sección 19.6.

- 19.69** Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de una partícula pequeña que se mueve sin fricción dentro de una superficie cilíndrica de radio R .

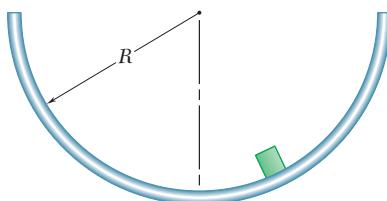


Figura P19.69

- 19.70** Una esfera A de 14 oz. y una esfera C de 10 oz. se conectan a los extremos de una barra AC de masa insignificante que puede girar en un plano vertical alrededor de un eje en B . Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de la barra.

- 19.71** Un collarín A de 1.8 kg está unido a un resorte con constante de 800 N/m y puede deslizarse sin fricción sobre una barra horizontal. Si el collarín se mueve 70 mm hacia la izquierda desde su posición de equilibrio y se suelta, determine la velocidad máxima y la aceleración máxima del collarín durante el movimiento resultante.

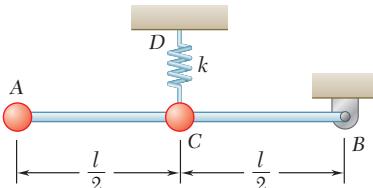


Figura P19.71 y P19.72

- 19.72** Un collarín A de 3 lb está unido a un resorte con constante de 5 lb/in. y puede deslizarse sin fricción sobre una barra horizontal. El collarín está en reposo cuando es golpeado con un mazo y se le da una velocidad inicial de 35 in./s. Determine la amplitud del movimiento resultante y la aceleración máxima del collarín.

- 19.73** Una barra uniforme AB puede girar en un plano vertical alrededor de un eje horizontal en C localizado a una distancia c sobre el centro de masa G de la barra. Para oscilaciones pequeñas determine el valor de c para el cual la frecuencia del movimiento será máxima.

- 19.74** Un alambre homogéneo de longitud $2l$ se dobla en la forma mostrada y es capaz de girar alrededor de un pasador sin fricción en B . Si se denota con τ_0 el periodo de pequeñas oscilaciones cuando $\beta = 0$, determine el ángulo β para el cual el periodo de pequeñas oscilaciones es $2\tau_0$.

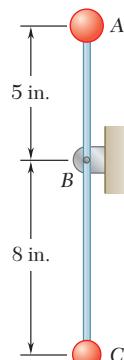


Figura P19.70

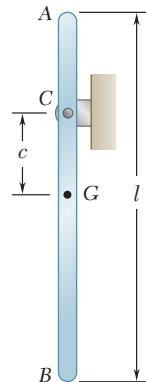


Figura P19.73

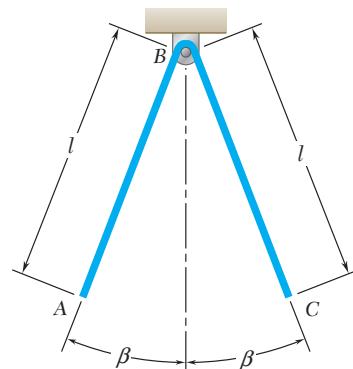


Figura P19.74

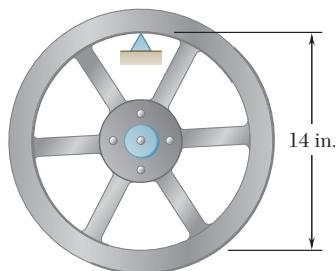


Figura P19.75

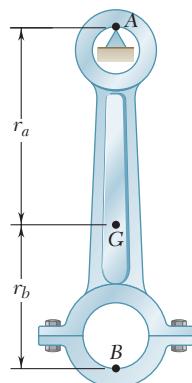


Figura P19.76

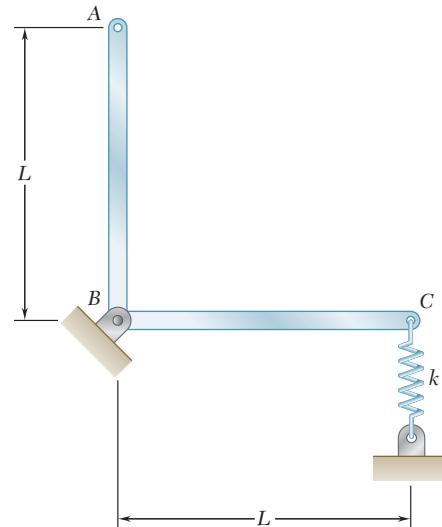


Figura P19.77

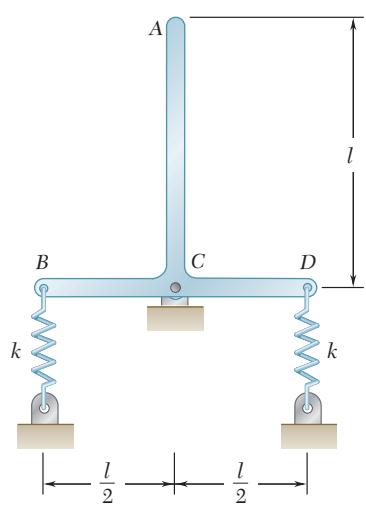


Figura P19.79

19.75 El borde interno de un volante de 85 lb se coloca sobre un filo de cuchillo, y se encuentra que el periodo de pequeñas oscilaciones es de 1.26 s. Determine el momento de inercia centroidal del volante.

19.76 Una biela está soportada por el filo de un cuchillo en el punto A; se observa que el periodo de sus oscilaciones pequeñas es de 1.03 s. Si la distancia r_a es igual a 150 mm, determine el radio de giro centroidal de la biela.

19.77 La barra ABC de masa total m está dobrada en la forma que se muestra y se sostiene en un plano vertical mediante un pasador en B y un resorte de constante k en C. Si al extremo C se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine la frecuencia del movimiento resultante en términos de m , L y k .

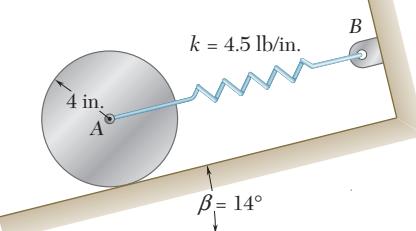


Figura P19.78

19.78 Un cilindro uniforme de 15 lb puede rodar sin deslizarse sobre una rampa y está conectado a un resorte AB como se muestra en la figura. Si el centro del cilindro se mueve 0.4 in. hacia abajo de la rampa y se suelta, determine a) el periodo de vibración y b) la velocidad máxima del centro del cilindro.

19.79 Dos barras uniformes, cada una de peso $W = 1.2$ lb y longitud $l = 8$ in., se sueldan entre sí para formar el ensamblaje mostrado. Si la constante de cada resorte es $k = 0.6$ lb/in. y a ese extremo A se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine la frecuencia del movimiento resultante.

- 19.80** Una barra ligera AB de 8 kg y longitud $l = 600 \text{ mm}$ se conecta a dos collarines de masa insignificante. El collarín A se une a un resorte de constante $k = 1.2 \text{ kN/m}$ y puede deslizarse sobre una barra vertical, en tanto que el collarín B puede deslizarse libremente sobre una barra horizontal. Se sabe que el sistema está en equilibrio y que $\theta = 40^\circ$, si al collarín B se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine el periodo de vibración.

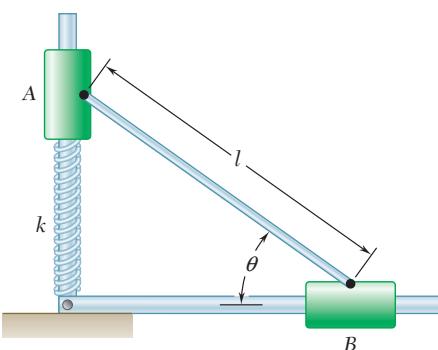


Figura P19.80 y P19.81

- 19.81** Una barra ligera AB de longitud $l = 600 \text{ mm}$ y masa insignificante se conecta a dos collarines cada uno con masa de 8 kg . El collarín A se une a un resorte de constante $k = 1.2 \text{ kN/m}$ y puede deslizarse sobre una barra vertical, en tanto que el collarín B puede deslizarse libremente sobre una barra horizontal. Se sabe que el sistema está en equilibrio y que $\theta = 40^\circ$, si al collarín A se le da un pequeño desplazamiento y se suelta, determine el periodo de vibración.

- 19.82** Una barra ligera AB de 3 kg se atornilla a un disco uniforme de 5 kg . Un resorte de constante igual a 280 N/m se conecta al disco y no está deformado en la posición que se muestra en la figura. Si al extremo B de la barra se le da un pequeño desplazamiento y luego se suelta, determine el periodo de vibración del sistema.

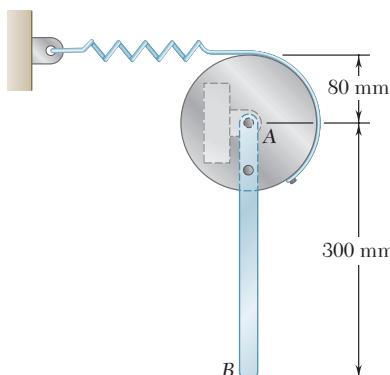


Figura P19.82

- 19.83** Una esfera A de 14 oz. y una esfera C de 10 oz. están conectadas a los extremos de una barra AC de 20 oz. , la cual puede girar en un plano vertical alrededor de un eje en B . Determine el periodo de pequeñas oscilaciones de la barra.

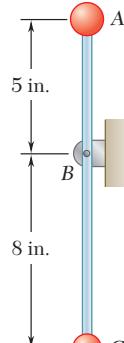


Figura P19.83

19.84 Tres barras idénticas están conectadas de la manera que se muestra en la figura. Si $b = \frac{3}{4}l$, determine la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del sistema.

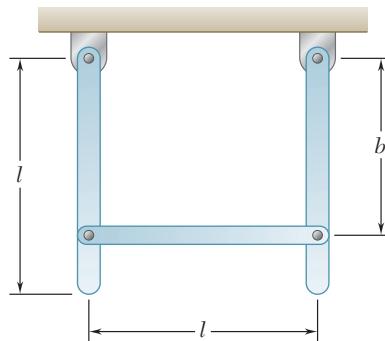


Figura P19.84

19.85 Una barra AB de 800 g está atornillada a un disco de 1.2 kg. Un resorte de constante $k = 12$ N/m está unido al centro del disco en A y a la pared en C . Si el disco rueda sin deslizarse, determine el periodo de pequeñas oscilaciones del sistema.

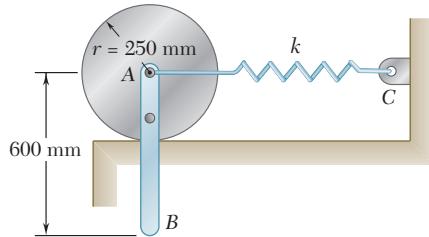


Figura P19.85

19.86 y 19.87 Dos barras uniformes AB y CD , cada una de longitud l y masa m , están conectadas a engranes en la forma que se indica. Si la masa del engrane C es m y la del engrane A es $4m$, determine el periodo de pequeñas oscilaciones del sistema.

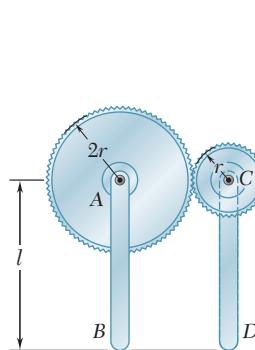


Figura P19.86

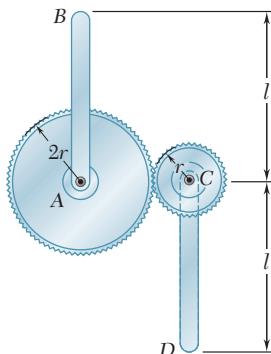


Figura P19.87

- 19.88** Una barra uniforme CD de 10 lb se suelda en C a una flecha de masa despreciable que se suelda a los centros de dos discos uniformes A y B de 20 lb. Si los dos discos ruedan sin deslizarse, determine el periodo de pequeñas oscilaciones del sistema.

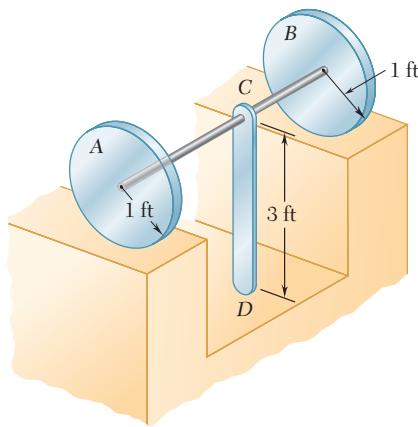


Figura P19.88

- 19.89** Cuatro barras de la misma masa m e igual longitud l están conectadas mediante los pasadores A , B , C y D y pueden moverse en un plano horizontal. Las barras están unidas a cuatro resortes con la misma constante k y se encuentran en equilibrio en la posición mostrada ($\theta = 45^\circ$). Determine el periodo de vibración si a las esquinas A y C se les dan desplazamientos pequeños e iguales dirigidos desde una hacia la otra y se sueltan.

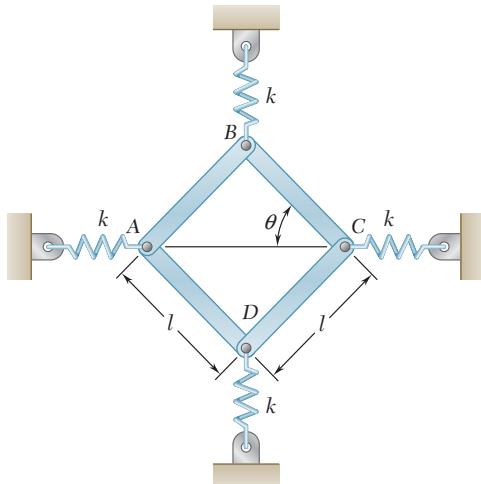


Figura P19.89

- 19.90** La barra AB de 20 lb está unida a los dos discos de 8 lb como se muestra en la figura. Si los discos ruedan sin deslizarse, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema.

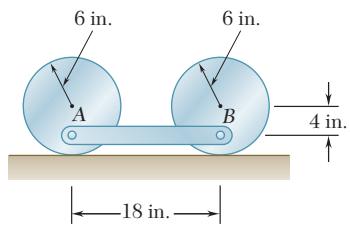


Figura P19.90

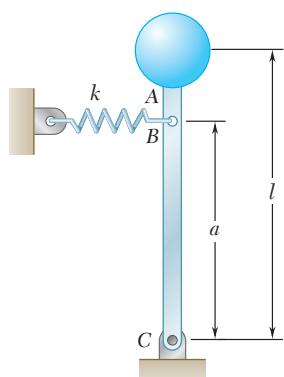


Figura P19.91 y P19.92

19.91 Un péndulo invertido que consiste en una esfera de peso W y una barra rígida ABC de longitud l y peso insignificante se sostiene mediante un pasador y una ménsula en C . Un resorte de constante k se conecta a la barra en B y no está deformado cuando la barra se encuentra en la posición vertical mostrada. Determine *a)* la frecuencia de pequeñas oscilaciones, *b)* el valor mínimo de a para el cual ocurrirán las oscilaciones.

19.92 Para el péndulo invertido del problema 19.91 y los valores dados de k , a y l , se observa que $f = 1.5$ Hz cuando $W = 2$ lb y que $f = 0.8$ Hz cuando $W = 4$ lb. Determine el valor máximo de W para el cual ocurrirán pequeñas oscilaciones.

19.93 Una barra uniforme de longitud L se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de un alambre vertical CD . Obtenga una expresión para el periodo de oscilación de la barra si al extremo B se le da un pequeño desplazamiento horizontal y luego se suelta.

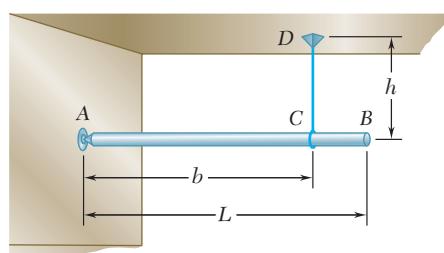


Figura P19.93

19.94 Una barra uniforme ABC de 2 kg se sostiene mediante un pasador en B y se conecta a un resorte en C . En A está conectada al bloque DE de 2 kg que está unido a un resorte y puede rodar sin fricción. Si se sabe que cada resorte puede actuar bajo tensión o compresión, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema cuando la barra se gira un pequeño ángulo y luego se suelta.

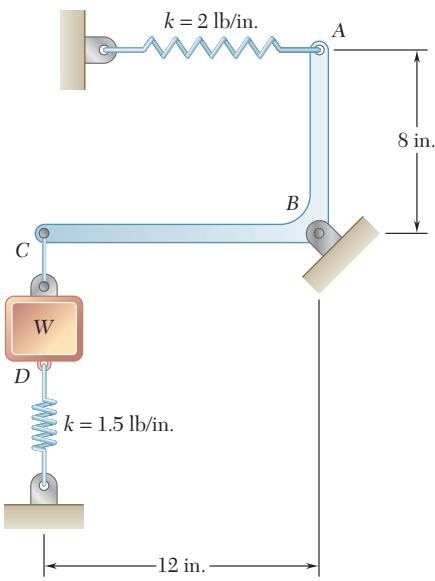


Figura P19.95

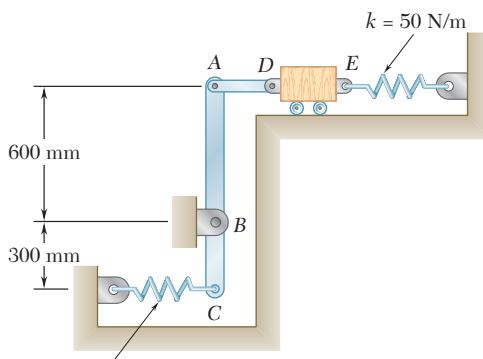


Figura P19.94

19.95 Una barra uniforme ABC de 1.4 lb se sostiene mediante un pasador en B y se conecta a un resorte en A . En C está conectada a un peso W de 3 lb que está unido a un resorte. Si se sabe que cada resorte puede actuar en tensión o compresión, determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones del sistema cuando al peso se le da un pequeño desplazamiento y luego se suelta.

***19.96** Dos barras uniformes AB y BC , cada una con masa m y longitud l , se articulan entre sí en A y están conectadas mediante pasadores a rodillos pequeños en B y C . Un resorte de constante k se encuentra unido a los pasadores en B y C , y se observa que el sistema está en equilibrio cuando cada barra forma un ángulo β con la vertical. Determine el periodo de pequeñas oscilaciones cuando al punto A se le da una pequeña deflexión hacia abajo y se suelta.

***19.97** Cuando un cuerpo sumergido se mueve a través de un fluido, las partículas del fluido fluyen alrededor del cuerpo y de ese modo adquieren energía cinética. En el caso de una esfera que se mueve en un fluido ideal, la energía cinética total adquirida por el fluido es $\frac{1}{4}\rho Vv^2$, donde ρ es la densidad de masa del fluido, V es el volumen de la esfera y v es la velocidad de esta misma. Considere un cascarón esférico hueco de 500 g y 80 mm de radio que se mantiene sumergido en un tanque de agua por medio de un resorte de constante igual a 500 N/m. *a)* Sin tomar en cuenta la fricción del fluido, determine el periodo de vibración del cascarón cuando éste se desplaza verticalmente y luego se suelta. *b)* Resuelva el inciso *a*), suponiendo que el tanque se acelera hacia arriba a la razón constante de 8 m/s^2 .

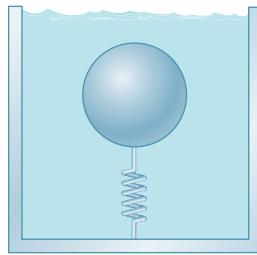


Figura P19.97

***19.98** Una placa delgada de longitud l descansa sobre medio cilindro de radio r . Obtenga una expresión para el periodo de pequeñas oscilaciones de la placa.

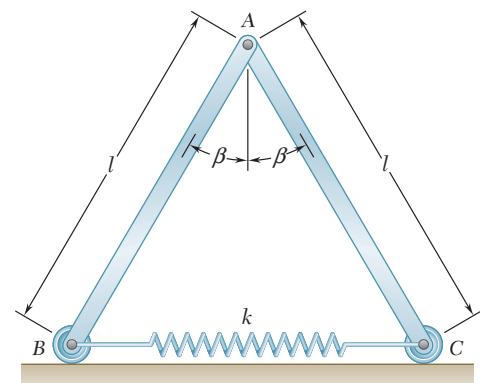


Figura P19.96

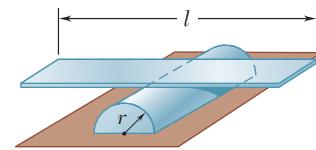


Figura P19.98

19.7. VIBRACIONES FORZADAS

Las vibraciones más importantes desde el punto de vista de las aplicaciones de ingeniería son las *vibraciones forzadas* de un sistema. Éstas ocurren cuando un sistema se sujet a una fuerza periódica o cuando se le conecta elásticamente a un soporte que tiene un movimiento alternante.

Considere primero el caso de un cuerpo de masa m suspendido de un resorte y sujeto a una fuerza periódica \mathbf{P} de magnitud $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$, donde ω_f es la frecuencia circular de \mathbf{P} y se conoce como *frecuencia circular forzada* del movimiento (figura 19.7). Esta fuerza puede ser una fuerza externa real aplicada al cuerpo o una fuerza centrífuga producida por la rotación de alguna parte desbalanceada del cuerpo (vea el problema resuelto 19.5). Denotando mediante x el desplazamiento del cuerpo medido desde su posición de equilibrio, se escribe la ecuación de movimiento,

$$+\downarrow \sum F = ma: \quad P_m \operatorname{sen} \omega_f t + W - k(\delta_{\text{estática}} + x) = m\ddot{x}$$

Si se recuerda que $W = k\delta_{\text{estática}}$ se tiene

$$m\ddot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.30)$$

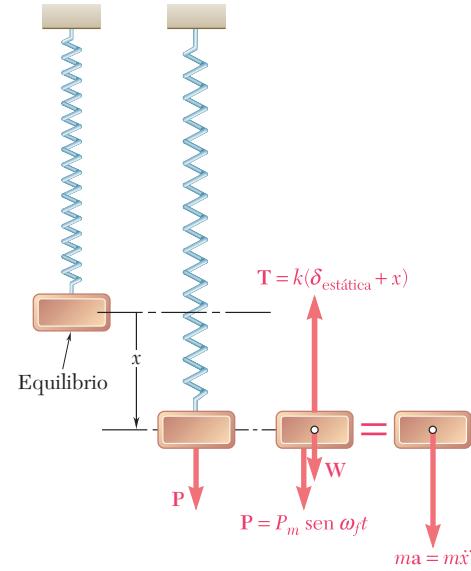


Figura 19.7

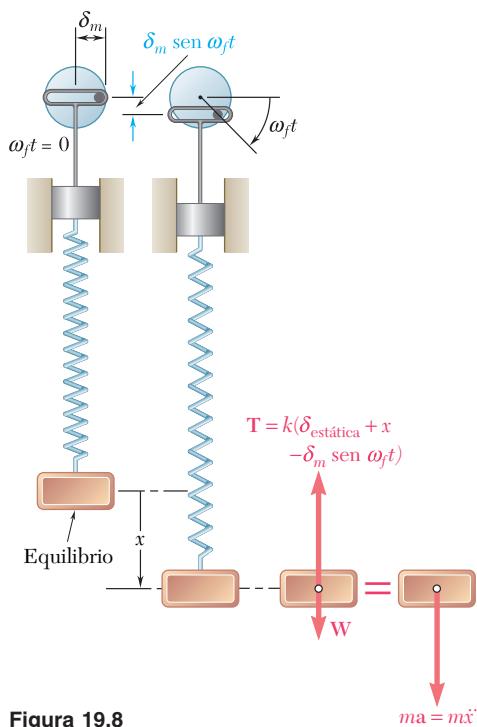


Figura 19.8

A continuación se considera el caso de un cuerpo de masa m suspendido de un resorte unido a un soporte móvil cuyo desplazamiento δ es igual a $\delta_m \text{ sen } \omega_f t$ (figura 19.8). Al medir el desplazamiento x del cuerpo desde la posición de equilibrio estático correspondiente a $\omega_f t = 0$, se encuentra que la elongación total del resorte en el tiempo t es $\delta_{\text{estática}} + x - \delta_m \text{ sen } \omega_f t$. La ecuación de movimiento es entonces

$$+\downarrow \sum F = ma: \quad W - k(\delta_{\text{estática}} + x - \delta_m \text{ sen } \omega_f t) = m\ddot{x}$$

Como $W = k\delta_{\text{estática}}$ se tiene

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \text{ sen } \omega_f t \quad (19.31)$$

Nótese que las ecuaciones (19.30) y (19.31) son de la misma forma y que una solución de la primera ecuación satisfará a la segunda si se deja que $P_m = k\delta_m$.

Una ecuación diferencial tal como (19.30) o (19.31), que posee un miembro del lado derecho diferente de cero, se dice que es *no homogénea*. Su solución general se obtiene al sumar una solución particular de la ecuación dada a la solución general de la ecuación *homogénea* correspondiente (con el miembro del lado derecho igual a cero). Una *solución particular* de (19.30) o (19.31) puede obtenerse al tratar una solución de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \text{ sen } \omega_f t \quad (19.32)$$

Al sustituir x_{part} por x en la ecuación (19.30), se obtiene

$$-m\omega_f^2 x_m \text{ sen } \omega_f t + kx_m \text{ sen } \omega_f t = P_m \text{ sen } \omega_f t$$

que puede resolverse para la amplitud,

$$x_m = \frac{P_m}{k - m\omega_f^2}$$

Puesto que, de acuerdo con la ecuación (19.4), $k/m = \omega_n^2$, donde ω_n es la frecuencia circular natural del sistema, se escribe

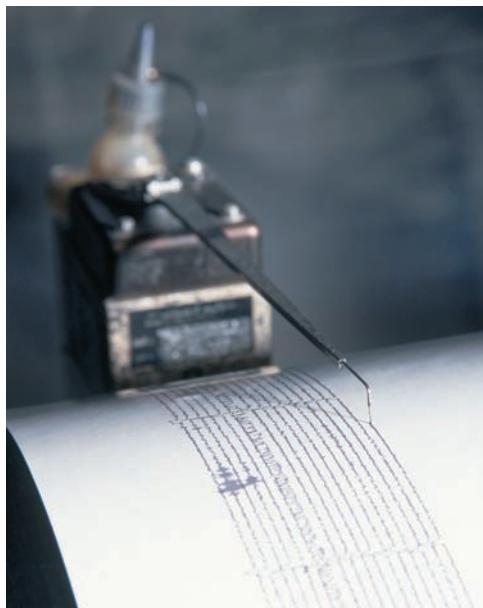
$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.33)$$

Al sustituir de (19.32) en (19.31), se obtiene de manera similar

$$x_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.33')$$

La ecuación homogénea correspondiente a (19.30) o (19.31) es la ecuación (19.2), que define la vibración libre del cuerpo. Su solución general, denominada *función complementaria*, se encontró en la sección 19.2:

$$x_{\text{comp}} = C_1 \text{ sen } \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t \quad (19.34)$$



Fotografía 19.1 Un sismómetro opera al medir la cantidad de energía necesaria para mantener una masa centrada en la caja en la presencia de una fuerte sacudida del suelo.

Al sumar la solución particular (19.32) a la función complementaria (19.34), se obtiene la *solución general* de las ecuaciones (19.30) y (19.31):

$$x = C_1 \operatorname{sen} \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t + x_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.35)$$

Hay que observar que las vibraciones obtenidas consisten en dos vibraciones superpuestas. Los primeros dos términos en la ecuación (19.35) representan una vibración libre del sistema. La frecuencia de esta vibración es la *frecuencia natural* del sistema, la cual depende únicamente de la constante k del resorte y la masa m del cuerpo, y las constantes C_1 y C_2 pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales. Esta vibración libre también se denomina como vibración *transitoria*, ya que en la práctica real se ve amortiguada de inmediato por las fuerzas de fricción (sección 19.9).

El último término en (19.35) representa la vibración de *estado estable* producida y mantenida por la fuerza aplicada o por el movimiento aplicado del apoyo o soporte. Su frecuencia es la *frecuencia forzada* impuesta por esta fuerza o movimiento, y su amplitud x_m , definida por (19.33) o (19.33'), depende de la *razón de frecuencias* ω_f/ω_n . La razón de la amplitud x_m de la vibración de estado estable a la deflexión estática P_m/k causada por una fuerza P_m , o a la amplitud δ_m de movimiento del apoyo, se llama *factor de amplificación*. A partir de las ecuaciones (19.33) y (19.33'), se obtiene

$$\text{Factor de amplificación} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.36)$$

En la figura 19.9 se ha graficado el factor de amplificación en función de la razón de frecuencia ω_f/ω_n . Se advierte que cuando $\omega_f = \omega_n$, la amplitud de la vibración forzada se vuelve infinita. Se dice que la fuerza aplicada o el movimiento aplicado por el apoyo está en *resonancia* con el sistema dado. En realidad, la amplitud de la vibración permanece finita debido a fuerzas de amortiguamiento (sección 19.9); sin embargo, una situación de este tipo debe evitarse, y la frecuencia forzada no debe elegirse demasiado cercana a la frecuencia natural del sistema. También se pudo observar que para $\omega_f < \omega_n$ el coeficiente de sen $\omega_f t$ en (19.35) es positivo, en tanto que para $\omega_f > \omega_n$ este coeficiente es negativo. En el primer caso la vibración forzada está *en fase* con la fuerza aplicada o el movimiento aplicado por el apoyo, mientras que en el segundo caso está a 180° *fuera de fase*.

Por último, se advirtió que la velocidad y la aceleración en la vibración de estado estable pueden obtenerse al diferenciar dos veces con respecto a t el último término de la ecuación (19.35). Sus valores máximos se dan mediante expresiones similares a las de las ecuaciones (19.15) de la sección 19.2, salvo que estas expresiones incluyen la hora, la amplitud y la frecuencia circular de la vibración forzada:

$$v_m = x_m \omega_f \quad a_m = x_m \omega_f^2 \quad (19.37)$$

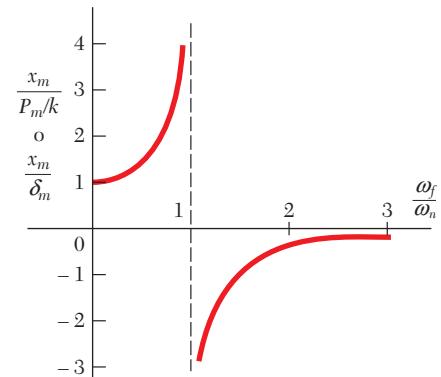
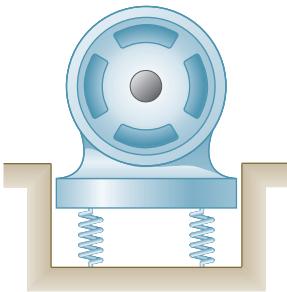


Figura 19.9



PROBLEMA RESUELTO 19.5

Un motor de 350 lb se sostiene mediante cuatro resortes, cada uno con una constante de 750 lb/in. El desbalanceo del rotor es equivalente a un peso de 1 oz ubicado a 6 in. del eje de rotación. Si el motor está restringido a moverse verticalmente, determine *a)* la velocidad en rpm a la cual ocurrirá la resonancia, *b)* la amplitud de la vibración del motor a la velocidad de 1 200 rpm.

SOLUCIÓN

a) Velocidad de resonancia. La velocidad de resonancia es igual a la frecuencia circular natural ω_n (en rpm) de la vibración libre del motor. La masa del motor y la constante equivalente de los resortes de soporte son

$$m = \frac{350 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 10.87 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

$$k = 4(750 \text{ lb/in.}) = 3000 \text{ lb/in.} = 36000 \text{ lb/ft}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{36000}{10.87}} = 57.5 \text{ rad/s} = 549 \text{ rpm}$$

Velocidad de resonancia = 549 rpm ◀

b) Amplitud de la vibración a 1 200 rpm. La velocidad angular del motor y la masa del peso equivalente de 1 oz son

$$\omega = 1200 \text{ rpm} = 125.7 \text{ rad/s}$$

$$m = (1 \text{ oz}) \frac{1 \text{ lb}}{16 \text{ oz}} \frac{1}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.001941 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

La magnitud de la fuerza centrífuga debida al desbalanceo del rotor es

$$P_m = ma_n = mr\omega^2 = (0.001941 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\frac{6}{12} \text{ ft})(125.7 \text{ rad/s})^2 = 15.33 \text{ lb}$$

La deflexión estática que provocaría una carga constante P_m es

$$\frac{P_m}{k} = \frac{15.33 \text{ lb}}{3000 \text{ lb/in.}} = 0.00511 \text{ in.}$$

La frecuencia circular forzada ω_f del movimiento es la velocidad angular del motor,

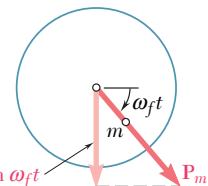
$$\omega_f = \omega = 125.7 \text{ rad/s}$$

Al sustituir los valores de P_m/k , ω_f y ω_n en la ecuación (19.33), se obtiene

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} = \frac{0.00511 \text{ in.}}{1 - (125.7/57.5)^2} = -0.001352 \text{ in.}$$

$x_m = 0.001352 \text{ in. (fuera de fase)} ◀$

Nota. Como $\omega_f > \omega_n$, la vibración está 180° fuera de fase con la fuerza centrífuga debida al desbalanceo del rotor. Por ejemplo, cuando la masa desbalanceada está directamente abajo del eje de rotación, la posición del motor es $x_m = 0.001352$ in. sobre la posición de equilibrio.



$P_m \text{ sen } \omega_f t$

P_m

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección se dedicó al análisis de las *vibraciones forzadas* de un sistema mecánico. Estas vibraciones ocurren cuando el sistema se somete a una fuerza periódica \mathbf{P} (figura 19.7), o cuando está conectado elásticamente a un soporte que tiene un movimiento alternante (figura 19.8). En el primer caso, el movimiento del sistema se define mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.30)$$

donde el miembro del lado derecho representa la magnitud de la fuerza \mathbf{P} en un instante determinado. En el segundo caso, el movimiento se define mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.31)$$

donde el miembro del lado derecho es el producto de la constante de resorte k y el desplazamiento del soporte en un instante dado. El interés se concentrará sólo en el movimiento de *estado estable* del sistema, el cual se define mediante una *solución particular* de estas ecuaciones, de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.32)$$

1. Si la vibración forzada resulta de una fuerza periódica \mathbf{P} , de amplitud P_m y frecuencia circular ω_f , la amplitud de la vibración es

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.33)$$

donde ω_n es la *frecuencia circular natural* del sistema $\omega_n = \sqrt{k/m}$, y k es la constante de resorte. Advierta que la frecuencia circular de la vibración es ω_f y que la amplitud x_m no depende de las condiciones iniciales. Para $\omega_f = \omega_n$, el denominador en la ecuación (19.33) es cero y x_m es infinita (figura 19.9); se dice que la fuerza aplicada \mathbf{P} está en *resonancia* con el sistema. Además, para $\omega_f < \omega_n$, x_m es positiva y las vibraciones están *en fase* con \mathbf{P} , mientras que, para $\omega_f > \omega_n$, x_m es negativa y la vibración está *fuerza de fase*.

a) En los problemas que siguen se pedirá determinar uno de los parámetros de la ecuación (19.33) cuando se conocen los demás. Sugerimos que al resolver este problema se tenga siempre enfrente la figura 19.9. Por ejemplo, si se pide determinar la frecuencia a la cual la amplitud de una vibración forzada tiene un valor determinado, pero no se sabe si la vibración está en o fuera de fase con respecto a la fuerza aplicada, en la figura 19.9 se observa que es posible que existan dos frecuencias que satisfagan este requerimiento, una que corresponde al valor positivo de x_m y a una vibración en fase con la fuerza aplicada, y la otra correspondiente a un valor negativo de x_m y a una vibración fuera de fase con la fuerza aplicada.

(continúa)

b) Una vez que se ha obtenido la amplitud x_m del movimiento de una componente del sistema con la ecuación (19.33), puede recurrirse a las ecuaciones (19.33) para determinar los valores máximos de la velocidad y la aceleración de esa componente:

$$v_m = x_m \omega_f \quad a_m = x_m \omega_f^2 \quad (19.37)$$

c) Cuando la fuerza aplicada P se debe al desbalance del rotor de un motor, su valor máximo es $P_m = mr\omega_f^2$, donde m es la masa del rotor, r es la distancia entre su centro de masa y el eje de rotación, y ω_f es igual a la velocidad angular del rotor expresada en rad/s [problema resuelto 19.5].

2. Si la vibración forzada la provoca un movimiento armónico simple de un soporte, de amplitud δ_m y frecuencia circular ω_f , la amplitud de la vibración es

$$x_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.33')$$

donde ω_n es la *frecuencia circular natural* del sistema, $\omega_n = \sqrt{k/m}$. También en este caso advierta que la frecuencia circular de la vibración es ω_f y que la amplitud x_m no depende de las condiciones iniciales.

a) Asegúrese de leer nuestros comentarios en los párrafos 1, 1a y 1b, ya que éstos se aplican igualmente bien a una vibración provocada por el movimiento de un soporte.

b) Si se especifica la aceleración máxima a_m del soporte, más que su desplazamiento máximo δ_m , recuerde que, ya que el movimiento del soporte es armónico simple, es posible utilizar la relación $a_m = \delta_m \omega_f^2$ para determinar δ_m ; el valor obtenido se sustituye entonces en la ecuación (19.33').

Problemas

19.99 Un bloque de 50 kg se conecta a un resorte de constante $k = 20 \text{ kN/m}$ y puede moverse sin fricción en una ranura vertical de la manera mostrada. Sobre él actúa una fuerza periódica de magnitud $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$, donde $\omega_f = 18 \text{ rad/s}$. Si la amplitud del movimiento es de 3 mm, determine el valor de P_m .

19.100 Un collarín de 9 lb puede deslizarse sobre una barra horizontal sin fricción y se conecta a un resorte de constante igual a 2.5 lb/in. Sobre él actúa una fuerza periódica de magnitud $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$, donde $P_m = 3 \text{ lb}$. Determine la amplitud del movimiento del collarín si a) $\omega_f = 5 \text{ rad/s}$ y b) $\omega_f = 10 \text{ rad/s}$.

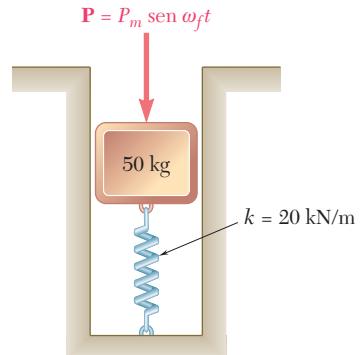


Figura P19.99

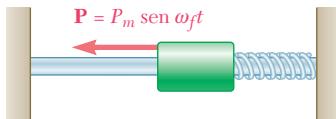


Figura P19.100, P19.101 y P19.102

19.101 Un collarín de 9 lb puede deslizarse sobre una barra horizontal sin fricción y se conecta a un resorte de constante k . Sobre él actúa una fuerza periódica de magnitud $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$, donde $P_m = 2 \text{ lb}$ y $\omega_f = 5 \text{ rad/s}$. Determine el valor de la constante de resorte k si se sabe que el movimiento del collarín tiene una amplitud de 6 in. y está a) en fase con la fuerza aplicada, b) fuera de fase con la fuerza aplicada.

19.102 Un collarín de masa m que se desliza sobre una barra horizontal se conecta a un resorte de constante k y sobre él actúa una fuerza periódica de magnitud $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$. Determine el intervalo de valores de ω_f para el cual la amplitud de la vibración excede tres veces la deflexión estática causada por una fuerza constante de magnitud P_m .

19.103 Un disco uniforme de 8 kg con radio de 200 mm está soldado a una flecha vertical con un extremo fijo en B . El disco gira un ángulo de 3° cuando se le aplica un par estático con magnitud de $50 \text{ N} \cdot \text{m}$. Si el disco se somete a un par de torsión con magnitud $T = T_m \operatorname{sen} \omega_f t$, donde $T_m = 60 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine el intervalo de valores de ω_f para los cuales la amplitud de la vibración es menor que el ángulo de rotación causado por un par estático de magnitud T_m .

19.104 Para el disco del problema 19.103, determine el intervalo de valores de ω_f para los cuales la amplitud de la vibración será menor que 3.5° .

19.105 Un bloque A de 8 kg se desliza en una ranura vertical sin fricción y se conecta a un soporte móvil B mediante un resorte AB de constante $k = 1.6 \text{ kN/m}$. Si el desplazamiento del soporte es $\delta = \delta_m \operatorname{sen} \omega_f t$, donde $\delta_m = 150 \text{ mm}$, determine el intervalo de valores de ω_f para los cuales la amplitud de la fuerza fluctuante que ejerce el resorte sobre el bloque es menor a 120 N.

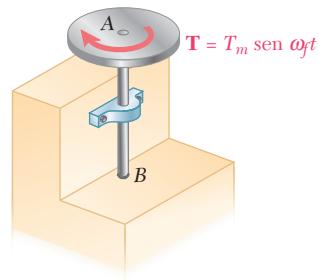


Figura P19.103 y P19.104

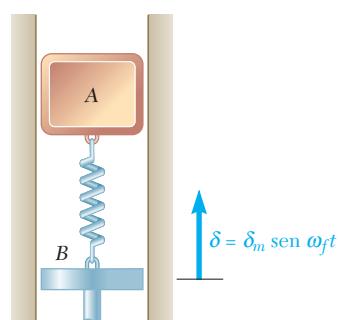


Figura P19.105

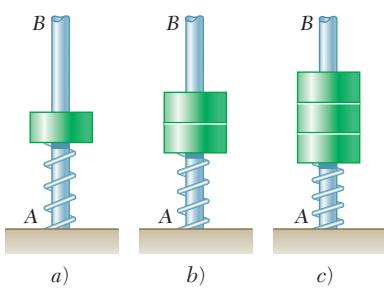


Figura P19.106

19.106 La barra AB está unida rígidamente al bastidor de un motor que funciona a velocidad constante. Cuando un collarín de masa m se coloca sobre el resorte, se observa que éste vibra con una amplitud de 15 mm. Cuando dos collarines, cada uno de masa m , se colocan sobre el resorte, se observa que la amplitud es de 18 mm. ¿Qué amplitud de vibración debería esperarse cuando se colocan tres collarines, cada uno de masa m , sobre el resorte? (Obtenga dos respuestas.)

19.107 Una viga en voladizo AB soporta un bloque que provoca una deflexión estática de 2 in. en B . Si se supone que el soporte en A experimenta un desplazamiento periódico vertical $\delta = \delta_m \operatorname{sen} \omega_f t$ donde $\delta_m = 0.5$ in., determine el intervalo de valores de ω_f para los cuales la amplitud del movimiento del bloque será menor que 1 in. Desprecie la masa de la viga y suponga que el bloque no sale de la misma.



Figura P19.107

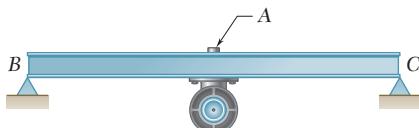


Figura P19.108

19.108 Un motor de velocidad variable está unido rígidamente a una viga BC . Cuando la velocidad del motor es menor que 600 rpm o mayor que 1 200 rpm, se observa que un pequeño objeto colocado en A permanece en contacto con la viga. Para velocidades entre 600 y 1 200 rpm se observa que el objeto "baila" e incluso pierde contacto con la viga. Determine la velocidad a la que ocurrirá la resonancia.

19.109 Un bloque A de 8 kg se desliza en una ranura vertical sin fricción y se conecta a un soporte móvil B mediante un resorte AB de constante $k = 120$ N/m. Si se sabe que el desplazamiento del soporte es $a = a_m \operatorname{sen} \omega_f t$, donde $a_m = 1.5 \text{ m/s}^2$ y $\omega_f = 5 \text{ rad/s}$, determine *a)* el desplazamiento máximo del bloque A y *b)* la amplitud de la fuerza fluctuante que ejerce el resorte sobre el bloque.

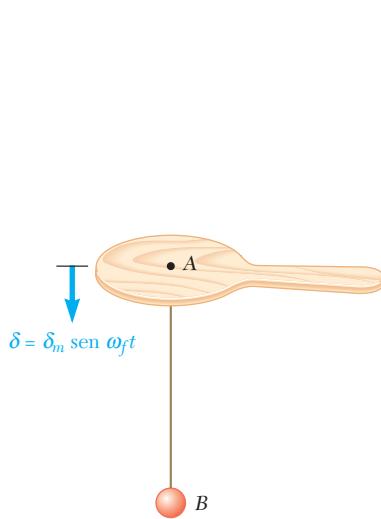


Figura P19.110

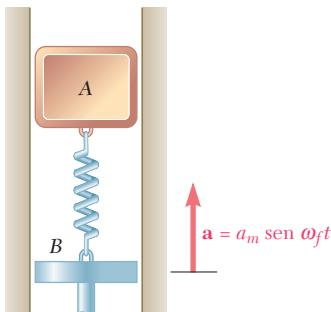


Figura P19.109

19.110 Una pelota de 0.8 lb se conecta a una paleta por medio de una cuerda elástica AB de constante $k = 5 \text{ lb/ft}$. Si la paleta se mueve verticalmente de acuerdo con la relación $\delta = \delta_m \operatorname{sen} \omega_f t$, donde $\delta_m = 8 \text{ in.}$, determine la frecuencia circular ω_f máxima permisible si la cuerda debe mantenerse tensa.

19.111 Un péndulo simple de longitud l se suspende de un collarín C , que es forzado a moverse de manera horizontal de acuerdo con la relación $x_C = \delta_m \operatorname{sen} \omega_f t$. Determine el intervalo de valores de ω_f para los cuales la amplitud del movimiento de la plomada es menor que δ_m . (Suponga que δ_m es pequeño comparado con la longitud l del péndulo.)

19.112 La plomada de 1.2 kg de un péndulo simple de longitud $l = 600$ mm se suspende de un collarín C de 1.4 kg. El collarín es obligado a moverse de acuerdo con la relación $x_C = \delta_m \operatorname{sen} \omega_f t$, con una amplitud $\delta_m = 10$ mm y una frecuencia $f_f = 0.5$ Hz. Determine *a)* la amplitud del movimiento de la plomada, *b)* la fuerza que debe aplicarse al collarín C para mantener el movimiento.

19.113 Un motor de masa M se sostiene mediante resortes con una constante de resorte equivalente k . El desbalance de su rotor es equivalente a una masa m ubicada a una distancia r del eje de rotación. Demuestre que cuando la velocidad angular del rotor es ω_f , la amplitud x_m del movimiento del motor es

$$x_m = \frac{r(m/M)(\omega_f/\omega_n)^2}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2}$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/M}$.

19.114 Cuando la velocidad rotacional de un motor de 100 kg soportado por resortes se incrementa, la amplitud de la vibración debida al desbalance de su rotor de 15 kg aumenta primero y luego disminuye. Se observa que cuando se alcanzan velocidades muy altas, la amplitud de la vibración se approxima a 3.3 mm. Determine la distancia entre el centro de masa del rotor y su eje de rotación. (*Sugerencia:* Utilice la fórmula que se obtuvo en el problema 19.113.)

19.115 Un motor que pesa 400 lb se sostiene mediante resortes que tienen una constante total de 1 200 lb/in. El desbalance del rotor es equivalente a un peso de 1 oz. ubicada a 8 in. del eje de rotación. Determine el intervalo de valores permisibles de la velocidad del motor si la amplitud de la vibración no debe superar 0.06 in.

19.116 Conforme la velocidad rotacional de un motor soportado por resortes aumenta de manera gradual desde 300 hasta 500 rpm, se observa que la amplitud de la vibración debida al desbalance de su rotor aumenta de manera continua desde 1.5 hasta 6 mm. Determine la velocidad a la cual ocurrirá la resonancia.

19.117 Un motor de 220 lb está atornillado a una viga horizontal ligera. El desbalance de su rotor es equivalente a un peso de 2 oz. ubicado a 4 in. del eje de rotación. Si la resonancia ocurre cuando el motor tiene una velocidad de 400 rpm, determine la amplitud de la vibración de estado estable a *a)* 800 rpm, *b)* 200 rpm, *c)* 425 rpm.

19.118 Un motor de 180 kg está atornillado a una viga horizontal ligera. El desbalance de su rotor es equivalente a una masa de 28 g ubicada a 150 mm del eje de rotación, y la deformación estática de la viga debida al peso del motor es de 12 mm. La amplitud de la vibración debida al desbalance puede disminuirse agregando una placa a la base del motor. Si la amplitud de la vibración debe ser menor a 60 μm , para velocidades del motor mayores que 300 rpm, determine el peso requerido de la placa.

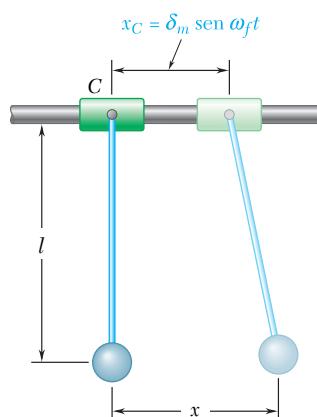


Figura P19.111 y P.19.112

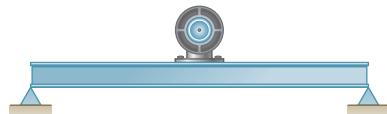


Figura P19.117 y P.19.118

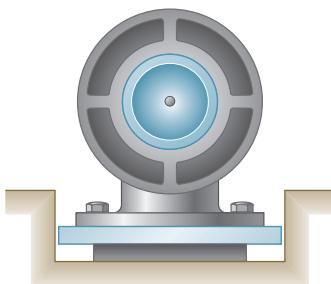


Figura P19.119

19.119 El desbalance del rotor de un motor de 400 lb es equivalente a un peso de 3 oz. localizado a 6 in. del eje de rotación. A fin de limitar en 0.2 lb la amplitud de la fuerza fluctuante ejercida sobre el cimiento cuando el motor opera a velocidades de 100 rpm o mayores, se debe colocar una almohadilla entre el motor y el cimiento. Determine *a*) la constante de resorte k máxima permisible para la almohadilla, *b*) la amplitud correspondiente de la fuerza fluctuante ejercida sobre el cimiento cuando el motor se opera a 200 rpm.

19.120 Un motor de 180 kg se sostiene mediante resortes de constante total igual a 150 kN/m. El desbalance del rotor es equivalente a una masa de 28 g ubicada a 150 mm del eje de rotación. Determine el intervalo de velocidades del motor para el cual la amplitud de la fuerza fluctuante ejercida sobre el cimiento es menor a 20 N.

19.121 Un vibrómetro que se utiliza para medir la amplitud de vibraciones consiste en una caja que contiene un sistema masa-resorte con una frecuencia natural conocida de 120 Hz. La caja está rígidamente unida a la superficie que se mueve de acuerdo con la ecuación $y = \delta_m \operatorname{sen} \omega_f t$. Si la amplitud z_m del movimiento de la masa relativa a la caja se utiliza como una medida de la amplitud δ_m de la vibración de la superficie, determine *a*) el error porcentual cuando la frecuencia de la vibración es de 600 Hz y *b*) la frecuencia a la cual el error es cero.

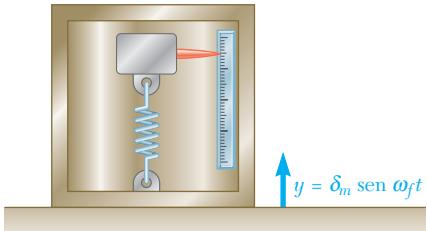


Figura P19.121 y P19.122

19.122 Ciertos acelerómetros están compuestos esencialmente por una caja que contiene un sistema masa-resorte con una frecuencia natural conocida de 2 200 Hz. La caja está rígidamente unida a una superficie que se mueve de acuerdo con la ecuación $y = \delta_m \operatorname{sen} \omega_f t$. Si la amplitud z_m del movimiento de la masa relativa a la caja por un factor de escala ω_n^2 se utiliza como una medida de la aceleración máxima $\alpha_m = \delta_m \omega_f^2$ de la superficie vibrante, determine el error porcentual cuando la frecuencia de la vibración es de 600 Hz.

19.123 Las figuras (1) y (2) muestran cómo es posible utilizar resortes para soportar un bloque en dos situaciones diferentes. En la figura (1) los resortes ayudan a disminuir la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida por el bloque al cimiento. En la figura (2) ayudan a disminuir la amplitud del desplazamiento fluctuante que transmite el cimiento al bloque. El cociente de la fuerza transmitida y la fuerza aplicada o el cociente entre el desplazamiento transmitido y el desplazamiento que se genera recibe el nombre de *transmisibilidad*. Obtenga una ecuación para la transmisibilidad en cada situación. Indique su respuesta en términos de la razón ω_f/ω_n de la frecuencia ω_f de la fuerza aplicada o el desplazamiento que se genera respecto a la frecuencia natural ω_n del sistema resorte-masa. Demuestre que para provocar cualquier reducción en la transmisibilidad, el cociente ω_f/ω_n debe ser mayor que $\sqrt{2}$.

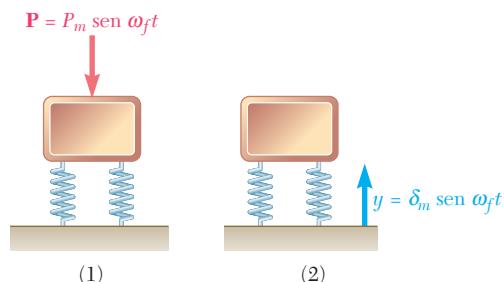


Figura P19.123

19.124 Un disco de 60 lb se conecta con una excentricidad $e = 0.006$ in. al punto medio de una flecha vertical AB que gira a una velocidad angular constante ω_f . Si se sabe que la constante de resorte k para el movimiento horizontal de un disco es de 40 000 lb/ft, determine *a)* la velocidad angular ω_f en la cual ocurrirá resonancia y *b)* la deflexión r de la flecha cuando $\omega_f = 1200$ rpm.

19.125 Un pequeño remolque y su carga tienen una masa total de 250 kg. El remolque se sostiene por medio de dos resortes, cada uno de constante igual a 10 kN/m, y se jala sobre un camino, cuya superficie puede aproximarse por medio de una curva senoidal con una amplitud de 40 mm y una longitud de onda de 5 m (esto es, la distancia entre crestas sucesivas es de 5 m y la distancia vertical de cresta a seno es de 80 mm). Determine *a)* la velocidad a la cual ocurrirá la resonancia y *b)* la amplitud de la vibración del remolque a una velocidad de 50 km/h.

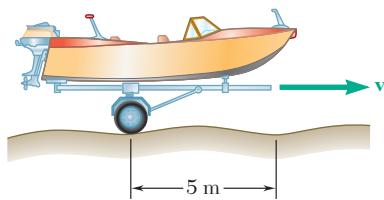


Figura P19.125

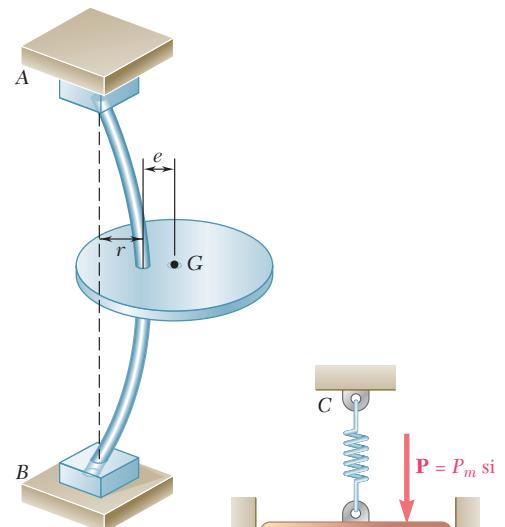


Figura P19.124

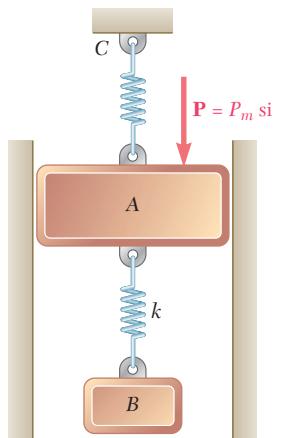


Figura P19.126

19.126 El bloque A puede moverse sin fricción en la ranura como se muestra en la figura y sobre él actúa una fuerza periódica vertical de magnitud $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$, donde $\omega_f = 2$ rad/s y $P_m = 20$ N. Un resorte de constante k se conecta a la parte inferior del bloque A y a un bloque B de 22 kg. Determine *a)* el valor de la constante k que evitará una vibración de estado estable del bloque A y *b)* la amplitud correspondiente de la vibración del bloque B.

VIBRACIONES AMORTIGUADAS

*19.8. VIBRACIONES LIBRES AMORTIGUADAS

Los sistemas vibratorios considerados en la primera parte de este capítulo se supusieron libres de amortiguamiento. En realidad, todas las vibraciones se amortiguan en cierto grado gracias a las fuerzas de fricción. Estas fuerzas pueden deberse a *fricción seca* o a *fricción de Coulomb*, entre cuerpos rígidos, a *fricción fluida*, cuando un cuerpo rígido se mueve en un fluido, o a *fricción interna* entre las moléculas de un cuerpo aparentemente elástico.

Un tipo de amortiguamiento de interés especial es el *amortiguamiento viscoso* ocasionado por fricción o rozamiento de un fluido a velocidades bajas y moderadas. El amortiguamiento viscoso se caracteriza por el hecho de que la fuerza de fricción es *directamente proporcional y opuesta a la velocidad* del cuerpo en movimiento. Como ejemplo, considérese de nuevo un cuerpo de masa m suspendido de un resorte de constante k , donde se supondrá que el cuerpo está conectado al émbolo de un amortiguador (figura 19.10). La magnitud de la fuerza de fricción que ejerce el fluido de los alrededores sobre el émbolo es igual a $c\dot{x}$, donde la constante c , expresada en $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}$ o $\text{lb} \cdot \text{s}/\text{ft}$ y que se conoce como *coeficiente de amortiguamiento viscoso*, depende de las propiedades físicas del fluido y de la construcción del amortiguador. La ecuación de movimiento es

$$+\downarrow \sum F = ma: \quad W - k(\delta_{\text{estática}} + x) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (19.38)$$

Al sustituir $x = e^{\lambda t}$ en (19.38) y dividir entre $e^{\lambda t}$ se escribe la *ecuación característica*

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \quad (19.39)$$

y se obtienen las raíces

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (19.40)$$

Al definir el *coeficiente de amortiguamiento crítico* c_c , como el valor de c que hace que el radical en la ecuación (19.40) se iguale a cero, se escribe

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \quad (19.41)$$

donde ω_n es la frecuencia circular natural del sistema en ausencia de amortiguamiento. Se pueden distinguir tres casos diferentes de amortiguamiento, dependiendo del valor del coeficiente c .

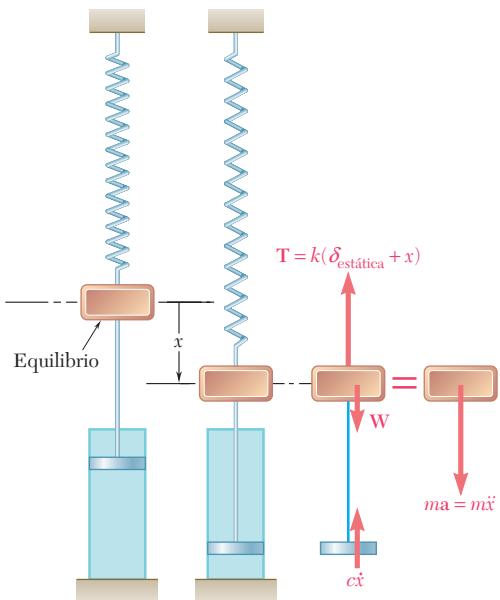


Figura 19.10

- 1.** *Sobreamortiguamiento o amortiguamiento fuerte: $c > c_c$.* Las raíces λ_1 y λ_2 de la ecuación característica (19.39) son reales y distintas, y la solución general de la ecuación diferencial (19.38) es

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (19.42)$$

Esta solución corresponde a un movimiento no vibratorio. Puesto que λ_1 y λ_2 son ambas negativas, x tiende a cero cuando t aumenta de manera indefinida. Sin embargo, el sistema en realidad vuelve a su posición de equilibrio después de un tiempo finito.

- 2.** *Amortiguamiento crítico:* $c = c_c$. La ecuación característica tiene una doble raíz $\lambda = -c_c/2m = -\omega_n$, y la solución general de (19.38) es

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-\omega_n t} \quad (19.43)$$

El movimiento que se obtiene es otra vez no vibratorio. Los sistemas críticamente amortiguados son de especial interés en aplicaciones de ingeniería, pues vuelven a su posición de equilibrio en el tiempo más corto posible sin oscilación.

3. Subamortiguamiento o amortiguamiento débil: $c < c_c$. Las raíces de la ecuación (19.39) son complejas y conjugadas, y la solución general de (19.38) es de la forma

$$x = e^{-(c/2m)t} (C_1 \sin \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) \quad (19.44)$$

donde ω_d se define por la relación

$$\omega_d^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m} \right)^2$$

Al sustituir $k/m = \omega_n^2$ y recordar (19.41), se escribe

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c} \right)^2} \quad (19.45)$$

donde la constante c/c_c se conoce como el *factor de amortiguamiento*. Aun cuando el movimiento en realidad no se repite a sí mismo, la constante ω_d se conoce comúnmente como la *frecuencia circular* de la vibración amortiguada. Una sustitución similar a la que se utilizó en la sección 19.2 permite escribir la solución general de la ecuación (19.38) en la forma

$$x = x_0 e^{-(c/2m)t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) \quad (19.46)$$

El movimiento definido por la ecuación (19.46) es vibratorio con amplitud decreciente (figura 19.11), y el intervalo de tiempo $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ que separa dos puntos sucesivos donde la curva definida por la ecuación (19.46) toca una de las curvas límite que se muestran en la figura 19.11 se conoce comúnmente como el *periodo de vibración amortiguada*. De acuerdo con la ecuación (19.45), se observa que $\omega_d < \omega_n$ y, por ello, que τ_d es más grande que el periodo de vibración τ_n del sistema no amortiguado correspondiente.

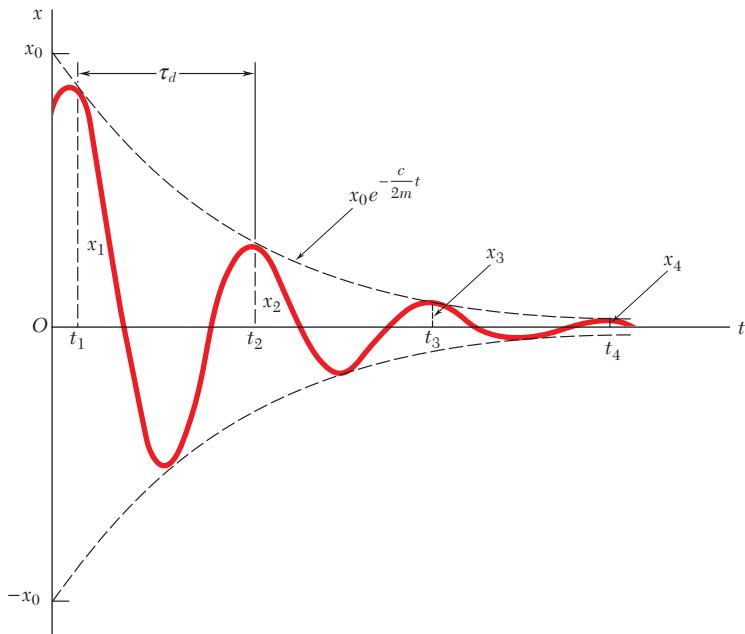


Figura 19.11

***19.9. VIBRACIONES FORZADAS AMORTIGUADAS**

Si el sistema considerado en la sección anterior está sujeto a una fuerza periódica \mathbf{P} de magnitud $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$, la ecuación de movimiento se convierte en

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.47)$$

La solución general de (19.47) se obtiene al sumar una solución particular de (19.47) a la función complementaria o solución general de la ecuación homogénea (19.38). La función complementaria está dada por (19.42), (19.43) o (19.44), según el tipo de amortiguamiento considerado. Esto representa un movimiento *transitorio* que finalmente se amortigua.

El interés en esta sección se centra en la vibración de estado estable representada por una solución particular de (19.47) de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} (\omega_f t - \varphi) \quad (19.48)$$

Al sustituir x_{part} en vez de x en (19.47), se obtiene

$$\begin{aligned} -m\omega_f^2 x_m \operatorname{sen} (\omega_f t - \varphi) + c\omega_f x_m \cos (\omega_f t - \varphi) + kx_m \operatorname{sen} (\omega_f t - \varphi) \\ = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \end{aligned}$$

Al hacer $\omega_f t - \varphi$ sucesivamente igual a 0 y a $\pi/2$, se escribe

$$c\omega_f x_m = P_m \operatorname{sen} \varphi \quad (19.49)$$

$$(k - m\omega_f^2) x_m = P_m \cos \varphi \quad (19.50)$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros de (19.49) y (19.50) y sumar, resulta

$$[(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2] x_m^2 = P_m^2 \quad (19.51)$$

Al resolver (19.51) para x_m y dividir (19.49) y (19.50) miembro a miembro, se obtiene, respectivamente,

$$x_m = \frac{P_m}{\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}} \quad \tan \varphi = \frac{c\omega_f}{k - m\omega_f^2} \quad (19.52)$$

De acuerdo con la ecuación (19.4) de que $k/m = \omega_n^2$, donde ω_n es la frecuencia circular de la vibración libre no amortiguada, y conforme a (19.41), de que $2m\omega_n = c_c$, donde c_c es el coeficiente de amortiguamiento crítico del sistema, se escribe

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \quad (19.53)$$

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.54)$$



Fotografía 19.2 La suspensión de automóvil está compuesta, en esencia, por un resorte y un amortiguador, el cual provocará que la carrocería se someta a *vibraciones forzadas amortiguadas* cuando el vehículo sea conducido sobre un camino disparejo.



Fotografía 19.3 La camioneta experimenta vibración forzada amortiguada en la prueba dinámica para vehículos que se muestra en la fotografía.

La fórmula (19.53) expresa el factor de amplificación en función de la razón de frecuencias ω_f/ω_n y del factor de amortiguamiento c/c_c . Es posible usarla para determinar la amplitud de la vibración de estado estable producida por una fuerza aplicada de magnitud $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$ o por el movimiento de apoyo aplicado $\delta = \delta_m \operatorname{sen} \omega_f t$. La fórmula (19.54) define en términos de los mismos parámetros la *diferencia de fase* φ entre la fuerza aplicada o el movimiento del apoyo aplicado y la vibración de estado estable resultante del sistema amortiguado. El factor de amplificación se ha graficado en función de la razón de frecuencias en la figura 19.12 para diferentes valores del factor de amortiguamiento. Se observa que la amplitud de una vibración forzada puede mantenerse pequeña al elegir un alto coeficiente de amortiguamiento viscoso c o al mantener alejadas las frecuencias natural y forzada.

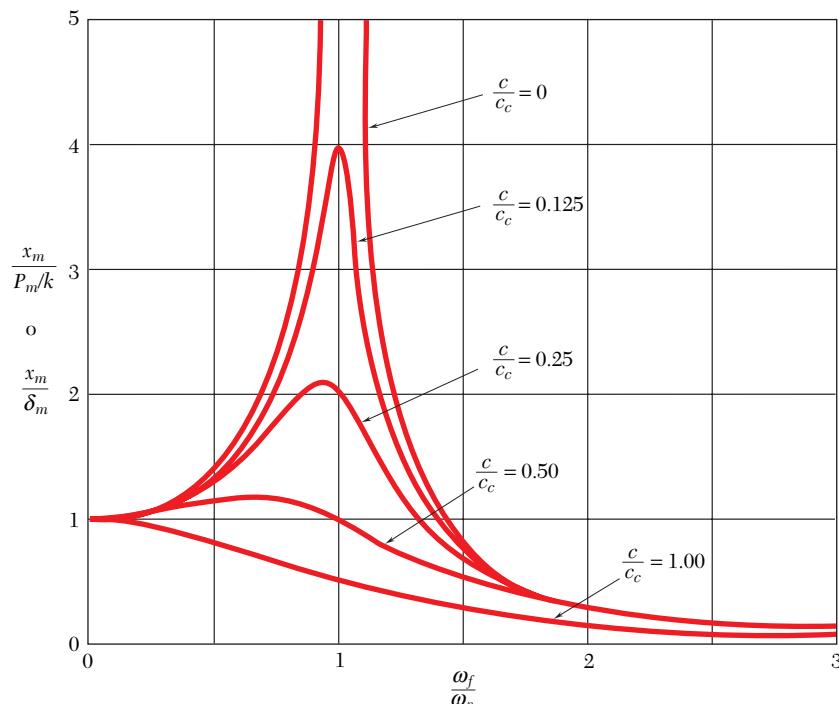


Figura 19.12

*19.10. ANALOGÍAS ELÉCTRICAS

Los circuitos eléctricos oscilantes se caracterizan por ecuaciones diferenciales del mismo tipo que las que se obtienen en las secciones precedentes. Por lo tanto, su análisis es similar al de un sistema mecánico, y los resultados que se obtienen para un sistema vibratorio dado pueden extenderse de inmediato al circuito equivalente. De manera inversa, cualquier resultado obtenido para un circuito eléctrico se aplicará también al sistema mecánico correspondiente.

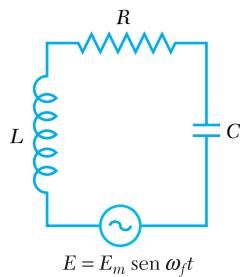


Figura 19.13

Considere un circuito eléctrico compuesto por un inductor de inductancia L , un resistor de resistencia R y un capacitor de capacitancia C conectado en serie con una fuente de voltaje alterno $E = E_m \operatorname{sen} \omega_f t$ (figura 19.13). De la teoría elemental de circuitos[†] se sabe que si i denota la corriente en el circuito y q la carga eléctrica en el capacitor, la caída de potencial es $L(di/dt)$ a través del inductor, Ri a través del resistor y q/C a través del capacitor. Al expresar que la suma algebraica del voltaje aplicado y de las caídas de potencial alrededor del circuito cerrado es cero, se escribe

$$E_m \operatorname{sen} \omega_f t - L \frac{di}{dt} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \quad (19.55)$$

Al reordenar los términos y recordar que en cualquier instante la corriente i es igual a la razón de cambio \dot{q} de la carga q , se tiene

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.56)$$

Se verifica que la ecuación (19.56), que define las oscilaciones del circuito eléctrico de la figura 19.13, es del mismo tipo que la ecuación (19.47), la cual caracteriza las vibraciones forzadas amortiguadas del sistema mecánico de la figura 19.10. Al comparar las dos ecuaciones, es posible construir una tabla de las expresiones mecánicas y eléctricas análogas.

Tabla 19.2. Características de un sistema mecánico y de sus analogías eléctricas

Sistema mecánico	Circuito eléctrico
m Masa	L Inductancia
c Coeficiente de amortiguamiento viscoso	R Resistencia
k Constante de resorte	$1/C$ Recíproco de la capacitancia
x Desplazamiento	q Carga
v Velocidad	i Corriente
P Fuerza aplicada	E Voltaje aplicado

[†]Véase C. R. Paul, S. A. Nasar y L. E. Unnewehr, *Introduction to Electrical Engineering*, 2a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1992.

La tabla 19.2 puede utilizarse para extender los resultados que se obtuvieron en las secciones anteriores para diversos sistemas mecánicos a sus análogos eléctricos. Por ejemplo, la amplitud i_m de la corriente en el circuito de la figura 19.13 se obtiene al notar que corresponde al valor máximo v_m de la velocidad en el sistema mecánico análogo. De acuerdo con la primera de las ecuaciones (19.37), $v_m = x_m \omega_f$, si se sustituye x_m de la ecuación (19.52) y se reemplazan las constantes del sistema mecánico con expresiones eléctricas correspondientes, se tiene

$$i_m = \frac{\omega_f E_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega_f^2\right)^2 + (R\omega_f)^2}} \quad (19.57)$$

El radical en la expresión anterior se conoce como *impedancia* del circuito eléctrico.

La analogía entre sistemas y circuitos eléctricos se cumple tanto para oscilaciones transitorias como para oscilaciones de estado estable. Las oscilaciones del circuito que se muestra en la figura 19.14, por ejemplo, son análogas a las vibraciones libres amortiguadas del sistema de la figura 19.10. En cuanto a lo que se refiere a condiciones iniciales, debe advertirse que será del circuito S cuando la carga en el capacitor es $q = q_0$ es equivalente a liberar la masa del sistema mecánico sin velocidad inicial desde la posición $x = x_0$. Se debe observar también que si una batería de voltaje constante E se introduce en el circuito eléctrico de la figura 19.14, el cierre del interruptor S será equivalente a aplicar en forma repentina una fuerza de magnitud constante P a la masa del sistema mecánico de la figura 19.10.

El análisis anterior sería de valor cuestionable si el único resultado fuera hacer posible que los estudiantes de mecánica analizaran circuitos eléctricos sin aprender los elementos de la teoría de circuitos. Se espera que este análisis sirva, en cambio, de motivación para que los estudiantes apliquen en la solución de problemas de vibraciones mecánicas las técnicas matemáticas que quizás aprendieron en los últimos cursos de teoría de circuitos. Sin embargo, el valor principal del concepto de la analogía eléctrica reside en su aplicación en *métodos experimentales* para la determinación de las características de un sistema mecánico determinado. De hecho, un circuito eléctrico se construye con mayor facilidad que un modelo mecánico, y el hecho de que sus características puedan modificarse al variar la inductancia, la resistencia o la capacidad de sus diferentes componentes hace que el uso de la analogía eléctrica resulte particularmente conveniente.

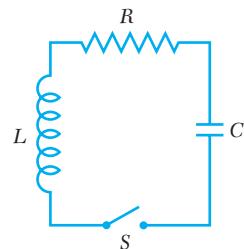


Figura 19.14

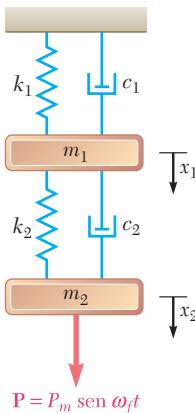


Figura 19.15

Para determinar la analogía eléctrica de un sistema mecánico determinado, hay que centrar la atención en cada masa en movimiento del sistema y observar qué resortes, amortiguadores o fuerzas externas se le aplican directamente. Después es posible construir un circuito eléctrico equivalente para duplicar cada una de las unidades mecánicas definidas de esa forma; los diferentes circuitos que se obtienen de ese modo formarán en conjunto el circuito deseado. Considérese, por ejemplo, el sistema mecánico de la figura 19.15. Se observa que sobre la masa m_1 actúan dos resortes de constantes k_1 y k_2 y dos amortiguadores caracterizados por los coeficientes de amortiguamiento viscoso c_1 y c_2 . El circuito eléctrico debe incluir consecuentemente un lazo consistente en un inductor de inductancia L_1 proporcional a m_1 , de dos capacitores de capacitancia C_1 y C_2 inversamente proporcionales a k_1 y k_2 , respectivamente, y de dos resistores de resistencia R_1 y R_2 , proporcionales de forma respectiva a c_1 y c_2 . Puesto que sobre la masa m_2 actúa el resorte k_2 y el amortiguador c_2 , así como la fuerza $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$, el circuito debe incluir también un lazo que contenga al capacitor C_2 , al resistor R_2 , al nuevo inductor L_2 y a la fuente de voltaje $E = E_m \operatorname{sen} \omega_f t$ (figura 19.16).

Para confirmar que el sistema mecánico de la figura 19.15 y el circuito eléctrico de la figura 19.16 satisfacen en realidad las mismas ecuaciones diferenciales, se deducirán primero las ecuaciones de movimiento para m_1 y m_2 . Al denotar, respectivamente, por x_1 y x_2 los desplazamientos de m_1 y m_2 de sus posiciones de equilibrio, se observa que la elongación del resorte k_1 (medida desde la posición de equilibrio) es igual a x_1 , en tanto que la elongación del resorte k_2 es igual al desplazamiento relativo $x_2 - x_1$ de m_2 con respecto a m_1 . Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para m_1 y m_2 son

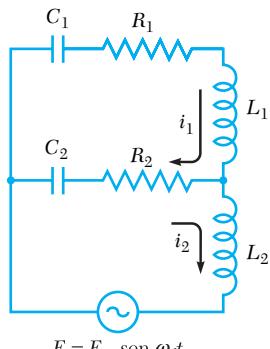


Figura 19.16

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0 \quad (19.58)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.59)$$

Considere ahora el circuito eléctrico de la figura 19.16; se denota, respectivamente, por i_1 e i_2 la corriente en el primero y el segundo lazos, y por q_1 y q_2 las integrales $\int i_2 dt$ e $\int i_1 dt$. Al notar que la carga en el capacitor C_1 es q_1 , mientras que la carga en C_2 es $q_1 - q_2$, se expresa que la suma de las diferencias de potencial en cada lazo es cero y se obtienen las siguientes ecuaciones

$$L_1 \ddot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + R_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_2} = 0 \quad (19.60)$$

$$L_2 \ddot{q}_2 + R_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + \frac{q_1 - q_2}{C_2} = E_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.61)$$

Es fácil verificar que las ecuaciones (19.60) y (19.61) se reducen a (19.58) y (19.59), respectivamente, cuando se efectúan las sustituciones indicadas en la tabla 19.2.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se formuló un modelo más realista de un sistema vibratorio al incluir el efecto del *amortiguamiento viscoso* provocado por la fricción fluida. El amortiguamiento viscoso se representó en la figura 19.10 mediante la fuerza ejercida sobre el cuerpo en movimiento por un émbolo que se mueve en el interior de un amortiguador. Esta fuerza es igual en magnitud a $c\dot{x}$, donde la constante c , expresada en N · s/m o lb · s/ft, se conoce como *coeficiente de amortiguamiento viscoso*. Téngase presente que es necesario utilizar la misma convención de signos para x , \dot{x} y \ddot{x} .

1. Vibraciones libres amortiguadas. Se encontró que la ecuación diferencial que define este movimiento es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (19.38)$$

Para obtener la solución de esta ecuación, calcule el *coeficiente de amortiguamiento crítico* c_c utilizando la fórmula

$$c_c = 2m\sqrt{k/m} = 2m\omega_n \quad (19.41)$$

donde ω_n es la frecuencia circular natural del sistema *no amortiguado*.

a) Si $c > c_c$ (sobreamortiguamiento), la solución de la ecuación (19.38) es

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (19.42)$$

donde

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (19.40)$$

y donde las constantes C_1 y C_2 pueden determinarse a partir de condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$. Esta solución corresponde a un movimiento no vibratorio.

b) Si $c = c_c$ (amortiguamiento crítico), la solución de la ecuación (19.38) es

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \quad (19.43)$$

que corresponde también a un movimiento no vibratorio.

c) Si $c < c_c$ (subamortiguamiento), la solución de la ecuación (19.38) es

$$x = x_0 e^{-(c/2m)t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) \quad (19.46)$$

donde

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \quad (19.45)$$

y donde x_0 y ϕ pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales $x(0)$ y $\dot{x}(0)$. Esta solución corresponde a oscilaciones de amplitud decreciente y de periodo $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ (figura 19.11).

(continúa)

2. Vibraciones forzadas amortiguadas. Estas vibraciones ocurren cuando un sistema con amortiguamiento viscoso se somete a una fuerza periódica \mathbf{P} de magnitud $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$ o cuando está elásticamente conectado a un apoyo con un movimiento alternativo $\delta = \delta_m \operatorname{sen} \omega_f t$. En el primer caso el movimiento se define mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.47)$$

y en el segundo caso mediante una ecuación similar que se obtiene al reemplazar P_m con $k\delta_m$. Sólo interesa el movimiento de *estado estable* del sistema, el cual se define mediante una *solución particular* de estas ecuaciones, de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} (\omega_f t - \varphi) \quad (19.48)$$

donde

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \quad (19.53)$$

y

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.54)$$

La expresión dada en la ecuación (19.53) se conoce como *factor de amplificación* y se ha graficado en función de la razón de frecuencias ω_f/ω_n en la figura 19.12 para valores diferentes del factor de amortiguamiento c/c_c . En los problemas que siguen es posible que se le pida determinar uno de los parámetros de las ecuaciones (19.53) y (19.54) cuando se conocen los demás.

Problemas

19.127 Demuestre que en el caso de sobreamortiguamiento ($c > c_c$) un cuerpo nunca pasa por su posición de equilibrio O a) si se suelta sin velocidad inicial desde una posición arbitraria, o b) si empieza desde O con una velocidad inicial arbitraria.

19.128 Demuestre que en el caso de sobreamortiguamiento ($c > c_c$), un cuerpo que se suelta desde una posición arbitraria con una velocidad inicial arbitraria no puede pasar más de una vez por su posición de equilibrio.

19.129 En el caso de subamortiguamiento, los desplazamientos x_1, x_2, x_3 , que se muestran en la figura 19.11 pueden suponerse iguales a los desplazamientos máximos. Demuestre que la razón de dos desplazamientos máximos sucesivos x_n y x_{n+1} es constante y que el logaritmo natural de este cociente, denominado *decremento logarítmico*, es

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi(c/c_c)}{\sqrt{1 - (c/c_c)^2}}$$

19.130 En la práctica muchas veces es difícil determinar el decremento logarítmico de un sistema con subamortiguamiento como el definido en el problema 19.129 mediante dos desplazamientos máximos sucesivos. Demuestre que el decremento logarítmico puede también expresarse como $(1/k) \ln(x_n/x_{n+k})$, donde k es el número de ciclos entre lecturas de desplazamiento máximo.

19.131 En un sistema con subamortiguamiento ($c < c_c$), el periodo de vibración se define comúnmente como el intervalo de tiempo $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ correspondiente a dos puntos sucesivos donde la curva desplazamiento-tiempo toca una de las curvas límite que se muestran en la figura 19.11. Demuestre que el intervalo de tiempo a) entre un desplazamiento positivo máximo y el siguiente desplazamiento negativo es $\frac{1}{2}\tau_d$, b) entre dos desplazamientos cero sucesivos es $\frac{1}{2}\tau_d$, c) entre un desplazamiento máximo positivo y el siguiente desplazamiento cero es mayor que $\frac{1}{4}\tau_d$.

19.132 El bloque mostrado se baja 1.2 in. desde su posición de equilibrio y se suelta. Si se sabe que después de 10 ciclos el desplazamiento máximo del bloque es 0.5 in., determine a) el factor de amortiguamiento c/c_c , b) el valor del coeficiente de amortiguamiento viscoso. (Sugerencia: Vea los problemas 19.129 y 19.130.)

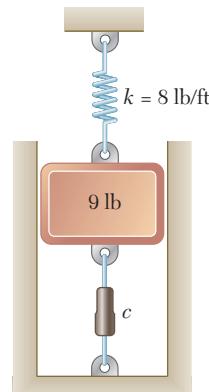
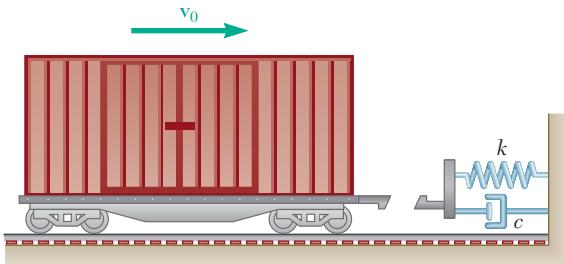
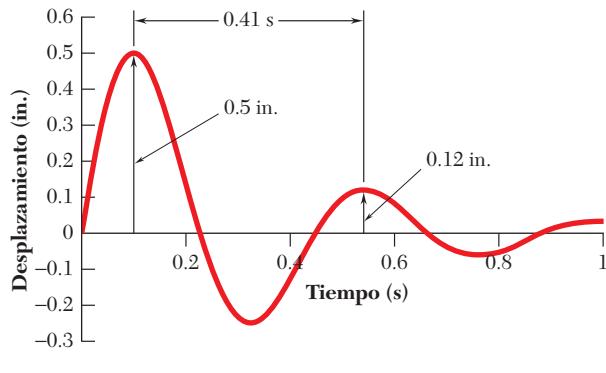


Figura P19.132

19.133 Un vagón de ferrocarril cargado que pesa 30 000 lb rueda a una velocidad constante v_0 cuando se acopla con un sistema de resorte y amortiguador (figura 1). La curva de desplazamiento contra tiempo registrada para el vagón de ferrocarril después del acoplamiento es como se muestra en la figura 2. Determine *a*) la constante de amortiguamiento, *b*) la constante de resorte. (*Sugerencia:* Utilice la definición de decremento logarítmico dada en el problema 19.129.)



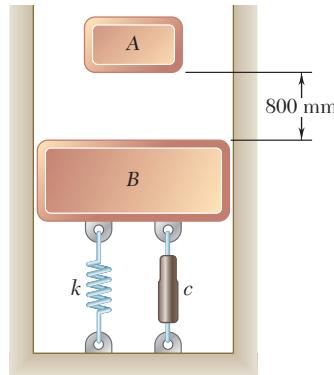
(1)



(2)

Figura P19.133

19.134 Un bloque de 4 kg se deja caer desde una altura de 800 mm sobre un bloque *B* de 9 kg que está en reposo. El bloque *B* está soportado por un resorte de constante $k = 1\,500 \text{ N/m}$ y se encuentra unido a un amortiguador con coeficiente $c = 230 \text{ N} \cdot \text{s/m}$. Si se sabe que no hay rebote, determine la máxima distancia que se moverán los bloques después del impacto.

**Figura P19.134**

19.135 Retome el problema 19.134, y ahora suponga que el amortiguador tiene un coeficiente $c = 300 \text{ N} \cdot \text{s/m}$.

19.136 El barril de un cañón de campaña pesa 1 500 lb y regresa a la posición de disparo después de retroceder mediante un recuperador de constante $c = 1\,100 \text{ lb} \cdot \text{s/ft}$. Determine *a*) la constante k que debe utilizarse para que el recuperador regrese el barril a la posición de disparo en el tiempo más corto posible sin ninguna oscilación, *b*) el tiempo necesario para que el barril retroceda dos tercios del trayecto desde su posición de retroceso máximo hasta la posición de disparo.

- 19.137** Una barra uniforme de masa m se sostiene por medio de un pasador en A y un resorte de constante k en B y se conecta en D a un amortiguador de coeficiente de amortiguamiento c . Determine en términos de m , k y c , para pequeñas oscilaciones, *a)* la ecuación diferencial de movimiento, *b)* el coeficiente de amortiguamiento crítico c_c .

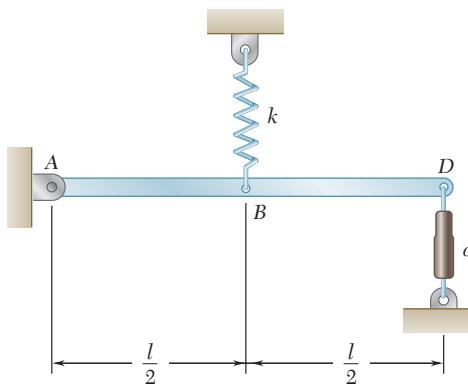


Figura P19.137

- 19.138** Una barra uniforme de 4 lb se sostiene mediante un pasador en O y un resorte en A y se conecta a un amortiguador en B . Determine *a)* la ecuación diferencial de movimiento para pequeñas oscilaciones, *b)* el ángulo que formará la barra con la horizontal 5 s después de que el extremo B se empuja 0.9 in. hacia abajo y se suelta.

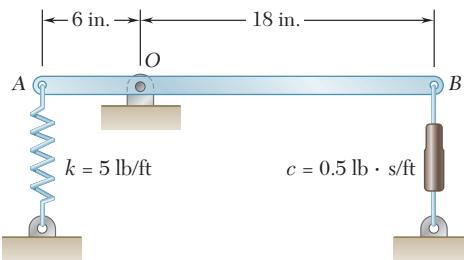


Figura P19.138

- 19.139** Un elemento de máquina de 1 100 lb se sostiene mediante dos resortes, cada uno de constante igual a 3 000 lb/ft. Una fuerza periódica de 30 lb de amplitud se aplica al elemento con una frecuencia de 2.8 Hz. Si el coeficiente de amortiguamiento es de 110 lb · s/ft, determine la amplitud de la vibración de estado estable del elemento.

- 19.140** En el problema 19.139, determine el valor requerido de la constante de cada resorte si la amplitud de la vibración de estado estable es 0.05 in.

- 19.141** En el caso de la vibración forzada de un sistema, determine el intervalo de valores del factor de amortiguamiento c/c_c para el cual el factor de amplificación decrecerá siempre y cuando aumente la razón de frecuencias ω_f/ω_n .

- 19.142** Demuestre que para un pequeño valor del factor de amortiguamiento c/c_c , la amplitud máxima de una vibración forzada ocurre cuando $\omega_f \approx \omega_n$ y que el valor correspondiente del factor de amplificación es $\frac{1}{2}(c/c_c)$.

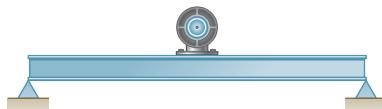


Figura P19.143

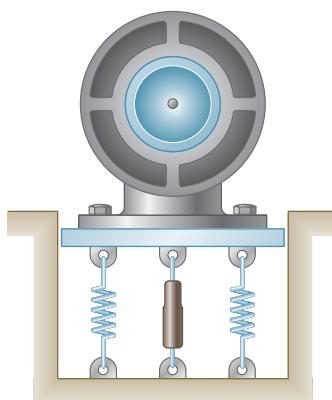


Figura P19.44 y P19.145

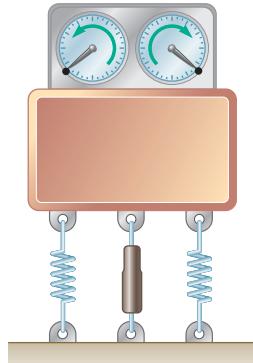


Figura P19.46

19.143 Un motor de 50 kg se atornilla directamente a una viga horizontal ligera que tiene una deflexión estática de 6 mm debido al peso del motor. El desbalance del rotor es equivalente a una masa de 100 g ubicada a 75 mm del eje de rotación. Si la amplitud de la vibración del motor es de 0.8 mm a una velocidad de 400 rpm, determine *a*) el factor de amortiguamiento c/c_c , *b*) el coeficiente de amortiguamiento c .

19.144 Un motor de 15 kg se sostiene mediante cuatro resortes, cada uno de constante igual a 45 kN/m. El desbalance del motor es equivalente a una masa de 20 g ubicada a 125 mm del eje de rotación. Si el motor está restringido a un movimiento vertical, determine la amplitud de la vibración del estado estable del motor a una velocidad de 1 500 rpm, suponiendo *a*) que no se presenta amortiguamiento, *b*) que el factor de amortiguamiento c/c_c es igual a 1.3.

19.145 Un motor de 100 kg se sostiene por medio de cuatro resortes, cada uno de constante igual a 90 kN/m, y se conecta al suelo mediante un amortiguador que tiene un coeficiente de amortiguamiento $c = 6\,500 \text{ N} \cdot \text{s}/\text{m}$. El motor está restringido a moverse verticalmente, y se observa que la amplitud de su movimiento es de 2.1 mm a una velocidad de 1 200 rpm. Si la masa del rotor es de 15 kg, determine la distancia entre el centro de masa del rotor y el eje de la flecha.

19.146 Un excitador de masas excéntricas con contragiro, el cual consiste en dos masas giratorias de 400 g que describen círculos de 150 mm de radio a la misma velocidad pero en sentidos opuestos, se coloca sobre un elemento de máquina para inducir una vibración de estado estable al elemento y determinar algunas de sus características dinámicas. A una velocidad de 1 200 rpm, un estroboscopio muestra que las masas excéntricas están exactamente debajo de sus respectivos ejes de rotación y que el elemento está pasando por su posición de equilibrio estático. Si la amplitud del movimiento del elemento a esa velocidad es de 15 mm y la masa total del sistema es de 140 kg, determine *a*) la constante de resorte k combinada, *b*) el factor de amortiguamiento c/c_c .

19.147 En la figura se muestra el modelo simplificado de una lavadora. Un bulbo de ropa mojada forma una masa m_b de 10 kg dentro de la máquina y ocasiona un desbalance giratorio. La masa giratoria es de 20 kg (incluyendo a m_b) y el radio e de la canasta de la lavadora es de 25 cm. Si la lavadora tiene una constante de resorte equivalente a $k = 1\,000 \text{ N}/\text{m}$ y una razón de amortiguamiento $\zeta = c/c_c = 0.05$ y durante el ciclo de giro el tambor rota a 250 rpm, determine la amplitud del movimiento y la magnitud de la fuerza transmitida a los lados de la lavadora.

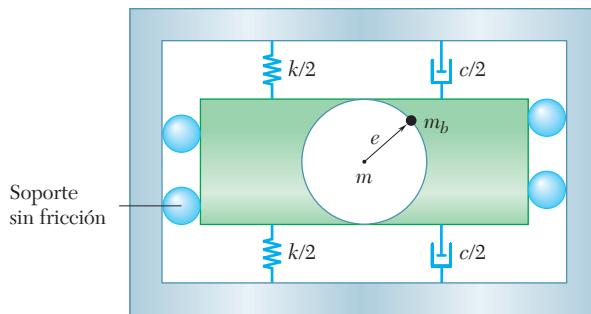


Figura P19.147

19.148 Un elemento de máquina se sostiene mediante resortes y se conecta a un amortiguador como se muestra. Demuestre que si se aplica una fuerza periódica $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$ al elemento, la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida a la base es

$$F_m = P_m \sqrt{\frac{1 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}}$$

19.149 Un elemento de máquina de 200 lb sostenido por cuatro resortes, cada uno de constante $k = 12 \text{ lb/ft}$, está sujeto a una fuerza periódica de 0.8 Hz de frecuencia y 20 lb de amplitud. Determine la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida a la base si *a)* un amortiguador con un coeficiente de amortiguamiento $c = 25 \text{ lb} \cdot \text{s/ft}$ se conecta a la máquina y al suelo, *b)* se quita el amortiguador.

***19.150** Para una vibración de estado estable con amortiguamiento bajo la acción de una fuerza armónica, demuestre que la energía mecánica que el amortiguador disipa por ciclo es $E = \pi c x_m^2 \omega_f$, donde c es el coeficiente de amortiguamiento, x_m es la amplitud del movimiento y ω_f es la frecuencia circular de la fuerza armónica.

***19.151** La suspensión de un automóvil puede aproximarse mediante el sistema simplificado resorte-amortiguador que se muestra. *a)* Escriba la ecuación diferencial que define al desplazamiento vertical de la masa m cuando el sistema se mueve a una velocidad v sobre un camino con una sección transversal senoidal de amplitud δ_m y longitud de onda L . *b)* Derive una expresión para la amplitud del desplazamiento vertical de la masa m .

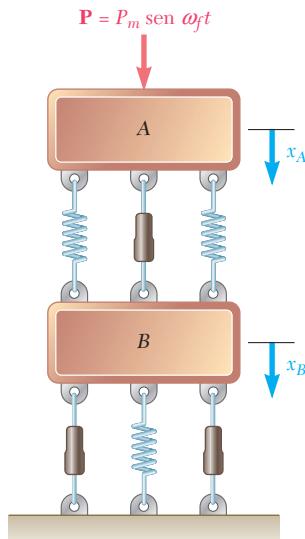


Figura P19.152

***19.152** Dos bloques A y B , cada uno de masa m , están soportados como se muestra mediante tres resortes de la misma constante k . Los bloques A y B se conectan mediante un amortiguador y el bloque B está unido al suelo utilizando dos amortiguadores, cada uno de ellos con el mismo coeficiente de amortiguamiento c . El bloque A está sometido a una fuerza de magnitud $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$. Escriba las ecuaciones diferenciales que definen los desplazamientos x_A y x_B de los dos bloques desde sus posiciones de equilibrio.

19.153 Exprese en términos de L , C y E el intervalo de valores de la resistencia R para los cuales ocurrirán oscilaciones en el circuito mostrado cuando se cierra el interruptor S .

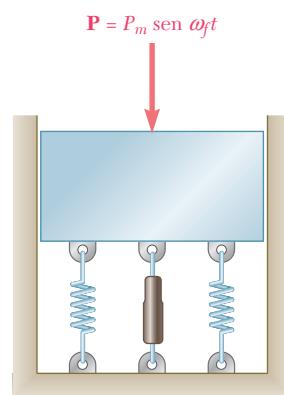


Figura P19.148 y P19.49

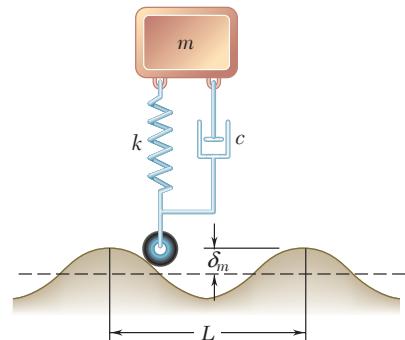


Figura P19.151

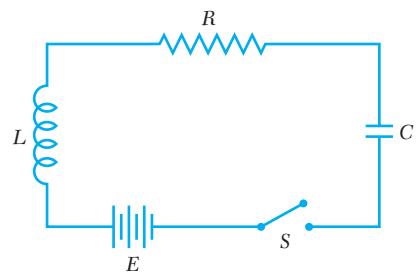


Figura P19.153

19.154 Considere el circuito del problema 19.153 cuando se retira el capacitor C . Si el interruptor S se cierra en el tiempo $t = 0$, determine *a)* el valor final de la corriente en el circuito, *b)* el tiempo t en el cual la corriente habrá llegado a $(1 - 1/e)$ veces su valor final. (El valor deseado de t se conoce como la *constante de tiempo* del circuito.)

19.155 y 19.156 Trace el análogo eléctrico del sistema mecánico que se muestra. (*Sugerencia:* Trace los circuitos correspondientes a los cuerpos libres m y A .)

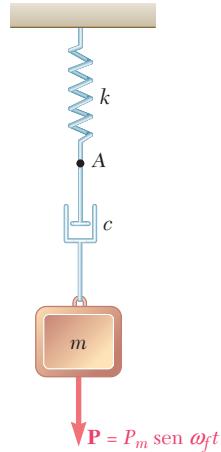


Figura P19.155 y P19.157

19.157 y 19.158 Escriba las ecuaciones diferenciales que definen *a)* los desplazamientos de la masa m y del punto A , *b)* las cargas en los capacitores del análogo eléctrico.

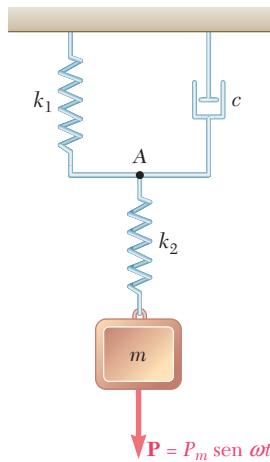


Figura P19.156 y P19.158

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 19

Este capítulo se dedicó al estudio de las *vibraciones mecánicas*, esto es, al análisis de movimiento de partículas y cuerpos rígidos que oscilan en torno a una posición de equilibrio. En la primera parte del capítulo [secciones 19.2 a 19.7] se consideraron *vibraciones sin amortiguamiento*, mientras que en la segunda parte se trataron las *vibraciones amortiguadas* [secciones 19.8 a 19.10].

En la sección 19.2 se consideraron las *vibraciones libres de una partícula*, esto es, el movimiento de una partícula P sujeta a una fuerza restauradora proporcional al desplazamiento de la partícula —como la fuerza ejercida por un resorte—. Si el desplazamiento x de la partícula P se mide desde su posición de equilibrio O (figura 19.17), la resultante \mathbf{F} de las fuerzas que actúan sobre P (incluyendo su peso) tiene una magnitud kx y está dirigida a O . Al aplicar la segunda ley de Newton $F = ma$ y al recordar que $a = \ddot{x}$, se escribe la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (19.2)$$

o, con $\omega_n^2 = k/m$,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (19.6)$$

Vibraciones libres de una partícula

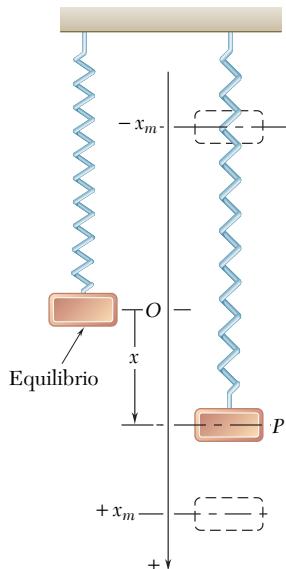


Figura 19.17

El movimiento definido por esta ecuación recibe el nombre de *movimiento armónico simple*.

La solución de la ecuación (19.6), que representa el desplazamiento de la partícula P , se expresó como

$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (19.10)$$

donde x_m = amplitud de la vibración

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \text{frecuencia circular natural}$$

ϕ = ángulo de fase

El *periodo de vibración* (esto es, el tiempo requerido para un ciclo completo) y su *frecuencia natural* (esto es, el número de ciclos por segundo) se expresaron como

$$\text{Periodo} = \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (19.13)$$

$$\text{Frecuencia natural} = f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (19.14)$$

La velocidad y aceleración de la partícula se obtuvieron al diferenciar la ecuación (19.10), y se encontró que los valores máximos son

$$v_m = x_m \omega_n \quad a_m = x_m \omega_n^2 \quad (19.15)$$

Puesto que todos los parámetros anteriores dependen de manera directa de la frecuencia circular natural ω_n y, por ello, el cociente k/m , resulta esencial en cualquier problema dado calcular el valor de la constante k ; esto puede realizarse determinando la relación entre la fuerza restauradora y el desplazamiento correspondiente de la partícula [problema resuelto 19.1].

También se demostró que el movimiento oscilatorio de la partícula P puede representarse mediante la proyección sobre el eje x del movimiento de un punto Q que describe un círculo auxiliar de radio x_m con la velocidad angular ω_n (figura 19.18). Los valores instantáneos de la velocidad y la aceleración de P se obtienen entonces proyectando sobre el eje x los vectores \mathbf{v}_m y \mathbf{a}_m que representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración de Q .

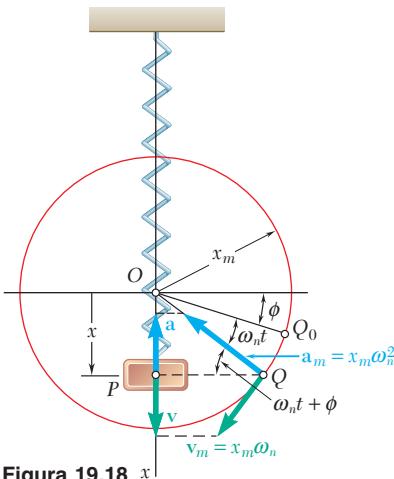


Figura 19.18 x

Si bien el movimiento de un *péndulo simple* no es verdaderamente un movimiento armónico simple, las fórmulas dadas antes pueden utilizarse con $\omega_n^2 = g/l$ para calcular el periodo y la frecuencia natural de las *pequeñas oscilaciones* de un péndulo simple [sección 19.31]. Las oscilaciones de gran amplitud de un péndulo simple se analizaron en la sección 19.4.

Las *vibraciones libres de un cuerpo rígido* se analizan eligiendo una variable apropiada, con una distancia x o un ángulo θ , para definir las posiciones del cuerpo, dibujando una ecuación de diagramas de cuerpo libre para expresar la equivalencia de las fuerzas externas y efectivas, y escribiendo una ecuación que relaciona la variable elegida y su segunda derivada [sección 19.5]. Si la ecuación que se obtiene es de la forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad \text{o} \quad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \quad (19.21)$$

la vibración considerada es un movimiento armónico simple y su periodo y frecuencia natural se obtienen *identificando* ω_n y sustituyendo su valor en las ecuaciones (19.13) y (19.14) [problemas resueltos 19.2 y 19.3].

El *principio de conservación de la energía* puede utilizarse como un método alternativo para la determinación del periodo y frecuencia natural del movimiento armónico simple de una partícula o cuerpo rígido [sección 19.6]. Eligiendo de nuevo una variable apropiada, como θ , para definir la posición del sistema, se expresa que la energía total del sistema se conserva, $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, entre la posición de desplazamiento máximo ($\theta_1 = \theta_m$) y la posición de velocidad máxima ($\theta_2 = \dot{\theta}_m$). Si el movimiento considerado es armónico simple, los dos miembros de la ecuación obtenida consiste en expresiones cuadráticas homogéneas en θ_m y $\dot{\theta}_m$, respectivamente.[†] Sustituyendo $\dot{\theta}_m = \theta_m \omega_n$ en esta ecuación, podemos sacar como factor θ_m^2 y resolver para la frecuencia circular ω_n [problema resuelto 19.4].

En la sección 19.7 se consideraron las *vibraciones forzadas* de un sistema mecánico. Esas vibraciones ocurren cuando el sistema se somete a una fuerza periódica (figura 19.19) o cuando está conectado elásticamente a un apoyo que tiene un movimiento alterante (figura 19.20). Denotando por ω_f la frecuencia circular forzada, se encontró que en el primer caso, el movimiento del sistema se definió por medio de la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.30)$$

y que en el segundo caso se definió mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.31)$$

La solución general de estas ecuaciones se obtuvo al sumar una solución particular de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} \omega_f t \quad (19.32)$$

Péndulo simple

Vibraciones libres de un cuerpo rígido

Empleo del principio de la conservación de la energía

Vibraciones forzadas

[†]Si el movimiento considerado sólo puede *aproximarse* por medio de un movimiento armónico simple, como para las pequeñas oscilaciones de un cuerpo bajo la acción de la gravedad, la energía potencial debe aproximarse mediante una expresión cuadrática en θ_m .

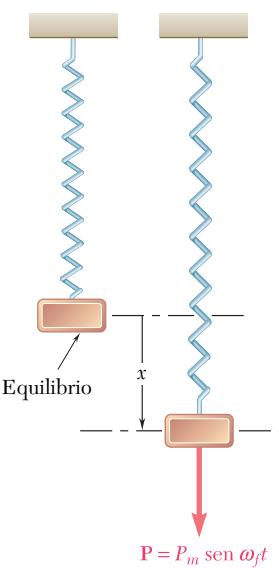


Figura 19.19

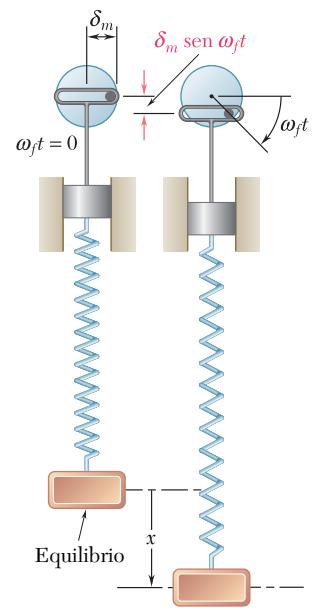


Figura 19.20

a la solución general de la ecuación homogénea correspondiente. La solución particular (19.32) representa una *vibración de estado estable* del sistema, mientras que la solución de la ecuación homogénea representa una *vibración libre transitoria* que por lo general puede ignorarse.

Al dividir la amplitud x_m de la vibración de estado estable por P_m/k en el caso de una fuerza periódica, o por δ_m en el caso de un apoyo oscilante, se define el *factor de amplificación* de la vibración y se encuentra que

$$\text{Factor de amplificación} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.36)$$

De acuerdo con la ecuación (19.36), la amplitud x_m de la vibración forzada *se vuelve infinita cuando $\omega_f = \omega_n$* , esto es *cuando la frecuencia forzada es igual a la frecuencia natural del sistema*. Se dice en ese caso que la fuerza aplicada o el movimiento del apoyo aplicado están en *resonancia* con el sistema [problema resuelto 19.5]. En realidad la amplitud de la vibración se muestra finita, debido a las fuerzas amortiguadas.

Vibraciones libres amortiguadas

En la última parte del capítulo se consideraron las *vibraciones amortiguadas* de un sistema mecánico. Primero se analizaron las *vibraciones libres amortiguadas* de un sistema con *amortiguamiento viscoso* [sección 19.8]. Se encontró que el movimiento de un sistema de este tipo se definió mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (19.38)$$

donde c es una constante llamada el *coeficiente de amortiguamiento viscoso*. Al definir el *coeficiente de amortiguamiento crítico* c_c como

$$c_c = 2m \sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \quad (19.41)$$

donde ω_n es la frecuencia circular natural del sistema en ausencia de amortiguamiento, se distinguieron tres casos de amortiguamiento diferentes, a saber, (1) *sobreamortiguamiento*, cuando $c > c_c$; (2) *amortiguamiento crítico*, cuando $c = c_c$, y (3) *subamortiguamiento*, cuando $c < c_c$. En los primeros dos casos, cuando el sistema se perturba tiende a recobrar su posición de equilibrio sin ninguna oscilación. En el tercer caso, el movimiento es vibratorio con amplitud decreciente.

En la sección 19.9 se consideraron las *vibraciones forzadas amortiguadas* de un sistema mecánico. Estas vibraciones ocurren cuando un sistema con amortiguamiento viscoso está sujeto a una fuerza periódica \mathbf{P} de magnitud $P = P_m \sin \omega_f t$ o cuando se conecta elásticamente a un apoyo con un movimiento alterante $\delta = \delta_m \sin \omega_f t$. En el primer caso, el movimiento del sistema se definió mediante la ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \sin \omega_f t \quad (19.47)$$

y en el segundo caso por medio de una ecuación similar que se obtuvo al sustituir P_m de $k\delta_m$ en (19.47).

La *vibración de estado estable* del sistema se representa mediante una solución particular de la ecuación (19.47) de la forma

$$x_{\text{part}} = x_m \sin (\omega_f t - \varphi) \quad (19.48)$$

Al dividir la amplitud x_m de la vibración de estado estable entre P_m/k en el caso de una fuerza periódica, o por δ_m en el caso de un apoyo oscilante, se obtuvo la siguiente expresión para el factor de amplificación

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \quad (19.53)$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ = frecuencia circular natural del sistema no amortiguado

$c_c = 2m\omega_n$ = coeficiente de amortiguamiento crítico

c/c_c = factor de amortiguamiento

También se encontró que la *diferencia de fase* φ entre la fuerza o el movimiento del apoyo aplicados y la vibración resultante de estado estable del sistema amortiguado se definía por medio de la relación

$$\tan \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \quad (19.54)$$

El capítulo finalizó con un análisis de *analogías eléctricas* [sección 19.10], en el cual se demostró que las vibraciones de los sistemas mecánicos y las oscilaciones de los circuitos eléctricos están definidas por las mismas ecuaciones diferenciales. Las analogías eléctricas de sistemas mecánicos pueden entonces utilizarse para estudiar o predecir el comportamiento de estos sistemas.

Vibraciones forzadas amortiguadas

Analogías eléctricas

Problemas de repaso

19.159 Una placa delgada y cuadrada de lado a puede oscilar alrededor de un eje AB localizado a una distancia b de su centro de masa G . *a)* Determine el periodo de pequeñas oscilaciones si $b = \frac{1}{2}a$. *b)* Determine un segundo valor de b para el cual el periodo de pequeñas oscilaciones es el mismo que el que se encontró en el inciso *a*).

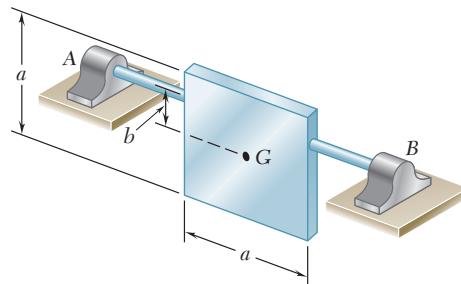


Figura P19.159

19.160 Un electroimán de 150 kg se encuentra en reposo y sostiene 100 kg de pedacería de acero cuando se corta la corriente y el acero se cae. Si el cable y la grúa de soporte tienen una rigidez equivalente a un resorte con constante igual a 200 kN/m, determine *a)* la frecuencia, la amplitud y la velocidad máxima del movimiento resultante, *b)* la tensión mínima que ocurrirá en el cable durante el movimiento, *c)* la velocidad del imán 0.03 s después de cortar la corriente.

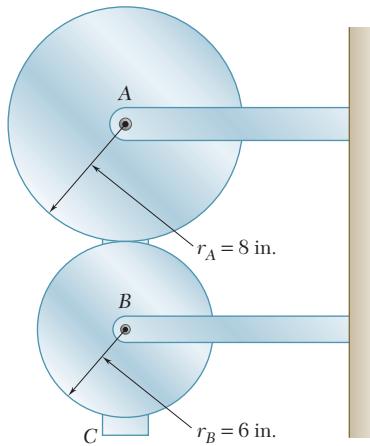


Figura P19.161

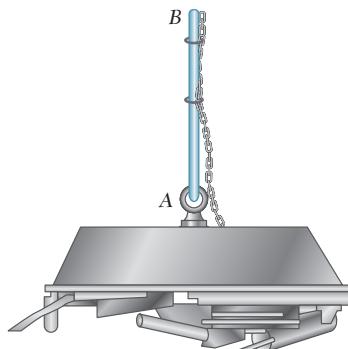


Figura P19.160

19.161 Los discos A y B pesan 30 y 12 lb, respectivamente, y un pequeño bloque C está unido al borde del disco B . Si se supone que no ocurre deslizamiento entre los discos, determine el periodo de pequeñas oscilaciones del sistema.

19.162 Se observa un periodo de 6.00 s para las oscilaciones angulares de un rotor de giroscopio de 4 oz. suspendido de un alambre como se muestra en la figura. Si se sabe que al suspender una esfera de acero con 1.25 in. de diámetro en la misma forma se obtiene un periodo de 3.80 s, determine el radio de giro centroidal del rotor. (Peso específico del acero = 490 lb/ft³.)

19.163 Un bloque *B* de 1.5 kg está conectado mediante una cuerda a un bloque *A* de 2 kg, el cual está suspendido de un resorte con constante igual a 3 kN/m. Si el sistema se encuentra en reposo al cortar la cuerda, determine *a)* la frecuencia, la amplitud y la velocidad máxima del movimiento resultante, *b)* la tensión mínima que ocurrirá en el resorte durante el movimiento, *c)* la velocidad del bloque *A* 0.3 s después de cortar la cuerda.

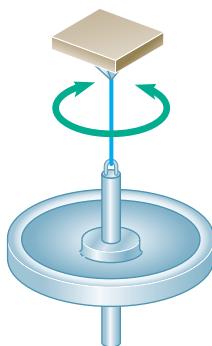


Figura P19.162



Figura P19.163

19.164 Dos barras, cada una con masa *m* y longitud *L*, se sueldan entre sí para formar el ensamblaje mostrado. Determine *a)* la distancia *b* para la cual la frecuencia de pequeñas oscilaciones del ensamblaje es máxima, *b)* la frecuencia máxima correspondiente.

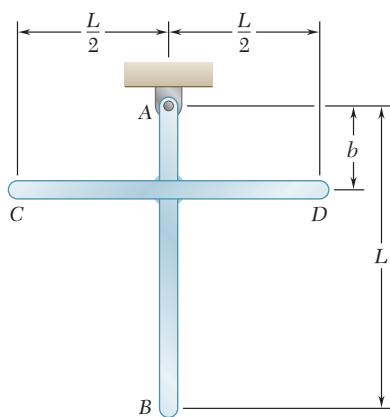


Figura P19.164

19.165 Conforme la velocidad de giro de un motor soportado por resortes se incrementa lentamente de 200 a 500 rpm, se observa que la amplitud de la vibración debida al desbalance del rotor disminuye de manera estable de 8 a 2.5 mm. Determine *a)* la velocidad a la cual ocurrirá la resonancia, *b)* la amplitud de la vibración de estado estable a una velocidad de 100 rpm.

19.166 El compresor mostrado tiene una masa de 250 kg y opera a 2 000 rpm. Con esta condición de operación ocurre una vibración indeseable cuando el compresor está unido directamente al suelo. Para reducir la vibración del piso de concreto que descansa sobre suelo de arcilla, se propone aislar el compresor al montarlo sobre un bloque cuadrado de concreto separado del resto del piso como se muestra en la figura. La densidad del concreto es de $2\,400 \text{ kg/m}^3$ y se ha encontrado que la constante de resorte para el suelo es $80 \times 10^6 \text{ N/m}$. La geometría del compresor conduce a elegir un bloque de 1.5 m por 1.5 m. Determine la profundidad h que reducirá la fuerza transmitida al suelo en 75%.

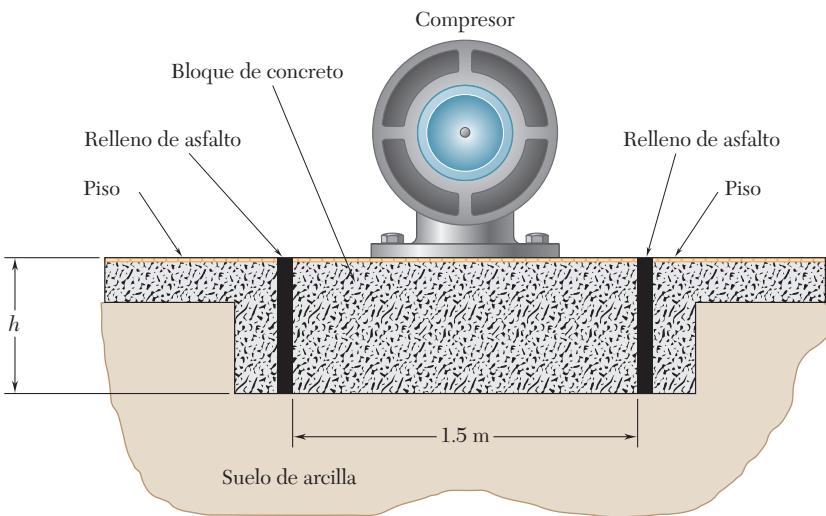


Figura P19.166

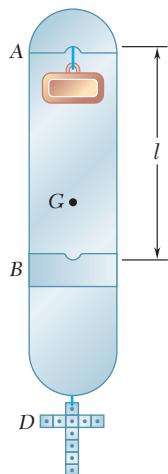


Figura P19.167

19.167 Ya sea que se utilice un péndulo simple o uno compuesto para determinar experimentalmente la aceleración de la gravedad g , siempre se presentan dificultades. En el caso del péndulo simple, la cuerda en realidad sí tiene peso, mientras que en el caso del péndulo compuesto es difícil establecer la localización exacta del centro de masa. En el caso de un péndulo compuesto, la dificultad se puede eliminar empleando un péndulo reversible o Kater. Dos filos de cuchillo *A* y *B* se colocan de manera que claramente no estén a la misma distancia del centro de masa *G*, y se mide la distancia *l* con gran precisión. Después se ajusta la posición de un contrapeso *D* de manera que el periodo de oscilación τ sea el mismo con cualquier filo de cuchillo que se use. Demuestre que el periodo τ obtenido es igual al de un péndulo simple verdadero de longitud *l* y que $g = 4\pi^2 l/\tau^2$.

19.168 Un motor de 400 kg soportado por cuatro resortes, cada uno de constante igual a 150 kN/m, está restringido a moverse verticalmente. Si el desbalance del motor es equivalente a una masa de 23 g ubicada a una distancia de 100 mm del eje de rotación, determine para una velocidad de 800 rpm *a*) la amplitud de la fuerza fluctuante transmitida al cimiento, *b*) la amplitud del movimiento vertical del motor.

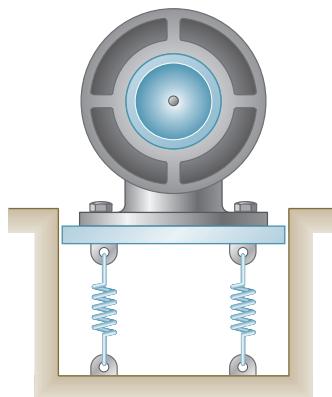


Figura P19.168

19.169 Retome el problema 19.168, y ahora suponga que se introduce un amortiguador de constante $c = 6\,500 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ entre el motor y el suelo.

19.170 Una pequeña pelota de masa m unida al punto medio de una cuerda elástica muy estirada de longitud l puede deslizarse sobre un plano horizontal. A la pelota se le da un pequeño deslizamiento en una dirección perpendicular a la cuerda y se suelta. Si se supone que la tensión T en la cuerda permanece constante, *a*) escriba la ecuación diferencial del movimiento de la pelota, *b*) determine el periodo de vibración.

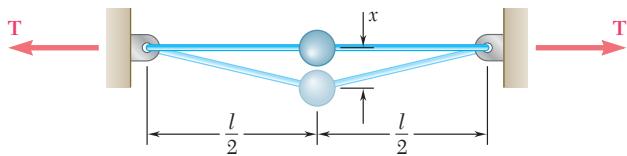


Figura P19.170

Problemas de computadora

19.C1 Al expandir el integrando de la ecuación (19.19) en una serie de potencias pares de $\sin \phi$ para después integrar, se puede demostrar que el periodo de un péndulo simple de longitud l puede aproximarse mediante la expresión

$$\tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^2 c^6 + \dots \right]$$

donde $c = \sin \frac{1}{2}\theta_m$ y θ_m es la amplitud de las oscilaciones. Utilice software para calcular la suma de la serie entre corchetes, usando de manera sucesiva los términos 1, 2, 4, 8 y 16, para valores de θ_m desde 30 hasta 120° con incrementos de 30°.

19.C2 La ecuación fuerza-deflexión para una clase de resortes no lineales fijos en un extremo es $F = 5x^{1/n}$ donde F es la magnitud, expresada en newtons, de la fuerza aplicada en el otro extremo del resorte y x es la deflexión expresada en metros. Si un bloque de masa m se suspende del resorte y se le da un pequeño desplazamiento hacia abajo a partir de su posición de equilibrio, utilice software para calcular y graficar la frecuencia de vibración del bloque para valores de m igual a 0.2, 0.6 y 1.0 kg y para valores de n de 1 a 2. Suponga que la pendiente de la curva fuerza-deformación en el punto correspondiente a $F = mg$ puede utilizarse como una constante de resorte equivalente.

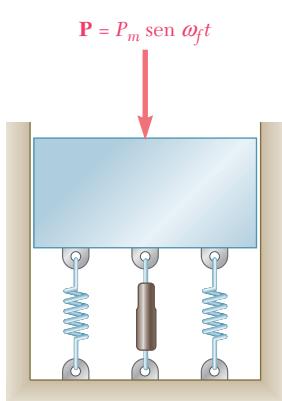


Figura P19.C3

19.C3 Un elemento de máquina sostenido por resortes y conectado a un amortiguador se somete a una fuerza periódica de magnitud $P = P_m \sin \omega_f t$. La transmisibilidad T_m del sistema se define como la razón F_m/P_m del valor máximo F_m de la fuerza periódica fluctuante transmitida a la base sobre el valor máximo P_m de la fuerza periódica aplicada al elemento de máquina. Utilice software para calcular y graficar el valor de T_m para razones de frecuencias ω_f/ω_n iguales a 0.8, 1.4 y 2.0 y para factores de amortiguamiento c/c_c iguales a 0, 1 y 2. (Sugerencia: Utilice la fórmula dada en el problema 19.148.)

19.C4 Un motor de 15 kg se sostiene mediante cuatro resortes, cada uno con constante de 60 kN/m. El desbalance del motor es equivalente a una masa de 20 g localizada a 125 mm del eje de rotación. Si el motor está restringido a moverse verticalmente, use software para calcular y graficar la amplitud de la vibración y la máxima aceleración del motor para velocidades del motor de 1 000 a 2 500 rpm.

19.C5 Retome el problema 19.C4, y ahora suponga que se ha conectado un amortiguador con coeficiente de amortiguamiento $c = 2.5 \text{ kN} \cdot \text{s/m}$ a la base del motor y al suelo.

19.C6 Un pequeño remolque y su carga tienen una masa total de 250 kg. El remolque se sostiene por medio de dos resortes, cada uno de constante igual a 10 kN/m, y se jala sobre un camino, cuya superficie puede aproximarse por medio de una curva senoidal con una amplitud de 40 mm y una longitud de onda de 5 m (esto es, la distancia entre crestas sucesivas es de 5 m y la distancia vertical de cresta a seno es de 80 mm). *a)* Si se desprecia la masa de las ruedas y se supone que éstas permanecen en contacto con el suelo, use software para calcular y graficar la amplitud de la vibración y la aceleración vertical máxima del remolque para velocidades de 10 a 80 km/h. *b)* Determine el intervalo de valores de la velocidad del remolque para los cuales las ruedas perderán contacto con el suelo.

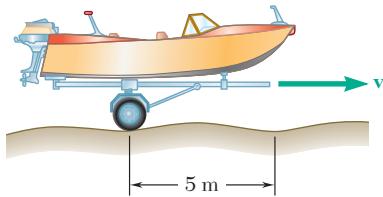


Figura P19.C6

A

Algunas definiciones y propiedades útiles del álgebra vectorial

En los capítulos 2 y 3 de *Mecánica vectorial para ingenieros: estática* se estudiaron de manera amplia las siguientes definiciones y propiedades del álgebra vectorial. Aquí se resumen por conveniencia para el lector, haciendo referencia a las secciones apropiadas del volumen de *Estática*. Los números de ecuación y de ilustración son los que se usaron en la presentación original.

A.1. SUMA DE VECTORES (SECCIONES 2.3 Y 2.4)

Los vectores se definen como *expresiones matemáticas que poseen magnitud y dirección, las cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo*. Así, la suma de los vectores **P** y **Q** se obtiene uniendo los dos vectores en el mismo punto A y construyendo un paralelogramo, utilizando **P** y **Q** como dos de los lados de éste (figura A.2). La diagonal que pasa por A representa la suma de los vectores **P** y **Q**, y esta suma se denota por medio de **P + Q**. La suma vectorial es *asociativa* y *comutativa*.

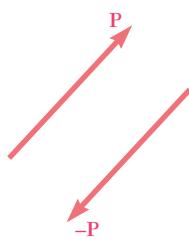


Figura A.1

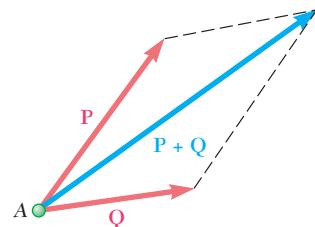


Figura A.2

El *vector negativo* de un vector dado **P** se define como el vector que tiene la misma magnitud *P* y la dirección opuesta a la de **P** (figura A.1); el negativo del vector **P** se denota por **-P**. Claramente, resulta

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = \mathbf{0}$$

A.2. PRODUCTO DE UN ESCALAR Y UN VECTOR (SECCIÓN 2.4)

El producto $k\mathbf{P}$ de un escalar k y un vector \mathbf{P} se define como un vector que tiene la misma dirección que \mathbf{P} (si k es positiva), o una dirección opuesta a la de \mathbf{P} (si k es negativa), y una magnitud igual al producto de la magnitud de P y el valor absoluto de k (figura A.3).

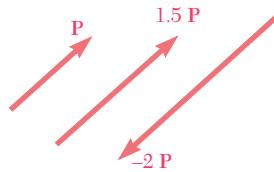


Figura A.3

A.3. VECTORES UNITARIOS, DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN COMPONENTES RECTANGULARES (SECCIONES 2.7 Y 2.12)

Los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , denominados *vectores unitarios*, se definen como vectores de magnitud 1, dirigidos, respectivamente, a lo largo de los ejes x , y y z (figura A.4).

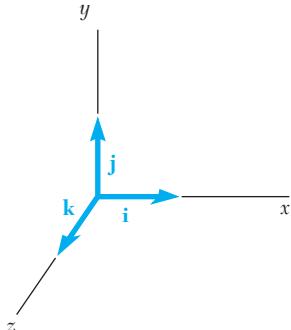


Figura A.4

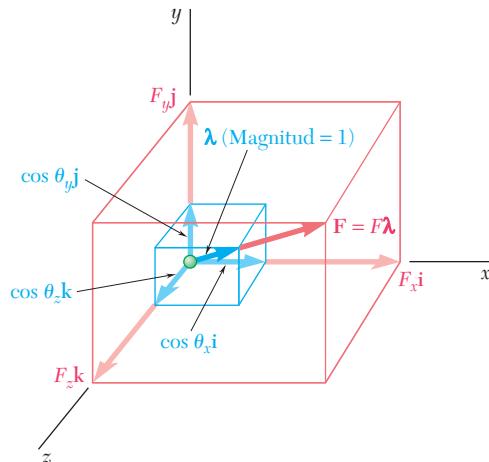


Figura A.5

Al denotar por F_x , F_y y F_z las componentes escalares del vector \mathbf{F} , se tiene (figura A.5)

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

En el caso particular de un vector unitario λ dirigido a lo largo de la línea que forman los ángulos θ_x , θ_y y θ_z con los ejes de coordenadas, se tiene

$$\lambda = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \quad (2.22)$$

A.4. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES (SECCIONES 3.4 Y 3.5)

El producto vectorial, o *producto cruz*, de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} se define como el vector

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. La línea de acción de \mathbf{V} es perpendicular al plano que contiene a \mathbf{P} y \mathbf{Q} (figura A.6).
2. La magnitud de \mathbf{V} es el producto de la magnitud de \mathbf{P} y \mathbf{Q} y del seno del ángulo θ formado por \mathbf{P} y \mathbf{Q} (cuya medida siempre será 180° o menos); de tal modo se tiene

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{Q} \sin \theta \quad (3.1)$$

3. La dirección de \mathbf{V} se obtiene de la *regla de la mano derecha*. Cierre su mano derecha y sosténgala de manera que sus dedos se curven en el mismo sentido que la rotación del ángulo θ que lleva al vector \mathbf{P} en línea con el vector \mathbf{Q} ; su pulgar indicará en ese caso la dirección del vector \mathbf{V} (figura A.6b). Hay que observar que si \mathbf{P} y \mathbf{Q} no tienen un punto de aplicación común, deben redibujarse primero a partir del mismo punto. Los tres vectores \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{V} —tomados en ese orden— se dice que forman una *tríada derecha*.

Los productos vectoriales son *distributivos* pero *no comutativos*. Con lo que se tiene

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

Productos vectoriales de vectores unitarios. Se deduce de la definición del producto vectorial de dos vectores que

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \end{array} \quad (3.7)$$

Componentes rectangulares del producto vectorial. Al descomponer los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} en componentes rectangulares, se obtienen las siguientes expresiones para los componentes de su producto vectorial \mathbf{V} :

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

En forma de determinante, se tiene

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

A.5. MOMENTO DE UNA FUERZA ALREDEDOR DE UN PUNTO (SECCIONES 3.6 Y 3.8)

El momento de una fuerza \mathbf{F} (o, de manera más general, de un vector \mathbf{F}) alrededor de un punto O se define como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

donde \mathbf{r} denota al *vector de posición* del punto de aplicación A de \mathbf{F} (figura A.7a).

De acuerdo con la definición del producto vectorial de dos vectores dada en la sección A.4, el momento \mathbf{M}_O debe ser perpendicular al plano que contiene a O y la fuerza \mathbf{F} . Su magnitud es igual a

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

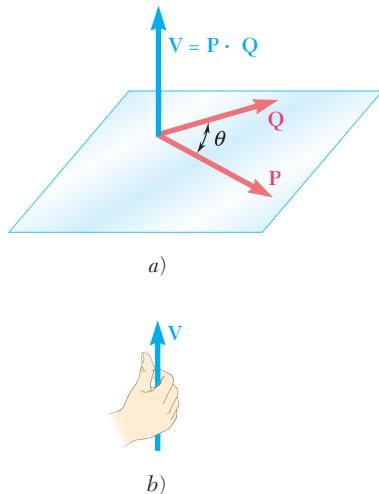


Figura A.6

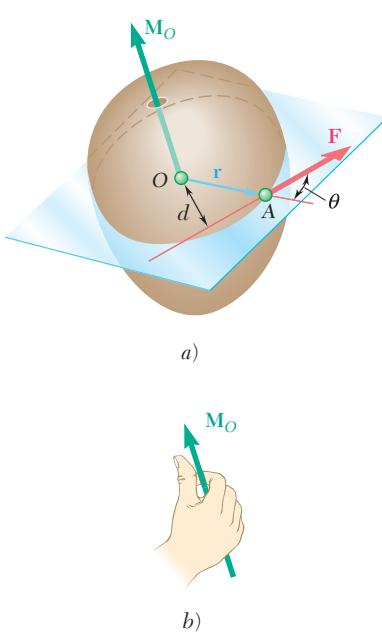


Figura A.7

donde d es la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de \mathbf{F} , y su sentido se define por medio del sentido de rotación que llevaría al vector \mathbf{r} en línea con el vector \mathbf{F} ; esta rotación debe apreciarla un observador ubicado en la punta de \mathbf{M}_O *contraria al sentido de las manecillas del reloj*. Otra forma de definir el sentido de \mathbf{M}_O la proporciona la variación de la *regla de la mano derecha*: se cierra la mano derecha y se sostiene de manera que los dedos se curven en el sentido de rotación que \mathbf{F} impartiría a un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de la línea de acción de \mathbf{M}_O ; el pulgar indicará el sentido del momento \mathbf{M}_O (figura A.7b).

Componentes rectangulares del momento de una fuerza.

Denotando por x , y y z las coordenadas del punto de aplicación A de \mathbf{F} , se obtienen las siguientes expresiones para las componentes del momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} :

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

En forma de determinante, se tiene

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

Para calcular el momento \mathbf{M}_B alrededor de un punto arbitrario B de una fuerza \mathbf{F} aplicada en A , se debe utilizar el vector $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ dibujado desde B hasta A en lugar del vector \mathbf{r} . Se escribe

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \quad (3.20)$$

o, utilizar la forma de determinante,

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$, $z_{A/B}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

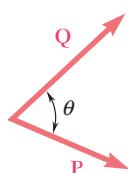


Figura A.8

A.6. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES (SECCIÓN 3.9)

El producto escalar, o *producto punto*, de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} se define como el producto de las magnitudes de \mathbf{P} y \mathbf{Q} del coseno del ángulo θ formado por \mathbf{P} y \mathbf{Q} (figura A.8). El producto escalar de \mathbf{P} y \mathbf{Q} se denota mediante $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Se escribe

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

Los productos escalares son *conmutativos* y *distributivos*.

Productos escalares de vectores unitarios. Se sigue de la definición de producto escalar de dos vectores que

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Producto escalar expresado en términos de componentes rectangulares. Al descomponer los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} en componentes rectangulares, se obtiene

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

Ángulo formado por dos vectores. Se deduce de (3.24) y (3.29) que

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{PQ} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \quad (3.32)$$

Proyección de un vector sobre un eje determinado. La proyección de un vector \mathbf{P} sobre el eje OL definido por el vector unitario λ (figura A.9) es

$$P_{OL} = OA = \mathbf{P} \cdot \lambda \quad (3.36)$$

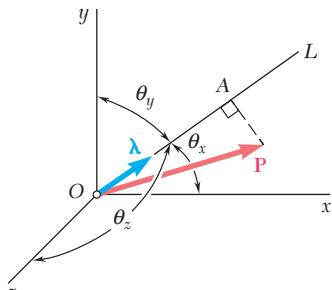


Figura A.9

A.7. TRIPLE PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES (SECCIÓN 3.10)

El triple producto mixto de tres vectores \mathbf{S} , \mathbf{P} y \mathbf{Q} se define como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

obtenido al formar el producto escalar de \mathbf{S} con el producto vectorial de \mathbf{P} y \mathbf{Q} . Los triples productos mixtos son invariantes bajo *permutaciones circulares*, pero cambian de signo bajo cualquier otra permutación:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) &= \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) \\ &= -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) = -\mathbf{P} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{Q}) = -\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{S}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Triple producto mixto expresado en términos de componentes rectangulares. El triple producto mixto de \mathbf{S} , \mathbf{P} y \mathbf{Q} puede expresarse en la forma de un determinante

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

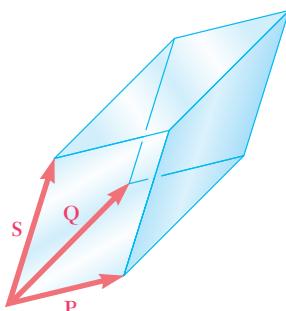


Figura A.10

El triple producto mixto $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ mide el volumen del paralelepípedo que tiene los vectores \mathbf{S} , \mathbf{P} y \mathbf{Q} de lados (figura A.10).

A.8. MOMENTOS DE UNA FUERZA ALREDEDOR DE UN EJE DADO (SECCIÓN 3.11)

El momento M_{OL} de una fuerza \mathbf{F} (o, de manera más general, de un vector \mathbf{F}) alrededor de un eje OL se define como la proyección OC sobre el eje OL del momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} alrededor de O (figura A.11). Al denotar por λ el vector unitario a lo largo de OL , resulta

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

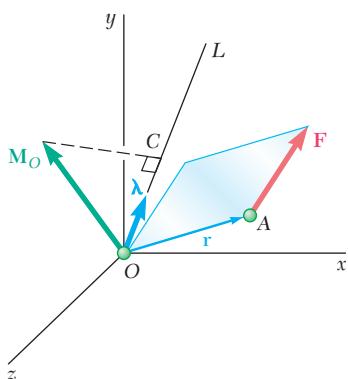


Figura A.11

o, en forma de determinante,

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje OL

x, y, z = coordenadas del punto de aplicación de \mathbf{F}

F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza \mathbf{F}

Los momentos de la fuerza \mathbf{F} alrededor de tres ejes de coordenadas se dan mediante las expresiones (3.18) obtenidas antes para las componentes rectangulares del momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} alrededor de O :

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

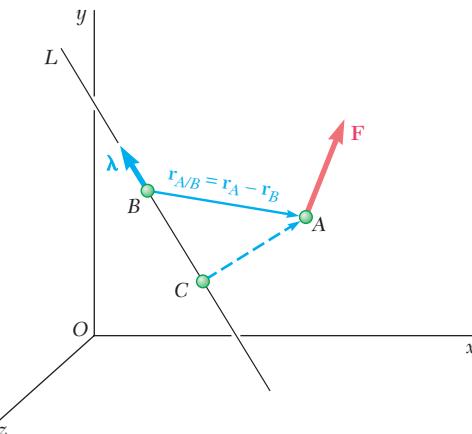


Figura A.12

De manera general, el momento de una fuerza \mathbf{F} aplicada en A alrededor de un eje que no pasa por el origen se obtiene eligiendo un punto arbitrario B sobre el eje (figura A.12) y determinando la proyección sobre el eje BL del momento \mathbf{M}_B de \mathbf{F} alrededor de B . Se escribe

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \quad (3.45)$$

donde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa al vector dibujado desde B hasta A . Al expresar M_{BL} en la fórmula de un determinante, se tiene

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.46)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cosenos directores del eje BL

$x_{A/B} = x_A - x_B, y_{A/B} = y_A - y_B, z_{A/B} = z_A - z_B$
 F_x, F_y, F_z = componentes de la fuerza \mathbf{F}

Debe notarse que el resultado que se obtuvo es independiente de la elección del punto B sobre el eje dado; el mismo resultado se habría obtenido si el punto C se hubiera elegido en lugar de B .

B

Momentos de inercia de masas

MOMENTOS DE INERCIA DE MASAS

B.1. MOMENTO DE INERCIA DE UNA MASA

Considérese una pequeña masa Δm montada sobre una barra de masa insignificante que puede girar libremente alrededor de un eje AA' (figura B.1a). Si se aplica un par al sistema, la barra y la masa, supuestas inicialmente en reposo, empezarán a girar alrededor de AA' . Los detalles de este movimiento se estudian después en dinámica. Por ahora sólo se quiere indicar que el tiempo requerido para que el sistema alcance una velocidad de rotación determinada es proporcional a la masa Δm y al cuadrado de la distancia r . Por lo tanto, el producto $r^2 \Delta m$ proporciona una medida de la *inercia* del sistema, esto es, una medida de la resistencia que el sistema ofrece cuando se intenta ponerlo en movimiento. Por esta razón, el producto $r^2 \Delta m$ recibe el nombre de *momento de inercia* de la masa Δm con respecto al eje AA' .

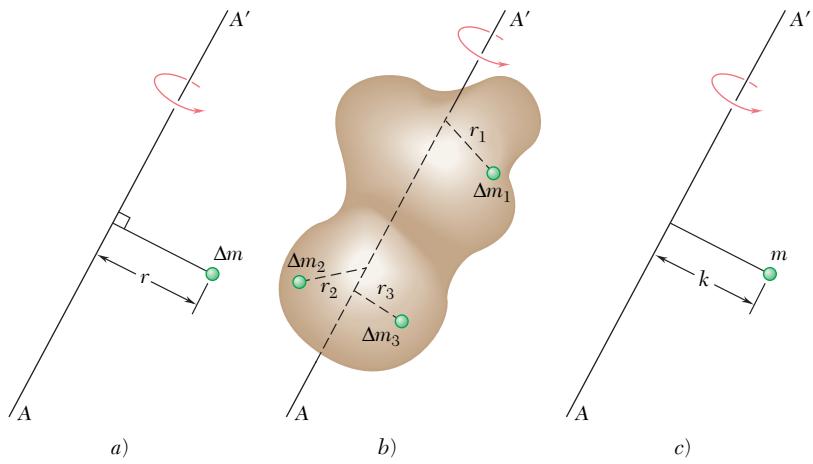


Figura B.1

Considérese ahora un cuerpo de masa m que girará alrededor de un eje AA' (figura B.1b). Al dividir el cuerpo en elementos de masa Δm_1 , Δm_2 , etc., se encuentra que la resistencia del cuerpo que se va a girar se mide por la suma $r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots$. Esta suma define el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje AA' . Al aumentar el número de elementos, se encuentra que el momento de inercia es igual, en el límite, a la integral

$$I = \int r^2 dm \quad (\text{B.1})$$

El *radio de giro* k del cuerpo con respecto al eje AA' se define mediante la relación

$$I = k^2 m \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (\text{B.2})$$

El radio de giro k representa, en consecuencia, la distancia a la cual la masa completa del cuerpo debe concentrarse si el momento de inercia con respecto a AA' va a permanecer sin cambio (figura B.1c). Ya sea que conserve su forma original (figura B.1b) o si se concentra como se muestra en la figura B.1c, la masa m reaccionará de la misma manera a una rotación, o *giro*, alrededor de AA'.

Si se utilizan unidades del SI, el radio de giro k se expresa en metros y la masa m en kilogramos y, por ello, la unidad que se emplea para el momento de inercia de una masa es $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Si se utilizan unidades de uso común en Estados Unidos, el radio de giro se expresa en pies y la masa en slugs (esto es, $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$) y, por ello, la unidad derivada que se utiliza para el momento de inercia de una masa es $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.[†]

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje de coordenadas puede expresarse con facilidad en términos de las coordenadas x , y y z del elemento de masa dm (figura B.2). Al advertir, por ejemplo, que el cuadrado de la distancia r desde el elemento dm hasta el eje y es $z^2 + x^2$, se expresa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje y como

$$I_y = \int r^2 dm = \int (z^2 + x^2) dm$$

Es posible obtener expresiones similares para los momentos de inercia con respecto a los ejes x y z . Se escribe

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (z^2 + x^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

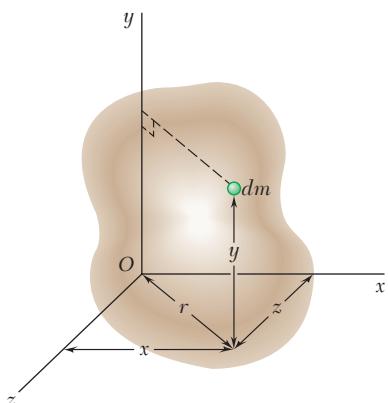


Figura B.2

[†]Debe tenerse presente cuando se convierte el momento de inercia de una masa de unidades de uso común en Estados Unidos a unidades del SI que la unidad fundamental *libra* utilizada en la unidad derivada $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$ es una unidad de fuerza (*no* de masa) y debe, por lo tanto, convertirse en newtons. Se tiene

$$1 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = (4.45 \text{ N})(0.3048 \text{ m})(1 \text{ s})^2 = 1.356 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$$

o, puesto que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$,

$$1 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 = 1.356 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$



Fotografía B.1 Como estudiará en su curso de dinámica, el comportamiento rotacional del cigüeñal que se muestra depende de su momento de inercia de masa con respecto a su eje de rotación.

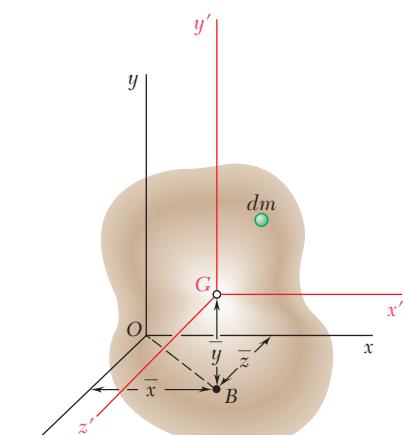


Figura B.3

B.2. TEOREMA DE EJES PARALELOS

Considérese un cuerpo de masa m . Sea $Oxyz$ un sistema de coordenadas rectangulares cuyo origen está en el punto arbitrario O , y $Gx'y'z'$ un sistema de *ejes centroidales* paralelos, esto es, un sistema cuyo origen está en el centro de gravedad G del cuerpo[†] y cuyos ejes x' , y' y z' son paralelos a los ejes x , y y z , respectivamente (figura B.3). Denotando con \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} las coordenadas de G con respecto a $Oxyz$, se escriben las siguientes relaciones entre las coordenadas x , y y z de elemento dm con respecto a $Oxyz$ y sus coordenadas x' , y' y z' con respecto a los ejes centroidales $Gx'y'z'$:

$$x = x' + \bar{x} \quad y = y' + \bar{y} \quad z = z' + \bar{z} \quad (\text{B.4})$$

Con referencia a las ecuaciones (B.3), es posible expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje x de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2] dm \\ &= \int (y'^2 + z'^2) dm + 2\bar{y} \int y' dm + 2\bar{z} \int z' dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm \end{aligned}$$

La primera integral en esta expresión representa el momento de inercia $I_{x'}$ del cuerpo con respecto al eje centroidal x' ; la segunda y tercera integrales representan el primer momento del cuerpo con respecto a los planos $z'x'$ y $x'y'$, respectivamente, y, puesto que ambos planos contienen G , las dos integrales son *cero*; la última integral es igual a la masa total m del cuerpo. Por lo tanto, se escribe,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \quad (\text{B.5})$$

y, de manera similar,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \quad I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \quad (\text{B.5}')$$

De la figura B.3 se ve fácilmente que la suma $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$ representa el cuadrado de la distancia OB , entre los ejes y y y' . De manera similar, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ y $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ representan los cuadrados de la distancia entre los ejes x y x' y los ejes z y z' , respectivamente. Al denotar por d la distancia entre un eje arbitrario AA' y el eje centroidal paralelo BB' (figura B.4), se puede, en consecuencia, escribir la siguiente relación general entre el momento de inercia I del cuerpo con respecto a AA' y su momento de inercia \bar{I} con respecto a BB' :

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (\text{B.6})$$

Al expresar los momentos de inercia en términos de los radios de giro correspondientes, también se puede escribir

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \quad (\text{B.7})$$

donde k y \bar{k} representan los radios de giro del cuerpo alrededor de AA' y BB' , respectivamente.

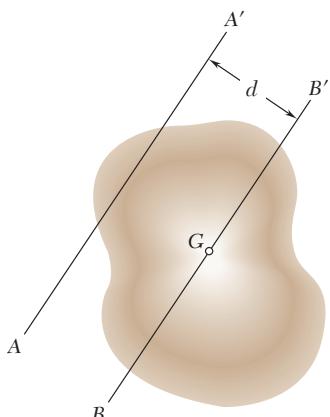


Figura B.4

[†]Observe que el término *centroidal* se usa aquí para definir el centro de gravedad G del cuerpo, aunque G no coincida con el centroide del volumen del cuerpo.

Considere una placa delgada de espesor uniforme t , hecha de un material homogéneo de densidad ρ (densidad = masa por unidad de volumen). El momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje AA' contenido en el plano de la placa (figura B.5a) es

$$I_{AA', \text{ masa}} = \int r^2 dm$$

Puesto que $dm = \rho t dA$, se escribe

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t \int r^2 dA$$

Pero r representa la distancia del elemento de área dA al eje AA' ; la

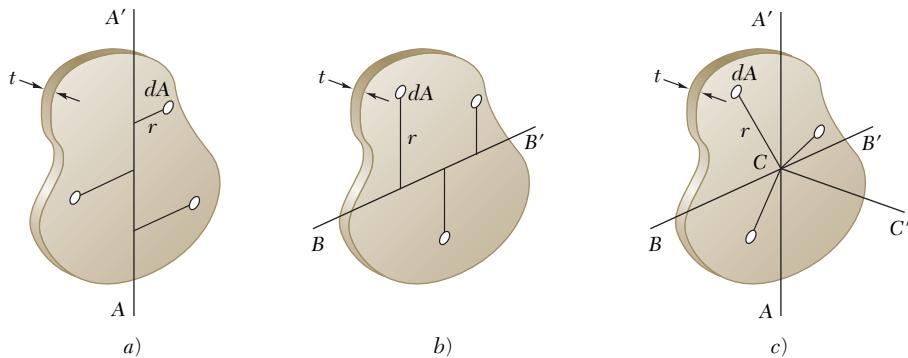


Figura B.5

integral por lo tanto es igual al momento de inercia del área de la placa con respecto a AA' . Se tiene

$$I_{AA', \text{ masa}} = \rho t I_{AA', \text{ área}} \quad (\text{B.8})$$

De manera similar, para un eje BB' que está contenido en el plano de la placa y es perpendicular a AA' (figura B.5b), se tiene

$$I_{BB', \text{ masa}} = \rho t I_{BB', \text{ área}} \quad (\text{B.9})$$

Si se considera ahora el eje CC' que es perpendicular a la placa y pasa por el punto de intersección C de AA' y BB' (figura B.5c), se escribe

$$I_{CC', \text{ masa}} = \rho t J_C, \text{ área} \quad (\text{B.10})$$

donde J_C es el momento polar de inercia del área de la placa con respecto al punto C .

Al recordar la relación $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$ que existe entre los momentos polar y rectangular de inercia de un área, se escribe la siguiente relación entre los momentos de inercia de masa de una placa delgada:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \quad (\text{B.11})$$

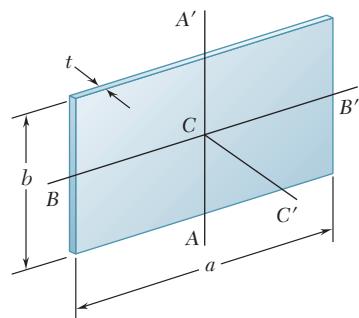


Figura B.6

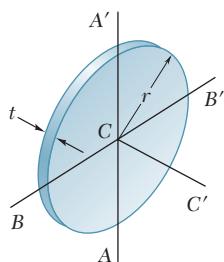


Figura B.7

Placa rectangular. En el caso de una placa rectangular de lados a y b (figura B.6), se obtienen los siguientes momentos de inercia de masa con respecto a los ejes que pasan por el centro de gravedad de la placa

$$\begin{aligned} I_{AA'}, \text{ masa} &= \rho t I_{AA'} \text{, área} = \rho t \left(\frac{1}{12} a^3 b\right) \\ I_{BB'}, \text{ masa} &= \rho t I_{BB'} \text{, área} = \rho t \left(\frac{1}{12} a b^3\right) \end{aligned}$$

Al observar que el producto $\rho a b t$ es igual a la masa m de la placa, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa rectangular delgada del modo siguiente:

$$I_{AA'} = \frac{1}{12} m a^2 \quad I_{BB'} = \frac{1}{12} m b^2 \quad (\text{B.12})$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \quad (\text{B.13})$$

Placa circular. En el caso de una placa circular, o disco, de radio r (figura B.7), se escribe

$$I_{AA'}, \text{ masa} = \rho t I_{AA'} \text{, área} = \rho t \left(\frac{1}{4} \pi r^4\right)$$

Al observar que el producto $\rho \pi r^2 t$ es igual a la masa m de la placa y que $I_{AA'} = I_{BB'}$, se escriben los momentos de inercia de masa de una placa circular de la manera siguiente:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{1}{4} m r^2 \quad (\text{B.14})$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{2} m r^2 \quad (\text{B.15})$$

B.4. DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO TRIDIMENSIONAL MEDIANTE INTEGRACIÓN

El momento de inercia de un cuerpo tridimensional se obtiene evaluando la integral $I = \int r^2 dm$. Si el cuerpo está hecho de material homogéneo de densidad ρ , el elemento de masa dm es igual a ρdV y se puede escribir $I = \rho \int r^2 dV$. Esta integral depende sólo de la forma del cuerpo. De tal modo, para calcular el momento de inercia de un cuerpo tridimensional, por lo general es necesario efectuar una integración triple, o al menos doble.

Sin embargo, si el cuerpo posee dos planos de simetría, es posible determinar el momento de inercia del cuerpo con una sola integración al elegir como elemento de masa dm una placa delgada que es perpendicular a los planos de simetría. En el caso de cuerpos de revolución, por ejemplo, el elemento de masa sería un disco delgado (figura B.8). Utilizando la fórmula (B.15), el momento de inercia con respecto al eje de revolución se puede expresar como se indica en la figura B.8. Su momento de inercia con respecto a cada uno de los otros dos ejes de coordenadas se obtiene utilizando la fórmula (B.14) y el teorema de ejes paralelos. La integración de la expresión obtenida produce el momento de inercia deseado del cuerpo.

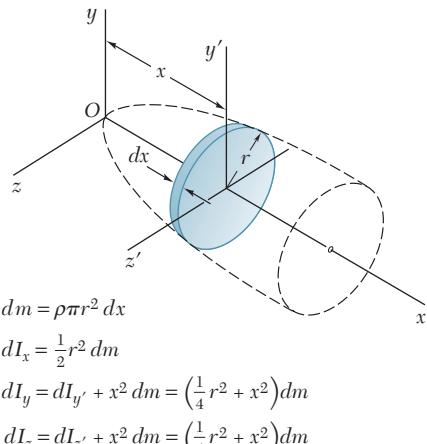


Figura B.8 Determinación del momento de inercia de un cuerpo de revolución.

B.5. MOMENTOS DE INERCIA DE CUERPOS COMPUESTOS

Los momentos de inercia de unas cuantas formas comunes se muestran en la figura B.9. Para un cuerpo consistente en varias de estas formas simples, el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje dado puede obtenerse calculando primero los momentos de inercia de sus partes componentes alrededor del eje deseado y después sumándolos en conjunto. Como sucedió con las áreas, el radio de giro de un cuerpo compuesto no puede obtenerse sumando los radios de giro de sus partes componentes.

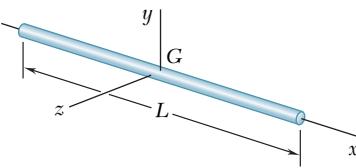
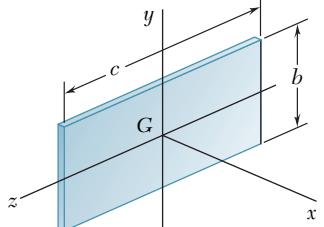
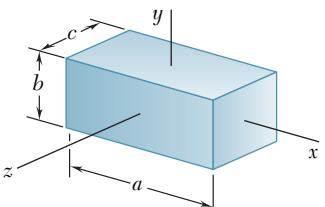
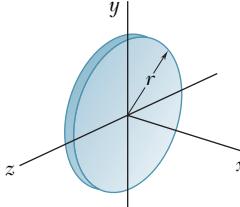
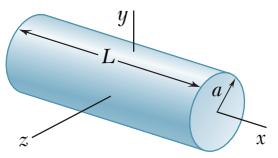
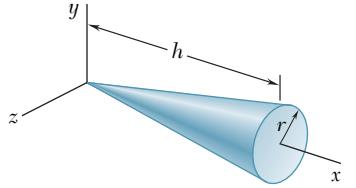
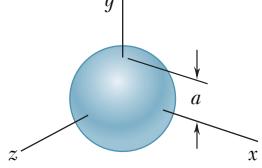
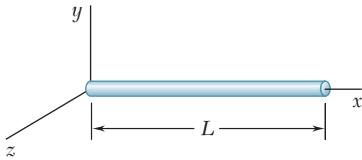
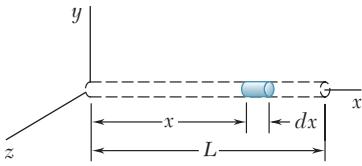
Barra ligera		$I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$
Placa rectangular delgada		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$
Prisma rectangular		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$
Cono circular		$I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$

Figura B.9 Momentos de inercia de masa de formas geométricas comunes.



PROBLEMA RESUELTO B.1

Determine el momento de inercia de una barra ligera de longitud L y masa m con respecto a un eje que es perpendicular a la barra y pasa por un extremo de la misma.

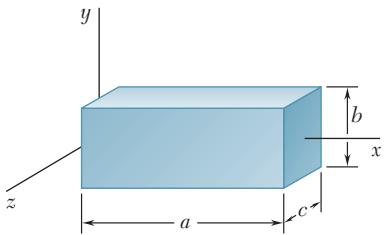


$$dm = \frac{m}{L} dx$$

$$I_y = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L} dx = \left[\frac{m}{L} \frac{x^3}{3} \right]_0^L \quad I_y = \frac{1}{3} mL^2 \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESUELTO B.2

Para el prisma rectangular homogéneo que se muestra, determine el momento de inercia con respecto al eje z .



SOLUCIÓN

Se elige como elemento diferencial de masa la placa delgada que se muestra; de tal modo

$$dm = \rho bc dx$$

Refiriéndose a la sección B.3, se encuentra que el momento de inercia del elemento con respecto al eje z' es

$$dI_{z'} = \frac{1}{12}b^2 dm$$

Al aplicar el teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner, se obtiene el momento de inercia de masa de la placa con respecto al eje z .

$$dI_z = dI_{z'} + x^2 dm = \frac{1}{12}b^2 dm + x^2 dm = (\frac{1}{12}b^2 + x^2) \rho bc dx$$

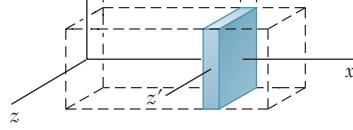
Si se integra desde $x = 0$ a $x = a$, se obtiene

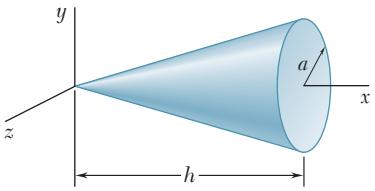
$$I_z = \int dI_z = \int_0^a (\frac{1}{12}b^2 + x^2) \rho bc dx = \rho abc(\frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{3}a^2)$$

Puesto que la masa total del prisma es $m = \rho abc$, se puede escribir

$$I_z = m(\frac{1}{12}b^2 + \frac{1}{3}a^2) \quad I_z = \frac{1}{12}m(4a^2 + b^2) \quad \blacktriangleleft$$

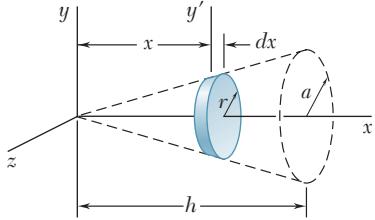
Hay que observar que si el prisma es delgado, b es pequeña comparada con a , y la expresión para I_z se reduce a $\frac{1}{3}ma^2$, que es el resultado que se obtuvo en el problema resuelto B.1 cuando $L = a$.





PROBLEMA RESUELTO B.3

Determine el momento de inercia de un cono circular recto con respecto a a) su eje longitudinal, b) un eje que pasa por el ápice del cono y perpendicular a su eje longitudinal, c) un eje que pasa por el centroide del cono y perpendicular a su eje longitudinal.



SOLUCIÓN

Se elige el elemento diferencial de masa que se muestra.

$$r = a \frac{x}{h} \quad dm = \rho \pi r^2 dx = \rho \pi \frac{a^2}{h^2} x^2 dx$$

a) Momentos de inercia I_x . Utilizando la expresión que se obtuvo en la sección B.3 para un disco delgado, se calcula el momento de inercia de masa del elemento diferencial con respecto al eje x .

$$dI_x = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \left(a \frac{x}{h} \right)^2 \left(\rho \pi \frac{a^2}{h^2} x^2 dx \right) = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{a^4}{h^4} x^4 dx$$

Al integrar desde $x = 0$ hasta $x = h$, se obtiene

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \frac{1}{2} \rho \pi \frac{a^4}{h^4} x^4 dx = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{a^4}{h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{1}{10} \rho \pi a^4 h$$

Puesto que la masa total del cono es $m = \frac{1}{3} \rho \pi a^2 h$, se puede escribir

$$I_x = \frac{1}{10} \rho \pi a^4 h = \frac{3}{10} a^2 \left(\frac{1}{3} \rho \pi a^2 h \right) = \frac{3}{10} m a^2 \quad I_x = \frac{3}{10} m a^2 \quad \blacktriangleleft$$

b) Momento de inercia I_y . Se usa el mismo elemento diferencial. Aplicando el teorema de ejes paralelos y utilizando la expresión que se dedujo en la sección B.3 para un disco delgado, se escribe

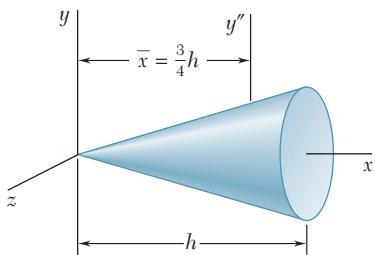
$$dI_y = dI_{y'} + x^2 dm = \frac{1}{4} r^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{4} r^2 + x^2 \right) dm$$

Al sustituir las expresiones para r y dm en la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} dI_y &= \left(\frac{1}{4} \frac{a^2}{h^2} x^2 + x^2 \right) \left(\rho \pi \frac{a^2}{h^2} x^2 dx \right) = \rho \pi \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1 \right) x^4 dx \\ I_y &= \int dI_y = \int_0^h \rho \pi \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1 \right) x^4 dx = \rho \pi \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{a^2}{4h^2} + 1 \right) \frac{h^5}{5} \end{aligned}$$

Al introducir la masa total del cono m , se reescribe I_y como sigue:

$$I_y = \frac{3}{5} \left(\frac{1}{4} a^2 + h^2 \right) \frac{1}{3} \rho \pi a^2 h \quad I_y = \frac{3}{5} m \left(\frac{1}{4} a^2 + h^2 \right) \quad \blacktriangleleft$$

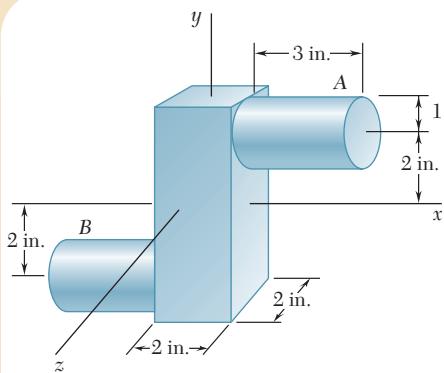


c) Momento de inercia $\bar{I}_{y''}$. Se aplica el teorema de ejes paralelos y se escribe

$$I_y = \bar{I}_{y''} + m \bar{x}^2$$

Al resolver para $\bar{I}_{y''}$ y recordar que $\bar{x} = \frac{3}{4} h$, se tiene

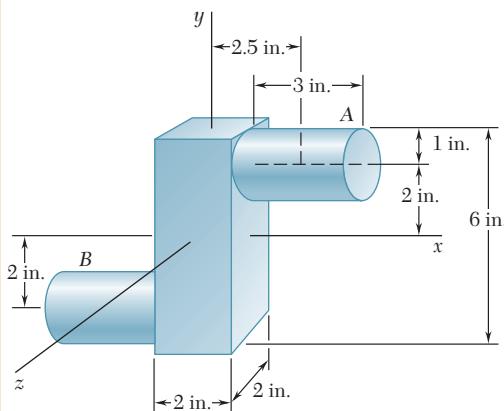
$$\begin{aligned} \bar{I}_{y''} &= I_y - m \bar{x}^2 = \frac{3}{5} m \left(\frac{1}{4} a^2 + h^2 \right) - m \left(\frac{3}{4} h \right)^2 \\ \bar{I}_{y''} &= \frac{3}{20} m \left(a^2 + \frac{1}{4} h^2 \right) \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO B.4

Una pieza de acero forjado está compuesta por un prisma rectangular de $6 \times 2 \times 2$ in. y dos cilindros de 2 in. de diámetro y 3 in. de largo como se muestra. Determine los momentos de inercia de la pieza forzada con respecto a los ejes coordinados si se sabe que el peso específico del acero es de $490 \text{ lb}/\text{ft}^3$.

SOLUCIÓN



Cálculo de masas Prisma

$$V = (2 \text{ in.})(2 \text{ in.})(6 \text{ in.}) = 24 \text{ in}^3$$

$$W = (24 \text{ in}^3)(490 \text{ lb}/\text{ft}^3) \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}} \right)^3 = 6.81 \text{ lb}$$

$$m = \frac{6.81 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Cada cilindro

$$V = \pi(1 \text{ in.})^2(3 \text{ in.}) = 9.42 \text{ in}^3$$

$$W = (9.42 \text{ in}^3)(490 \text{ lb}/\text{ft}^3) \left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}} \right)^3 = 2.67 \text{ lb}$$

$$m = \frac{2.67 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$$

Momentos de inercia. Los momentos de inercia de cada componente se calculan a partir de la figura B.9, utilizando el teorema de ejes paralelos cuando es necesario. Hay que observar que las longitudes se expresan en pies.

Prisma

$$I_x = I_z = \frac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\frac{6}{12} \text{ ft})^2 + (\frac{2}{12} \text{ ft})^2] = 4.88 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}(0.211 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\frac{2}{12} \text{ ft})^2 + (\frac{2}{12} \text{ ft})^2] = 0.977 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Cada cilindro

$$I_x = \frac{1}{2}ma^2 + m\bar{y}^2 = \frac{1}{2}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\frac{1}{12} \text{ ft})^2 + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\frac{2}{12} \text{ ft})^2 = 2.59 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m\bar{x}^2 = \frac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[3(\frac{1}{12} \text{ ft})^2 + (\frac{3}{12} \text{ ft})^2] + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})(\frac{2.5}{12} \text{ ft})^2 = 4.17 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

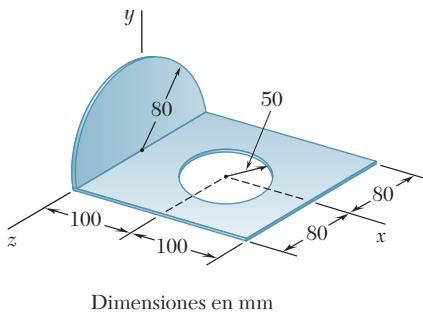
$$I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = \frac{1}{12}(0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[3(\frac{1}{12} \text{ ft})^2 + (\frac{3}{12} \text{ ft})^2] + (0.0829 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft})[(\frac{2.5}{12} \text{ ft})^2 + (\frac{2}{12} \text{ ft})^2] = 6.48 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Cuerpo completo. Al sumar los valores obtenidos,

$$I_x = 4.88 \times 10^{-3} + 2(2.59 \times 10^{-3}) \quad I_x = 10.06 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

$$I_y = 0.977 \times 10^{-3} + 2(4.17 \times 10^{-3}) \quad I_y = 9.32 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

$$I_z = 4.88 \times 10^{-3} + 2(6.48 \times 10^{-3}) \quad I_z = 17.84 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$



PROBLEMA RESUELTO B.5

Una delgada placa de acero que mide 4 mm de espesor se corta y dobla para formar la parte de la máquina que se muestra. Si la densidad del acero es de 7850 kg/m^3 , determine los momentos de inercia de la parte de la máquina con respecto a los ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN

Se observa que la parte de la máquina se compone de una placa circular y de una placa rectangular de la cual se removió una placa circular.

Cálculo de masas. Placa semicircular

$$V_1 = \frac{1}{2}\pi r^2 t = \frac{1}{2}\pi(0.08 \text{ m})^2(0.004 \text{ m}) = 40.21 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$m_1 = \rho V_1 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(40.21 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.3156 \text{ kg}$$

Placa rectangular

$$V_2 = (0.200 \text{ m})(0.160 \text{ m})(0.004 \text{ m}) = 128 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$m_2 = \rho V_2 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(128 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 1.005 \text{ kg}$$

Placa circular

$$V_3 = \pi a^2 t = \pi(0.050 \text{ m})^2(0.004 \text{ m}) = 31.42 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$m_3 = \rho V_3 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(31.42 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.2466 \text{ kg}$$

Momentos de inercia. Utilizando el método que se presentó en la sección B.3, se calculan los momentos de inercia de cada componente.

Placa semicircular. De la figura B.9, se observa que para una placa circular de masa m y radio r

$$I_x = \frac{1}{2}mr^2 \quad I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$$

Debido a la simetría, se advierte que para una placa semicircular

$$I_x = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2) \quad I_y = I_z = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}mr^2)$$

Puesto que la masa de la placa semicircular es $m_1 = \frac{1}{2}m$, se tiene

$$I_x = \frac{1}{2}m_1r^2 = \frac{1}{2}(0.3156 \text{ kg})(0.08 \text{ m})^2 = 1.010 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}mr^2) = \frac{1}{4}m_1r^2 = \frac{1}{4}(0.3156 \text{ kg})(0.08 \text{ m})^2 = 0.505 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa rectangular

$$I_x = \frac{1}{12}m_2c^2 = \frac{1}{12}(1.005 \text{ kg})(0.16 \text{ m})^2 = 2.144 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = \frac{1}{3}m_2b^2 = \frac{1}{3}(1.005 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2 = 13.400 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_x + I_z = (2.144 + 13.400)(10^{-3}) = 15.544 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa circular

$$I_x = \frac{1}{4}m_3a^2 = \frac{1}{4}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 = 0.154 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = \frac{1}{2}m_3a^2 + m_3d^2 = \frac{1}{2}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 + (0.2466 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2 = 2.774 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = \frac{1}{4}m_3a^2 + m_3d^2 = \frac{1}{4}(0.2466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 + (0.2466 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2 = 2.620 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Parte de máquina completa

$$I_x = (1.010 + 2.144 - 0.154)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_x = 3.00 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = (0.505 + 15.544 - 2.774)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_y = 13.28 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = (0.505 + 13.400 - 2.620)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_z = 11.29 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se introdujo el *momento de inercia de masa* y el *radio de giro* de un cuerpo tridimensional con respecto a un eje dado [ecuaciones (B.1) y (B.2)]. También se dedujó un *teorema de ejes paralelos* para usarlo con momentos de inercia de masa y se estudió el cálculo de momentos de inercia de masa de placas delgadas y cuerpos tridimensionales.

1. Cálculo de momentos de inercia de masa. El momento de inercia de masa I de un cuerpo con respecto a un eje dado puede calcularse de manera directa a partir de la definición dada en la ecuación (B.1) para formas simples [problema resuelto B.1]. Sin embargo, en la mayoría de los casos es necesario dividir el cuerpo en placas delgadas, calcular el momento de inercia de una placa característica con respecto a un eje dado —utilizando el teorema de los ejes paralelos si es necesario— e integrar la expresión obtenida.

2. Aplicación del teorema de los ejes paralelos. En la sección B.2 se obtuvo el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia de masa

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (\text{B.6})$$

que establece que el momento de inercia I de un cuerpo de masa m con respecto a un eje dado es igual a la suma de los momentos de inercia \bar{I} de ese cuerpo con respecto al *eje centroidal paralelo* y el producto md^2 , donde d es la distancia entre los dos ejes. Cuando el momento de inercia de un cuerpo tridimensional se calcula con respecto a uno de los ejes de coordenadas, d^2 puede sustituirse por la suma de los cuadrados de las distancias medidas a lo largo de los otros dos ejes de coordenadas [ecuaciones (B.5) y (B.5')].

3. Evitar errores relacionados con las unidades. Para evitar errores, es esencial que exista consistencia en el uso de las unidades. De tal modo, todas las longitudes deben expresarse en metros o pies, según sea apropiado, y en problemas en los que se utilicen unidades de uso común en Estados Unidos, las masas deben indicarse en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$. Además, se recomienda ampliamente que se incluyan unidades cuando se efectúen los cálculos [problemas resueltos (B.4) y (B.5)].

4. Cálculo del momento de inercia de masa de placas delgadas. Se demostró en la sección B.3 que el momento de inercia de masa de una placa delgada con respecto a un eje dado puede obtenerse multiplicando el momento de inercia correspondiente del área de la placa por la densidad ρ y por el espesor t de la misma [ecuaciones (B.8) a (B.10)]. Hay que observar que como el eje CC' en la figura B.5c es *perpendicular a la placa*, $I_{CC', \text{masa}}$ se asocia con el momento de inercia polar $J_{C, \text{área}}$.

En lugar de calcular de manera directa el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje especificado, en ocasiones resulta conveniente calcular

(continúa)

primero su momento de inercia con respecto a un eje paralelo al eje especificado y después aplicar el teorema de los ejes paralelos. Además, para determinar el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje perpendicular a la placa, es posible determinar primero sus momentos de inercia con respecto a dos ejes perpendiculares en un plano y luego utilizar la ecuación (B.11). Por último, hay que recordar que la masa de una placa de área A , espesor t y densidad ρ es $m = \rho t A$.

5. Obtención del momento de inercia de un cuerpo mediante una sola integración directa. En la sección B.4 se analizó y se ilustró en los problemas resueltos B.2 y B.3 cómo es posible utilizar una sola integración para calcular el momento de inercia de un cuerpo que puede dividirse en una serie de placas delgadas y paralelas. Para estos casos, a menudo es necesario expresar la masa del cuerpo en términos de la densidad y las dimensiones del mismo. Suponiendo que se ha dividido, como en los problemas resueltos, en placas delgadas perpendiculares al eje x , resultará necesario expresar las dimensiones de cada placa como funciones de la variable x .

a) **En el caso especial de un cuerpo de revolución,** la placa elemental es un disco delgado y deben utilizarse las ecuaciones que se dan en la figura B.8 para determinar los momentos de inercia del cuerpo [problema resuelto B.3].

b) **En el caso general, cuando el cuerpo no es de revolución,** el elemento diferencial no es un disco, sino una placa delgada de una forma diferente, y no es posible utilizar las ecuaciones de la figura B.8. Hay que observar, por ejemplo, el problema resuelto B.2, donde el elemento era una placa rectangular delgada. Para configuraciones más complejas, se puede utilizar una o más de las siguientes ecuaciones, las cuales se basan en las ecuaciones (B.5) y (B.5') de la sección B.2.

$$\begin{aligned} dI_x &= dI_{x'} + (\bar{y}_{el}^2 + \bar{z}_{el}^2) dm \\ dI_y &= dI_{y'} + (\bar{z}_{el}^2 + \bar{x}_{el}^2) dm \\ dI_z &= dI_{z'} + (\bar{x}_{el}^2 + \bar{y}_{el}^2) dm \end{aligned}$$

donde las primas denotan los ejes centroidales de cada placa elemental, y \bar{x}_{el} , \bar{y}_{el} y \bar{z}_{el} representan las coordenadas de su centroide. Los momentos de inercia centroidales de la placa se determinan de la manera que se describió antes para una placa delgada: con referencia en la figura 9.12, calcule los momentos de inercia correspondientes del área de la placa y multiplique el resultado por la densidad ρ y el espesor t de la misma. Además, suponiendo que el cuerpo se ha dividido en placas delgadas perpendiculares al eje x , recuerde que es posible obtener $dI_{x'}$ sumando $dI_{y'}$ y $dI_{z'}$ en lugar de hacer el cálculo de manera directa. Por último, utilizando la geometría del cuerpo, se puede expresar el resultado obtenido en términos de una sola variable x e integrar en x .

6. Cálculo del momento de inercia de un cuerpo compuesto. Como se estableció en la sección B.5, el momento de inercia de un cuerpo compuesto con respecto a un eje especificado es igual a la suma de los momentos de sus componentes con respecto a ese eje. Los problemas resueltos B.4 y B.5 ilustran el método de solución apropiado. También se debe recordar que el momento de inercia de un componente será negativo sólo si el componente se *remueve* (como en el caso de un agujero).

Aunque los problemas del cuerpo compuesto en esta lección son relativamente directos, se tendrá que trabajar con cuidado para evitar errores de cálculo. Además, si alguno de los momentos de inercia necesarios no se indica en la figura B.9, se tendrá que deducir sus fórmulas utilizando las técnicas de esta lección.

Problemas

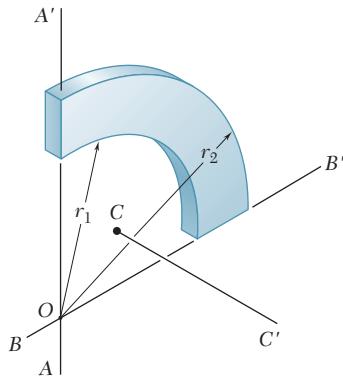


Figura PB.1

B.1 En la figura se muestra un cuarto de anillo con masa m que fue cortado de una placa uniforme delgada. Si $r_1 = \frac{1}{2}r_2$, determine su momento de inercia de masa con respecto a a) el eje AA' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al cuarto de anillo.

B.2 En la figura se muestra una placa delgada y semielíptica con una masa m . Determine su momento de inercia de masa con respecto a a) el eje centroidal BB' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa.

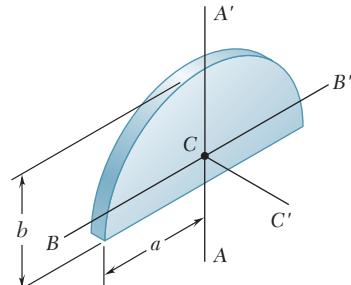


Figura PB.2

B.3 En la figura se muestra un anillo elíptico que fue cortado de una placa uniforme delgada. Si la masa del anillo se denota con m , determine su momento de inercia con respecto a a) el eje centroidal BB' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al anillo.

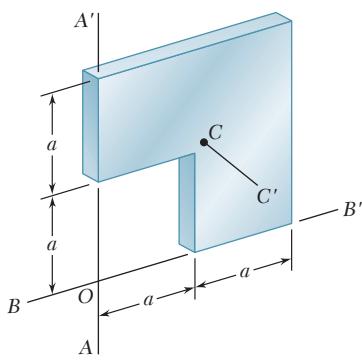


Figura PB.4

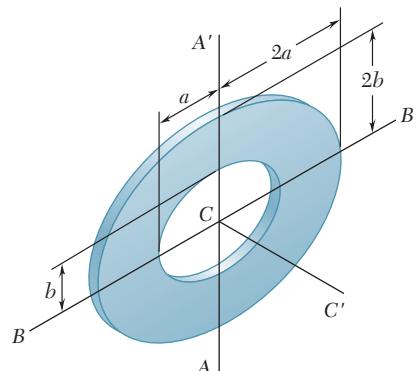


Figura PB.3

B.4 En la figura se muestra un componente de máquina que fue cortado de una placa uniforme delgada. Si la masa del componente se denota con m , determine su momento de inercia de masa con respecto a a) el eje BB' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al componente.

B.5 El rombo mostrado en la figura tiene una masa m y fue cortado de una placa delgada uniforme. Determine el momento de inercia de masa del rombo con respecto a a) el eje x , b) el eje y .

B.6 El rombo mostrado en la figura tiene una masa m y fue cortado de una placa delgada uniforme. Si los ejes AA' y BB' son paralelos al eje z y descansan en un plano paralelo al plano zx y además se encuentran a una distancia a sobre éste, determine el momento de inercia de masa del rombo con respecto a a) el eje AA' , b) el eje BB' .

B.7 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a a) el eje x y b) el eje y .

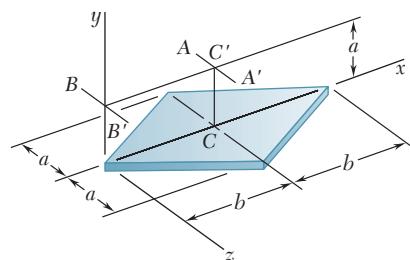


Figura PB.5 y PB.6

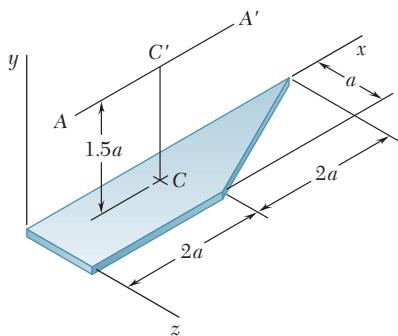


Figura PB.7 y PB.8

B.8 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a a) el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa y b) el eje AA' que es paralelo al eje x y se encuentra a una distancia de $1.5a$ desde la placa.

B.9 Al rotar la enjuta parabólica mostrada con respecto al eje x se forma un sólido homogéneo de revolución con masa m . Utilice integración directa para expresar, en términos de m y b , el momento de inercia del sólido con respecto al eje x .

B.10 Determine por integración directa el momento de inercia de masa con respecto al eje z del cilindro circular recto que se muestra en la figura. Suponga que el cilindro tiene densidad uniforme y una masa m .

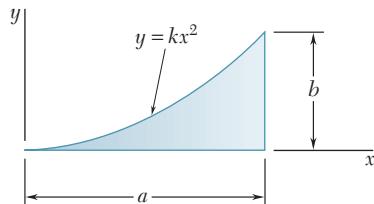


Figura PB.9

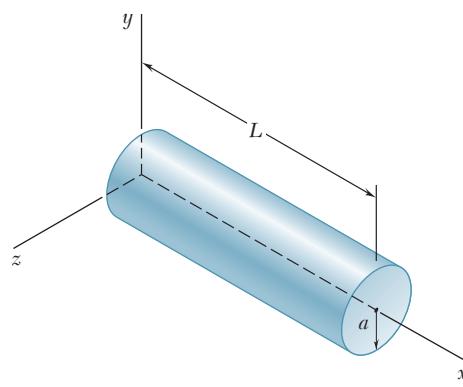


Figura PB.10

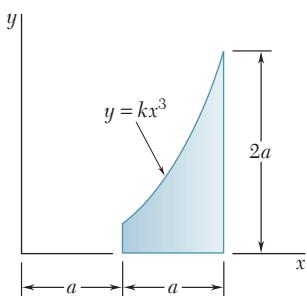


Figura PB.11

B.11 El área mostrada en la figura se rota con respecto al eje x para formar un sólido homogéneo de revolución con masa m . Determine por integración directa el momento de masa de inercia del sólido con respecto a *a) el eje x y b) el eje y* . Exprese las respuestas en términos de m y a .

B.12 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m . Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje x .

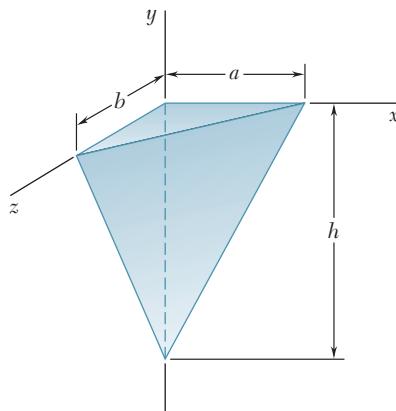


Figura PB.12 y PB.13

B.13 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m . Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje y .

***B.14** Suponga que el semielipsoide mostrado en la figura tiene una densidad uniforme y una masa m . Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje z .

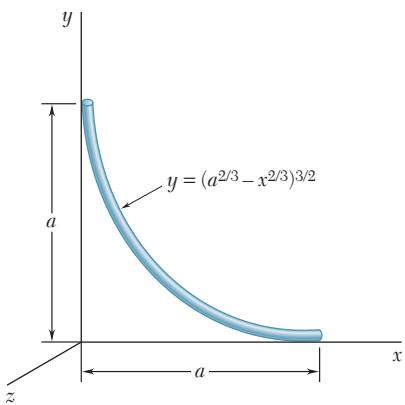


Figura PB.15

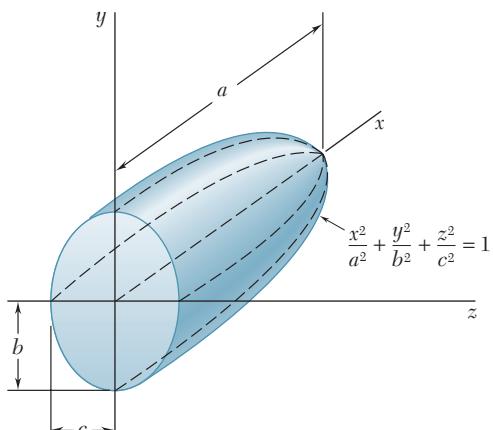


Figura PB.14

***B.15** Un alambre delgado de acero se dobla en la forma mostrada en la figura. Si se representa con m' la masa por unidad de longitud del alambre, determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

B.16 En la figura se muestra una placa delgada con forma triangular y masa m , la cual está soldada a un bloque a lo largo de su base AB . Si se sabe que la placa forma un ángulo θ con el eje y , determine por integración directa el momento de inercia de masa de la placa con respecto a *a)* el eje x , *b)* el eje y y *c)* el eje z .

B.17 En la figura se muestra la sección transversal de una polea moldeada para banda plana. Determine su momento de inercia de masa y el radio de giro con respecto al eje AA' . (El peso específico del latón es 0.306 lb/in.³, y el del policarbonato de fibra reforzada es 0.0433 lb/in.³)

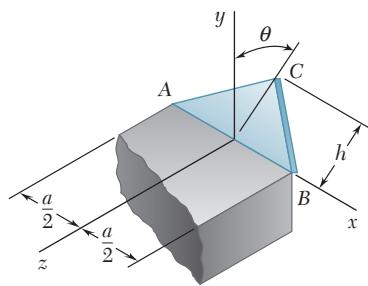


Figura PB.16

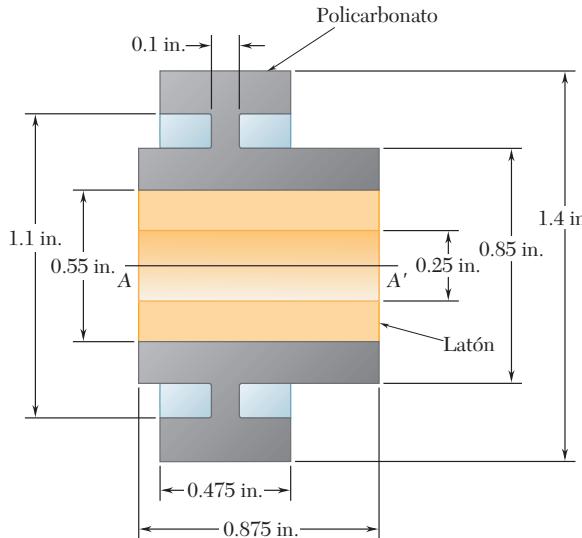


Figura PB.17

B.18 En la figura se muestra la sección transversal de un rodillo móvil. Determine su momento de inercia y su radio de giro de masa con respecto al eje AA' . (La densidad del bronce es de 8 580 kg/m³, la del aluminio es de 2 770 kg/m³ y la del neopreno es de 1 250 kg/m³.)

B.19 Dadas las dimensiones y la masa m del cascarón cónico delgado que se muestra en la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro del cascarón con respecto al eje x . (*Sugerencia:* Considere que el cascarón se formó al remover un cono con una base circular de radio a de un cono con una base circular de radio $a + t$. En las expresiones resultantes, no tome en cuenta los términos que contengan t^2 , t^3 etc. No olvide tomar en cuenta la diferencia en las alturas de los dos conos.)

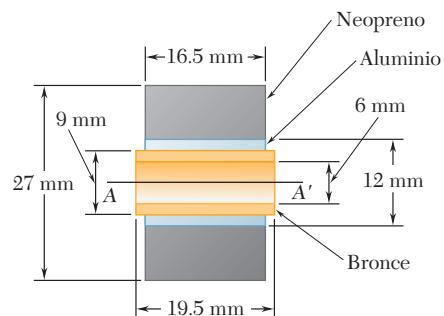


Figura PB.18

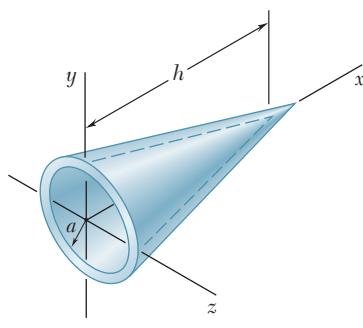


Figura PB.19

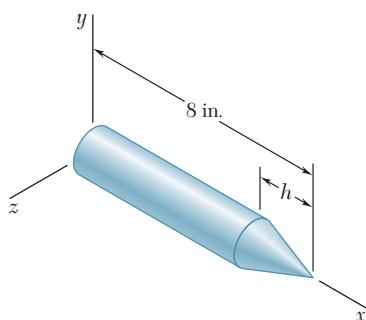


Figura PB.20

B.20 Una porción de una barra larga de acero de 8 in. de largo y 1.50 in. de diámetro se gira para formar la sección cónica que se muestra. Si el proceso de giro reduce el momento de inercia de la barra con respecto al eje x en 20 por ciento, determine la altura h del cono.

B.21 El componente de máquina de acero que se muestra se formó maquinando un hemisferio en la base de un cono truncado. Si la densidad del acero es de 7850 kg/m^3 , determine el momento de inercia de masa de la componente con respecto al eje y .

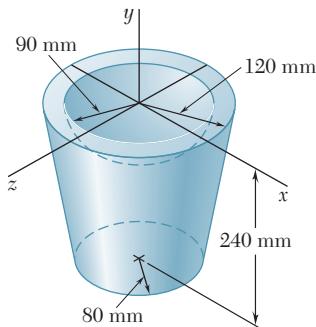


Figura PB.21

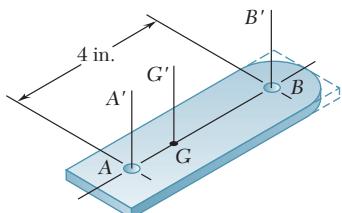


Figura PB.22

B.22 Luego de un periodo de uso, se desgastó una de las cuchillas de un desmenuzador y terminó en la forma mostrada, con un peso de 0.4 lb. Si los momentos de inercia de la cuchilla con respecto a los ejes AA' y BB' son $0.6 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$ y $1.26 \times 10^{-3} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$, respectivamente, determine *a*) la ubicación del eje centroidal GG' , *b*) el radio de giro con respecto al eje GG' .

B.23 Las copas y los brazos de un anemómetro se fabrica con un material de densidad ρ . Si el momento de inercia de un cascarón hemisférico delgado de masa m y espesor t con respecto a su eje centroidal GG' es $5ma^2/12$, determine *a*) el momento de inercia del anemómetro con respecto al eje AA' , *b*) la razón de a sobre l para la cual el momento de inercia centroidal de las copas es igual a 1 por ciento del momento de inercia de las copas con respecto al eje AA' .

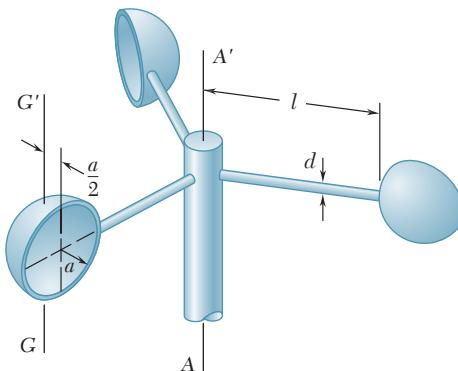


Figura PB.23

B.24 Un agujero cuadrado centrado se extiende de un lado al otro del componente de máquina de aluminio que se muestra. Determine *a*) el valor de *a* para el cual la masa del momento de inercia del componente con respecto al eje *AA'*, que biseca la superficie superior del agujero, es máxima, *b*) los valores correspondientes del momento de inercia de masa y el radio de giro con respecto al eje *AA'*. (La densidad del aluminio es de $2\ 800 \text{ kg/m}^3$.)

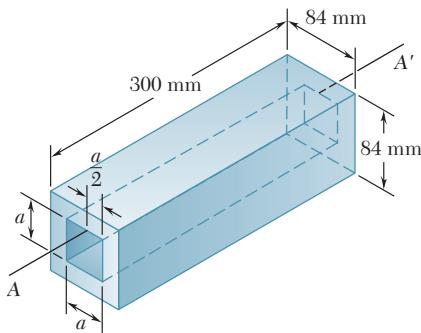


Figura PB.24

B.25 Una pieza de 0.1 in. de espesor de hoja metálica se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado. Si el peso específico del acero es de 0.284 lb/in.^3 , determine el momento de inercia del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

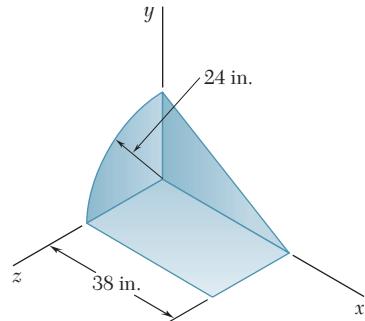


Figura PB.25

B.26 Una pieza de 3 mm de espesor de hoja metálica se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado. Si la densidad del acero es $7\ 850 \text{ kg/m}^3$, determine el momento de inercia del componente con respecto a cada uno de los ejes coordinados.

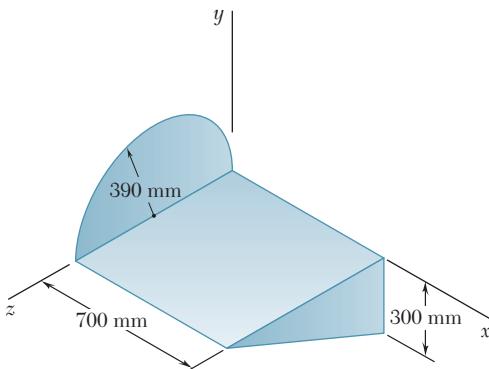


Figura PB.26

B.27 La cubierta de un dispositivo electrónico se forma de una hoja de aluminio de 2 mm de espesor. Determine el momento de inercia de masa de la cubierta con respecto a cada uno de los ejes coordinados. (La densidad del aluminio es de $2\ 770 \text{ kg/m}^3$.)

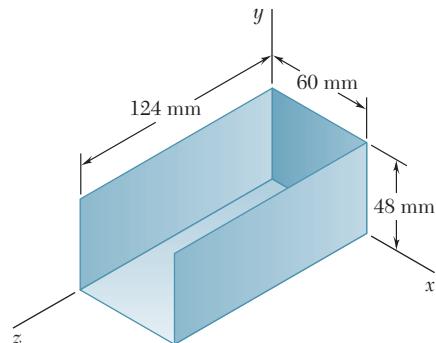


Figura PB.27

B.28 Un anclaje de estructuras se forma con acero galvanizado de 2 mm de espesor. Determine el momento de inercia de masa del anclaje con respecto a cada uno de los ejes coordenados. (La densidad del acero galvanizado es de $7\,530 \text{ kg/m}^3$.)

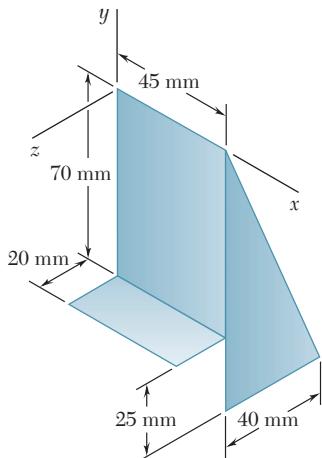


Figura PB.28

B.29 Una pieza de hoja de acero de 2 mm de espesor se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado. Si la densidad del acero es igual a $7\,850 \text{ kg/m}^3$, determine el momento de inercia del componente con respecto a cada uno de los ejes coordinados.

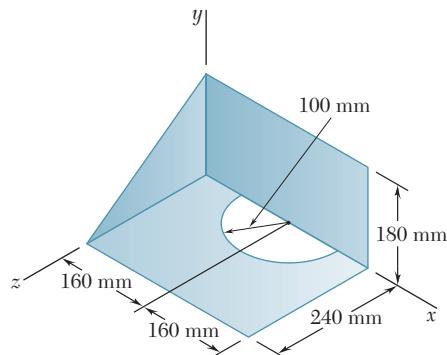


Figura PB.29

***B.30** La pieza de escurridor de techo que se muestra se forma a partir de hoja de cobre que tiene un espesor de 0.032 in. Si el peso específico del cobre es de 558 lb/ft^3 , determine el momento de inercia del escurridor con respecto a cada uno de los ejes coordinados.

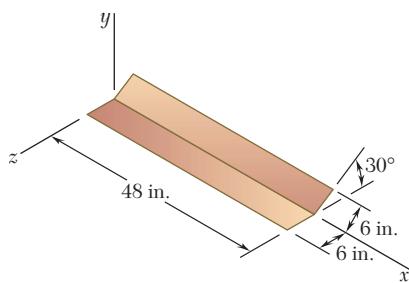


Figura PB.30

- B.31** El elemento de máquina que se muestra en la figura está fabricado con acero. Determine el momento de inercia de masa del ensamblaje con respecto a *a)* el eje *x*, *b)* el eje *y*, *c)* el eje *z*. (El peso específico del acero es de 0.284 lb/in.³.)

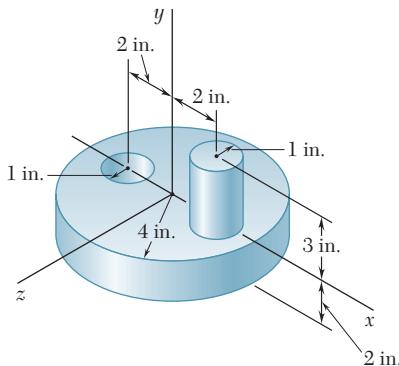


Figura PB.31

- B.32** Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto al eje *y*. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m³.)

- B.33** Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto al eje *z*. (La densidad del acero es de 7 850 kg/m³.)

- B.34** Una pieza fundida de aluminio tiene la forma que se indica. Si el peso específico del aluminio es igual a 0.100 lb/in.³, determine el momento de inercia de la pieza fundida con respecto al eje *z*.

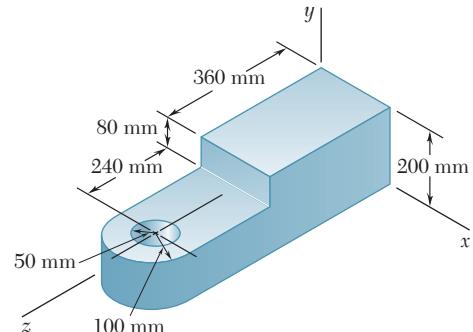


Figura PB.32 y PB.33

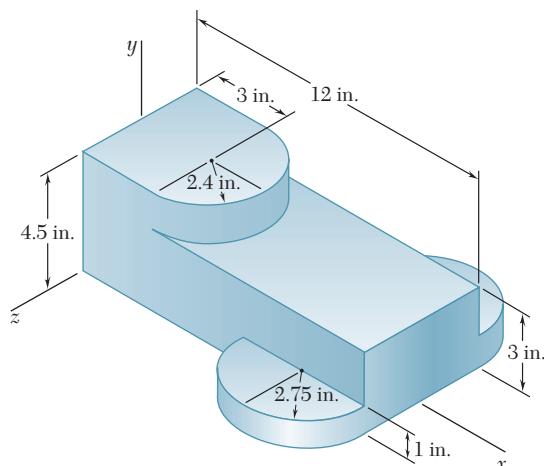


Figura PB.34

B.35 Determine el momento de inercia del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto a) el eje x , b) el eje y , c) el eje z . (El peso específico del acero es de 490 lb/ft^3 .)

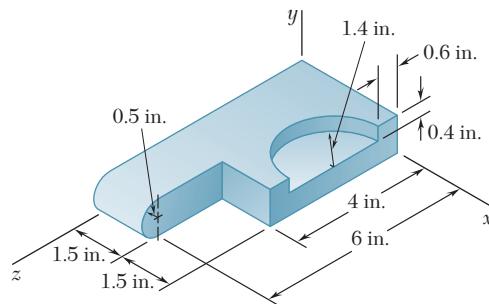


Figura PB.35

B.36 Un alambre de aluminio con una masa por unidad de longitud de 0.049 kg/m se emplea para formar el círculo y los elementos rectos de la figura mostrada. Determine el momento de inercia de masa del ensamble con respecto a cada uno de los ejes coordinados.

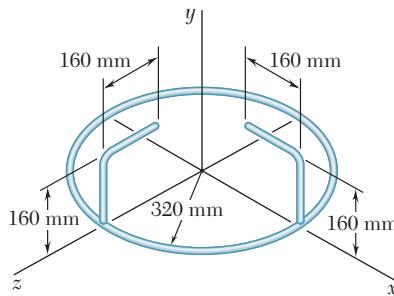


Figura PB.36

B.37 La figura que se muestra está formada con alambre de acero de 3 mm de diámetro. Si la densidad del acero es de 7850 kg/m^3 , determine el momento de inercia de masa del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordinados.

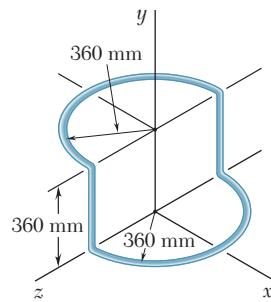


Figura PB.37

- B.38** Un alambre homogéneo con un peso por unidad de longitud de 0.041 lb/ft se usa para formar la figura mostrada. Determine el momento de inercia del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

B.6. Momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje arbitrario que pasa por O. Productos de inercia.

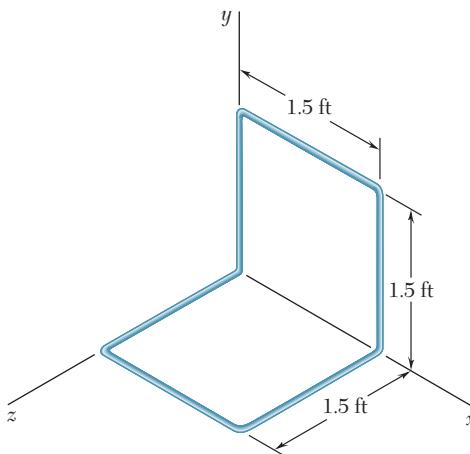


Figura PB.38

*B.6. MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO RESPECTO A UN EJE ARBITRARIO QUE PASA POR O. PRODUCTOS DE INERCIA

En esta sección se verá cómo determinar el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje arbitrario OL que pasa por el origen (figura B.10) si sus momentos de inercia en relación con los tres ejes coordinados, así como con otras cantidades que se definirán más adelante, ya fueron determinados.

El momento de inercia I_{OL} del cuerpo respecto a OL es igual a $\int p^2 dm$, donde p denota la distancia perpendicular desde el elemento de masa dm hasta el eje OL . Si se denota mediante λ el vector unitario a lo largo de OL y con \mathbf{r} el vector de posición del elemento dm , se observa que la distancia perpendicular p es igual a $r \sin \theta$, lo cual representa la magnitud del producto vectorial $\lambda \times \mathbf{r}$. Por lo tanto, se escribe

$$I_{OL} = \int p^2 dm = \int |\lambda \times \mathbf{r}|^2 dm \quad (\text{B.16})$$

Al expresar $|\lambda \times \mathbf{r}|^2$ en términos de las componentes rectangulares del producto vectorial, se tiene

$$I_{OL} = \int [(\lambda_x y - \lambda_y x)^2 + (\lambda_y z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_z x - \lambda_x z)^2] dm$$

donde las componentes λ_x , λ_y y λ_z del vector unitario λ representan los cosenos directores del eje OL y las componentes x , y y z de \mathbf{r} representan las coordenadas del elemento de masa dm . Al desarrollar los términos cuadráticos y reagrupar los términos, se escribe

$$\begin{aligned} I_{OL} &= \lambda_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + \lambda_y^2 \int (z^2 + x^2) dm + \lambda_z^2 \int (x^2 + y^2) dm \\ &\quad - 2\lambda_x \lambda_y \int xy dm - 2\lambda_y \lambda_z \int yz dm - 2\lambda_z \lambda_x \int zx dm \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

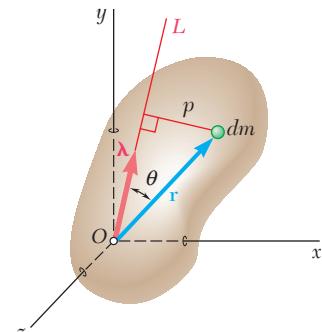


Figura B.10

Si se recurre a las ecuaciones (B.3), se advierte que las primeras tres integrales en (B.17) representan, respectivamente, los momentos de inercia I_x , I_y e I_z del cuerpo con respecto a los ejes de coordenadas. Las últimas tres integrales en (B.17), que implican productos de coordenadas, se denominan los *productos de inercia* del cuerpo con respecto a los ejes x y y , los ejes y y z , y los ejes z y x de manera respectiva. Se escribe

$$I_{xy} = \int xy \, dm \quad I_{yz} = \int yz \, dm \quad I_{zx} = \int zx \, dm \quad (\text{B.18})$$

Si se reescribe la ecuación (B.17) en términos de las integrales definidas en las ecuaciones (B.3) y (B.18), se tiene

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2I_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2I_{yz} \lambda_y \lambda_z - 2I_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (\text{B.19})$$

Hay que observar que la definición de los productos de inercia de una masa determinada en las ecuaciones (B.18) es una extensión de la definición del producto de inercia de un área (sección 9.8). Los productos de inercia de masa se reducen a cero bajo las mismas condiciones de simetría que los productos de inercia de áreas, y el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masa se expresan mediante relaciones similares a la forma que se obtuvo para el producto de inercia de un área. Al sustituir las expresiones para x , y y z dadas en las ecuaciones (B.4) y en las ecuaciones (B.18), se encuentra que

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \\ I_{yz} &= \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \\ I_{zx} &= \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

donde \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} son las coordenadas del centro de gravedad G del cuerpo e $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ e $\bar{I}_{z'x'}$ denotan los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes centroidales x' , y' y z' (figura B.3).

*B.7. ELIPSOIDE DE INERCIA. EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Supóngase que el momento de inercia del cuerpo que se consideró en la sección anterior se ha determinado con respecto a un gran número de ejes OL que pasan por el punto fijo O y que un punto Q se ha graficado sobre cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde O . El lugar geométrico de los puntos Q obtenido de esa manera forma una superficie (figura B.11). La ecuación de esa superficie se obtiene al sustituir $1/(OQ)^2$ en vez de I_{OL} en (B.19) y multiplicar después a ambos lados de la ecuación por $(OQ)^2$. Al observar que

$$(OQ)\lambda_x = x \quad (OQ)\lambda_y = y \quad (OQ)\lambda_z = z$$

donde x , y y z denotan las coordenadas rectangulares de Q , se escribe

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx = 1 \quad (\text{B.21})$$

La ecuación que se obtiene es la ecuación de una *superficie cuadrática*. Puesto que el momento de inercia I_{OL} es diferente de cero para cada eje OL , ningún punto Q puede estar a una distancia infinita de O . De tal modo, la superficie cuadrática que se obtiene es *una elipsoide*.

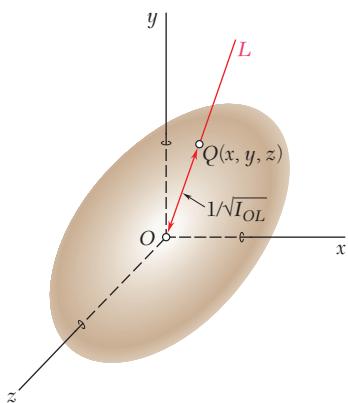


Figura B.11

Esta elipsoide, que define el momento de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje que pasa por O , se conoce como la *elipsoide de inercia* del cuerpo en O .

Hay que observar que si se rotan los ejes en la figura B.11, cambian los coeficientes de la ecuación que define la elipsoide, ya que son iguales a los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes de coordenadas rotados. Sin embargo, la *elipsoide misma permanece sin cambio*, pues su forma sólo depende de la distribución de masa en el cuerpo dado. Supóngase que se eligen como ejes de coordenadas los ejes principales x' , y' y z' de la elipsoide de inercia (figura B.12). Se sabe que la ecuación de la elipsoide con respecto a estos ejes de coordenadas es de la forma

$$I_{x'}x'^2 + I_{y'}y'^2 + I_{z'}z'^2 = 1 \quad (\text{B.22})$$

que no contiene ningún producto de las coordenadas. Al comparar las ecuaciones (B.21) y (B.22), se puede observar que los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x' , y' y z' deben ser cero. Los ejes x' , y' y z' se conocen como los *ejes principales de inercia* del cuerpo en O , y los coeficientes $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ se denominan *momentos principales de inercia* del cuerpo O . Hay que observar que, dado un cuerpo de forma arbitraria y un punto O , siempre es posible encontrar ejes que son los ejes principales de inercia del cuerpo en O , esto es, ejes con respecto a los cuales los productos de inercia del cuerpo son cero. De hecho, cualquiera que sea la forma del cuerpo, los momentos y productos de inercia del mismo con respecto a los ejes x , y y z que pasan por O definirán una elipsoide, y éste tendrá ejes principales que, por definición, son los ejes principales de inercia del cuerpo en O .

Si los ejes principales de inercia x' , y' y z' se usan como ejes de coordenadas, la expresión que se obtiene en la ecuación (B.19) para el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa por O se reduce a

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \quad (\text{B.23})$$

La determinación de los ejes principales de inercia de un cuerpo de forma arbitraria es algo complicada y se analizará en la siguiente sección. Sin embargo, hay muchos casos en los que los ejes pueden visualizarse de inmediato. Considere, por ejemplo, el cono homogéneo de base elíptica que se muestra en la figura B.13; este cono posee dos planos perpendiculares de simetría OAA' y OBB' mutuamente perpendiculares. De la definición (B.18) se puede observar que si los planos $x'y'$ y $y'z'$ se eligen para que coincidan con los dos planos de simetría, todos los productos de inercia son cero. Los ejes x' , y' y z' elegidos de ese modo son, en consecuencia, los ejes principales de inercia del cono en O . En el caso del tetraedro regular y homogéneo $OABC$ que se muestra en la figura B.14, la línea que une la esquina O con el centro D de la cara opuesta es un eje principal de inercia en O , y cualquier línea que pasa por O perpendicular a OD también es un eje principal de inercia en O . Esta propiedad es patente si observamos que al girar el tetraedro 120 grados alrededor de OD no cambia su forma y su distribución de masa. Se concluye que la elipsoide de inercia en O también permanece sin cambio bajo esta rotación. Por lo tanto, la elipsoide es un cuerpo de revolución cuyo eje de revolución es OD , y la línea OD , así como cualquier línea perpendicular que pase por O , debe ser un eje principal de la elipsoide.

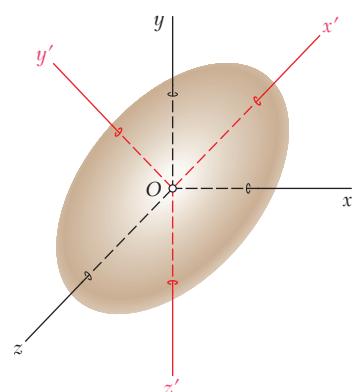


Figura B.12

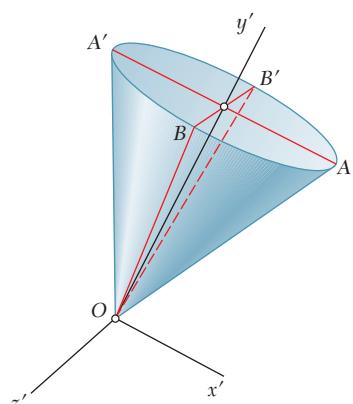


Figura B.13

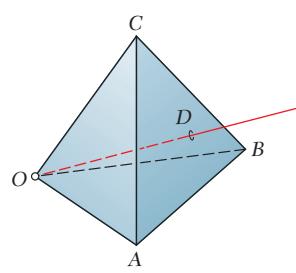


Figura B.14

*B.8. DETERMINACIÓN DE LOS EJES PRINCIPALES Y DE LOS MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA DE UN CUERPO DE FORMA ARBITRARIA

El método de análisis que se describe en esta sección debe utilizarse cuando el cuerpo bajo consideración no tenga ninguna propiedad de simetría evidente.

Considérese la elipsoide de inercia del cuerpo en un punto dado O (figura B.15); sea \mathbf{r} el radio vector de un punto P sobre la superficie de la elipsoide y sea \mathbf{n} el vector unitario a lo largo de la normal a esa superficie en P . Se observa que los únicos puntos donde \mathbf{r} y \mathbf{n} son colineales son los puntos P_1 , P_2 y P_3 , donde los ejes principales intersecan la porción visible de la superficie de la elipsoide y los puntos correspondientes sobre el otro lado de la elipsoide.

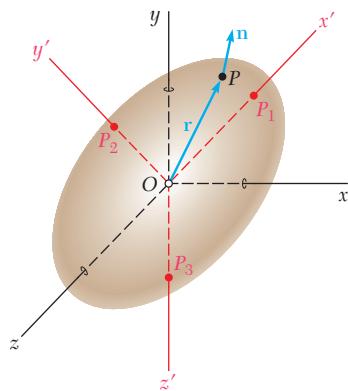


Figura B.15

Si se recuerda del cálculo que la dirección de la normal a una superficie de ecuación $f(x, y, z) = 0$ en el punto $P(x, y, z)$ se define mediante el gradiente ∇f de la función f para obtener los puntos donde los ejes principales intersecan la superficie de la elipsoide de inercia, se debe, por lo tanto, escribir que \mathbf{r} y ∇f son colineales,

$$\nabla f = (2K)\mathbf{r} \quad (\text{B.24})$$

donde K es una constante, $\mathbf{r} = xi + yj + zk$, y

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Al recordar la ecuación (B.21) se puede observar que la función $f(x, y, z)$ correspondiente a la elipsoide de inercia es

$$f(x, y, z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 1$$

Al sustituir \mathbf{r} y ∇f en la ecuación (B.24) e igualar los coeficientes de los vectores unitarios, se escribe

$$\begin{aligned} I_x x - I_{xy} y - I_{zx} z &= Kx \\ -I_{xy} x + I_y y - I_{yz} z &= Ky \\ -I_{zx} x - I_{yz} y + I_z z &= Kz \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Al dividir cada término por la distancia r de O a P , se obtienen ecuaciones similares que incluyen los cosenos directores λ_x , λ_y y λ_z :

$$\begin{aligned} I_x \lambda_x - I_{xy} \lambda_y - I_{zx} \lambda_z &= K \lambda_x \\ -I_{xy} \lambda_x + I_y \lambda_y - I_{yz} \lambda_z &= K \lambda_y \\ -I_{zx} \lambda_x - I_{yz} \lambda_y + I_z \lambda_z &= K \lambda_z \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

La transposición de los miembros del lado derecho conduce a las siguientes ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{aligned} (I_x - K) \lambda_x - I_{xy} \lambda_y - I_{zx} \lambda_z &= 0 \\ -I_{xy} \lambda_x + (I_y - K) \lambda_y - I_{yz} \lambda_z &= 0 \\ -I_{zx} \lambda_x - I_{yz} \lambda_y + (I_z - K) \lambda_z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga una solución diferente de $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$, su discriminante debe ser cero:

$$\begin{vmatrix} I_x - K & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y - K & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z - K \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B.28})$$

Al expandir este determinante y cambiar signos, se escribe

$$K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K - (I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{zx}^2 - I_z I_{xy}^2 - 2I_{xy} I_{yz} I_{zx}) = 0 \quad (\text{B.29})$$

Ésta es una ecuación cúbica en K , la cual produce tres raíces reales y positivas K_1 , K_2 y K_3 .

Para obtener los cosenos directores del eje principal correspondiente a la raíz K_1 , se sustituye K_1 por K en las ecuaciones (B.27). Puesto que estas ecuaciones ahora son linealmente dependientes, sólo dos de ellas pueden utilizarse de determinar λ_x , λ_y y λ_z . Sin embargo, es posible obtener una ecuación adicional al recordar en la sección 2.12 que los cosenos directores deben satisfacer la relación

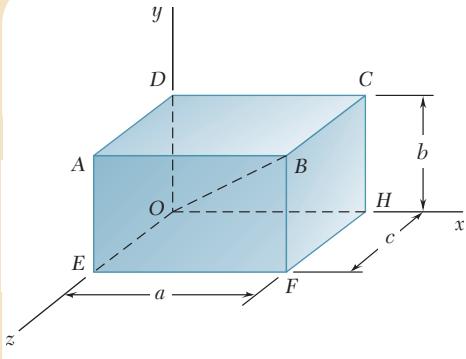
$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \quad (\text{B.30})$$

Al repetir este procedimiento con K_2 y K_3 , se obtienen los cosenos directores de los otros dos ejes principales.

Ahora se mostrará que *las raíces K_1 , K_2 y K_3 de la ecuación (B.29) son los momentos principales de inercia del cuerpo dado*. Se sustituye la raíz K_1 para K en las ecuaciones (B.26), y para λ_x , λ_y y λ_z los valores correspondientes $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$ de los cosenos directores; se satisfarán tres ecuaciones. Se multiplica ahora por $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$, respectivamente, cada término en la primera, segunda y tercera ecuaciones y se suman las ecuaciones obtenidas mediante este procedimiento. Se escribe

$$\begin{aligned} I_x^2 (\lambda_x)_1^2 + I_y^2 (\lambda_y)_1^2 + I_z^2 (\lambda_z)_1^2 - 2I_{xy} (\lambda_x)_1 (\lambda_y)_1 \\ - 2I_{yz} (\lambda_y)_1 (\lambda_z)_1 - 2I_{zx} (\lambda_z)_1 (\lambda_x)_1 = K_1 [(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2] \end{aligned}$$

Considerando la ecuación (B.19), se puede observar que el miembro del lado izquierdo de esta ecuación representa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje principal correspondiente a K_1 ; éste es consecuentemente el momento principal de inercia correspondiente a esa raíz. Por otro lado, de acuerdo con la ecuación (B.30), se advierte que el miembro del lado derecho se reduce a K_1 . De tal manera la propia K es el momento principal de inercia. Se puede demostrar de la misma manera que K_2 y K_3 son los otros dos momentos principales de inercia del cuerpo.



PROBLEMA RESUELTO B.6

Considérese un prisma rectangular de masa m y lados a, b, c . Determine a) los momentos y productos de inercia del prisma con respecto a los ejes de coordenadas que se muestra, b) su momento de inercia con respecto a la diagonal OB .

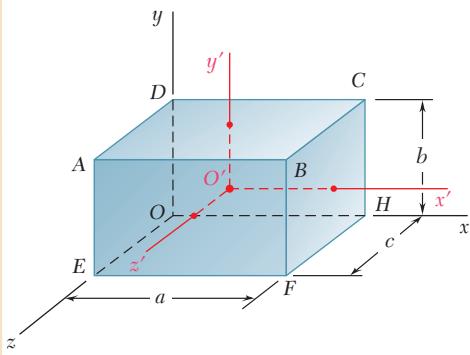
SOLUCIÓN

a) Momentos y productos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas. **Momentos de inercia.** Al introducir los ejes centroidales x', y' y z' , con respecto a los cuales los momentos de inercia se dan en la figura B.9, se aplica el teorema de los ejes paralelos:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2)$$

$$I_x = \frac{1}{3}m(b^2 + c^2)$$

De modo similar, $I_y = \frac{1}{3}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$



Productos de inercia. Debido a la simetría, los productos de inercia con respecto a los ejes centroidales x', y' y z' son cero, y estos ejes son ejes principales de inercia. Al utilizar el teorema de los ejes paralelos, se tiene

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} = 0 + m(\frac{1}{2}a)(\frac{1}{2}b) \quad I_{xy} = \frac{1}{4}mab$$

De modo similar, $I_{yz} = \frac{1}{4}mbc$ $I_{zx} = \frac{1}{4}mca$

b) Momento de inercia con respecto a OB . De acuerdo con la ecuación (B.19):

$$I_{OB} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$

donde los cosenos directores de OB son

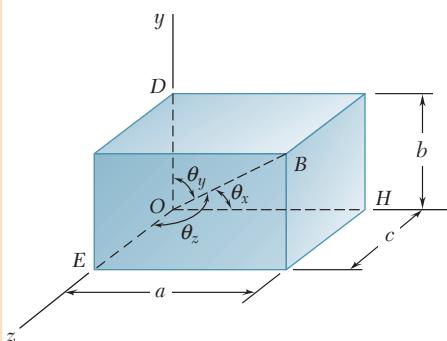
$$\lambda_x = \cos \theta_x = \frac{OH}{OB} = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

$$\lambda_y = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \quad \lambda_z = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

Al sustituir los valores obtenidos para los momentos y productos de inercia y para los cosenos directores en la ecuación para I_{OB} , se tiene

$$I_{OB} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} [\frac{1}{3}m(b^2 + c^2)a^2 + \frac{1}{3}m(c^2 + a^2)b^2 + \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)c^2 - \frac{1}{2}ma^2b^2 - \frac{1}{2}mb^2c^2 - \frac{1}{2}mc^2a^2]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6} \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

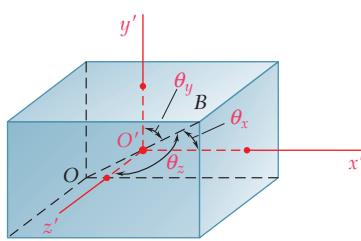


Solución alternativa. El momento de inercia I_{OB} se puede obtener directamente de los momentos principales de inercia $\bar{I}_{x'}, \bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{z'}$, ya que la línea OB pasa por el centroide O' . Puesto que los ejes x', y' y z' son ejes principales de inercia, se utiliza la ecuación (B.23) para escribir

$$I_{OB} = \bar{I}_{x'}\lambda_x^2 + \bar{I}_{y'}\lambda_y^2 + \bar{I}_{z'}\lambda_z^2$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \left[\frac{m}{12}(b^2 + c^2)a^2 + \frac{m}{12}(c^2 + a^2)b^2 + \frac{m}{12}(a^2 + b^2)c^2 \right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6} \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$



PROBLEMA RESUELTO B.7

Si $a = 3c$ y $b = 2c$ para el prisma rectangular del problema resuelto B.6, determine a) los momentos principales de inercia en el origen O , b) los ejes principales de inercia en O .

SOLUCIÓN

a) **Momentos principales de inercia en el origen O .** Al sustituir $a = 3c$ y $b = 2c$ en la solución del problema resuelto B.6, se tiene

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{5}{3}mc^2 & I_y &= \frac{10}{3}mc^2 & I_z &= \frac{13}{3}mc^2 \\ I_{xy} &= \frac{3}{2}mc^2 & I_{yz} &= \frac{1}{2}mc^2 & I_{zx} &= \frac{3}{4}mc^2 \end{aligned}$$

Al sustituir los valores de los momentos y productos de inercia en la ecuación (B.29) y agrupando términos, se encuentra

$$K^3 - \left(\frac{28}{3}mc^2\right)K^2 + \left(\frac{3479}{144}m^2c^4\right)K - \frac{589}{54}m^3c^6 = 0$$

Luego se resuelve para las raíces de esta ecuación; del análisis de la sección B.18, se concluye que estas raíces son los momentos principales del cuerpo en el origen.

$$\begin{aligned} K_1 &= 0.568867mc^2 & K_2 &= 4.20885mc^2 & K_3 &= 4.55562mc^2 \\ K_1 &= 0.569mc^2 & K_2 &= 4.21mc^2 & K_3 &= 4.56mc^2 \end{aligned}$$



b) **Ejes principales de inercia en O .** Para determinar la dirección de un eje principal de inercia, se sustituye primero el valor correspondiente de K en dos de las ecuaciones (B.27); las ecuaciones resultantes junto con la ecuación (B.30) constituyen un sistema de tres ecuaciones del cual es posible determinar los cosenos directores de los ejes principales correspondientes. De tal modo, para el primer momento principal de inercia K_1 se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{3} - 0.568867\right)mc^2(\lambda_x)_1 - \frac{3}{2}mc^2(\lambda_y)_1 - \frac{3}{4}mc^2(\lambda_z)_1 &= 0 \\ -\frac{3}{2}mc^2(\lambda_x)_1 + \left(\frac{10}{3} - 0.568867\right)mc^2(\lambda_y)_1 - \frac{1}{2}mc^2(\lambda_z)_1 &= 0 \\ (\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

Al resolver, se obtiene

$$(\lambda_x)_1 = 0.836600 \quad (\lambda_y)_1 = 0.496001 \quad (\lambda_z)_1 = 0.232557$$

Los ángulos que el primer eje principal de inercia forma con los ejes de coordenadas son entonces

$$(\theta_x)_1 = 33.2^\circ \quad (\theta_y)_1 = 60.3^\circ \quad (\theta_z)_1 = 76.6^\circ$$



Utilizando el mismo conjunto de ecuaciones de manera sucesiva con K_2 y K_3 , se encuentra que los ángulos asociados con el segundo y tercer momentos principales de inercia en el origen son, respectivamente,

$$(\theta_x)_2 = 57.8^\circ \quad (\theta_y)_2 = 146.6^\circ \quad (\theta_z)_2 = 98.0^\circ$$



y

$$(\theta_x)_3 = 82.8^\circ \quad (\theta_y)_3 = 76.1^\circ \quad (\theta_z)_3 = 164.3^\circ$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se definieron los *productos de inercia de masa* I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} de un cuerpo y se mostró la forma en la que se determinan los momentos de inercia de ese cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa por el origen O . Se aprendió también cómo determinar en el origen O los *ejes principales de inercia* de un cuerpo y los *momentos principales de inercia* correspondientes.

1. Determinación de los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto. Los productos de inercia de masa de un cuerpo compuesto con respecto a los ejes de coordenadas pueden expresarse como las sumas de los productos de inercias de sus partes componentes con respecto a esos ejes. Para cada parte componente, podemos utilizar el teorema de los ejes paralelos y escribir las ecuaciones (B.20)

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \quad I_{yz} = \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \quad I_{zx} = \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x}$$

donde las primas denotan los ejes centroidales de cada parte componente y donde \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} representan las coordenadas de su centro de gravedad. Hay que tener presente que el producto de inercia de masa puede ser positivo, negativo o cero, y asegurarse de tomar en cuenta los signos de \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} .

a) De las propiedades de simetría de una parte componente, es posible deducir que dos o los tres productos centroidales de inercia son cero. Por ejemplo, es posible verificar que para una placa delgada paralela al plano xy , un alambre que se encuentre en un plano paralelo al plano xy , un cuerpo con el plano de simetría paralelo al plano xy , y un cuerpo de simetría paralelo al eje z los *productos de inercia de masa* $\bar{I}_{y'z'}$ e $\bar{I}_{z'x'}$ son cero.

Para placas rectangulares, circulares o semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes de coordenadas; alambres rectos paralelos al eje de coordenadas; alambres circulares y semicirculares con ejes de simetría paralelos a los ejes de coordenadas y primas rectangulares con ejes de simetría paralelos a los ejes de coordenadas, los *productos de inercia* $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$ e $\bar{I}_{z'x'}$ son todos cero.

b) Los productos de inercia de masa que son diferentes de cero pueden calcularse a partir de las ecuaciones (B.18). Si bien, en general, se requiere una integración triple para determinar un producto de inercia de masa, es posible recurrir a una sola integración si es factible dividir el cuerpo dado en una serie de placas delgadas paralelas. Los cálculos en ese caso son similares a los que se analizaron en la lección anterior correspondiente a momentos de inercia.

2. Cálculo del momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario OL . En la sección B.6 se obtuvo una expresión para el momento de inercia I_{OL} , la cual se da en la ecuación (B.19). Antes de calcular I_{OL} se debe determi-

(continúa)

nar primero los momentos y productos de inercia de masa del cuerpo con respecto a los ejes de coordenadas dados, así como los cosenos directores del vector unitario λ a lo largo de OL .

3. Cálculo de los momentos principales de inercia de un cuerpo y determinación de sus ejes principales de inercia. En la sección B.7 se vio que siempre es posible encontrar una orientación de los ejes de coordenadas, para lo cual los productos de inercia de masa sean cero. Estos ejes se conocen como los *ejes principales de inercia* y los momentos de inercia correspondientes como los *momentos principales de inercia* del cuerpo. En muchos casos, los ejes principales de inercia de un cuerpo se determinan a partir de sus propiedades de simetría. El procedimiento requerido para determinar los momentos principales y los ejes principales de un cuerpo sin ninguna propiedad de simetría evidente se estudiaron en la sección B.8 y se ilustraron en el problema resuelto B.7. Consiste en los siguientes pasos:

a) Desarrollo del determinante en la ecuación (B.28) y solución de la ecuación cúbica resultante. La solución puede obtenerse mediante ensayo y error o, de preferencia, con el auxilio de una calculadora científica avanzada o mediante el software de computadora adecuado. Las raíces K_1 , K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo.

b) Para determinar la dirección de los ejes principales correspondientes a K_1 se sustituye este valor para K en dos de las ecuaciones (B.27) y se resuelven junto con la ecuación (B.30) para los cosenos directores del eje principal correspondiente a K_1 .

c) Repetir este procedimiento con K_2 y K_3 para determinar las direcciones de los otros dos ejes principales. Como verificación de los cálculos, es posible verificar que el producto escalar de cualesquiera dos de los vectores unitarios a lo largo de los tres ejes obtenidos es cero y, en consecuencia, que estos ejes son perpendiculares entre sí.

d) Cuando un momento principal de inercia es aproximadamente igual a un momento de inercia con respecto a un eje de coordenadas, los valores calculados de los cosenos directores correspondientes serán muy sensibles al número de cifras significativas utilizadas en los cálculos. Para este caso se sugiere expresar las respuestas intermedias en términos de seis o siete cifras significativas para evitar posibles errores.

Problemas

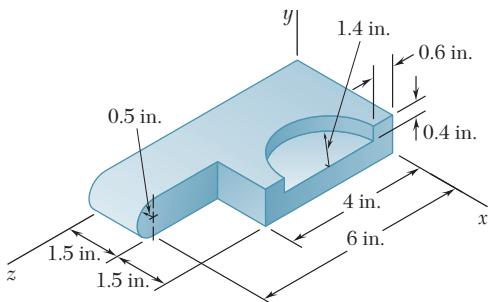


Figura PB.39

B.39 Determine los productos de inercia I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} del elemento de máquina de acero que se muestra. (El peso específico del acero es de 490 lb/ft³.)

B.40 Determine los productos de inercia I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} del elemento de máquina de acero que se muestra. (El peso específico del acero es de 0.284 lb/in.³.)

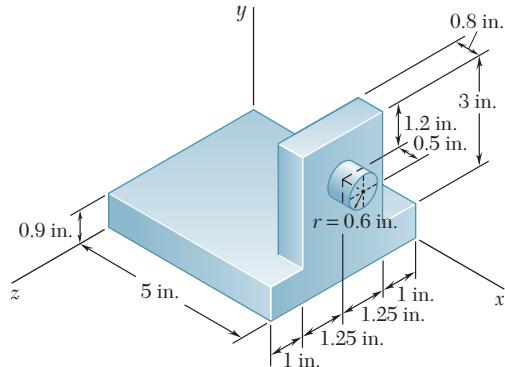


Figura PB.40

B.41 y B.42 Determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} del componente de máquina de aluminio fundido que se muestra. (La densidad del aluminio es de 2 700 kg/m³.)

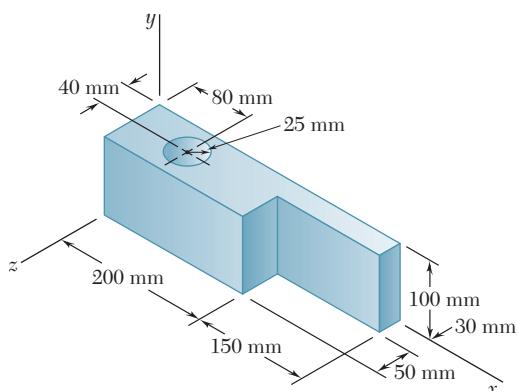


Figura PB.41

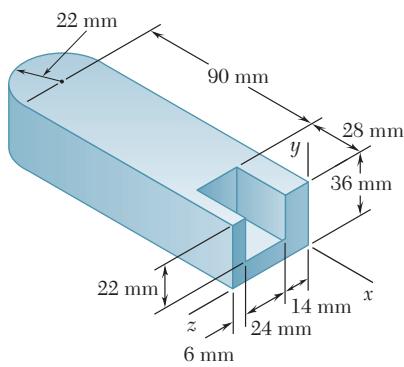


Figura PB.42

B.43 a B.45 Una sección de lámina de acero de 3 mm de espesor se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado. Si la densidad del acero es de 7860 kg/m^3 , determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} del componente.

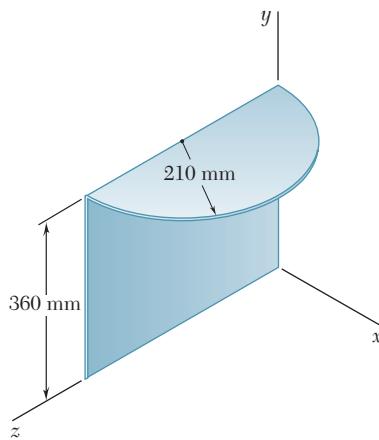


Figura PB.43

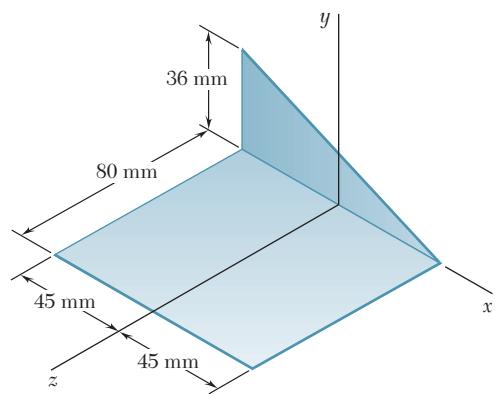


Figura PB.44

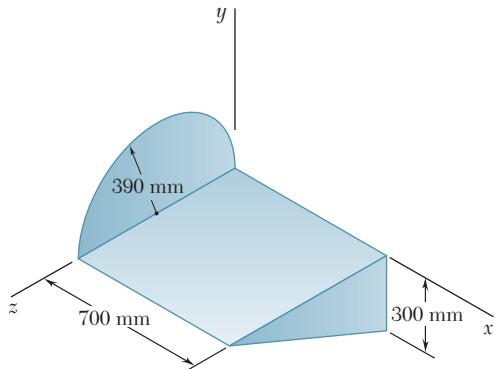


Figura PB.45

B.46 Una sección de lámina de acero con 0.08 in. de espesor se corta y se dobla para formar el componente de máquina mostrado. Si el peso específico del acero es de 490 lb/ft^3 , determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} del componente.

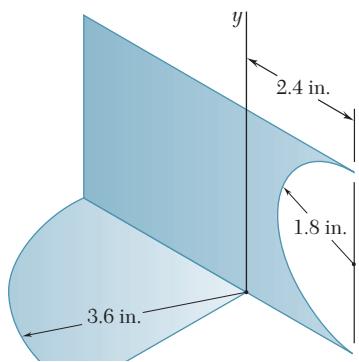


Figura PB.46

B.47 y B.48 Se usa alambre de latón con un peso w por unidad de longitud para formar la figura que se ilustra. Determine los productos de inercia I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

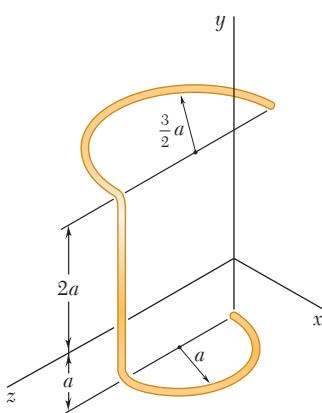


Figura PB.47

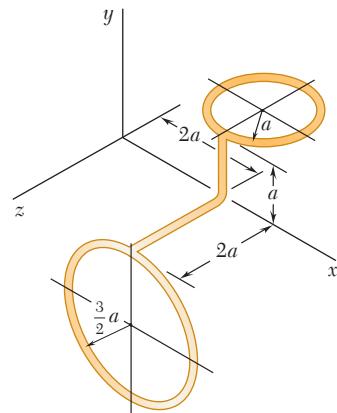


Figura PB.48

B.49 La figura mostrada se forma con alambre de aluminio de 0.075 in. de diámetro. Si el peso específico del aluminio es igual a 0.10 lb/in.³, determine los productos de inercia I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

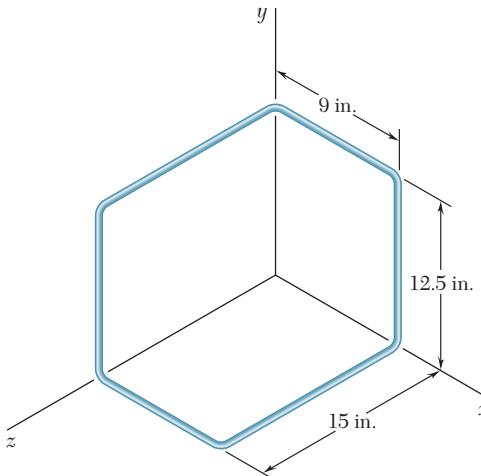


Figura PB.49

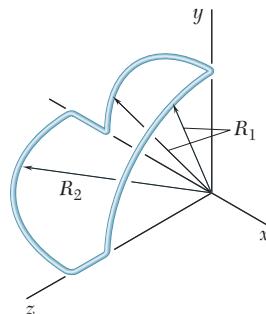


Figura PB.50

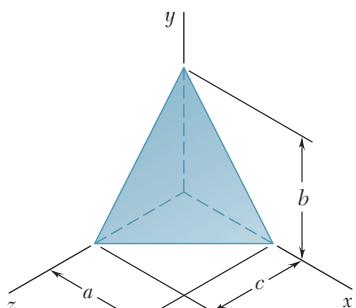


Figura PB.52

B.50 Un alambre delgado de aluminio de diámetro uniforme se utiliza para formar la figura que se muestra. Si se denota con m' la masa por unidad de longitud del alambre, determine los productos de inercia I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

B.51 Complete la deducción de las ecuaciones (B.20), las cuales expresan el teorema de ejes paralelos para productos de inercia de masa.

B.52 Para el tetraedro homogéneo de masa m que se muestra, a) determine mediante integración directa el producto de inercia I_{zx} , b) deduzca I_{yz} e I_{xy} de los resultados que se obtuvieron en el inciso a).

B.53 El cilindro circular homogéneo que se muestra tiene una masa m . Determine el momento de inercia del cilindro con respecto a la línea que une el origen O y el punto A que se localiza sobre el perímetro de la superficie superior del cilindro.

B.54 El cono circular homogéneo que se muestra tiene una masa m . Determine el momento de inercia del cono con respecto a la línea que une el origen O y el punto A .

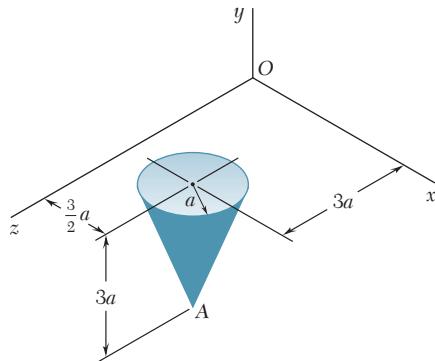


Figura PB.54

B.55 En el elemento de máquina que se muestra del problema B.31, determine su momento de inercia con respecto a la línea que une el origen O y el punto A .

B.56 Determine el momento de inercia del elemento de máquina de acero de los problemas B.35 y B.39 con respecto al eje que pasa por el origen y que forma ángulos iguales con los ejes x , y y z .

B.57 La placa delgada y dobrada que se muestra tiene densidad uniforme y peso W . Determine su momento de inercia de masa con respecto a la línea que une el origen O y el punto A .

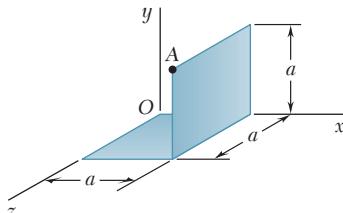


Figura PB.57

B.58 Una pieza de lámina metálica de espesor t y densidad ρ se corta y se dobla para formar la pieza mostrada. Determine su momento de inercia de masa con respecto a la línea que une los puntos A y B .

B.59 Determine el momento de inercia de masa de los componentes de máquina de los problemas B.26 y B.45 con respecto al eje que pasa por el origen caracterizado por el vector unitario $\lambda = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k})/9$.

B.60 a B.62 Para la figura de alambre del problema indicado, determine el momento de inercia de masa de la figura con respecto al eje que pasa por el origen y que está caracterizado por el vector unitario $\lambda = (-3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/7$.

B.60 Problema B.38.

B.61 Problema B.37.

B.62 Problema B.36.

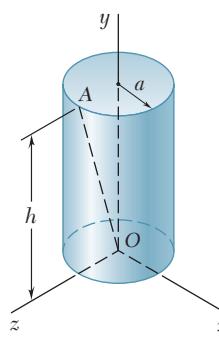


Figura PB.53

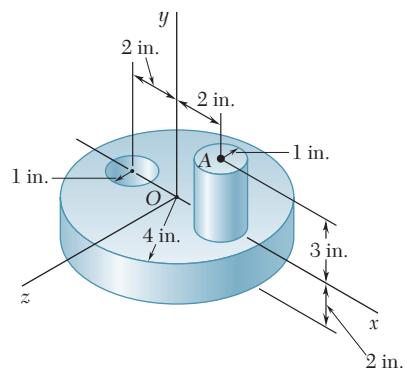


Figura PB.55

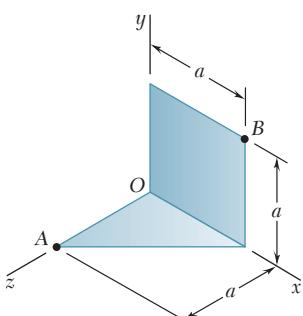


Figura PB.58

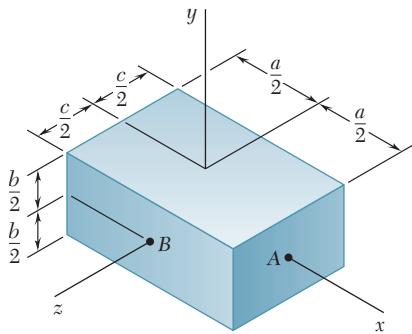


Figura PB.63

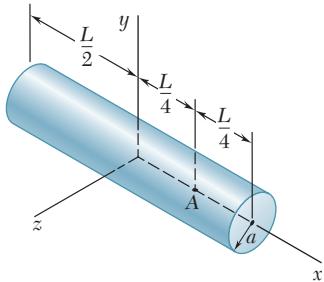


Figura PB.65

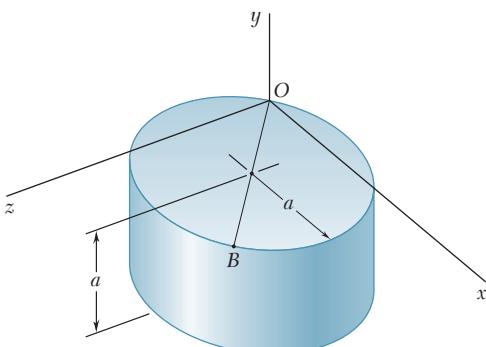


Figura PB.69

B.63 Para el prisma rectangular que se muestra, determine los valores de los cocientes b/a y c/a de manera que el elipsoide de inercia del prisma sea una esfera cuando se calcule *a)* en el punto A, *b)* en el punto B.

B.64 Para el cono circular recto de problema resuelto B.3, determine el valor de la razón a/h para el cual el elipsoide de inercia de cono es una esfera cuando se calcula *a)* en el ápice del cono, *b)* en el centro de la base del cono.

B.65 Para el cilindro circular homogéneo que se muestra, de radio a y longitud L , determine el valor de la razón a/L para la cual el elipsoide de inercia del cilindro es una esfera cuando se calcula *a)* en el centroide del cilindro, *b)* en el punto A.

B.66 Dado un cuerpo arbitrario y tres ejes rectangulares x , y y z demuestre que el momento de inercia del cuerpo con respecto a cualesquiera de los tres ejes no puede ser mayor que la suma de los momentos de inercia del cuerpo con respecto a los otros dos ejes. Esto es, demuestre que se satisface la desigualdad $I_x \leq I_y + I_z$ y las dos desigualdades similares. Además, demuestre que $I_y \geq \frac{1}{2}I_x$ si el cuerpo es un sólido de revolución homogénea, donde x es el eje de revolución y y es el eje transversal.

B.67 Considere un cubo de masa m y lado a . *a)* Demuestre que el elipsoide de inercia en el centro del cubo es una esfera, y utilice esta propiedad para determinar el momento de inercia del cubo con respecto a una de sus diagonales. *b)* Demuestre que el elipsoide de inercia en una de las esquinas del cubo es un elipsoide de revolución y determine los momentos principales del cubo en ese punto.

B.68 Dado un cuerpo homogéneo de masa m y forma arbitraria y tres ejes rectangulares x , y y z con origen en O , demuestre que la suma $I_x + I_y + I_z$ de los momentos de inercia del cuerpo no puede ser menor que la suma similar calculada para una esfera de la misma masa y el mismo material centrada en O . Además, utilizando los resultados del problema B.66, demuestre que si el cuerpo es un sólido de revolución, donde x es el eje de revolución, su momento de inercia I_y alrededor de un eje transversal y no puede ser más pequeño que $3ma^2/10$, donde a es el radio de la esfera de la misma masa y el mismo material.

***B.69** El cilindro circular homogéneo que se muestra tiene una masa m y el diámetro OB de su superficie superior forma ángulos de 45° con los ejes x y z . *a)* Determine los momentos principales de inercia del cilindro en el origen O . *b)* Calcule los ángulos que forman los ejes principales de inercia en O con los ejes coordinados. *c)* Trace el cilindro y muestre la orientación de los ejes principales de inercia relativa a los ejes x , y y z .

***B.70 a *B.74** Para la componente descrita en el problema indicado, determine *a)* los momentos principales de inercia en el origen, *b)* los ejes principales de inercia en el origen. Dibuje el cuerpo e indique la orientación de los ejes principales de inercia relativa a los ejes x , y y z .

***B.70** Problema B.55.

***B.71** Problemas B.35 y B.39.

***B.72** Problema B.57.

***B.73** Problema B.58.

***B.74** Problemas B.38 y B.60.

REPASO Y RESUMEN DEL APÉNDICE B

La segunda mitad del capítulo se dedicó a la determinación de *momentos de inercia de masas*, los cuales se encuentran en dinámica en problemas que implican la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje. El momento de inercia de masa de un cuerpo con respecto a un eje AA' (figura B.16) se definió como

$$I = \int r^2 dm \quad (\text{B.1})$$

donde r es la distancia desde AA' al elemento de masa [sección B.1]. El *radio de giro* del cuerpo se definió como

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (\text{B.2})$$

Los momentos de inercia de un cuerpo con respecto a los ejes de coordenadas se expresaron como

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (z^2 + x^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Se ha visto que el *teorema de los ejes paralelos* o *teorema de Steiner* se aplica también a momentos de inercia de masa [sección B.2]. De tal modo, el momento de inercia I del cuerpo con respecto a un eje arbitrario AA' (figura B.17) puede expresarse como

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (\text{B.6})$$

Momentos de inercia de masas

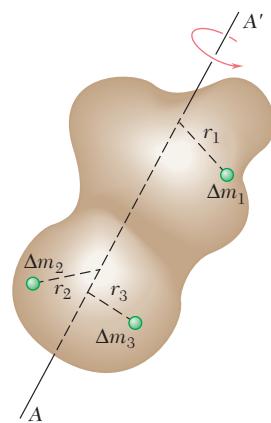


Figura B.16

Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner

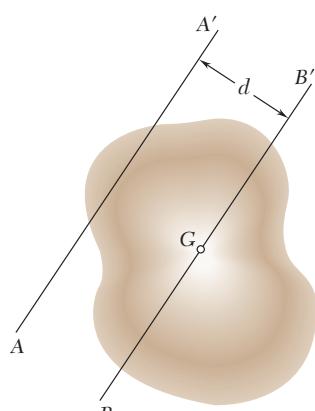


Figura B.17

Momentos de inercia de placas delgadas

donde \bar{I} es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje centroidal BB' que es paralelo al eje AA' , m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre los dos ejes.

Los momentos de inercia de *placas delgadas* pueden obtenerse con facilidad a partir de los momentos de inercia de sus áreas [sección B.3]. Se encontró que para una *placa rectangular* los momentos de inercia con respecto a los ejes que se muestran (figura B.18) son

$$I_{AA'} = \frac{1}{12} ma^2 \quad I_{BB'} = \frac{1}{12} mb^2 \quad (\text{B.12})$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \quad (\text{B.13})$$

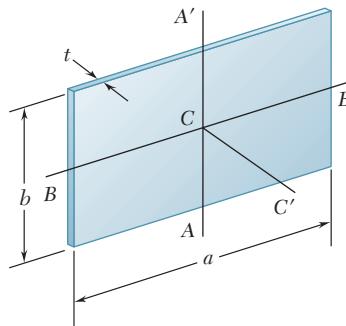


Figura B.18

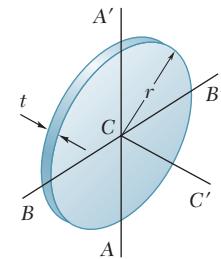


Figura B.19

mientras que para una *placa circular* (figura B.19) son

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{1}{4} mr^2 \quad (\text{B.14})$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{2} mr^2 \quad (\text{B.15})$$

Cuerpos compuestos

Momentos de inercia con respecto a un eje arbitrario

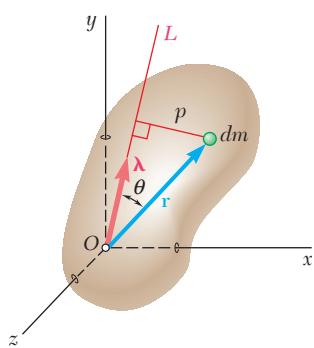


Figura B.20

Cuando un cuerpo posee *dos planos de simetría* suele ser posible utilizar una sola integración para determinar su momento de inercia con respecto a un eje dado para determinar un eje de masa dm como una placa delgada [problemas resueltos B.2 y B.3]. Por otro lado, cuando un cuerpo está compuesto por *varias formas geométricas comunes*, su momento de inercia con respecto a un eje dado puede obtenerse utilizando las fórmulas de la figura B.9 junto con el teorema de los ejes paralelos [problemas resueltos B.4 y B.5].

En la última parte del capítulo, se ha aprendido a determinar el momento de inercia de un cuerpo *con respecto a un eje arbitrario* OL que se dibuja por el origen O [sección B.6]. Si se denota mediante λ_x , λ_y y λ_z las componentes del vector unitario λ a lo largo de OL (figura B.20) se introducen los *productos de inercia*

$$I_{xy} = \int xy \, dm \quad I_{yz} = \int yz \, dm \quad I_{zx} = \int zx \, dm \quad (\text{B.18})$$

se encuentra que el momento de inercia del cuerpo con respecto a OL podría expresarse como

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2I_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2I_{yz} \lambda_y \lambda_z - 2I_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (\text{B.19})$$

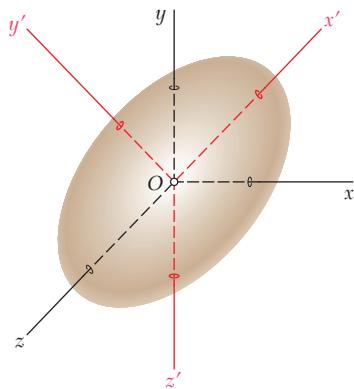


Figura B.21

Al graficar un punto Q a lo largo de cada eje OL a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ desde O [sección B.7], se obtuvo la superficie de una elipsoide, lo que se conoce como la *elipsoide de inercia* del cuerpo en el punto O . Los ejes principales x' , y' y z' de esta elipsoide (figura B.21) son los *ejes principales de inercia* del cuerpo; esto es, los productos de inercia $I_{x'y'}$, $I_{y'z'}$ e $I_{z'x'}$ del cuerpo con respecto a estos ejes son cero. Hay muchas situaciones en las que un eje principal de inercia de un cuerpo puede deducirse de las propiedades de simetría de este mismo. Si se eligen estos ejes como los ejes de coordenadas, es posible expresar entonces I_{OL} como

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \quad (\text{B.23})$$

donde $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$ son los *momentos principales de inercia* del cuerpo en O .

Cuando no es posible obtener los ejes principales de inercia mediante observación [sección B.7], es necesario resolver la ecuación cúbica

$$\begin{aligned} K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K \\ - (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Se encontró [sección B.8] que las raíces K_1 , K_2 y K_3 de esta ecuación son los momentos principales de inercia del cuerpo dado. Los cosenos directores $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$ de los ejes principales correspondientes al momento principal de inercia K_1 se determinan entonces sustituyendo K_1 en las ecuaciones (B.27) y al resolver de manera simultánea dos de estas ecuaciones y la ecuación (B.30). El mismo procedimiento se repite entonces utilizando K_2 y K_3 para determinar los cosenos directores de los otros dos ejes principales [problema resuelto B.7].

Elipsoide de inercia

Ejes principales de inercia Momentos principales de inercia

C

Fundamentos para la certificación en ingeniería en Estados Unidos

A los ingenieros se les solicita que obtengan una licencia cuando su trabajo afecta en forma directa la salud, la seguridad o el bienestar públicos. Se intenta asegurar que los ingenieros alcancen un mínimo de calificación, la cual incluye competencia, habilidad, experiencia y carácter. El proceso de certificación incluye un examen inicial, llamado *Fundamentals of Engineering Examination*, acerca de la experiencia profesional, y un segundo examen denominado *Principles and Practice of Engineering*. Quienes aprueban estos exámenes obtienen la certificación de *Ingeniero profesional*. Las pruebas se desarrollan bajo los auspicios del *National Council of Examiners for Engineering and Surveying*.

El primer examen, *Fundamentals of Engineering Examination*, se puede presentar justo antes o después de la graduación de un programa de estudios de cuatro años. El examen analiza los contenidos de un programa normal de licenciatura en ingeniería que incluye dinámica. Los temas que aborda dicho examen se cubren en este libro. La siguiente es una lista de las principales áreas temáticas, en referencia a las secciones del libro donde aparecen. También incluye problemas que pueden resolverse con el objetivo de repasar el material.

Cinemática (11.1-11.6; 11.9-11.14; 15.2-15.8)

Problemas: 11.4, 11.5, 11.34, 11.61, 11.69, 11.97, 15.6, 15.30, 15.40, 15.57, 15.65, 15.83, 15.118, 15.141

Fuerza, masa y aceleración (12.1-12.6; 16.2-16.8)

Problemas: 12.5, 12.6, 12.28, 12.30, 12.37, 12.46, 12.51, 12.56, 16.3, 16.5, 16.11, 16.25, 16.30, 16.50, 16.58, 16.63, 16.76, 16.85, 16.138

Trabajo y energía (13.1-13.6; 13.8; 17.1-17.7)

Problemas: 13.5, 13.7, 13.15, 13.22, 13.39, 13.41, 13.50, 13.62, 13.64, 13.68, 17.1, 17.2, 17.18, 17.28

Impulso y cantidad de movimiento (13.10-13.15; 17.8-17.12)

Problemas: 13.121, 13.126, 13.129, 13.134, 13.146, 13.157, 13.159, 13.170, 17.53, 17.59, 17.69, 17.74, 17.96, 17.102, 17.106

Vibraciones (19.1-19.3; 19.5-19.7)

Problemas: 19.1, 19.3, 19.11, 19.17, 19.23, 19.27, 19.50, 19.55, 19.66, 19.76, 19.83, 19.85, 19.101, 19.105, 19.115

Fricción (En cada uno de los temas mencionados anteriormente se presentan problemas que implican fricción)

CRÉDITOS DE FOTOGRAFÍAS

CAPÍTULO 11

Portada: © NASA/Getty Images RF; **Fotografía 11.1:** U.S Department of Energy; **Fotografía 11.2:** © Getty Images RF/Digital Vision; **Fotografía 11.3:** © Brand X Pictures/Jupiter Images; **Fotografía 11.4:** © Digital Vision/Getty Images RF; **Fotografía 11.5:** © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 11.6:** © Royalty-Free/CORBIS.

CAPÍTULO 12

Portada: © Lester Lefkowitz/CORBIS; **Fotografía 12.1:** © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 12.2:** © Brand X Pictures/PunchStock RF; **Fotografía 12.3:** © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 12.4:** © Russell Illig/Getty Images RF; **Fotografía 12.5:** © Royalty-Free/CORBIS.

CAPÍTULO 13

Portada: © Tom Miles; **Fotografía 13.2:** © Scandia National Laboratories/Getty Images RF; **Fotografía 13.2:** © Andrew Davidhazy/RIT; **Fotografía 13.3:** © Tom McCarthy/Photolibrary.

CAPÍTULO 14

Portada: © XCOR; **Fotografía 14.1:** NASA; **Fotografía 14.2:** © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 14.3:** © Brand X Pictures/PunchStock.

CAPÍTULO 15

Portada (motor): Cortesía de Wartsila Corporation; **Portada (barco):** Cortesía de A. P. Moller-Maersk; **Fotografía 15.1:** © Chris Hellier/CORBIS; **Fotografía 15.2:** © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 15.3:** © Joseph Nettis/Stock Boston Inc.; **Fotografía 15.4:** © AGE Fotostock/Photolibrary; **Fotografía 15.5:** © George Tiedeman/NewSport/CORBIS; **Fotografía 15.6:** © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 15.7:** Cortesía de Tangen Drives; **Fotografía 15.8:** © Northrop Gruimman/Index Stock Imagery/Jupiter Images; **Fotografía 15.9:** © Royalty-Free/CORBIS.

CAPÍTULO 16

Portada: © Getty Images RF; **Fotografía 16.1:** © Getty Images RF; **Fotografía 16.2:** Cortesía de Samsung Semiconductor, Inc.; **Fotografía 16.3:** © Tony Arruza/CORBIS; **Fotografía 16.4:** © Robert E. Daemmrich.

CAPÍTULO 17

Portada: © AP Photo/Matt Dunham; **Fotografía 17.1:** © Richard McDowell/Alamy; **Fotografía 17.2:** © Phillip Cornwell; **Fotografía 17.3a,b:** © Fotografía de Leah; **Fotografía 17.4:** © Chuck Savage/CORBIS.

CAPÍTULO 18

Portada: © Royalty-Free/CORBIS; **Fotografía 18.1:** © SuperStock; **Fotografía 18.2:** © Matthias Kulka/COBBIS; **Fotografía 18.3:** © Roger Ressmeyer/CORBIS; **Fotografía 18.4:** Cortesía de Caterpillar Engine Division; **Fotografía 18.5:** © Lawrence Manning/CORBIS RF.

CAPÍTULO 19

Portada: © Peter Tsai Photography; **Fotografía 19.1:** © Tony Freeman/Index Stock; **Fotografía 19.2:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./Fotografía de Sabina Dowell; **Fotografía 19.3:** Cortesía de MTS Systems Corporation.

Índice analítico

- Aceleración, 966-967, 1006-1009. *Vea también* Aceleración de Coriolis; Fuerzas y aceleraciones angular, 921, 924, 964, 992, 994, 1007-1008, 1016, 1055 componente tangencial de la, 666 de la gravedad, 697 del punto coincidente, 981 determinación de la, 612, 634, 952, 994-995 en el Examen de Fundamentos de Ingeniería, 1037 en el movimiento plano, absoluta y relativa, 961-963, 1018 instantánea, 604-605 relaciones entre, 1064 relativa, 683, 981 Aceleración absoluta y relativa en movimiento plano, 704, 961-963, 1018 Aceleración angular, 921, 924, 992, 994, 1055 en la rotación alrededor de un eje fijo, 964, 1015-1016 Aceleración complementaria. *Vea* Aceleración de Coriolis Aceleración de Coriolis, 922, 981, 1002-1003, 1008, 1019-1021 Aceleración instantánea, 604-605 Aceleración relativa, 683, 981 fórmula para la, 967 Álgebra vectorial, definiciones útiles y propiedades del, 1291-1296 momento de una fuerza alrededor de un eje dado, 1295-1296 momento de una fuerza alrededor de un punto, 1293-1294 producto de un escalar y un vector, 1292 producto escalar de dos vectores, 1294-1295 producto triple mixto de tres vectores, 1295 producto vectorial de dos vectores, 1292-1293 resta de vectores, 898 suma de vectores, 938, 1291 vectores unitarios, descomposición de un vector en sus componentes rectangulares, 1292 Amortiguadores, 1270 Amortiguamiento crítico, 1264, 1271, 1283 coeficiente de, 1264, 1271 Amortiguamiento ligero, 1264-1265, 1271, 1283 Amortiguamiento pesado, 1264, 1271, 1283 Amortiguamiento viscoso, 1263, 1271, 1282 coeficiente de, 1264, 1271, 1283 Análisis cinético, 1065 tres métodos fundamentales de, 852 Análogos eléctricos a las vibraciones amortiguadas, 1267-1278, 1283 características de un sistema mecánico y de su análogo eléctrico, 1268 Ángulo de disparo, 652 Ángulo de fase, 1218 Ángulo formado por dos vectores, 1295 Apogeo, 739 Balance, 1173 Bandas transportadoras, 898 Binormal, 667, 672, 685 Brazo robótico, 1148-1149 Cálculo, cuerpos compuestos, 1309 Cambio. *Vea también* Razón de cambio de un vector en la energía potencial, 786, 790 Cantidad de movimiento. *Vea también* Cantidad de movimiento angular; Métodos de energía y cantidad de movimiento; Principio del impulso-cantidad de movimiento; Cantidad de movimiento lineal conservación de la, 836, 851, 883 en el Examen de Fundamentos de Ingeniería, 1337 final, 811 fuerzas equipolentes a la, 891 total, 812, 837-838 Cantidad de movimiento angular, 1142 componentes de la, 1177 conservación de la, 724-725, 728, 750-751, 791, 870, 884, 1110, 1114, 1194 de un sistema de partículas con respecto a su centro de masa, 866-868, 909 de una partícula, 722-723, 750 razón de cambio de la, 750 Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 1151-1155, 1203 reducción de las cantidades de movimiento de las partículas de un cuerpo rígido a un vector de cantidad de movimiento y un par, 1154 restringido a girar alrededor de un punto fijo, 1155, 1204 Cantidad de movimiento angular de un par, 1108, 1159, 1161 Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas, 863-864, 908 Cantidad de movimiento final, 811 Cantidad de movimiento lineal, 1142 conservación de la, 695, 758, 870, 884 de un sistema de partículas, 863-864, 908 de una partícula, 694-695, 749, 850 Cantidad de movimiento total, 812, 837 conservación de la, 830, 851 de una partícula, 817 Cantidad escalares, 761, 884 Centro de giro instantáneo, 922, 950-960

- Centro de gravedad, 865
 Centro de masa
 de un sistema de partículas, movimiento del, 864-866, 908-909, 1028, 1034, 1055
 velocidad del, 1158
 Centro de rotación instantáneo, 922, 1109
 en movimiento plano, 950-960, 1017
 Centro geométrico, 1065
 Centroda de un cuerpo, 952
 Centroda espacial, 952
 Cinemática, 1034, 1064
 análisis por, 1065
 definición de, 602
 del movimiento, 1037-1038, 1041, 1063-1064, 1232
 en el Examen de Fundamentos de Ingeniería, 1337
 Cinemática de cuerpos rígidos, 918-1027
 aceleración absoluta y relativa en el movimiento plano, 961-963, 1018
 análisis del movimiento plano en términos de un parámetro, 963-975, 1018
 centro instantáneo de giro en el movimiento plano, 950-960, 1017
 ecuaciones que definen la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, 921, 926-936
 introducción, 920-922
 marco de referencia en el movimiento general, 1003-1014, 1021
 movimiento alrededor de un eje fijo, 988-990, 1019
 movimiento general, 921, 991-1002
 movimiento general en el espacio, 1020
 movimiento plano de una partícula en relativo a un marco giratorio, aceleración de Coriolis, 979-988, 1019
 movimiento plano general, 921, 936-937
 movimiento tridimensional de una partícula relativo a un marco giratorio, aceleración de Coriolis, 1002-1003, 1020-1021
 problemas de computadora, 1025-1027
 problemas de repaso, 1022-1024
 razón de cambio de un vector con respecto a un marco giratorio, 975-977, 1018
 resumen, 1015-1021
 rotación alrededor de un eje fijo, 920-921, 923-925, 1015
 traslación, 920, 922-923, 1015
 velocidad absoluta y relativa en el movimiento plano, 938-950, 1017
 Cinemática de partículas, 600-689
 introducción a la dinámica, 602-603
 movimiento curvilíneo de partículas, 641-681
 movimiento rectilíneo de partículas, 603-640
 problemas de computadora, 688-689
 problemas de repaso, 686-687
 resumen, 682-685
 Cinética
 análisis mediante, 852, 1065
 definición de, 602
 Cinética de cuerpos rígidos en tres dimensiones, 1148-1213
 aplicación del principio del impulso y la cantidad de movimiento al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, 1156-1156, 1204
 cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 1151-1155, 1203
 ecuación de un diagrama de cuerpo libre, 1078, 1206
 ecuaciones del movimiento de Euler, extensión del principio de d'Alembert al movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 1170-1171, 1205-1206
 ecuaciones fundamentales de movimiento para un cuerpo rígido, 1203
 energía cinética de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 1156-1168, 1204
 introducción, 1150-1151
 movimiento de un cuerpo axisimétrico bajo ninguna fuerza, 1190-1202
 movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo, 1171-1172, 1206
 movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 1169-1170, 1204-1205
 movimiento de un giroscopio, ángulos Eulerianos, 1187-1188, 1207
 precesión estable de un giroscopio, 1189-1190, 1207
 problemas de computadora, 1211-1213
 problemas de repaso, 1208-1210
 resumen, 1203-1207
 rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, 1172-1186
 Cinética de partículas, 690-857
 métodos de la energía y la cantidad de movimiento, 758-857
 segunda ley de Newton, 690-756
 Círculos concéntricos, 920
 Círculos paralelos, 920
 Coeficiente(s) de
 amortiguamiento crítico, 1264
 amortiguamiento viscoso, 1264, 1271
 restitución, 758, 852, 1130
 Cohetería, 868
 Cojinetes, 1178
 Colisiones, 870, 884
 Cometas, 746
 Componentes normal. Vea Componentes tangencial y normal
 Componentes radial y transversal, 668-681, 685
 ecuaciones de movimiento en términos de, 723-724, 750
 en el movimiento curvilíneo de partículas, 668-681, 685
 extensión al movimiento de una partícula en el espacio, coordenadas cilíndricas, 669
 Componentes rectangulares
 de la velocidad y la aceleración, 645-646, 684
 de un producto vectorial, 1293
 descomposición de un vector en, 1292
 ecuaciones de movimiento en términos de, 698, 749
 Componentes tangencial y normal, 665-667, 672, 685, 961, 1018
 de la aceleración, 666
 ecuaciones de movimiento en términos de, 698
 en rotación alrededor de un eje fijo, 1016

- movimiento de una partícula en el espacio, 667, 685
 movimiento plano de una partícula, 665-667
- Componentes transversales. *Vea Componentes radial y transversal*
- Computadora, disco duro, 1032
 Condiciones iniciales, 607, 622
 Condiciones necesarias, 789
 Cono del cuerpo, 989
 Cono espacial, 989
 Conservación de la cantidad de movimiento, 836, 883
 angular, 724-725, 750-751, 791, 794, 884, 1110-1123, 1143
 lineal, 695, 758, 870, 884
 para un sistema de partículas, 868-877, 909
 Conservación de la energía, 789-790, 794, 836, 850, 882-884, 1090-1091, 1095-1096, 1141
 para un sistema de partículas, 773, 879, 910
- Constante de gravedad, 751
 Constante de tiempo, 1278
 Constante del resorte, 763
 Coordenadas angulares, 923
 Coordenadas cilíndricas, 669, 673
 Coordenadas de posición, 682-683
 Coriolis, Gustave-Gaspard, 978
 Corriente de fluido desviada por una paleta, corriente estable de partículas de, 892
 Corriente estable de partículas, 890-893, 911
 corriente dividida mediante una paleta, 892
 flujo a través de un tubo, 892
 helicóptero, 893
 motor a propulsión, 892, 898
 ventilador, 893
- Cuerpos axisimétricos, 1193-1194, 1207
 Cuerpos compuestos, 1302-1319, 1334
 cálculo de, 1309
 formas geométricas comunes, 1303
 momentos de inercia de, 1302-1319, 1334
- Cuerpos rígidos. *Vea Sistemas de cuerpos rígidos*
- Curva de aceleración-tiempo, 632
 Curva posición-tiempo, 632
 Curva velocidad-tiempo, 632
 Curvas de movimiento, 606, 633
- d'Alembert, Jean le Rond, 1033
 Deflexión, 797
 Deformación, 1124
 periodo de, 830
- Derivadas de funciones vectoriales, 643-645, 684
 Desequilibrio, 1058, 1065
 Desplazamiento
 definición de, 760-761, 988
 finito, 762
 medición del, 1234
 trabajo correspondiente al, 847
- Desplazamiento máximo de sistemas al aplicar el principio de la conservación de la energía, 1243
 Determinación del movimiento de una partícula, 607-616, 682
- Diagramas de cuerpo libre
 ecuación para, 1035, 1042, 1078, 1193, 1206
 elaboración de, 704, 816-817, 837, 1064, 1114, 1130, 1178, 1223, 1234
- Diagramas, elaboración de, de cuerpo libre, 704, 816-817, 837, 928
- Diferencia de fase, 1267, 1283
 Diferencia exacta, 789
 Diferencial exacta, 789
 Dinámica, introducción a la, 602-603
 Disco duro, computadora, 1032
- Ecuaciones
 características, 1264
 de una superficie cuádrica, 1320
 homogeneidad de, 1254
 para diagramas de cuerpo libre, 1035, 1042, 1078, 1193, 1206
- Ecuaciones características, 1264
- Ecuaciones de movimiento de Euler, extensión del principio de d'Alembert al movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 1170-1171, 1205-1206
- Ecuaciones de movimiento, 697-698, 749, 1037-1041, 1060, 1174, 1176, 1232, 1235
 diagramas de cuerpo libre para, 1035, 1078, 1206
 componentes radial y transversal, 723-724, 750
 componentes rectangulares, 698
 para un cuerpo rígido, 1203
 componentes tangencial y normal, 698
- Ecuaciones que definen la rotación de un cuerpo rígido
 alrededor de un eje fijo, 921, 926-936
 rotación uniforme, 926
 rotación uniformemente acelerada, 926
- Eficiencia, 768
 global, 768
 mecánica, 768
 potencia y, 767-786, 849
- Eje de rotación fijo, 918
 Eje instantáneo de rotación, 950, 989, 1002
 Ejes arbitrarios, productos de inercia de masa, momentos de inercia de un cuerpo con respecto a, 1319-1320, 1334
- Ejes centroidales, 1300
 Ejes centroidales paralelos, 1308
 Ejes de inercia, 1153, 1160-1161, 1177, 1203
 principales, 1321-1323, 1325-1327
- Ejes de rotación instantáneos, 950, 989, 1002, 1019
 Elipsoide de inercia, 1321
- En fase, 1255
- Energía. *Vea también Energía química; Energía eléctrica; Energía cinética; Energía mecánica; Energía potencial; Energía térmica; Energía total; Principio del trabajo-energía*
 adicción de energía cinética y potencial, 796
 en el Examen de Fundamentos de Ingeniería, 1337
- Energía cinética, 1092-1096, 1159, 1161, 1168, 1244-1246
 constante, 850
 de una partícula, 764-765, 774, 792-793, 796, 848-849
 en rotación, 1141

- Energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano, 1088-1089, 1140
tres dimensiones, 1156-1168, 1204
- Energía cinética de un sistema de partículas, 877-878, 909-910
usando un marco de referencia centroidal, 877-878
- Energía eléctrica, 790
- Energía mecánica, 790
total, 790
- Energía potencial, 786-788, 792, 796, 849, 1090, 1244-1246
cálculo, 797
cambio en la, 786, 790
constante, 850
- Energía química, 790
- Energía térmica, 790
- Energía total de una partícula, 828
- Enfoque unificado, 1036
- Enfoque vectorial completo, 968
- Engranes planetarios, 998
- Equilibrio dinámico, 699-720, 749, 1035, 1078
- Error permisible, 795
- Eslabonamientos, 1078
- Espacio, aplicación a la mecánica, 729, 737-740, 752
- Euler, Leonhard, 1170
- Examen de fundamentos de ingeniería, 1337
cinemática, 1337
fuerza, masa y aceleración, 1337
impulso y cantidad de movimiento, 1337
trabajo y energía, 1337
vibración, 1337
- Excentricidad, 737
- Explosiones, 870
- Expresiones matemáticas, 1291
- Factor de amortiguamiento, 1265, 1272
- Factor de magnificación, 1256, 1272, 1282
- Fase, 1255
- Fluido circulando a través de un tubo, corriente estable de partículas de, 892
- Flujos diversos, 898
- Frecuencia circular, 1265
forzada, 1253
natural, 1218, 1224
- Frecuencia forzada, 1255, 1282
circular, 1253
- Frecuencia natural, 1219-1220, 1255, 1282
circular, 1217, 1224, 1256-1257
- Frecuencia circular natural, 1217, 1224, 1255
- Fricción cinética, 1065
- Fricción de Coulomb, 1263
- Fricción en fluidos, 1263
- Fricción interna, 1263
- Fricción seca, 1263
resolución de problemas con, 704
- Fuera de fase, 1255
- Fuerza. *Vea también* Fuerza central; Sistemas de fuerzas centrífuga, 699, 1057
- de fricción, 767, 1062
- de gravedad, 695-696, 762-763
efectiva, 861, 1033, 1042, 1078
ejercida por un resorte, 763, 848, 1098, 1130, 1222
ejercida sobre una corriente, 896
elástica, 787, 797, 1245
en el Examen de Fundamentos de Ingeniería, 1337
externa, 861-867, 870, 908, 1028, 1089, 1140
impresa, 1258
impulsiva, 813, 816, 1130
interna, 861, 874, 1089
no impulsiva, 813, 816, 1130
que actúan sobre un cuerpo rígido, 1087-1088, 1140
trabajo de, 1097
- Fuerza central
movimiento bajo una, 724-725, 728, 750-751
trayectoria de una partícula bajo una, 735
- Fuerza constante en movimiento rectilíneo, trabajo de una, 762
- Fuerza ejercida, 1258
- Fuerza gravitacional. *Vea también* Leyes de Newton
constante de, 751
trabajo de la, 763-764, 847-848
- Fuerza impulsiva promedio, 816
- Fuerza negativa, 767, 790
- Fuerzas conservativas, 788-789, 796, 849, 1242
- Fuerzas de fricción, 767, 1062
cinéticas, 1065
trabajo realizado por, 1086
- Fuerzas efectivas, 861, 1033, 1042, 1078
- Fuerzas externas, 861-867, 870, 908, 1028, 1033-1034, 1088, 1140
trabajo realizado por, 1088
- Fuerzas impulsivas, 813, 816, 851, 1130
promedio, 816
- Fuerzas internas, 861, 879, 1089
- Fuerzas y aceleraciones, 1028-1083
cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en movimiento plano, 1032, 1077-1078
comentario sobre los axiomas de la mecánica de cuerpos rígidos, 1034-1035
ecuación de un diagrama de cuerpo libre, 1078, 1206
ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido, 1031, 1077
introducción, 1030
movimiento plano de un cuerpo rígido, 1033-1034, 1078
movimiento plano restringido, 1055-1076, 1078
principio de d'Alembert, 1033-1034, 1078
problemas de computadora, 1083
problemas de repaso, 1079-1081
resumen, 1077-1078
sin realizar trabajo, 764
sistemas de cuerpos rígidos, 1036-1054, 1078
solución de problemas que involucran el movimiento de un cuerpo rígido, 1035-1036
- Función complementaria, 1254
- Función escalar, gradiente de, 789
- Funciones de potencial, 788

- Funciones periódicas, 1217-1218
 Funciones vectoriales, derivadas de, 643-645, 684
- Galileo, 602
 Gimnasta, 1084-1085
 Giro, radio de, 1299, 1333
 Giroscopio, precesión estable de, 1190, 1207
 Gravedad, centro de, 865
 Gravitación universal. *Vea Leyes de Newton*
- Helicóptero, corriente estable de partículas desde un, 893
 Homogeneidad de ecuaciones, 1254
- Impacto, 813, 825, 836, 1130
 central, 825-831, 837, 851-852, 1124
 elástico, 827, 852
 excéntrico, 825, 1124-1139, 1143
 línea de, 825, 837
 plástico, 827, 852
 Impacto central, 825-831, 851-852
 directo, 825-828, 851-852
 oblicuo, 828-830
 Impacto central directo, 825-828, 851-852
 impacto perfectamente elástico, 827, 852
 impacto perfectamente plástico, 827, 852
 Impacto oblicuo, 825
 central, 828-831, 837
 Impacto perfectamente elástico, 797-828, 852
 Impacto perfectamente plástico, 827, 852
 Impactos elásticos, 827-828, 838, 852
 Impedancia, 1269
 Impulso lineal, 810-811
 de una fuerza, 850
 Impulsos, 810-811, 816, 1194
 angulares, 879
 desconocidos, 1161
 Incógnitas, 816, 884, 1036, 1043
 impulsos, 1161
 reducción del número de, 1064
 Inercia, 1298
 eje de, 1153, 1160-1161, 1177, 1203
 elipsoide de, 1321
 productos de, 1177, 1178, 1334
 Integrales definidas, 607
 Integrales elípticas, 1221
 tablas de, 1221
- Juntas de bola y cuenca (rótula), 999-1001
- Kepler, Johann, 741
- Lanzamiento oblicuo, 850
 Ley de la gravitación. *Vea Leyes de Newton*
 Ley del paralelogramo, 990, 1291
 Leyes de Kepler del movimiento planetario, 740-748, 752
- Leyes de Newton
 aplicación al movimiento de un sistema de partículas, fuerzas efectivas, 860-863, 908
 de la gravitación, 725-734, 751
 segunda ley del movimiento, 693-694, 749, 771
 Línea de impacto, 825, 837
 movimiento contra, 834
- Marco de referencia centroidal
 movimiento relativo a un, 867
 uso de un, 877-878
 Marco de referencia newtoniano, 694, 749
 Marco fijo, 1178
 razón de cambio de un vector con respecto a, 644-645, 982, 994
 Marco giratorio, 1178
 razón de cambio de un vector con respecto a, 975-977, 982, 1018
 Marcos de referencia, 1005-1009
 centroidal, 877-878
 en el movimiento general, 1003-1014, 1021
 en traslación, 646-664, 684
 newtonianos, 694, 1031
 selección de, 1009
 Masa, 1219
 en el Examen de Fundamentos de Ingeniería, 1337
 sistemas que ganan o pierden, 893-907, 911
 Mecanismo de Ginebra, 975
 Método del área-momento, 631
 Método del trabajo y la energía. *Vea Principio del trabajo y la energía*
 Métodos de energía y cantidad de movimiento, 758-857, 1084-1147
 aplicaciones del principio del trabajo y la energía, 766-767, 849
 conservación de la cantidad de movimiento angular, 1110-1123, 1143
 conservación de la energía, 789-790, 850, 882-884, 1090-1091, 1141, 1194
 energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano, 1088-1089, 1092, 1140
 energía cinética de una partícula, principio del trabajo y la energía, 764-765, 848-849
 energía cinética en la rotación, 1141
 energía potencial, 786-788, 849
 fuerzas conservativas, 788-789, 849
 impacto, 825
 impacto central directo, 825-828, 851-852
 impacto central oblicuo, 828-831
 impacto excéntrico, 1124-1139, 1143
 introducción, 760, 1086
 movimiento bajo una fuerza conservativa central, aplicación a la mecánica espacial, 791-810, 850
 movimiento bajo una fuerza gravitatoria, 850
 movimiento impulsivo, 813-824, 851, 1124, 1143
 potencia, 1091-1106, 1141
 potencia y eficiencia, 767-786, 849

- principio del impulso y la cantidad de movimiento, 810-812, 850-851
- principio del impulso y la cantidad de movimiento para el movimiento plano de un cuerpo rígido, 1107-1109, 1141-1143
- principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido, 1086-1087, 1140
- problemas de computadoras, 856-857, 1147
- problemas de repaso, 853-855, 1144-1146
- problemas que involucran, 831-846
- problemas que involucran energía y cantidad de movimiento, 831-846
- resumen, 847-852, 1140-1143
- sistemas de cuerpos rígidos, 1089-1090, 1110, 1141
- trabajo de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, 1087-1088, 1140
- trabajo de un par, 1140
- trabajo de una fuerza, 760-764, 847
- uso de los tres métodos fundamentales del análisis cinético, 852
- Métodos experimentales, 1269
- Mitigación de terremotos, 1214-1215
- Momento de una fuerza
- alrededor de un eje dado, 1295-1296
 - alrededor de un punto, 1293-1294
- Momentos de
- pares, 1077, 1140, 1194
 - vectores, 1108
- Momentos de inercia, 1192
- de cuerpos compuestos, 1302-1319, 1334
 - de placas delgadas, 1301-1302, 1308-1309, 1334
 - de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario, productos de inercia de masa, 1319-1320, 1334
 - principales, 1321-1323, 1325-1327
- Momentos de inercia de masa, 1298-1299, 1308
- centroidal, 1152
 - de formas geométricas comunes, 1303
- Momentos de inercia de masas, 1298-1335
- determinación de los ejes principales y los momentos de inercia principales de un cuerpo con forma arbitraria, 1322-1332
 - determinación del momento de inercia de un cuerpo tridimensional por integración, 1302, 1309
 - ejes principales de inercia, 1335
 - elipsoide de inercia, ejes principales de inercia, 1320-1321, 1335
 - evasión de los errores relacionados con las unidades, 1308
 - momentos principales de inercia, 1335
 - resumen, 1333-1335
 - teorema de los ejes paralelos, 1300, 1308, 1333-1334
- Momentos de inercia principales, 1321, 1323, 1325-1327
- Motor prototipo (XR-5M15), 858
- Motores
- a propulsión, 892, 898, 911
 - diesel, 918
- Motores a propulsión, 892, 898, 911
- corriente estable de partículas desde, 892, 898
- Movimiento
- a lo largo de la línea de impacto, 834
 - absoluto, 647
 - acelerado, 772
 - alrededor de un punto fijo, 921, 988-990, 1019
 - armónico, 1217, 1224, 1280
 - bajo una fuerza central, 724-725, 750-751
 - bajo una fuerza central conservativa, aplicación a la mecánica espacial, 791-810, 850
 - bajo una fuerza gravitacional, 850
 - cinemática de, 1037-1038, 1041, 1232
 - curvilíneo, 641, 683
 - de estado estable, 1257, 1272
 - de un cuerpo axisimétrico bajo ninguna fuerza, 1190-1202
 - de un giroscopio, ángulos Eulerianos, 1187-1188, 1207
 - de un proyectil, 646, 651-652
 - de varias partículas, 618-629, 683
 - del centro de masa de un sistema de partículas, 864-866, 908-909
 - deslizante, 1061-1062, 1088
 - ecuaciones de, 697-698, 749, 1037-1041, 1059, 1174, 1176, 1232, 1235
 - giratorio, 1056-1058, 1061-1062, 1064-1065, 1078, 1088
 - odografía de, 642
 - relativo, 1169
 - relativo a un marco de referencia centroidal, 867
 - relativo a un marco en traslación, 646-664, 684
 - uniforme, 608, 772
- Movimiento armónico simple, 1224, 1280
- Movimiento curvilíneo de partículas, 641-681
- componentes radial y transversal, 668-681, 685
 - componentes rectangulares de la velocidad y la aceleración, 645-646, 684
 - componentes tangencial y normal, 665-667, 685
 - derivadas de funciones vectoriales, 643-645, 684
 - movimiento relativo a un marco en traslación, 646-664, 684
- velocidad y aceleración de un vector de posición, 641-642, 683-684
- Movimiento de un cuerpo rígido
- alrededor de un punto fijo, 1171-1172, 1206
 - en tres dimensiones, 1169-1170, 1204-1205
- Movimiento de una partícula
- determinación del, 607-616, 682
 - en el espacio, 667, 685
- Movimiento de varias partículas, 618-619
- movimiento relativo de dos partículas, 618
 - movimientos dependientes, 619
- Movimiento general, 921, 991-1002
- de un cuerpo rígido, 995
 - en el espacio, 1020
- Movimiento horizontal, 858
- Movimiento impulsivo, 813-824, 851, 1124, 1143
- en el Examen de Fundamentos de Ingeniería, 1337
- Movimiento orbital, 751-752
- Movimiento plano
- absoluto y relativo, aceleración en, 961-963, 1018

- absoluto y relativo, velocidad en, 938-950, 1017
 analizado en términos de un parámetro, 963-975, 1018
 elaboración de diagramas, 942
Movimiento plano de cuerpos rígidos, 1043, 1077
 en sistemas de cuerpos rígidos, 1043
 fuerzas y aceleraciones, 1028-1083
 métodos de la energía y la cantidad de movimiento, 1084-1147
 y el principio de d'Alembert, 1033-1034, 1078
Movimiento plano de una partícula, 665-667, 921
 en relación con un marco giratorio, 977-988, 1019
Movimiento plano general, 918, 921, 936-937, 1017, 1034, 1064
Movimiento plano restringido, 1055-1076, 1078
 rotación alrededor de un punto fijo, 1205
 rotación no centroidal, 1056-1057
Movimiento rectilíneo de partículas, 603-640
 determinación del movimiento de una partícula, 607-616, 682
 movimiento de varias partículas, 618-629, 683
 movimiento rectilíneo uniforme, 616, 683
 movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, 617-618, 683
 otros métodos gráficos, 631-642
 posición, velocidad y aceleración, 603-606, 682
 solución gráfica de problemas de movimiento rectilíneo, 630-631, 683
Movimiento rectilíneo uniforme, 616, 623, 683
 acelerado, 617-618, 623, 683
Movimiento relativo, 1169
 resolución de problemas con, 705
Movimiento rodante, 1056-1058, 1061-1062, 1064-1065, 1078, 1088
Movimiento tridimensional de una partícula, relativo a un marco giratorio, 1002-1003, 1020-1021
Movimiento uniforme, 608, 772

Nave espacial
 análisis del movimiento de, 742-743
 trasbordador, 1148-1149
Newton, Sir Isaac, 693, 740
Normal principal, 667
Nutación, 1187, 1193, 1207
 razón de, 1194

Odografías de movimiento, 642
Órbitas circulares, 739, 920
Oscilaciones, 1220-1221
 centro de, 1231
 eléctricas, 1268

Par de inercia, 1078
Pares
 cantidad de movimiento angular en, 1108, 1159, 1161
 constantes, 1088
 iniciales, 1078
 magnitud de, 1109

 momento de, 1077, 1140, 1194
 trabajo de, 1097
Partículas. Vea *Sistemas de partículas*
Partículas lisas, supuesto de, 828
Partículas sin fricción, supuesto de, 828
Patinador artístico, 1110
Pelota de boliche, 1055, 1155
Pelota de golf
 deformación por impacto, 758-759
 momento de golpe, 879
Péndulo compuesto, 1239
Péndulo simple, 1220-1230, 1281
 solución aproximada, 1220
 solución exacta, 1221-1230
Perigeo, 739
Periodo de
 deformación, 830
 una vibración amortiguada, 1265
 vibraciones, 1280
Peso, 816, 865, 1219, 1245
Placas delgadas, momentos de inercia de, 1301-1302, 1308-1309, 1334
Plano invariable, 1202
Planos oscilantes, 667, 685
Planos de simetría, 1334
Posición, determinación de la, 612
Potencia, 1091-1106, 1141
 definición de, 1098
 promedio, 774
 y eficiencia, 767-786, 849
Precesión de un giroscopio
 eje de, 1192
 estable, 1151, 1187-1191, 1193-1194, 1207
Precesión directa, 1191
Precesión retrógrada, 1191
Preparación para examen. Vea *Examen de Fundamentos de Ingeniería*
Principio de conservación de la energía, 1098, 1129, 1244-1246
 aplicación del, 1242-1253, 1281
 desplazamiento máximo del sistema, 1243
 sistema que pasa por su posición de equilibrio, 1243
Principio de conservación de la cantidad de movimiento angular, 1110
Principio de d'Alembert, 1056
 extensión al movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones, 1170-1171, 1205-1206
 movimiento plano de cuerpos rígidos y, 1033-1034, 1078
Principio de la energía y el trabajo, 773, 831, 879, 910
Principio de transmisibilidad, 1034
Principio del impulso y la cantidad de movimiento, 810-812, 816, 834-835, 850-851, 1127-1130, 1158, 1192
 aplicación al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, 1155-1156, 1204
 para el movimiento plano de un cuerpo rígido, 1107-1109, 1141-1143
 para un sistema de partículas 879-889, 910

Principio del impulso-cantidad de movimiento, 813, 882
 Principio del trabajo y la energía, 1092-1094
 aplicaciones de, 766-767, 849
 para un cuerpo rígido, 1086-1087, 1140
 Problemas de computadora
 cinemática de cuerpos rígidos, 1025-1027
 cinemática de partículas, 688-689
 cinética de cuerpos rígidos en tres dimensiones, 1211-1213
 fuerzas y aceleraciones, 1083
 métodos de energía y cantidad de movimiento, 856-857,
 1147
 segunda ley de Newton, 756
 sistemas de partículas, 916-917
 vibraciones mecánicas, 1288-1289
 Producto de un escalar y un vector, 1292
 Producto escalar de dos vectores, 1294-1295
 ángulo formado por dos vectores, 1295
 expresado en términos de componentes rectangulares, 1295
 productos escalares de vectores unitarios, 1294
 proyección de un vector sobre un eje dado, 1295
 Producto punto de dos vectores, 1294
 Producto triple mixto de tres vectores, 1295
 expresado en términos de componentes rectangulares, 1295
 Producto triple vectorial, 924
 Productos commutativos, de vectores, 1293-1294
 Productos cruz, 1292
 Productos de inercia de masa, 1319-1320
 Productos distributivos, de vectores, 1293
 Productos triples. *Vea también* Producto triple mixto de tres
 vectores
 vectoriales, 924
 Productos vectoriales de
 dos vectores, 1292-1293
 vectores unitarios, 1293
 Propulsores, 898
 Proyección de un vector sobre un eje dado, 1295
 Punto coincidente, aceleración del, 981
 Punto de referencia, selección de, 1009
 Razón de cambio de un vector
 con respecto a un marco fijo, 644-645, 982, 994
 con respecto a un marco giratorio, 975-977, 982, 1018
 Razón de cambio
 de la cantidad de movimiento angular, 750, 1178, 1179
 de la cantidad de movimiento lineal, 694-695, 749
 Razón de frecuencia, 1255
 Reacciones dinámicas, 1173, 1175, 1178
 Reacciones estáticas, 1173
 Reducción de las cantidades de movimiento de las partículas
 de un cuerpo rígido a un vector de cantidad de
 movimiento y un par, 1154
 Regla de la mano derecha, 1293-1294
 Representaciones gráficas, 1035-1036
 Resonancia, 1255-1256
 Restitución, 825-826, 1124
 coeficiente de, 758, 826-827, 1137
 periodo de, 825, 830, 1124-1126

Resumen
 cinemática de cuerpos rígidos, 1015-1021
 cinemática de partículas, 682-685
 cinética de cuerpos rígidos en tres dimensiones, 1203-
 1207
 métodos de la energía y la cantidad de movimiento, 847-
 852, 1140-1143
 momentos de inercia de masas, 1333-1335
 segunda ley de Newton, 749-752
 sistemas de partículas, 908-911
 vibraciones mecánicas, 1279-1283
 Rotación alrededor de un eje fijo, 920-921, 923-925, 1015
 componentes tangencial y normal, 1016
 de un cuerpo rígido, 929, 1172-1186
 de una trabe representativa, 925, 1016
 definición de, 920
 ecuaciones para la, 929
 elaboración de diagramas, 942, 967
 velocidad angular y aceleración angular, 1016
 Rotación centroidal, 1034, 1057
 Rotación no centroidal, 1056-1057, 1078, 1089
 Rotación uniforme, 926, 1016, 1057
 acelerada, 926, 1016
 Rotaciones, 858, 936-937, 995, 1090. *Vea también* Centro de
 rotación
 centroidal, 1034, 1057
 infinitesimal, 990
 no centroidal, 1056-1057, 1078, 1089
 uniforme, 1057
 Rotaciones infinitesimales, 990
 Satélites
 análisis del movimiento de, 742-743
 en una órbita circular, 729
 en una órbita elíptica, 729
 Secciones cónicas, 737-738
 Simetría
 planos de, 1334
 propiedades de, 1326
 Sistema gravitacional de unidades, 696
 Sistema que pasa por su posición de equilibrio al aplicar el
 principio de la conservación de la energía, 1243
 Sistema variable de partículas, 890, 911
 Sistemas de cuerpos rígidos, 1089-1090, 1109, 1141
 Sistemas de fuerzas equipolentes, 862, 866, 891, 1033, 1077
 Sistemas de partículas, 858-917
 aplicación de las leyes de Newton al movimiento, fuerzas
 efectivas, 860-863, 908
 cantidad de movimiento angular alrededor de su centro de
 masa, 866-868, 909
 cantidad de movimiento lineal y angular de, 863-864, 908
 conservación de la cantidad de movimiento para, 868-877,
 909
 corriente estable de partículas, 890-893, 911
 energía cinética de, 877-878, 909-910
 introducción, 860
 movimiento del centro de masa de, 864-866, 908-909

- principio del impulso y la cantidad de movimiento para, 879-889, 910
 principio del trabajo y la energía, conservación de la energía para, 879, 910
 problemas de computadora, 916-917
 problemas de repaso, 912-915
 resumen, 908-911
 sistemas que ganan o pierden masa, 893-907, 911
 sistemas variables de partículas, 890, 911
 Sistemas de unidades, 695-697, 722, 749
 Sistemas equipolentes de fuerzas, 862, 866, 891, 1033, 1077, 1171
 Sistemas mecánicos
 aplicaciones espaciales, 737-740, 752
 y su análogo eléctrico, 1268
 Slugs, 749
 Solución exacta, al péndulo simple, 1221-1230
 Solución gráfica de problemas de movimiento rectilíneo, 630-631, 683
 Soluciones aproximadas, 633, 1231
 a un péndulo simple, 1220
 Suma asociativa de vectores, 1291
 Suma conmutativa de vectores, 1291
 Suma de vectores, 1291
 Superficie cuádrlica, ecuación de, 1320
 Tangentes vectoriales, 684
 Telescopio Hubble, 737
 Teorema de los ejes paralelos, 1304-1305, 1308
 Tiempo periódico, 739-741, 752
 Tiempo, 816
 Trabajo, 1092, 1094
 correspondiente al desplazamiento, 847
 de un par, 1140
 definición de, 760-762
 en el Examen de Fundamentos de Ingeniería, 1337
 negativo, 786
 total, 1097-1098
 Trabajo de una fuerza, 760-764, 847
 trabajo de la fuerza de gravedad, 762-763
 trabajo de la fuerza ejercida por un resorte, 763, 773, 848
 trabajo de una fuerza constante en movimiento rectilíneo, 762, 773
 trabajo de una fuerza gravitatoria, 763-764, 773, 847-848
 Transmisibilidad, 1262, 1288
 principio de, 1034
 Traslación, 918-923, 928, 936-937, 995, 1015, 1034, 1043, 1090
 definición de, 920
 elaboración de diagramas, 942, 967
 Trayectorias
 de una partícula bajo una fuerza central, 735
 elípticas, 738-739, 742-743
 hiperbólicas, 738-739, 742-743
 parabólicas, 738-739, 742-743
 Trenes, inclinación, 718
 Tríada derecha, 1293
 Turbinas de viento, 1028
 Unidades, sistemas de, 695-697, 722, 749
 Vector de cantidad de movimiento lineal, 1108, 1159, 1161
 Vector de inercia, 699, 1078
 Vectores
 cantidad de movimiento lineal, 1108
 componentes de un, 1109
 de posición, 641, 994, 1293
 momentos de, 1108
 negativos, 1291
 unitarios, 1292
 Velocidad, 936, 1291
 absoluta, 952
 angular, 921, 924, 992-994, 1007, 1158-1161
 de escape, 693, 739-740, 752
 del centro de masa, 1158
 determinación de la, 612, 942, 955, 994-995
 en movimiento plano, absoluta y relativa, 938-950, 1017
 instantánea, 604, 641-642
 promedio, 603-604
 relativa, 683-684, 827, 830-831, 835, 837, 852, 894, 1128
 Velocidad absoluta y relativa en movimiento plano, 938-950, 952, 1017
 Velocidad aérea, 724-725, 750-751
 Velocidad angular, 921, 924, 992-994, 1007, 1158-1161
 constante, 1218
 en rotación alrededor de un eje fijo, 1015-1016
 Velocidad del vector posición y aceleración, 603-606, 641-642, 682-684
 Velocidad relativa, 683-684, 830-831, 835, 837, 852, 894, 1128
 fórmula para la, 942
 Ventiladores. Vea también Propulsores; Turbinas de viento
 corriente estable de partículas de, 893, 898
 Vibraciones
 de estado estable, 1255, 1266, 1283
 de torsión, 1235
 en el Examen de Fundamentos de Ingeniería, 1337
 mecánicas, 1214-1289
 periodo de, 1280
 transitorias, 1255, 1266
 Vibraciones amortiguadas, 1263-1278
 análogos eléctricos, 1267-1278, 1283
 Vibraciones forzadas, 1253-1263, 1281-1282
 amortiguadas, 1214, 1266-1267, 1272, 1283
 Vibraciones libres, 1214, 1223
 amortiguadas, 1263-1265, 1271-1272, 1282-1283
 de cuerpos rígidos, 1230-1242, 1281
 de partículas, movimiento simple armónico, 1216-1220, 1279-1280
 transitorias, 1282
 Vibraciones libres amortiguadas, 1263-1265, 1271-1272, 1282-1283
 amortiguamiento crítico, 1264

1350 Índice analítico

amortiguamiento ligero, 1264-1265
amortiguamiento pesado, 1264
Vibraciones mecánicas, 1214-1289
introducción, 1216
problemas de computadora, 1288-1289
problemas de repaso, 1284-1287
resumen, 1279-1283
vibraciones amortiguadas, 1263-1278
vibraciones sin amortiguamiento, 1216-1263

Vibraciones sin amortiguamiento, 1216-1263
aplicación del principio de la conservación de la energía,
1242-1253, 1281
péndulo simple, 1220-1230, 1281
vibraciones forzadas, 1253-1263, 1281-1282
vibraciones libres de cuerpos rígidos, 1230-1242,
1281
vibraciones libres de partículas, movimiento armónico
simple, 1216-1220, 1279-1280

Respuestas a los problemas

En esta página y las siguientes se dan las respuestas a los problemas cuyo número está en caracteres normales. Las respuestas a los problemas con número en letras cursivas no se proporcionan en esta lista.

CAPÍTULO 11

11.1 -66.0 m , 149.0 m/s , 228 m/s^2 .

11.2 3.00 m , -7.00 m/s .

11.3 3.00 s , -59.5 ft , 25.0 ft/s^2 .

11.4 248 in , 72.0 in/s , -383 in/s^2 .

11.5 0.667 s , 0.259 m , -8.56 m/s .

11.6 *a)* 1.000 s y 4.00 s . *b)* 1.500 m , 24.5 m .

11.9 *a)* 4.00 s . *b)* -56.0 m/s , 260 m .

11.10 $x = t^4/108 + 10t + 24$, $v = t^3/27 + 10$.

11.11 -33.0 in/s , 2.00 s , 87.7 in .

11.12 *a)* 3.00 ft/s^4 . *b)* $v = t^3 - 32$ ft/s.
 $x = t^4/4 - 32t + 64$ ft.

11.15 *a)* 5.89 ft/s . *b)* 1.772 ft .

11.16 -36.8 ft^2 , 1.832 s^{-2} .

11.17 *a)* 0.0900 s^{-2} . *b)* $\pm 16.97 \text{ mm/s}$.

11.18 *a)* $48.0 \text{ m}^3/\text{s}^2$. *b)* 21.6 m . *c)* 4.90 m/s .

11.21 *a)* 22.5 m . *b)* 38.4 m/s .

11.22 *a)* 29.3 m/s . *b)* 0.947 s .

11.23 *a)* 50.0 in . *b)* ∞ . *c)* 0.866 s .

11.24 3.33 ft/s .

11.25 *a)* 0.1457 s/m . *b)* 145.2 m . *c)* 6.86 m/s .

11.26 *a)* 3.33 m . *b)* 2.22 s . *c)* 1.667 s .

11.27 *a)* 7.15 mi . *b)* $-2.75 \times 10^{-6} \text{ ft/s}^2$. *c)* 49.9 min .

11.28 *a)* -0.0525 m/s^2 . *b)* 6.17 s .

11.31 *a)* $2.36 v_0 T$, $\pi v_0 / T$. *b)* $0.363 v_0$.

11.33 *a)* 1.500 m/s^2 . *b)* 10.00 s .

11.34 *a)* 25.0 m/s . *b)* 19.00 m/s . *c)* 36.8 m .

11.35 *a)* 2.71 s . *b)* 50.4 mi/h .

11.36 *a)* 252 ft/s . *b)* 1.076 ft .

11.39 *a)* 0.500 km . *b)* 42.9 km/h .

11.40 *a)* -2.10 m/s^2 , 2.06 m/s^2 . *b)* 2.59 s antes de que A llegue a la zona de intercambio.

11.41 *a)* 15.05 s , 734 ft . *b)* 42.5 mi/h , 23.7 mi/h .

11.42 *a)* 5.50 ft/s^2 . *b)* 9.25 ft/s^2 .

11.43 *a)* 3.00 s . *b)* 4.00 ft/s^2 .

11.44 *a)* -0.250 m/s^2 , 0.300 m/s^2 . *b)* 20.8 s . *c)* 85.5 km/h .

11.46 *a)* $17.36 \text{ ft/s}^2 \leftarrow$, $3.47 \text{ ft/s}^2 \leftarrow$. *b)* 20.1 ft . *c)* 9.64 ft/s .

11.47 *a)* $2.00 \text{ m/s} \uparrow$. *b)* $2.00 \text{ m/s} \downarrow$. *c)* $8.00 \text{ m/s} \uparrow$.

11.48 *a)* $20.0 \text{ m/s}^2 \rightarrow$, $6.67 \text{ m/s}^2 \downarrow$. *b)* $13.33 \text{ m/s} \downarrow$, $13.33 \text{ m} \downarrow$.

11.49 *a)* $30.0 \text{ ft/s} \uparrow$. *b)* $15.00 \text{ ft/s} \uparrow$. *c)* $45.0 \text{ ft/s} \uparrow$. *d)* $30.0 \text{ ft/s} \uparrow$.

11.50 *a)* $2.40 \text{ ft/s}^2 \uparrow$, $4.80 \text{ ft/s}^2 \downarrow$. *b)* $12.00 \text{ ft/s} \uparrow$.

11.53 *a)* $200 \text{ mm/s} \rightarrow$. *b)* $600 \text{ mm/s} \rightarrow$. *c)* $200 \text{ mm/s} \leftarrow$.

d) $400 \text{ mm/s} \rightarrow$.

11.54 *a)* $13.33 \text{ mm/s}^2 \leftarrow$, $20.0 \text{ mm/s}^2 \leftarrow$. *b)* $13.33 \text{ mm/s}^2 \rightarrow$.

c) $70.0 \text{ mm/s} \rightarrow$, $440 \text{ mm} \rightarrow$.

11.55 *a)* $10.00 \text{ mm/s} \rightarrow$. *b)* $6.00 \text{ mm/s}^2 \rightarrow$, $2.00 \text{ mm/s}^2 \uparrow$.

c) $175 \text{ mm} \uparrow$.

11.56 *a)* $240 \text{ mm/s}^2 \downarrow$, $345 \text{ mm/s}^2 \uparrow$. *b)* $130 \text{ mm/s} \rightarrow$, $43.3 \text{ mm/s} \uparrow$.

c) $728 \text{ mm} \rightarrow$.

11.57 *a)* $2.00 \text{ in/s}^2 \uparrow$, $3.00 \text{ in/s}^2 \downarrow$. *b)* 0.667 s . *c)* $0.667 \text{ in.} \uparrow$.

11.58 *a)* $1 - 6t^2/4 \text{ in/s}^2$. *b)* 9.06 in .

11.61 *a)* Los valores correspondientes de (t, v, x) son $(0, -18 \text{ ft/s}, 0)$,
 $(4 \text{ s}, -6 \text{ ft/s}, -45 \text{ ft})$, $(10 \text{ s}, 30 \text{ ft/s}, 24 \text{ ft})$, $(20 \text{ s}, -20 \text{ ft/s},$
 $74 \text{ ft})$. *b)* 12 ft/s , 74 ft , 176 ft , 20.0 ft/s .

11.62 Consulte el problema 11.61 para ver las gráficas. *a)* 30.0 ft/s ,
b) 30 ft/s , 114 ft .

11.63 *a)* $0 < t < 10 \text{ s}$, $a = 0$; $10 \text{ s} < t < 26 \text{ s}$, $a = -5 \text{ ft/s}^2$;
 $26 \text{ s} < t < 41 \text{ s}$, $a = 0$; $41 \text{ s} < t < 46 \text{ s}$, $a = 3 \text{ ft/s}^2$;
 $t > 46 \text{ s}$, $a = 0$; $x = -540 \text{ ft}$ en $t = 0$, $x = 60 \text{ ft}$ en $t = 10 \text{ s}$,
 $x = 380 \text{ ft}$ en $t = 26 \text{ s}$, $x = 80 \text{ ft}$ en $t = 41 \text{ s}$, $x = 17.5 \text{ ft}$ en
 $t = 46 \text{ s}$, $x = -2.5 \text{ ft}$ en $t = 50 \text{ s}$. *b)* 1383 ft . *c)* 9.00 s , 49.5 s .

11.64 *a)* Igual que en el problema 11.63. *b)* 420 ft . *c)* 10.69 s , 40.0 s .

11.65 *a)* 44.8 s . *b)* $103.3 \text{ m/s}^2 \uparrow$.

11.66 207 mm/s

11.67 *a)* 10.5 s . *b)* curvas $v-t$ y $x-t$.

11.69 3.96 m/s^2 .

11.70 *a)* 0.600 s . *b)* 0.200 m/s , 2.84 m .

11.71 9.39 s .

11.72 8.54 s , 58.3 mi/h .

11.73 1.525 s .

11.74 *a)* 50.0 m/s , 1.194 m . *b)* 59.25 m/s .

11.77 *a)* 18.00 s . *b)* 178.8 m , *c)* 34.7 km/h .

11.78 *a)* 3.75 m .

11.79 *a)* 2.00 s . *b)* 1.200 ft/s , 0.600 ft/s .

11.80 *a)* 5.01 min . *b)* 19.18 mi/h .

11.83 *a)* 2.96 s . *b)* 224 ft .

11.84 *a)* 163.0 in/s^2 . *b)* 114.3 in/s^2 .

11.86 104 ft .

11.89 *a)* $8.60 \text{ mm/s} \nwarrow 35.5^\circ$, $17.20 \text{ mm/s}^2 \swarrow 35.5^\circ$.

b) $33.4 \text{ mm/s} \nwarrow 8.6^\circ$, $39.3 \text{ mm/s}^2 \swarrow 14.7^\circ$.

11.90 *a)* 0 , $159.1 \text{ m/s}^2 \swarrow 82.9^\circ$. *b)* $6.28 \text{ m/s} \rightarrow$, $157.9 \text{ m/s}^2 \downarrow$.

11.91 *a)* 5.37 m/s . *b)* $t = 2.80 \text{ s}$, $x = -7.56 \text{ m}$, $y = 5.52 \text{ m}$,
 $\mathbf{v} = 5.37 \text{ m/s}^2 \swarrow 63.4^\circ$.

11.92 *a)* 2.00 in/s , 6.00 in/s . *b)* Para v_{\min} , $t = 2N\pi \text{ s}$, $x = 8N\pi \text{ in}$,
 $y = 2 \text{ in}$, $\mathbf{v} = (2.00 \text{ in/s} \rightarrow \text{o bien } 2.00 \text{ in/s} \leftarrow)$.

Para v_{\max} , $t = (2N+1)\pi \text{ s}$, $x = 4(2N+1)\pi$, $y = 6 \text{ in}$,

$\mathbf{v} = 6.00 \text{ in/s} \rightarrow \text{o bien } 6.00 \text{ in/s} \leftarrow$.

11.95 $\sqrt{R^2 1 + \omega_n^2 t^2} + c^2 R \omega_n \sqrt{4 + \omega_n^2 t^2}$.

11.96 *a)* 3.00 ft/s , 3.61 ft/s^2 . *b)* 3.82 s .

11.97 353 m .

11.98 *a)* 15.50 m/s . *b)* 5.12 m .

11.99 $15.38 \text{ ft/s} \leq v_0 \leq 35.0 \text{ ft/s}$.

11.100 *a)* $70.4 \text{ mi/h} \leq v_0 \leq 89.4 \text{ mi/h}$. *b)* 6.89° , 4.29° .

11.101 *a)* $2.87 \text{ m} > 2.43 \text{ m}$. *b)* 7.01 m de la red.

11.102 $0.244 \text{ m} \leq h \leq 0.386 \text{ m}$.

11.103 726 ft o bien 242 yd .

11.104 $0 \leq d \leq 1.737 \text{ ft}$.

11.105 23.8 ft/s .

11.106 *a)* 29.8 ft/s . *b)* 29.6 ft/s .

11.107 $10.64 \text{ m/s} \leq v_0 \leq 14.48 \text{ m/s}$.

11.108 $0.678 \text{ m/s} \leq v_0 \leq 1.211 \text{ m/s}$.

11.111 *a)* 4.90° . *b)* 963 ft . *c)* 16.24 s .

11.112 *a)* 14.66° . *b)* 0.1074 s .

- 11.113** a) 10.38° . b) 9.74° .
- 11.115** a) 45.0° , 6.52 m. b) 58.2° , 5.84 m.
- 11.117** a) $1.540 \text{ m/s} \angle 38.6^\circ$. b) $1.503 \text{ m/s} \angle 58.3^\circ$.
- 11.118** $5.05 \text{ m/s} \leq 55.8^\circ$.
- 11.119** 1.737 nudos $\leq 18.41^\circ$.
- 11.120** a) $2.67 \text{ mi/h} \angle 12.97^\circ$. b) $258 \text{ mi/h} \angle 76.4^\circ$.
c) $65 \text{ m} \angle 40^\circ$.
- 11.123** a) $8.53 \text{ in./s} \leq 54.1^\circ$. b) $6.40 \text{ in./s}^2 \leq 54.1^\circ$.
- 11.124** a) $7.01 \text{ in./s} \angle 60^\circ$. b) $11.69 \text{ in./s}^2 \angle 60.6^\circ$.
- 11.125** a) $0.835 \text{ mm/s}^2 \leq 75^\circ$. b) $8.35 \text{ mm/s} \leq 75^\circ$.
- 11.126** a) $0.958 \text{ m/s}^2 \leq 23.6^\circ$. b) $1.917 \text{ m/s} \leq 23.6^\circ$.
- 11.127** $10.54 \text{ ft/s} \angle 81.3^\circ$.
- 11.128** a) $5.18 \text{ ft/s} \leq 15^\circ$. b) $1.232 \text{ ft/s} \leq 15^\circ$.
- 11.129** $17.49 \text{ km/h} \angle 59.0^\circ$.
- 11.130** $15.79 \text{ km/h} \leq 26.0^\circ$.
- 11.133** 28.0 m/s .
- 11.134** a) 250 m . b) 82.9 km/h .
- 11.135** 1815 ft.
- 11.136** 59.9 mi/h .
- 11.137** a) 20.0 mm/s^2 . b) 26.8 mm/s^2 .
- 11.138** a) 178.9 m . b) 1.118 m/s^2 .
- 11.139** 2.53 ft/s^2 .
- 11.141** 15.95 ft/s^2 .
- 11.143** a) 281 m . b) 209 m .
- 11.144** a) $7.99 \text{ m/s} \angle 40^\circ$. b) 3.82 m .
- 11.145** a) 6.75 ft . b) 0.1170 ft .
- 11.146** a) 1.739 ft . b) 27.9 ft .
- 11.147** $\rho_B = v_B^2 / 9v_A$.
- 11.148** $18.17 \text{ m/s} \angle 4.04^\circ$ y $18.17 \text{ m/s} \leq 4.04^\circ$.
- 11.151** $(R^2 + c^2)^{1/2} \omega_n R$
- 11.152** 2.50 ft.
- 11.153** $25.8 \times 10^3 \text{ km/h}$.
- 11.154** $12.56 \times 10^3 \text{ km/h}$.
- 11.155** $153.3 \times 10^3 \text{ km/h}$.
- 11.156** $92.9 \times 10^6 \text{ mi}$.
- 11.157** $885 \times 10^6 \text{ mi}$.
- 11.158** 1.606 h.
- 11.161** a) $3\pi b \mathbf{e}_\theta, -4\pi^2 b \mathbf{e}_r$. b) $\theta = 2N\pi$, $N = 0, 1, 2, \dots$.
- 11.162** a) $2b\omega, 4b\omega^2$. b) $\rho = b$, un círculo.
- 11.163** a) $-(6\pi \text{ in./s}^2) \mathbf{e}_r, (80\pi \text{ in./s}^2) \mathbf{e}_\theta$. b) 0.
- 11.165** a) $(2\pi \text{ m/s}) \mathbf{e}_\theta, -4\pi^2 \text{ m/s}^2 \mathbf{e}_r$
b) $-(\pi/2 \text{ m/s}) \mathbf{e}_r + (\pi \text{ m/s}) \mathbf{e}_\theta, -(\pi^2/2 \text{ m/s}^2) \mathbf{e}_r - (\pi^2 \text{ m/s}^2) \mathbf{e}_\theta$.
- 11.166** a) $2abt, 2ab\sqrt{1+4b^2t^2}$. b) $\rho = a$ (círculo).
- 11.169** $d\theta \tan \beta \sec \beta / \tan \beta \cos \theta - \sin \theta^2$.
- 11.170** $v_0 \cos \beta \tan \beta \cos \theta + \sin \theta^2 / h$.
- 11.171** 185.7 km/h.
- 11.172** 61.8 mi/h, 49.7° .
- 11.175** $(b\omega^2/\theta^3)\sqrt{4+\theta^4}$.
- 11.176** $(1+b^2)\omega^2 e^{b\theta}$.
- 11.180** $\tan^{-1}[R^2 + \omega_N^2 t^2]/c \sqrt{4 + \omega_N^2 t^2}$
- 11.181** a) $\theta_x = 90^\circ, \theta_y = 123.7^\circ, \theta_z = 33.7^\circ$. b) $\theta_x = 103.4^\circ, \theta_y = 134.3^\circ, \theta_z = 47.4^\circ$.
- 11.182** a) 1.00 s, 4.00 s. b) 1.50 m, 24.5 m.
- 11.184** a) $-2.43 \times 10^6 \text{ ft/s}^2$. b) $1.366 \times 10^{-3} \text{ s}$.
- 11.185** a) 11.62 s, 69.7 ft. b) 18.30 ft/s.
- 11.186** a) 3.00 s. b) 56.25 mm arriba de su posición inicial.
- 11.187** $\mathbf{v}_A = 12.5 \text{ mm/s} \uparrow, \mathbf{v}_B = 75 \text{ mm/s} \downarrow, \mathbf{v}_C = 175 \text{ mm/s} \downarrow$.
- 11.189** 17.88 km/h $\angle 36.4^\circ$.
- 11.190** 2.44 ft/s^2 .
- 11.193** $\dot{r} = 120 \text{ m/s}, \ddot{r} = 34.8 \text{ m/s}^2, \dot{\theta} = -0.0900 \text{ rad/s}, \ddot{\theta} = -0.0156 \text{ rad/s}^2$.

CAPÍTULO 12

- 12.1** a) 4.987 lb en 0° , 5.000 lb en 45° , 5.013 lb en 90° . b) 5.000 lb en todas las latitudes, c) $0.1554 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$ en todas las latitudes.
- 12.2** a) 3.24 N. b) 2.00 kg.
- 12.3** $1.300 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.
- 12.5** a) 6.67 m/s . b) 0.0755.
- 12.6** a) 225 km/h. b) 187.1 km/h.
- 12.7** 0.242 mi.
- 12.8** a) 135.3 ft. b) 155.8 ft.
- 12.9** 419 N al inicio y 301 N durante el deslizamiento.
- 12.10** $0.414 \text{ m/s}^2 \leq 15^\circ$.
- 12.11** a) $A: 2.49 \text{ m/s}^2 \rightarrow, B: 0.831 \text{ m/s}^2 \downarrow$. b) 74.8 N.
- 12.12** a) $A: 0.698 \text{ m/s}^2 \rightarrow, B: 0.233 \text{ m/s}^2 \downarrow$. b) 79.8 N.
- 12.15** a) $0.986 \text{ m/s}^2 \leq 25^\circ$. b) 51.7 N.
- 12.16** a) $1.794 \text{ m/s}^2 \leq 25^\circ$. b) 58.2 N.
- 12.17** a) $0.997 \text{ ft/s}^2 \angle 15^\circ, 1.619 \text{ ft/s}^2 \angle 15^\circ$.
- 12.19** Sistema 1: a) 10.73 ft/s^2 . b) 14.65 ft/s . c) 1.864 s .
Sistema 2: a) 16.10 ft/s^2 . b) 17.94 ft/s . c) 1.242 s .
Sistema 3: a) 0.749 ft/s^2 . b) 3.87 ft/s . c) 26.7 s .
- 12.20** a) $1.962 \text{ m/s}^2 \uparrow$. b) 39.1 N.
- 12.21** a) $6.63 \text{ m/s}^2 \leftarrow$. b) $0.321 \text{ m} \rightarrow$.
- 12.22** a) $14.53 \text{ m/s}^2 \angle 65^\circ$. b) $4.24 \text{ m/s}^2 \angle 65^\circ$.
- 12.24** $0.347 m_0 v_0^2 / F_0$.
- 12.26** $\sqrt{k/m} (\sqrt{l^2 + x_0^2} - l)$.
- 12.27** 119.5 mi/h.
- 12.28** a) 33.6 N . b) $\mathbf{a}_A = 4.76 \text{ m/s}^2 \rightarrow, \mathbf{a}_B = 3.08 \text{ m/s}^2 \downarrow, \mathbf{a}_C = 1.401 \text{ m/s}^2 \leftarrow$.
- 12.29** a) 36.0 N . b) $\mathbf{a}_A = 5.23 \text{ m/s}^2 \rightarrow, \mathbf{a}_B = 2.62 \text{ m/s}^2 \downarrow, \mathbf{a}_C = 0$.
- 12.30** a) $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_D = 2.76 \text{ ft/s}^2 \downarrow, \mathbf{a}_C = 11.04 \text{ ft/s}^2 \uparrow$.
b) 18.80 lb.
- 12.31** a) $24.2 \text{ ft/s} \downarrow$. b) $17.25 \text{ ft/s} \uparrow$.
- 12.36** a) 80.4 N. b) 2.30 m/s.
- 12.37** a) 49.9° . b) 6.85 N.
- 12.38** 8.25 ft/s.
- 12.40** $2.77 \text{ m/s} < v < 4.36 \text{ m/s}$.
- 12.42** $9.00 \text{ ft/s} < v_C < 12.31 \text{ ft/s}$.
- 12.43** $2.42 \text{ ft/s} < v < 13.85 \text{ ft/s}$.
- 12.44** a) 131.7 N. b) 88.4 N.
- 12.45** a) 553 N. b) 659 N.
- 12.46** a) 668 ft. b) 120.0 lb \uparrow .
- 12.47** a) $6.95 \text{ ft/s}^2 \leq 20^\circ$. b) $8.87 \text{ ft/s}^2 \leq 20^\circ$.
- 12.48** a) 2.905 N . b) 13.09° .
- 12.49** $1126 \text{ N} \leq 25.6^\circ$.
- 12.50** $24.1^\circ \leq \theta \leq 155.9^\circ$.
- 12.51** a) 43.9° . b) 0.390. c) 78.8 km/h.
- 12.53** a) 0.1858 W . b) 10.28° .
- 12.55** 468 mm.
- 12.56** $2.36 \text{ m/s} \leq v \leq 4.99 \text{ m/s}$.
- 12.57** a) 0.1904, movimiento inminente hacia abajo.
b) 0.349, movimiento inminente hacia arriba.
- 12.58** a) No se desliza 1.926 lb $\leq 80^\circ$.
b) Se desliza hacia abajo. 1.123 lb $\leq 40^\circ$.
- 12.61** a) 0.1834. b) 10.39° para el movimiento inminente hacia la izquierda, 169.6° para el movimiento inminente hacia la derecha.
- 12.62** a) 2.98 ft/s . b) 19.29° para el movimiento inminente hacia la izquierda, 160.7° para el movimiento inminente hacia la derecha.
- 12.64** $1.054 \sqrt{eV/mv_0^2}$.
- 12.65** 1.333 l.
- 12.66** a) $F_r = -10.73 \text{ N}, F_\theta = 0.754 \text{ N}$.
b) $F_r = -4.44 \text{ N}, F_\theta = 1.118 \text{ N}$.
- 12.67** $F_r = 0.0523 \text{ N}, F_\theta = 0.432 \text{ N}$.

- 12.68** a) $F_r = -1.217$ lb, $F_\theta = 0.248$ lb.
b) $F_r = -0.618$ lb, $F_\theta = -0.0621$ lb.
- 12.69** a) $mc^2(r_0 - kt)t^2$. b) $mc(r_0 - 3kt)$.
- 12.70** 2.00 s.
- 12.71** $\mathbf{P} = (5.76 \text{ N}) \tan \theta \sec^3 \theta \Delta \theta$
 $\mathbf{Q} = (5.76 \text{ N}) \tan^3 \theta \sec^3 \theta \rightarrow$
- 12.76** $v_r = v_0 \sin 2\theta / \sqrt{\cos 2\theta}$. $v_\theta = v_0 \sqrt{\cos 2\theta}$.
- 12.79** a) $r = (g\tau^2 R^2 / 4\pi^2)^{1/3}$. b) $g = 24.8 \text{ m/s}^2$.
- 12.80** a) 35 800 km y 22 240 mi, b) 3 070 m/s y 10 090 ft/s.
- 12.81** $4.13 \times 10^{21} \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$.
- 12.82** a) 1 h 57 min. b) 3 380 km.
- 12.84** a) $86.9 \times 10^{24} \text{ kg}$, b) 436 000 km.
- 12.86** a) 5 280 ft/s. b) 8 000 ft/s.
- 12.87** a) 1 551 m/s. b) 15.8 m/s.
- 12.88** 5 000 m/s.
- 12.89** 53 ft/s.
- 12.90** a) En A $(a_A)_r = 0$, $(a_A)_\theta = 0$. b) 1 536 in./s². c) 32.0 in./s.
- 12.91** a) 24.0 in./s. b) $a_r = -258 \text{ in./s}^2$, $a_\theta = 0$. c) -226 in./s^2 .
- 12.98** 10.42 km/s.
- 12.99** a) 10.13 km/s. b) 2.97 km/s.
- 12.103** a) 26.3×10^3 ft/s. b) 448 ft/s.
- 12.104** $\sqrt{2/(2 + \alpha)}$.
- 12.105** a) 52.4×10^3 ft/s. b) 1 318 ft/s en A , 3 900 ft/s en B .
- 12.108** 98.0 h.
- 12.109** 4.95 h.
- 12.110** 54.0°.
- 12.112** 5.31×10^9 km.
- 12.114** $\cos^{-1} [1 - n\beta^2 / (1 - \beta^2)]$.
- 12.115** 81.0 m/s.
- 12.116** a) 14.37°. b) 59.8 km/s.
- 12.118** Demuestre
- 12.119** a) $(r_1 - r_0)/(r_1 + r_0)$. b) $609 \times 10^{12} \text{ m}$.
- 12.120** Demuestre
- 12.121** Deduzca
- 12.122** 267 ft.
- 12.124** a) 1.656 lb. b) 20.8 lb.
- 12.125** a) $20.49 \text{ ft/s}^2 \Delta 30^\circ$. b) $17.75 \text{ ft/s}^2 \rightarrow$.
- 12.127** a) 0.454, hacia abajo. b) 0.1796, hacia abajo.
c) 0.218, hacia arriba.
- 12.128** a) $F_r = -13.16$ lb, $F_\theta = 2.10$ lb.
b) $\mathbf{P} = 6.89 \text{ lb} \Delta 70^\circ$, $\mathbf{Q} = 14.00 \text{ lb} \Delta 40^\circ$.
- 12.129** $v_r = 2v_0 \sin 2\theta$, $v_\theta = v_0 \cos 2\theta$.
- 12.131** a) $r = 1.250$ ft, $F_H = 0$. b) $r = 0.871$ ft, $F_H = -2.69$ lb.
- 12.132** 1.147.
- 13.22** a) 45.7 J. b) $T_A = 83.2$ N, $T_B = 60.3$ N.
- 13.23** a) $10.36 \text{ ft/s} \downarrow$. b) $17.94 \text{ ft/s} \downarrow$.
- 13.24** a) $11.35 \text{ ft/s} \Delta 23.6^\circ$. b) $16.05 \text{ ft/s} \Delta 23.6^\circ$.
- 13.25** 1.190 m/s.
- 13.26** a) 2.32 ft/s . b) 2.39 ft/s .
- 13.27** a) 0.222 ft. b) El bloque se mueve hacia la derecha.
- 13.29** a) 3.29 m/s. b) 1.472 m.
- 13.31** a) 0.750 in. \downarrow . b) 8.51 in./s \uparrow o \downarrow .
- 13.33** $0.759 \sqrt{paA/m}$.
- 13.35** $1/[1 - (v_0^2 - v^2)/2g_mR_m]$.
- 13.36** 1 515 yd.
- 13.38** a) 32.7 mm, 98.1 N \uparrow . b) 30.4 mm, 104.9 N \uparrow .
- 13.39** a) $\sqrt{3gl}$. b) $\sqrt{2gl}$.
- 13.40** 14.00°.
- 13.41** 167.0 lb.
- 13.42** mínimo = 167.0 lb, máximo = 1 260 lb.
- 13.44** a) 27.4° . b) 3.81 ft.
- 13.46** a) 20.2 ft · lb/s. b) 118.7 ft · lb/s.
- 13.49** a) 109.0 kW, 146.2 hp. b) 530 kW, 711 hp.
- 13.50** a) 2.75 kW. b) 3.35 kW.
- 13.51** 14.8 kN.
- 13.52** a) 3 000 lb. b) 267 hp.
- 13.53** a) 375 kW. b) 5.79 km/h.
- 13.54** a) 58.9 kW. b) 52.9 kW.
- 13.55** a) $k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$. b) $k_1 + k_2$.
- 13.56** a) $x_0 \sqrt{k_1 k_2 / m(k_1 + k_2)}$. b) $x_0 \sqrt{(k_1 + k_2) / m}$.
- 13.57** 3.19 m/s \rightarrow o bien 3.19 m/s \leftarrow .
- 13.58** a) 3.34 ft/s. b) 27.7 ft/s^2 .
- 13.59** 56.7 ft/s.
- 13.61** a) 87.2 m/s. b) 105.8 m/s.
- 13.62** a) 1 000 mm. b) 4.42 m/s.
- 13.64** a) 0.956 ft. b) 7.85 ft/s.
- 13.65** a) 43.5° . b) 8.02 ft/s \downarrow .
- 13.68** 0.269 m.
- 13.69** 0.1744 m.
- 13.70** a) 2.55 N. b) 6.96 N.
- 13.71** a) 8.15 N. b) 2.94 N.
- 13.73** $14.34 \text{ ft/s} \leftarrow$, $13.77 \text{ lb} \uparrow$.
- 13.74** 1): a) 7.99 m/s. b) 5.89 N \leftarrow .
2): a) 7.67 m/s. b) 3.92 N \leftarrow .
- 13.75** a) Conducto 1: mínimo $v_C = 3.84 \text{ m/s} > 3.5 \text{ m/s}$.
b) Conducto 2: $v_0 = 7.83 \text{ m/s}$.
- 13.78** a) $\cot \phi = 4.113/12 - y$.
b) $\theta_x = 85.7^\circ$, $\theta_y = 71.6^\circ$, $\theta_z = 161.1^\circ$.
- 13.80** b) $V = -\ln xyz + C$.
- 13.81** a) $\pi ka^2/4$. b) 0.
- 13.82** a) $F_x = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, $F_y = y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$,
 $F_z = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. b) $a\sqrt{3}$.
- 13.85** a) 90.46 J. b) 2 086 J.
- 13.86** 57.5 MJ/kg.
- 13.87** $15.65 \times 10^3 \text{ mi/h}$.
- 13.88** $450 \times 10^3 \text{ ft} \cdot \text{lb/lb}$.
- 13.89** a) $mgR(1 - R/r)$. b) $mgR^2/2r$. c) $mgR(1 - R/2r)$.
- 13.90** a) 33.9 MJ/kg. b) 46.4 MJ/kg.
- 13.93** a) 0.919 m/s. b) 8.27 m/s.
- 13.94** a) 7.35 m/s. b) 11.02 m/s.
- 13.95** $v_r = 9.05 \text{ ft/s}$, $v_\theta = 9.14 \text{ ft/s}$.
- 13.96** a) 25.3 in. b) 7.58 ft/s.
- 13.97** máxima: 1.661 m, mínima: 0.338 m,
máxima: 25.6 m/s, mínima: 5.21 m/s.
- 13.100** 14.20 km/s.
- 13.101** 29.8 m/s.

CAPÍTULO 13

- 13.1** a) 585 kJ. b) 41.0 km/h.
- 13.2** $4.54 \times 10^9 \text{ ft} \cdot \text{lb}$.
- 13.5** a) 69.6 mi/h. b) 56.9 mi/h.
- 13.6** a) 32.8 mi/h. b) 142.5 mi/h.
- 13.7** 4.05 m/s.
- 13.8** 2.99 m.
- 13.9** a) $8.57 \text{ m/s} \Delta 15^\circ$. b) $5.30 \text{ m/s} \Delta 15^\circ$.
- 13.10** a) 8.70 m. b) $4.94 \text{ m/s} \Delta 15^\circ$.
- 13.13** 6.71 m.
- 13.14** a) 2.90 m/s. b) 0.893 m.
- 13.15** a) 124.1 ft. b) $F_{AB} = 19.38$ kips (tensión),
 $F_{BC} = 81.62$ kips (tensión)
- 13.16** a) 279 ft. b) $F_{AB} = 19.38$ kips (compresión),
 $F_{BC} = 8.62$ kips (compresión).
- 13.21** a) $2.34 \text{ m/s} \leftarrow$. b) 235 mm.
- 13.22** a) 2.32 ft/s . b) 2.39 ft/s .
- 13.27** a) 0.222 ft. b) El bloque se mueve hacia la derecha.
- 13.29** a) 3.29 m/s. b) 1.472 m.
- 13.31** a) 0.750 in. \downarrow . b) 8.51 in./s \uparrow o \downarrow .
- 13.33** $0.759 \sqrt{paA/m}$.
- 13.35** $1/[1 - (v_0^2 - v^2)/2g_mR_m]$.
- 13.36** 1 515 yd.
- 13.38** a) 32.7 mm, 98.1 N \uparrow . b) 30.4 mm, 104.9 N \uparrow .
- 13.39** a) $\sqrt{3gl}$. b) $\sqrt{2gl}$.
- 13.40** 14.00°.
- 13.41** 167.0 lb.
- 13.42** mínimo = 167.0 lb, máximo = 1 260 lb.
- 13.44** a) 27.4° . b) 3.81 ft.
- 13.46** a) 20.2 ft · lb/s. b) 118.7 ft · lb/s.
- 13.49** a) 109.0 kW, 146.2 hp. b) 530 kW, 711 hp.
- 13.50** a) 2.75 kW. b) 3.35 kW.
- 13.51** 14.8 kN.
- 13.52** a) 3 000 lb. b) 267 hp.
- 13.53** a) 375 kW. b) 5.79 km/h.
- 13.54** a) 58.9 kW. b) 52.9 kW.
- 13.55** a) $k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$. b) $k_1 + k_2$.
- 13.56** a) $x_0 \sqrt{k_1 k_2 / m(k_1 + k_2)}$. b) $x_0 \sqrt{(k_1 + k_2) / m}$.
- 13.57** 3.19 m/s \rightarrow o bien 3.19 m/s \leftarrow .
- 13.58** a) 3.34 ft/s. b) 27.7 ft/s^2 .
- 13.59** 56.7 ft/s.
- 13.61** a) 87.2 m/s. b) 105.8 m/s.
- 13.62** a) 1 000 mm. b) 4.42 m/s.
- 13.64** a) 0.956 ft. b) 7.85 ft/s.
- 13.65** a) 43.5° . b) 8.02 ft/s \downarrow .
- 13.68** 0.269 m.
- 13.69** 0.1744 m.
- 13.70** a) 2.55 N. b) 6.96 N.
- 13.71** a) 8.15 N. b) 2.94 N.
- 13.73** $14.34 \text{ ft/s} \leftarrow$, $13.77 \text{ lb} \uparrow$.
- 13.74** 1): a) 7.99 m/s. b) 5.89 N \leftarrow .
2): a) 7.67 m/s. b) 3.92 N \leftarrow .
- 13.75** a) Conducto 1: mínimo $v_C = 3.84 \text{ m/s} > 3.5 \text{ m/s}$.
b) Conducto 2: $v_0 = 7.83 \text{ m/s}$.
- 13.78** a) $\cot \phi = 4.113/12 - y$.
b) $\theta_x = 85.7^\circ$, $\theta_y = 71.6^\circ$, $\theta_z = 161.1^\circ$.
- 13.80** b) $V = -\ln xyz + C$.
- 13.81** a) $\pi ka^2/4$. b) 0.
- 13.82** a) $F_x = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, $F_y = y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$,
 $F_z = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. b) $a\sqrt{3}$.
- 13.85** a) 90.46 J. b) 2 086 J.
- 13.86** 57.5 MJ/kg.
- 13.87** $15.65 \times 10^3 \text{ mi/h}$.
- 13.88** $450 \times 10^3 \text{ ft} \cdot \text{lb/lb}$.
- 13.89** a) $mgR(1 - R/r)$. b) $mgR^2/2r$. c) $mgR(1 - R/2r)$.
- 13.90** a) 33.9 MJ/kg. b) 46.4 MJ/kg.
- 13.93** a) 0.919 m/s. b) 8.27 m/s.
- 13.94** a) 7.35 m/s. b) 11.02 m/s.
- 13.95** $v_r = 9.05 \text{ ft/s}$, $v_\theta = 9.14 \text{ ft/s}$.
- 13.96** a) 25.3 in. b) 7.58 ft/s.
- 13.97** máxima: 1.661 m, mínima: 0.338 m,
máxima: 25.6 m/s, mínima: 5.21 m/s.
- 13.100** 14.20 km/s.
- 13.101** 29.8 m/s.

- 13.102** $21.8 \times 10^6 \text{ ft}^2/\text{s}^2$
- 13.103** *a)* 16 800 ft/s. *b)* 32 700 ft/s.
- 13.106** 1 555 m/s, 79.3° .
- 13.107** máxima: $r_0(1 + \operatorname{sen} \alpha)$, mínimo: $r_0(1 - \operatorname{sen} \alpha)$
- 13.108** 68.9°.
- 13.109** *a)* $11.32 \times 10^3 \text{ ft/s}$. *b)* $13.68 \times 10^3 \text{ ft/s}$.
- 13.110** 58.9°.
- 13.111** *a)* 31.5 m/s. *b)* 1053 m/s.
- 13.116** *b)* $v_{\text{esc}} \sqrt{\alpha/(1 + \alpha)} \leq v_0 \leq v_{\text{esc}} \sqrt{(1 + \alpha)/(2 + \alpha)}$.
- 13.118** *a)* $h = r_{\min} v_{\max} E/m = \frac{1}{2} v_{\max}^2 - GM/r_{\min}$.
- 13.119** *a)* 3.40 s. *b)* 25.5 s.
- 13.120** 4 min 20 s.
- 13.121** *a)* 3.11 s. *b)* 1.493 s.
- 13.122** *a)* 11.42 s. *b)* $-(125.5 \text{ m/s})\mathbf{j} - (194.5 \text{ m/s})\mathbf{k}$.
- 13.123** *a)* 2.49 s. *b)* 12.24 s.
- 13.124** 2.61 s.
- 13.126** 0.260.
- 13.127** 0.310.
- 13.129** *a)* 14.78 s. *b)* 693 lb (tensión).
- 13.130** *a)* 29.6 s. *b)* 2 500 lb (tensión).
- 13.131** *a)* 19.60 s. *b)* 10.20 kN (compresión).
- 13.132** *a)* 3.92 m/s. *b)* 39.2 N.
- 13.134** *a)* 29.0 ft/s. *b)* 77.3 ft/s.
- 13.135** *a)* 77.3 ft/s. *b)* 5.40 s.
- 13.136** *a)* 5.00 s. *b)* 49.9 ft/s. *c)* 17.88 s.
- 13.137** *a)* 7.00 s. *b)* 10.99 ft/s. *c)* 13.49 s.
- 13.139** 8.18%.
- 13.140** 6.21 W.
- 13.141** 642 lb.
- 13.142** *a)* 3 730 lb. *b)* 7450 lb.
- 13.145** *a)* 1.333 km/h \leftarrow . *b)* 0.1888 s.
- 13.146** *a)* A iba más rápido. *b)* 115.2 km/h.
- 13.147** *a)* 8.51 km/h. *b)* 6.67 N.
- 13.148** 497 ft/s.
- 13.149** *a)* $A: v_0 \sqrt{L^2 - a^2}/2L$, *B:* $v_0 \sqrt{L^2 + 3a^2}/2L$.
b) $mv_0^2(L^2 - a^2)/4L^2$.
- 13.150** *a)* 0.618 ft/s. *b)* 3.04 ft/s.
- 13.151** *a)* 1.000 m/s \uparrow . *b)* 0.500 N \cdot s \uparrow .
- 13.152** $mMv_0 \cos \theta/(m + M) \rightarrow$, $mv_0 \operatorname{sen} \theta \uparrow$.
- 13.154** 76.9 lb.
- 13.155** *a)* $\mathbf{v}'_A = 0.363 \text{ m/s} \leftarrow$, $\mathbf{v}'_B = 2.44 \text{ m/s} \rightarrow$. *b)* 4.13 J.
- 13.157** 0.800.
- 13.158** *a)* $\mathbf{v}'_A = 10.38 \text{ ft/s} \rightarrow$, $\mathbf{v}'_B = 7.38 \text{ ft/s} \rightarrow$. *b)* 0.0611 ft \cdot lb.
- 13.159** *A:* 1.013 m/s \leftarrow , *B:* 0.338 m/s \leftarrow , *C:* 0.150 m/s \leftarrow .
- 13.160** *a)* $\mathbf{v}'_A = v_0(1 - e)/2$, $\mathbf{v}'_B = v_0(1 + e)/2$.
b) $\mathbf{v}'_C = v_0(1 + e)^2/4$, $\mathbf{v}'_D = v_0(1 - e)^2/4$.
c) $\mathbf{v}'_n = v_0(1 + e)^{(n-1)}/2^{(n-1)}$, *d)* 0.881 v_0 .
- 13.163** $0.728 \leq e \leq 0.762$.
- 13.165** $\mathbf{v}'_A = 6.37 \text{ m/s} \angle 77.2^\circ$, $\mathbf{v}'_B = 1.802 \text{ m/s} \angle 40^\circ$.
- 13.166** $\mathbf{v}'_A = 3.00 \text{ m/s} \angle 40^\circ$, $\mathbf{v}'_B = 3.00 \text{ m/s} \angle 40^\circ$.
- 13.167** *a)* $\mathbf{v}_A = 0.848 v_0 \angle 27.0^\circ$, $\mathbf{v}_B = 0.456 v_0 \angle 57.6^\circ$.
- 13.168** *a)* 70.0°. *b)* 0.972 ft/s \rightarrow .
- 13.169** 0.857.
- 13.170** 15.94 m.
- 13.173** *a)* 22.5° . *b)* 21.3° .
- 13.174** *a)* 0.294 m. *b)* 54.4 mm.
- 13.175** *a)* 0.685 m para $e = 1$, 0.484 m para $e = 0$.
b) 5.00 m/s \rightarrow para $e = 1$, 2.50 m/s \rightarrow para $e = 0$.
- 13.176** *a)* $\mathbf{v}'_A = \mathbf{v}'_B = 0$. *b)* $\mathbf{v}'_A = 1.201 \text{ m/s} \rightarrow$, $\mathbf{v}'_B = 0.400 \text{ m/s} \rightarrow$.
- 13.177** *a)* 0.258. *b)* 4.34 m/s.
- 13.178** *a)* 0.0720 ft. *b)* 72.2 lb/ft.
- 13.179** *a)* $e = 1.000$. *b)* 0.200 ft. *c)* 0.263 ft.

- 13.183** *a)* 2.90 m/s. *b)* 100.5 J.
- 13.184** *a)* 401 mm. *b)* 4.10 N \cdot s.
- 13.185** *a)* 0.923. *b)* 1.278 m.
- 13.188** $\mathbf{v}'_A = 1.093 \text{ ft/s} \leftarrow$, $\mathbf{v}'_B = 3.28 \text{ ft/s} \rightarrow$.
- 13.190** 1.688 ft \cdot lb.
- 13.191** *a)* 533 lb/ft. *b)* 37.0 ft.
- 13.194** 12 900 ft/s.
- 13.196** 65.0 KN.
- 13.197** 0.707 a.
- 13.199** *a)* 1.368 m/s. *b)* 0.668 m. *c)* 1.049 m.
- 13.200** $(1 + e)^2/4$.

CAPÍTULO 14

- 14.1** *a)* 1.417 m/s \rightarrow . *b)* 1.417 m/s \rightarrow .
- 14.2** *a)* 10.00 kg. *b)* 1.200 m/s \rightarrow .
- 14.3** *a)* 9.20 ft/s \leftarrow . *b)* 9.37 ft/s \leftarrow .
- 14.4** *a)* 2.80 ft/s \leftarrow . *b)* 0.229 ft/s \leftarrow .
- 14.7** *a)* $A: 1.288 \text{ m/s} \leftarrow$, *B:* 0.312 m/s \rightarrow , *C:* 1.512 m/s \rightarrow .
b) $A: 0.956 \text{ m/s} \leftarrow$, *B:* 0.0296 m/s \leftarrow , *C:* 1.552 m/s \rightarrow .
- 14.8** 0.294 m/s \leftarrow .
- 14.9** $-(31.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} - (64.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{j} + (48.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.
- 14.10** *a)* $(0.600 \text{ m})\mathbf{i} + (1.400 \text{ m})\mathbf{j} + (1.525 \text{ m})\mathbf{k}$.
b) $-(26.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\mathbf{i} + (14.00 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\mathbf{j} + (14.00 \text{ kg} \cdot \text{m/s})\mathbf{k}$.
c) $-(29.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} - (16.75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{j} + (3.20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.
- 14.13** *a)* $v_x = -0.750 \text{ ft/s}$, $v_z = 0.4375 \text{ ft/s}$.
b) $\mathbf{H}_O = -(3.39 \text{ ft} \cdot \text{lb} \cdot \text{s})\mathbf{i}$.
- 14.14** *a)* $v_x = 8.33 \text{ ft/s}$, $v_z = 7.25 \text{ ft/s}$. *b)* $\mathbf{H}_O = -(4.51 \text{ ft} \cdot \text{lb} \cdot \text{s})\mathbf{k}$.
- 14.15** $(4.320 \text{ ft})\mathbf{i} + (480 \text{ ft})\mathbf{j} + (480 \text{ ft})\mathbf{k}$.
- 14.16** $(400 \text{ ft})\mathbf{i} - (258 \text{ ft})\mathbf{j} + (32.0 \text{ ft})\mathbf{k}$.
- 14.17** $(1004 \text{ m})\mathbf{i} - (48.7 \text{ m})\mathbf{j}$.
- 14.18** $(503 \text{ m})\mathbf{i} - (547 \text{ m})\mathbf{j}$.
- 14.21** *a)* 8.50 ft/s. *b)* 3.95 ft/s.
- 14.22** *a)* 6.05 ft/s. *b)* 6.81 ft/s.
- 14.23** $(26.0 \text{ m})\mathbf{i} + (125.4 \text{ m})\mathbf{k}$.
- 14.24** $v_A = 919 \text{ m/s}$, $v_B = 717 \text{ m/s}$, $v_C = 619 \text{ m/s}$.
- 14.31** *a)* 42.2 J. *b)* 5.10 J.
- 14.32** *a)* 264 J. *b)* 352 J.
- 14.33** mujer: 382 ft \cdot lb, hombre: 447 ft \cdot lb
- 14.34** *a)* 1 116 ft \cdot lb. *b)* 623 ft \cdot lb.
- 14.37** *a)* $\mathbf{v}_B = m_A v_0/(m_A + m_B) \rightarrow$. *b)* $h = m_B v_0^2/2g$ ($m_A + m_B$).
- 14.38** *a)* $\mathbf{v}_A = 0.200 v_0 \leftarrow$, *b)* $\mathbf{v}_B = 0.693 v_0 \angle 30^\circ$,
c) $\mathbf{v}_C = 0.693 v_0 \angle 30^\circ$, *b)* $\mathbf{v}_A = 0.250 v_0 \angle 60^\circ$,
b) $\mathbf{v}_B = 0.866 v_0 \angle 30^\circ$, *b)* $\mathbf{v}_C = 0.433 v_0 \angle 30^\circ$.
- 14.39** $v_A = 10.61 \text{ ft/s}$, $v_B = 5.30 \text{ ft/s}$, $v_C = 9.19 \text{ ft/s}$.
- 14.40** $v_A = 7.50 \text{ ft/s}$, $v_B = 9.19 \text{ ft/s}$, $v_C = 9.19 \text{ ft/s}$.
- 14.41** $\mathbf{v}_A = 4.11 \text{ m/s} \angle 46.9^\circ$, $\mathbf{v}_B = 17.39 \text{ m/s} \angle 16.7^\circ$.
- 14.42** $\mathbf{v}_A = 12.17 \text{ m/s} \angle 25.3^\circ$, $\mathbf{v}_B = 9.17 \text{ m/s} \angle 70.9^\circ$.
- 14.45** $(60.0 \text{ m/s})\mathbf{i} + (60.0 \text{ m/s})\mathbf{j} + (390 \text{ m/s})\mathbf{k}$.
- 14.46** $x_{B_0} = 181.7 \text{ mm}$, $y_{B_0} = 0$, $z_{B_0} = 139.4 \text{ mm}$.
- 14.49** $0.866 v_0$, *b)* $0.250 v_0$, *c)* 7.50%.
- 14.50** *a)* 0.707 v_0 . *b)* 0.500 v_0 . *c)* 12.50%.
- 14.51** *a)* $\mathbf{v}_A = 2.56 \text{ m/s} \uparrow$, $\mathbf{v}_B = 4.24 \text{ m/s} \angle 31.9^\circ$. *b)* 2.34 m.
- 14.52** *a)* $\mathbf{v}_0 = (2.4 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.8 \text{ m/s})\mathbf{j}$ *b)* 600 mm. *c)* 20.0 rad/s.
- 14.53** *a)* $\mathbf{v}_B = 7.20 \text{ ft/s} \angle 53.1^\circ$, $\mathbf{v}_C = 7.68 \text{ ft/s} \rightarrow$. *b)* 42.0 in.
- 14.54** *a)* $\mathbf{v}_A = 7.20 \text{ ft/s} \downarrow$, $\mathbf{v}_B = 9.00 \text{ ft/s} \angle 53.1^\circ$. *b)* 74.0 in.
- 14.57** 312 N.
- 14.58** 4.18 m/s.
- 14.59** 90.6 N \leftarrow .
- 14.60** *a)* $F_x = 3 280 \text{ lb}$. *b)* $F_z = 6 450 \text{ lb}$.
- 14.63** $\mathbf{C} = 161.7 \text{ N} \uparrow$, $\mathbf{D}_x = 154.8 \text{ N} \rightarrow$, $\mathbf{D}_y = 170.2 \text{ N} \uparrow$.
- 14.67** *a)* 61.1 m/s. *b)* 59.8 N $\angle 49.0^\circ$.

- 14.68** $C_x = 90.0 \text{ N}$, $C_y = 2360 \text{ N}$, $D_x = 0$, $D_y = 2900 \text{ N}$.
14.69 36.9 kN.
14.70 251 lb/s.
14.71 a) 9690 lb, 3.38 ft. b) 6960 lb, 9.43 ft.
14.73 1.096 m.
14.74 7180 lb.
14.75 a) 516 mi/h. b) 391 mi/h.
14.77 a) 15.47 kJ/s. b) 0.323.
14.78 a) 80.0 kJ/s. b) 51.9 km/h.
14.79 a) 15450 hp. b) 28060 hp. c) 0.551.
14.80 a) 109.5 ft/s. b) 3100 ft³/s. c) 43800 ft · lb/s
14.84 646 ft³/s.
14.85 a) $P = qv$.
14.86 Caso 1. a) $0.333 g \downarrow$. b) $0.817\sqrt{gl} \downarrow$.
Caso 2. a) $gy/l \downarrow$. b) $\sqrt{gl} \downarrow$.
14.87 a) $(m/l)(v^2 + gy)$. b) $mg(1 - y/l) \uparrow$.
14.88 a) mgy/l . b) $(m/l)[g(l - y) + v^2] \uparrow$.
14.89 10.10 ft/s.
14.90 4.75 ft/s.
14.92 533 kg/s.
14.93 a) 90.0 m/s^2 . b) $35.9 \times 10^3 \text{ km/h}$.
14.94 a) $31.9 \text{ m/s}^2 \uparrow$. b) $240 \text{ m/s}^2 \uparrow$.
14.95 4410 lb.
14.96 3960 ft/s.
14.97 7930 m/s.
14.98 a) 1800 m/s. b) 9240 m/s.
14.99 186.8 km.
14.100 a) 31.2 km. b) 197.5 km.
14.106 a) 5.20 km/h. b) 4.00 km/h.
14.107 a) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C = 0.400 \text{ mi/h} \rightarrow$.
b) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = 1.68 \text{ mi/h} \leftarrow$, $\mathbf{v}_C = 4.56 \text{ mi/h} \rightarrow$.
14.109 $\mathbf{v}_A = 15.38 \text{ ft/s} \rightarrow$, $\mathbf{v}_B = 5.13 \text{ ft/s} \leftarrow$.
14.111 a) $qv_0 \leftarrow$. b) $\sqrt{2gh} \Delta 30^\circ$.
14.112 1.712 kN \uparrow en C, 2.29 kN \uparrow en D.
14.113 414 rpm.
14.114 v^2/g .
14.115 a) $m_0 + qt_L = m_0 e^{qL/m_0 v_0}$ b) $v_L = v_0 e^{-qL/m_0 v_0}$

CAPÍTULO 15

- 15.1** a) 0, 15.00 rad/s, -18.00 rad/s^2 .
b) -9.00 rad , -12.00 rad/s^2 , 0.
15.2 1.000 s, 7.00 rad, -12.00 rad/s^2 .
5.00 s, -25.0 rad , 12.00 rad/s^2 .
15.3 a) 0, 0, 0. b) 6.00 rad, 4.71 rad/s, -3.70 rad/s^2 .
15.4 1.243 rad, 3.33 rad/s, 4.79 rad/s^2 .
15.5 a) 0, 0.1000 rad/s, -0.0250 rad/s^2 .
b) 0.211 rad, 0.0472 rad/s, -0.01181 rad/s^2 .
c) 0.400 rad, 0, 0.
15.6 a) 4.00 s^{-2} . b) 5.29 rad/s.
15.9 a) 12.73 rev. b) ∞ . c) 18.42 s.
15.10 $-(0.400 \text{ m/s})\mathbf{i} - (1.400 \text{ m/s})\mathbf{j} - (0.700 \text{ m/s})\mathbf{k}$,
 $(8.40 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (3.30 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (11.40 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
15.11 $-(0.400 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.700 \text{ m/s})\mathbf{k}$,
 $-(2.00 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (6.50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (3.00 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
15.12 $-(0.450 \text{ m/s})\mathbf{i} - (1.200 \text{ m/s})\mathbf{j} + (1.500 \text{ m/s})\mathbf{k}$,
 $(12.60 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (7.65 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (9.90 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
15.13 $(0.750 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.500 \text{ m/s})\mathbf{k}$, $(12.75 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} +$
 $(11.25 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (3.00 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
15.16 a) 1525 ft/s, 0.1112 ft/s^2 . b) 1163 ft/s, 0.0852 ft/s^2 . c) 0, 0.
15.18 a) 0.0600 m/s^2 . b) 0.0937 m/s^2 . c) 0.294 m/s^2 .
15.19 a) 6.00 m/s^2 . b) 9.98 m/s^2 . c) 60.0 m/s^2 .
15.21 a) $2.50 \text{ rad/s} \uparrow$, $1.500 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) $38.6 \text{ in./s}^2 \nwarrow 76.5^\circ$.
- 15.22** 12.00 rad/s² \downarrow .
15.24 a) 6.28 m/s , 1579 m/s^2 . b) 0.628 m/s , 15.80 m/s^2 .
15.25 a) 120 rpm, 275 rpm. b) $23.7 \text{ m/s}^2 \uparrow$, $19.90 \text{ m/s}^2 \downarrow$.
15.27 a) $10.00 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $7.50 \text{ m/s}^2 \downarrow$, $3.00 \text{ m/s}^2 \downarrow$.
c) $4.00 \text{ m/s}^2 \downarrow$.
15.28 a) $3.00 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) 4.00 s.
15.29 a) $1.707 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. b) $6.83 \text{ rad/s} \uparrow$.
15.30 a) 2.25 rev. b) $1.710 \text{ m/s} \downarrow$, $3.11 \text{ m} \downarrow$.
c) $849 \text{ mm/s}^2 \angle 32.0^\circ$.
15.31 a) $1.152 \text{ m/s} \uparrow$, $2.30 \text{ m} \uparrow$. b) $1.728 \text{ m/s} \downarrow$, $3.46 \text{ m} \downarrow$.
15.32 *Disco A*: $5.41 \text{ rad/s}^2 \uparrow$; *Disco B*: $1.466 \text{ rad/s}^2 \uparrow$.
15.33 a) 10.39 s. b) *Disco A*: 413 rpm \downarrow ; *Disco B*: 248 rpm \uparrow .
15.35 a) *Disco A*: $2.36 \text{ rad/s}^2 \downarrow$; *Disco B*: $4.19 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) 6.00 s.
15.36 $b\omega_0^2/2\pi r^3 \downarrow$.
15.37 $b\omega_0^2/2\pi \rightarrow$.
15.38 a) $0.378 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $6.42 \text{ m/s} \uparrow$.
15.39 a) $0.615 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $11.02 \text{ in./s} \nwarrow 15^\circ$.
15.40 a) $2.26 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $1.840 \text{ m/s} \Delta 60^\circ$.
15.41 a) $2.54 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $1.373 \text{ m/s} \angle 30^\circ$.
15.44 a) $4.00 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $-(4.00 \text{ in./s})\mathbf{i}$.
15.45 a) $(12.00 \text{ in./s})\mathbf{i} + (8.00 \text{ in./s})\mathbf{j}$.
b) $x = 2.00 \text{ in.}$, $y = 3.00 \text{ in.}$
15.46 a) $2.00 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $(120 \text{ mm/s})\mathbf{i} + (660 \text{ mm/s})\mathbf{j}$.
15.48 a) 105 rpm \downarrow . b) 127.5 rpm \downarrow .
15.49 a) 1.500. b) $0.333 \omega_A \uparrow$.
15.50 70 rpm \downarrow .
15.51 a) 135.0 rpm \downarrow . b) 105.0 rpm \downarrow .
15.52 a) $48.0 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $3.39 \text{ m/s} \angle 45^\circ$.
15.55 a) $60.0 \text{ rpm} \downarrow$, $37.7 \text{ in./s} \rightarrow$. b) 0, 50.3 in./s \leftarrow .
15.56 $2.67 \text{ rad/s} \downarrow$, $34.4 \text{ in./s} \leftarrow$.
15.57 a) 0, 39.3 rad/s \uparrow . b) $6.28 \text{ m/s} \downarrow$, 0.
15.58 6.52 m/s \downarrow , 20.8 rad/s \uparrow .
15.60 a) $0.1254 \text{ m/s} \leftarrow$. b) $0.208 \text{ rad/s} \downarrow$.
15.61 a) $3.02 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $0.657 \text{ rad/s} \uparrow$.
15.63 *Barra BD*: $0.955 \text{ rad/s} \uparrow$; *Barra DE*: $2.55 \text{ rad/s} \downarrow$.
15.64 *Barra BD*: $4.00 \text{ rad/s} \downarrow$; *Barra DE*: $6.67 \text{ rad/s} \uparrow$.
15.65 *Barra BD*: $5.20 \text{ rad/s} \downarrow$; *Barra DE*: $6.40 \text{ rad/s} \downarrow$.
15.66 a) $3.33 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $2.00 \text{ m/s} \nwarrow 56.3^\circ$.
15.68 a) $12.00 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $80.0 \text{ in./s} \rightarrow$.
15.69 a) $12.00 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $72.1 \text{ in./s} \swarrow 56.3^\circ$.
15.70 B: $140.8 \text{ ft/s} \rightarrow$; C: 0; D: $136.0 \text{ ft/s} \angle 15^\circ$; E: $99.6 \text{ ft/s} \nwarrow 45^\circ$.
15.71 a) $338 \text{ mm/s} \leftarrow$, 0. b) $710 \text{ mm/s} \leftarrow$, $2.37 \text{ rad/s} \downarrow$.
15.72 $\omega_C = (1 - r_A/r_C) \omega_{ABC}$.
15.73 a) C está a 1.000 ft a la derecha de A. b) $4.00 \text{ in./s} \uparrow$.
15.74 $x = 0$, $z = 9.34 \text{ ft}$.
15.75 a) 50.0 mm a la derecha del eje.
b) $750 \text{ mm/s} \downarrow$, $1.950 \text{ m/s} \downarrow$.
15.76 a) 25.0 mm a la derecha del eje. b) $420 \text{ mm/s} \uparrow$.
15.77 a) $12.00 \text{ rad/s} \downarrow$. b) *Cremallera*: $2.40 \text{ m/s} \rightarrow$; D: $2.16 \text{ m/s} \angle 56.3^\circ$.
15.78 a) $10.00 \text{ mm a la derecha de A}$. b) $40.00 \text{ mm/s} \downarrow$.
c) DE: sin enrollar a 240 mm/s; BF: sin enrollar a 120 mm/s.
15.79 a) 20.0 mm a la derecha de A. b) $80.0 \text{ mm/s} \downarrow$.
c) DE: sin enrollar a 240 mm/s; BF: sin enrollar a 120 mm/s.
15.82 a) $12.00 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $3.90 \text{ m/s} \swarrow 67.4^\circ$.
15.83 a) $5.00 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $1.300 \text{ m/s} \angle 67.4^\circ$.
15.84 a) $3.08 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $83.3 \text{ in./s} \nwarrow 73.9^\circ$.
15.85 a) $0.467 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $3.49 \text{ ft/s} \angle 59.2^\circ$.
15.89 a) $4.42 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $3.26 \text{ m/s} \angle 50^\circ$.
15.90 a) $1.579 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $699 \text{ mm/s} \angle 78.3^\circ$.
15.92 a) $22.0 \text{ in./s} \angle 79.6^\circ$. b) $20.6 \text{ in./s} \nwarrow 20.5^\circ$.
15.93 a) $2.79 \text{ in./s} \angle 36.7^\circ$. b) $8.63 \text{ in./s} \angle 75.0^\circ$.

- 15.95** a) 1 260 mm/s \uparrow . b) 1.250 rad/s \uparrow .
- 15.96** a) 0.338 rad/s \downarrow . b) 78.8 mm/s \leftarrow .
- 15.97** a) $DE: 2.50 \text{ rad/s } \downarrow; AB: 1.176 \text{ rad/s } \downarrow$. b) 29.4 m/s \leftarrow .
- 15.98** a) $AB: 2.00 \text{ rad/s } \downarrow; DE: 5.00 \text{ rad/s } \uparrow$. b) 24.0 in./s \rightarrow .
- 15.99** *Centroide espacial:* cuarto de círculo de 15 in. de radio centrado en O . *Centrode del cuerpo:* semicírculo de 7.5 in. de radio centrado en el punto medio entre A y B.
- 15.100** *Centrode espacial:* cremallera inferior.
Centrode del cuerpo: circunferencia del engrane.
- 15.102** 4.00 rad/s \downarrow , 6.67 rad/s \uparrow .
- 15.103** 5.20 rad/s \downarrow , 6.40 rad/s \downarrow .
- 15.104** B: 140.8 ft/s \rightarrow ; C: 0; D: 136.0 ft/s $\angle 15.0^\circ$; E: 99.6 ft/s $\angle 45^\circ$.
- 15.105** a) $0.900 \text{ m/s}^2 \rightarrow$. b) $1.800 \text{ m/s}^2 \leftarrow$.
- 15.106** a) 0.600 m desde A. b) 0.200 m desde A.
- 15.107** a) $0.778 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) $4.22 \text{ m/s}^2 \uparrow$.
- 15.108** A: $7.00 \text{ ft/s}^2 \uparrow$; B: $0.200 \text{ ft/s}^2 \downarrow$.
- 15.109** a) $2.88 \text{ m/s}^2 \leftarrow$. b) $3.60 \text{ m/s}^2 \leftarrow$.
- 15.110** a) $2.88 \text{ m/s}^2 \rightarrow$. b) $7.92 \text{ m/s}^2 \rightarrow$.
- 15.111** a) $5 410 \text{ ft/s}^2 \downarrow$. b) $5 410 \text{ ft/s}^2 \uparrow$. c) $5 410 \text{ ft/s}^2 \angle 60^\circ$.
- 15.112** a) $96.0 \text{ rad/s}^2 \uparrow$, $2.40 \text{ m/s}^2 \leftarrow$.
b) $48.0 \text{ rad/s}^2 \uparrow$, $1.200 \text{ m/s}^2 \leftarrow$.
- 15.113** a) $300 \text{ mm/s}^2 \rightarrow$. b) $247 \text{ mm/s}^2 \angle 14.0^\circ$.
- 15.115** A: $56.6 \text{ in./s}^2 \angle 58.0^\circ$; B: $80.0 \text{ in./s}^2 \uparrow$.
C: $172.2 \text{ in./s}^2 \angle 25.8^\circ$.
- 15.116** A: $48.0 \text{ in./s}^2 \uparrow$; B: $85.4 \text{ in./s}^2 \angle 69.4^\circ$.
C: $82.8 \text{ in./s}^2 \angle 65.0^\circ$.
- 15.118** a) $13.35 \text{ in./s}^2 \angle 61.0^\circ$. b) $12.62 \text{ in./s}^2 \angle 64.0^\circ$.
- 15.119** a) 92.5 in./s^2 . b) 278 in./s^2 .
- 15.120** a) $59.8 \text{ m/s}^2 \uparrow$. b) $190.6 \text{ m/s}^2 \uparrow$.
- 15.121** D: $1 558 \text{ m/s}^2 \angle 45^\circ$; E: $337 \text{ m/s}^2 \angle 45^\circ$.
- 15.122** a) $1 218 \text{ in./s}^2 \leftarrow$. b) $993 \text{ in./s}^2 \leftarrow$.
- 15.125** $148.3 \text{ m/s}^2 \downarrow$.
- 15.126** $296 \text{ m/s}^2 \uparrow$.
- 15.127** a) $1 080 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) $460 \text{ ft/s}^2 \angle 64.9^\circ$.
- 15.128** a) $432 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. b) $272 \text{ ft/s}^2 \angle 60.3^\circ$.
- 15.129** $1.745 \text{ m/s}^2 \angle 68.2^\circ$.
- 15.130** a) 7.20 rad/s^2 . b) $1.296 \text{ m/s}^2 \leftarrow$.
- 15.132** $9.60 \text{ m/s}^2 \rightarrow$.
- 15.133** a) $10.75 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. b) $2.30 \text{ rad/s}^2 \uparrow$.
- 15.135** a) $8.15 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. b) 0.896 rad/s^2 .
- 15.138** $v_B \operatorname{sen} \beta/l \cos \theta$.
- 15.139** $(v_B \operatorname{sen} \beta/l)^2 \operatorname{sen} \theta/\cos^3 \theta$
- 15.140** $l\omega \cos \theta, b\alpha \cos \theta - b\omega^2 \operatorname{sen} \theta$.
- 15.141** $b v_A/(b^2 + x_A^2) \uparrow, 2b_A x_A v_A^2/(b^2 + x_A^2) \uparrow$
- 15.143** $v[1 - \cos(vt/r)], v \operatorname{sen}(vt/r)$.
- 15.146** $v_0 \operatorname{sen}^2 \theta/r \cos \theta \uparrow$.
- 15.147** $(v_0/r)^2 (1 + \cos^2 \theta) + \tan^3 \theta \uparrow$.
- 15.149** $(R\omega \operatorname{sen} \omega t)\mathbf{j}, (R\omega^2 \cos \omega t)\mathbf{j}$
- 15.150** a) $1.815 \text{ rad/s } \downarrow$. b) $16.42 \text{ in./s} \angle 20^\circ$.
- 15.151** a) $5.16 \text{ rad/s } \downarrow$. b) $1.339 \text{ in./s} \angle 60^\circ$.
- 15.152** AP: $4.68 \text{ rad/s } \uparrow$; BE: $1.415 \text{ rad/s } \downarrow$.
- 15.153** AD: $2.52 \text{ rad/s } \downarrow$; BP: $1.299 \text{ rad/s } \downarrow$.
- 15.156** a) $\mathbf{v}_{H/AE} = l\omega \leftarrow, \mathbf{v}_{H/BD} = 0$. b) $\mathbf{v}_{H/AE} = 0.577 l\omega \angle 30^\circ$, $\mathbf{v}_{H/BD} = 0.577 l\omega \angle 30^\circ$.
- 15.157** $\mathbf{v}_{H/AE} = 0.299 l\omega \angle 45^\circ, \mathbf{v}_{H/BD} = 0.816 l\omega \angle 15^\circ$.
- 15.160** a) $0.520 \text{ m/s} \angle 82.6^\circ$. b) $50.0 \text{ mm/s}^2 \angle 9.8^\circ$.
- 15.161** a) $0.520 \text{ m/s} \angle 37.4^\circ$. b) $50.0 \text{ mm/s}^2 \angle 69.8^\circ$.
- 15.162** a) $-(51.0 \text{ in./s})\mathbf{j} + (108.0 \text{ in./s})\mathbf{k}$. b) $-(51.0 \text{ in./s})\mathbf{j}$.
- 15.163** a) $(96.0 \text{ in./s})\mathbf{i} - (108.0 \text{ in./s})\mathbf{k}$. b) $(96.0 \text{ in./s})\mathbf{i}$.
- 15.165** 0.0234 m/s^2 al oeste.
- 15.166** a) $68.1 \text{ in./s}^2 \angle 21.5^\circ$. b) $101.4 \text{ in./s}^2 \angle 3.2^\circ$.
- 15.167** a) $95.2 \text{ in./s}^2 \angle 48.3^\circ$. b) $57.5 \text{ in./s} \angle 64.3^\circ$.
- 15.168** Eslabón 1: $303 \text{ mm/s}^2 \rightarrow$; Eslabón 2: $168.5 \text{ mm/s}^2 \angle 57.7^\circ$.
- 15.169** Eslabón 3: $483 \text{ mm/s}^2 \leftarrow$; Eslabón 4: $168.5 \text{ mm/s}^2 \angle 57.7^\circ$.
- 15.171** $392 \text{ in./s}^2 \angle 4.05^\circ$.
- 15.174** a) $\mathbf{a}_A = 0.621 \text{ m/s}^2 \uparrow$. b) $\mathbf{a}_B = 1.733 \text{ m/s}^2 \angle 53.9^\circ$.
c) $\mathbf{a}_C = 2.62 \text{ m/s}^2 \angle 67.6^\circ$.
- 15.175** $1.500 \text{ rad/s } \uparrow, 7.79 \text{ rad/s}^2 \uparrow$.
- 15.176** $6.00 \text{ rad/s } \uparrow, 62.4 \text{ rad/s}^2 \downarrow$.
- 15.177** $43.0 \text{ rad/s}^2 \downarrow$.
- 15.178** $47.0 \text{ rad/s}^2 \downarrow$.
- 15.181** a) $2.40 \text{ rad/s } \downarrow, 34.6 \text{ rad/s}^2 \downarrow$.
b) $1.342 \text{ m/s} \angle 63.4^\circ, 9.11 \text{ m/s}^2 \angle 18.4^\circ$.
- 15.182** a) $3.61 \text{ rad/s } \uparrow$. b) $86.6 \text{ in./s} \angle 30^\circ$. c) $563 \text{ in./s}^2 \angle 46.1^\circ$.
- 15.183** a) $3.61 \text{ rad/s } \downarrow$. b) $86.6 \text{ in./s} \angle 30^\circ$. c) $563 \text{ in./s}^2 \angle 46.1^\circ$.
- 15.184** a) $(1.500 \text{ rad/s})\mathbf{i} - (3.00 \text{ rad/s})\mathbf{j} - (2.50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.
b) $(27.0 \text{ in./s})\mathbf{i} - (14.00 \text{ in./s})\mathbf{j} + (33.0 \text{ in./s})\mathbf{k}$.
- 15.185** a) $-(1.500 \text{ rad/s})\mathbf{i} - (0.750 \text{ rad/s})\mathbf{j} - (1.000 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.
b) $(9.00 \text{ in./s})\mathbf{i} - (14.00 \text{ in./s})\mathbf{j} - (3.00 \text{ in./s})\mathbf{k}$.
- 15.186** a) $(0.480 \text{ rad/s})\mathbf{i} - (1.600 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (0.600 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.
b) $(400 \text{ mm/s})\mathbf{i} + (300 \text{ mm/s})\mathbf{j} + (480 \text{ mm/s})\mathbf{k}$.
- 15.187** a) $-(0.400 \text{ rad/s})\mathbf{j} - (0.360 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.
b) $(100 \text{ mm/s})\mathbf{i} - (90 \text{ mm/s})\mathbf{j} + (120 \text{ mm/s})\mathbf{k}$.
- 15.188** $-(9.87 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.189** $(118.4 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$.
- 15.190** a) $\omega_1 \mathbf{j} + (R/r)\omega_1 \mathbf{k}$. b) $(R/r)\omega_1^2 \mathbf{i}$.
- 15.193** a) $-(0.600 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.750 \text{ m/s})\mathbf{j} - (0.600 \text{ m/s})\mathbf{k}$.
b) $-(6.15 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (3.00 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$.
- 15.194** a) $-(20.0 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$. b) $-(4.00 \text{ ft/s}^2)\mathbf{i} + (10.00 \text{ ft/s}^2)\mathbf{k}$.
c) $-(10.25 \text{ ft/s}^2)\mathbf{j}$.
- 15.195** $-(3.46 \text{ ft/s}^2)\mathbf{i} - (5.13 \text{ ft/s}^2)\mathbf{j} + (8.66 \text{ ft/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.196** a) $-(0.1745 \text{ rad/s})\mathbf{i} - (0.524 \text{ rad/s})\mathbf{j}$. b) $-(0.0914 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$.
c) $-(1.818 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.605 \text{ m/s})\mathbf{j} - (3.49 \text{ m/s})\mathbf{k}$,
 $(0.366 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (0.0609 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (1.055 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.198** a) $(8.00 \text{ rad/s})\mathbf{i}$. b) $-(19.20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$.
c) $-(1.103 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (2.005 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$.
- 15.199** a) $(0.750 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (1.500 \text{ rad/s})\mathbf{j}$.
b) $(300 \text{ mm/s})\mathbf{i} - (150 \text{ mm/s})\mathbf{j}$.
c) $(60 \text{ mm/s})\mathbf{i} - (30 \text{ mm/s})\mathbf{j} - (90 \text{ mm/s})\mathbf{k}$.
- 15.200** a) $(1.125 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$.
b) $-(225 \text{ mm/s}^2)\mathbf{i} + (180 \text{ mm/s}^2)\mathbf{j} - (112.5 \text{ mm/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.202** $(210 \text{ mm/s})\mathbf{k}$.
- 15.203** $(40.0 \text{ mm/s})\mathbf{k}$.
- 15.204** $-(30.0 \text{ in./s})\mathbf{j}$.
- 15.205** $(45.7 \text{ in./s})\mathbf{j}$.
- 15.206** $(12.78 \text{ mm/s})\mathbf{j}$.
- 15.207** $(4.66 \text{ mm/s})\mathbf{j}$.
- 15.210** $(\omega_1/\cos 25^\circ) (-\operatorname{sen} 25^\circ)\mathbf{j} + \cos 25^\circ \mathbf{k}$.
- 15.211** $\omega_1/\cos 25^\circ (-\operatorname{sen} 25^\circ)\mathbf{j} + \cos 25^\circ \mathbf{k}$.
- 15.212** a) $(0.240 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (0.080 \text{ rad/s})\mathbf{j} - (1.080 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.
b) $(40.0 \text{ mm/s})\mathbf{k}$.
- 15.213** a) $-(0.348 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (0.279 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (1.089 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.
b) $-(30.0 \text{ in./s})\mathbf{j}$.
- 15.214** $-(510 \text{ mm/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.216** $-(45.0 \text{ in./s}^2)\mathbf{j}$.
- 15.217** $(205 \text{ in./s}^2)\mathbf{j}$.
- 15.218** $-(9.51 \text{ mm/s}^2)\mathbf{j}$.
- 15.219** $-(8.76 \text{ mm/s}^2)\mathbf{j}$.
- 15.220** a) $(72.0 \text{ in./s})\mathbf{i} + (30.0 \text{ in./s})\mathbf{j} - (48.0 \text{ in./s})\mathbf{k}$.
b) $-(288 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (864 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.221** a) $(30.0 \text{ in./s})\mathbf{i} - (16.0 \text{ in./s})\mathbf{j} - (16.0 \text{ in./s})\mathbf{k}$,
 $-(48.0 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} + (96.0 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.
b) $(30.0 \text{ in./s})\mathbf{i} - (16.0 \text{ in./s})\mathbf{j} - (96.0 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.

- 15.222** a) $(0.750 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.299 \text{ m/s})\mathbf{j} - (1.732 \text{ m/s})\mathbf{k}$.
 b) $(27.1 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (5.63 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (15.00 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.223** a) $(0.75 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.299 \text{ m/s})\mathbf{j} - 1.732 \text{ m/s}\mathbf{k}$.
 b) $-(28.6 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (3.21 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (10.67 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.226** $-(1.215 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.620 \text{ m/s})\mathbf{k} - (30.4 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.227** $-(1.080 \text{ m/s})\mathbf{k}; (19.44 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (12.96 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.228** $-(1.215 \text{ m/s})\mathbf{i} - (1.080 \text{ m/s})\mathbf{j} + (1.620 \text{ m/s})\mathbf{k}; (19.44 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (30.4 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (12.96 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.229** $-(1.215 \text{ m/s})\mathbf{i} - (1.080 \text{ m/s})\mathbf{j} + (1.620 \text{ m/s})\mathbf{k}; (25.5 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (25.0 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (21.1 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.230** a) $(30.0 \text{ in./s})\mathbf{i} - (16.0 \text{ in./s})\mathbf{j} - (16.0 \text{ in./s})\mathbf{k}; -(75.0 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (8.0 \text{ in./s})\mathbf{j} + (32.0 \text{ in./s})\mathbf{k}$.
 b) $(30.0 \text{ in./s})\mathbf{i} - (16.0 \text{ in./s})\mathbf{j}; -(75.0 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} + (40.0 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} + (96.0 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.232** $-(41.6 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (61.5 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} + (103.9 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.234** a) $-(0.270 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$. b) $(6.24 \text{ in./s})\mathbf{i} - (3.60 \text{ in./s})\mathbf{j} - (16.80 \text{ in./s})\mathbf{k}$. c) $-(11.70 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (2.81 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} - (7.48 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.235** $(0.600 \text{ m/s})\mathbf{j} - (0.585 \text{ m/s})\mathbf{k}; -(4.76 \text{ m/s}^2)\mathbf{i}$.
- 15.236** $(0.600 \text{ m/s})\mathbf{j} - (0.225 \text{ m/s})\mathbf{k}; -(0.675 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (3.00 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (3.60 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.237** $(4.33 \text{ ft/s})\mathbf{i} - (6.18 \text{ ft/s})\mathbf{j} + (5.30 \text{ ft/s})\mathbf{k}; (2.65 \text{ ft/s}^2)\mathbf{i} - (2.64 \text{ ft/s}^2)\mathbf{j} - (3.25 \text{ ft/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.240** $-(5.04 \text{ m/s})\mathbf{i} - (1.200 \text{ m/s})\mathbf{k}; -(9.60 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (25.9 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (57.6 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.241** $-(0.720 \text{ m/s})\mathbf{i} - (1.200 \text{ m/s})\mathbf{k}; -(9.60 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (25.9 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (11.52 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.242** $(3.00 \text{ in./s})\mathbf{i} - (1.800 \text{ in./s})\mathbf{j}; -(13.50 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} + (9.00 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} + (8.64 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.243** $(9.00 \text{ in./s})\mathbf{i} - (7.80 \text{ in./s})\mathbf{j} + (7.20 \text{ in./s})\mathbf{k}; (9.00 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} - (22.1 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} - (5.76 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.244** a) $(0.610 \text{ m/s})\mathbf{k}; -(0.880 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (1.170 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$.
 b) $(0.520 \text{ m/s})\mathbf{i} - (0.390 \text{ m/s})\mathbf{j} - (1.000 \text{ m/s})\mathbf{k}; -(4.00 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (3.25 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.245** a) $(1.390 \text{ m/s})\mathbf{k}; (7.12 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (1.170 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$.
 b) $(0.520 \text{ m/s})\mathbf{i} - (0.390 \text{ m/s})\mathbf{j} + 1.000 \text{ m/s}\mathbf{k}; (4.00 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (3.25 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$.
- 15.248** a) $51.3 \text{ in./s}^2 \downarrow$. b) $184.9 \text{ in./s}^2 \angle 16.1^\circ$.
- 15.249** a) -1.824 rad/s^2 . b) 103.3 s .
- 15.250** a) $(0.450 \text{ m/s})\mathbf{k}, (4.05 \text{ m/s}^2)\mathbf{i}$.
 b) $-(1.350 \text{ m/s})\mathbf{k}, -(6.75 \text{ m/s}^2)\mathbf{i}$.
- 15.252** a) $37.5 \text{ in./s} \rightarrow$. b) $187.5 \text{ in./s}^2 \uparrow$.
- 15.254** $49.4 \text{ m/s}^2 \nwarrow 26.0^\circ$.
- 15.256** $(7.84 \text{ in./s})\mathbf{k}$.
- 15.257** a) $0.1749 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $66.2 \text{ mm/s} \leq 25^\circ$.
- 15.259** $(0.325 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.1875 \text{ m/s})\mathbf{j} - (0.313 \text{ m/s})\mathbf{k}; -(2.13 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (0.974 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - 3.25 \text{ m/s}^2\mathbf{k}$.

CAPÍTULO 16

- 16.1** a) $3.43 \text{ N} \angle 20^\circ$. b) $24.4 \text{ N} \nwarrow 73.4^\circ$.
- 16.2** $3.57 \text{ m/s}^2 \leftarrow$.
- 16.3** 6.84 ft/s^2 .
- 16.4** a) $13.42 \text{ ft/s}^2 \rightarrow$. b) 8.67 lb .
- 16.5** a) 25.8 ft/s^2 . b) 12.27 ft/s^2 . c) 13.32 ft/s^2 .
- 16.6** a) 36.8 ft . b) 42.3 ft .
- 16.7** a) $5.00 \text{ m/s}^2 \rightarrow$. b) $0.311 \text{ m} \leq h \leq 1.489 \text{ m}$.
- 16.8** a) $2.55 \text{ m/s}^2 \rightarrow$. b) $h \leq 1.047 \text{ m}$.
- 16.11** a) $0.337 \text{ g} \angle 30^\circ$. b) $h/d = 4.00$.
- 16.12** a) $0.252 \text{ g} \angle 30^\circ$. b) $h/d = 4.00$.
- 16.13** 435 lb .
- 16.14** a) $4.91 \text{ m/s}^2 \angle 30^\circ$. b) $AD: 31.0 \text{ N}; BE: 11.43 \text{ N}$.
- 16.16** a) $2.54 \text{ m/s}^2 \angle 15^\circ$. b) $AC: 6.01 \text{ N}$ en tensión
 $BD: 22.4 \text{ N}$ en tensión
- 16.17** $CF: 4.05 \text{ lb}$ en compresión; $BE: 14.33 \text{ lb}$ en compresión.
- 16.20** a) $30.6 \text{ ft/s}^2 \nwarrow 84.1^\circ$.
 b) $\mathbf{B} = 1.285 \text{ lb} \angle 30^\circ, \mathbf{A} = 0.505 \text{ lb} \angle 30^\circ$.
- 16.22** $|V|_{\text{máx}} = 40.3 \text{ lb}, |M|_{\text{máx}} = 25.2 \text{ lb} \cdot \text{ft}$.
- 16.25** $87.8 \text{ lb} \cdot \text{ft}$.
- 16.26** 5 230 revoluciones.
- 16.27** $20.4 \text{ rad/s}^2 \downarrow$.
- 16.28** $32.7 \text{ rad/s}^2 \uparrow$.
- 16.29** 59.4 s .
- 16.30** 93.5 revoluciones.
- 16.34** 1): a) $8.00 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $14.61 \text{ rad/s} \uparrow$.
 2): a) $6.74 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. b) $13.41 \text{ rad/s} \uparrow$.
 3): a) $4.24 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. b) $10.64 \text{ rad/s} \uparrow$.
 4): a) $5.83 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. b) $8.82 \text{ rad/s} \uparrow$.
- 16.36** a) $7.63 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) $2.78 \text{ lb} \nearrow$.
- 16.37** a) $1.255 \text{ ft/s}^2 \downarrow$. b) $0.941 \text{ ft/s}^2 \uparrow$.
- 16.38** a) $1.971 \text{ ft/s}^2 \uparrow$. b) $1.971 \text{ ft/s}^2 \downarrow$.
- 16.39** a) $\alpha_A = 12.50 \text{ rad/s}^2 \uparrow, \alpha_B = 33.3 \text{ rad/s}^2 \uparrow$.
 b) A: $320 \text{ rpm} \downarrow$, B: $320 \text{ rpm} \uparrow$.
- 16.40** a) $\alpha_A = 12.50 \text{ rad/s}^2 \uparrow, \alpha_B = 33.3 \text{ rad/s}^2 \uparrow$.
 b) A: $90.0 \text{ rpm} \uparrow$, B: $120.0 \text{ rpm} \downarrow$.
- 16.41** a) Ocurre deslizamiento. b) $\alpha_A = 61.8 \text{ rad/s}^2 \uparrow$.
 $\alpha_B = 9.66 \text{ rad/s}^2 \downarrow$.
- 16.42** a) No hay deslizamiento. b) $\alpha_A = 15.46 \text{ rad/s}^2 \uparrow$.
 $\alpha_B = 7.73 \text{ rad/s}^2 \downarrow$.
- 16.48** a) A: 18.40 ft/s^2 . b) $9.20 \text{ ft/s}^2 \leftarrow$.
- 16.49** a) 12.00 in. desde A. b) $9.20 \text{ ft/s}^2 \rightarrow$.
- 16.50** a) $2.50 \text{ m/s}^2 \rightarrow$. b) 0 .
- 16.51** a) $3.75 \text{ m/s}^2 \rightarrow$. b) $1.25 \text{ m/s}^2 \leftarrow$.
- 16.55** A: $0.885 \text{ m/s}^2 \downarrow$, B: $2.60 \text{ m/s}^2 \uparrow$.
- 16.56** A: $0.273 \text{ m/s}^2 \downarrow$, B: $2.01 \text{ m/s}^2 \downarrow$.
- 16.57** A: 359 lb , B: 312 lb .
- 16.58** A: 275 lb , B: 361 lb .
- 16.59** a) $0.741 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $0.857 \text{ m/s}^2 \uparrow$.
- 16.60** a) 2.800 N . b) $15.11 \text{ rad/s} \downarrow$.
- 16.63** a) $3.00 \text{ g/L} \downarrow$. b) $1.000 \text{ g} \uparrow$. c) $2.00 \text{ g} \downarrow$.
- 16.64** a) $1.000 \text{ g/L} \downarrow$. b) 0 . c) $1.000 \text{ g} \downarrow$.
- 16.65** a) $1.000 \text{ g/L} \downarrow$. b) $0.866 \text{ g} \leftarrow$.
 c) $1.323 \text{ g} \angle 49.1^\circ$.
- 16.66** a) $0.500 \text{ g} \uparrow$. b) $1.500 \text{ g} \downarrow$.
- 16.67** a) 0 . b) $1.000 \text{ g} \downarrow$.
- 16.69** a) 1.597 s . b) 9.86 ft/s . c) 19.85 ft .
- 16.70** a) 1.863 s . b) 9.00 ft/s . c) 22.4 ft .
- 16.72** a) $v_0/r \uparrow$. b) $v_0/\mu_k g$. c) $v_0^2/2\mu_k g$.
- 16.76** a) $12.08 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) $A_x = 0.750 \text{ lb} \leftarrow, A_y = 4.00 \text{ lb} \uparrow$.
- 16.77** a) 24.0 in. b) $8.05 \text{ rad/s}^2 \downarrow$.
- 16.78** a) $107.1 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) $\mathbf{C}_x = 21.4 \text{ N} \leftarrow, \mathbf{C}_y = 39.2 \text{ N} \uparrow$.
- 16.79** a) 150.0 mm . b) $125.0 \text{ rad/s}^2 \downarrow$.
- 16.81** a) 1.529 kg . b) 2.90 mm .
- 16.82** $13.64 \text{ kN} \rightarrow$.
- 16.84** a) $1.500 \text{ g} \downarrow$. b) $0.250 \text{ mg} \uparrow$.
- 16.85** a) $1.286 \text{ g} \downarrow$. b) $0.571 \text{ mg} \uparrow$.
- 16.86** a) $2.50 \text{ g} \downarrow$. b) $0.375 \text{ mg} \uparrow$.
- 16.87** $150.1 \text{ N} \angle 83.2^\circ$.
- 16.88** a) $9.66 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. b) $5.43 \text{ lb} \cdot \text{ft} \uparrow$.
- 16.89** a) $13.50 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. b) $6.79 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$.
- 16.95** 2.55 ft .
- 16.96** $\tan \beta = \mu_s(1 + r^2/\bar{k}^2)$.
- 16.97** a) $2.27 \text{ m o bien } 7.46 \text{ ft}$. b) $0.649 \text{ m o bien } 2.13 \text{ ft}$.

- 16.98** a) rueda sin deslizarse
b) $15.46 \text{ rad/s}^2 \downarrow$, $10.30 \text{ ft/s}^2 \rightarrow$.
- 16.99** a) rueda sin deslizarse
b) $23.2 \text{ rad/s}^2 \downarrow$, $15.46 \text{ ft/s}^2 \rightarrow$.
- 16.100** a) se desliza. b) $4.29 \text{ rad/s}^2 \uparrow$, $9.66 \text{ ft/s}^2 \rightarrow$.
- 16.101** a) se desliza. b) $12.88 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. $3.22 \text{ ft/s}^2 \leftarrow$.
- 16.102** a) $17.78 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. $2.13 \text{ m/s}^2 \rightarrow$. b) 0.122 .
- 16.105** a) $8.89 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. $1.067 \text{ m/s}^2 \leftarrow$. b) 0.165 .
- 16.106** a) $0.556 \text{ g} \downarrow$. b) $1.000 \text{ g} \downarrow$. c) 0 .
- 16.107** a) $1.125 \text{ g} \downarrow$. b) $1.000 \text{ g} \downarrow$. c) $1.333 \text{ g} \downarrow$.
- 16.108** a) $0.765 \text{ g} \downarrow$. b) $1.000 \text{ g} \downarrow$. c) $0.667 \text{ g} \downarrow$.
- 16.109** a) $5.57 \text{ ft/s}^2 \leftarrow$. b) $0.779 \text{ lb.} \leftarrow$.
- 16.110** a) $64.4 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. b) $26.8 \text{ ft/s}^2 \downarrow$.
- 16.111** a) $1.536 P/mr \downarrow$. b) $0.884 P(mg + P)$.
- 16.113** a) $0.1250 \text{ g/r} \downarrow$. $0.1250 \text{ g} \rightarrow$, $0.1250 \text{ g} \downarrow$.
- 16.116** $\mathbf{P} = 16.84 \text{ N} \angle 70.5^\circ$; $\mathbf{M}_P = 0.228 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$.
- 16.117** a) $11.11 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) $37.7 \text{ N} \uparrow$. c) $28.2 \text{ N} \rightarrow$.
- 16.118** a) $97.8 \text{ N} \uparrow$. b) $60.3 \text{ N} \uparrow$.
- 16.119** a) $11.15 \text{ rad/s}^2 \uparrow$. b) $1.155 \text{ lb} \leftarrow$.
- 16.121** a) $12.04 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) $1.795 \text{ lb} \angle 20^\circ$.
- 16.124** $6.40 \text{ N} \leftarrow$.
- 16.125** $171.7 \text{ N} \rightarrow$.
- 16.126** $60.0 \text{ N} \rightarrow$.
- 16.127** $33.0 \text{ lb} \uparrow$.
- 16.128** $2.32 \text{ lb} \downarrow$.
- 16.129** $29.9 \text{ N} \angle 60^\circ$.
- 16.130** $23.5 \text{ N} \angle 60^\circ$.
- 16.133** $0.330 \text{ lb} \leftarrow$.
- 16.134** a) $15.00 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$. b) $120.0 \text{ N} \rightarrow$, $88.2 \text{ N} \uparrow$.
- 16.135** a) $25.0 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow$. b) $190.0 \text{ N} \rightarrow$, $104.9 \text{ N} \uparrow$.
- 16.136** $\mathbf{A} = 1.565 \text{ lb} \uparrow$, $\mathbf{B} = 1.689 \text{ lb} \uparrow$.
- 16.138** $\mathbf{B} = 805 \text{ N} \leftarrow$, $\mathbf{D} = 426 \text{ N} \rightarrow$.
- 16.139** $\mathbf{B} = 525 \text{ N} \angle 38.1^\circ$, $\mathbf{D} = 322 \text{ N} \angle 15.7^\circ$.
- 16.140** $(mv_D^2/L) \tan \theta / \cos^3 \theta$.
- 16.141** a) $9.36 \text{ m/s}^2 \angle 27.1^\circ$. b) $278 \text{ N} \uparrow$.
- 16.142** a) $9.10 \text{ m/s}^2 \angle 81.1^\circ$. b) 6.54 N .
- 16.143** a) $A: 0.400 \text{ g/r} \uparrow$; $B: 0.400 \text{ g/r} \downarrow$. b) 0.200 mg .
c) $0.800 \text{ g} \downarrow$.
- 16.144** a) $18.49 \text{ ft/s}^2 \angle 25^\circ$. b) $8.38 \text{ rad/s}^2 \downarrow$.
- 16.146** a) $13.55 \text{ m/s}^2 \downarrow$. b) $2.34 \text{ m/s}^2 \downarrow$.
- 16.147** a) $6.40 \text{ ft/s}^2 \rightarrow$. b) $45.4 \text{ rad/s}^2 \uparrow$.
- 16.151** $10.39 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ ubicado $20.8 \text{ in. debajo de A}$.
- 16.153** $27.2 \text{ rad/s}^2 \uparrow$.
- 16.156** 20.6 ft .
- 16.157** a) $0.513 \text{ g/L} \downarrow$. b) $0.912 \text{ mg} \uparrow$. c) $0.241 \text{ mg} \rightarrow$.
- 16.159** 1): a) $1.200 \text{ g/c} \downarrow$. b) $0.671 \text{ N} \angle 63.4^\circ$.
2): a) $1.412 \text{ g/c} \downarrow$. b) $0.706 \text{ g} \downarrow$.
3): a) $2.40 \text{ g/c} \downarrow$. b) $0.500 \text{ g} \downarrow$.
- 16.160** a) $0.333 \text{ g} \uparrow$. b) $1.667 \text{ g} \downarrow$.
- 16.161** $23.7 \text{ rad/s}^2 \uparrow$.
- 16.163** a) $51.2 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) $21.0 \text{ N} \uparrow$.
- 16.164** a) $57.8 \text{ rad/s}^2 \downarrow$. b) $20.4 \text{ N} \uparrow$.
- 17.10** a) 2.54 rev . b) 17.86 N .
- 17.11** a) $9.73 \text{ ft/s} \downarrow$. b) 7.65 ft .
- 17.12** $70.1 \text{ lb} \downarrow$.
- 17.13** $80.7 \text{ lb} \downarrow$.
- 17.16** $11.13 \text{ rad/s} \uparrow$.
- 17.17** $3.27 \text{ rad/s} \downarrow$.
- 17.18** a) $1.732\sqrt{gL} \downarrow$, $2.50 \text{ W} \uparrow$. b) $5.67 \text{ rad/s} \downarrow$, $4.50 \text{ lb} \uparrow$.
- 17.20** a) $3.94 \text{ rad/s} \downarrow$, $271 \text{ lb} \angle 5.25^\circ$. b) $5.58 \text{ rad/s} \downarrow$, $701 \text{ lb} \uparrow$.
- 17.24** a) $3.00 \text{ m/s} \rightarrow$. b) $30.0 \text{ N} \leftarrow$.
- 17.25** $1.154\sqrt{gs}$.
- 17.26** \sqrt{gs} .
- 17.27** a) 5.00 rad/s . b) $24.9 \text{ N} \uparrow$.
- 17.28** $0.577\sqrt{g/r}$.
- 17.29** a) $1.324\sqrt{g/r} \uparrow$. b) 2.12 mg .
- 17.30** a) 2.06 ft . b) 4.00 lb .
- 17.33** $0.745 \text{ m/s} \rightarrow$.
- 17.34** $1.000 \text{ m/s} \rightarrow$.
- 17.35** $1.054 \text{ m/s} \rightarrow$.
- 17.36** $3.11 \text{ m/s} \rightarrow$, $1.798 \text{ m/s} \downarrow$.
- 17.37** $4.82 \text{ m/s} \rightarrow$, 0 .
- 17.39** $3.71 \text{ rad/s} \uparrow$, $7.74 \text{ ft/s} \uparrow$.
- 17.40** $0.775\sqrt{g/l} \leftarrow$, $0.775\sqrt{g/l} \angle 60^\circ$.
- 17.42** a) $0.926\sqrt{gL} \leftarrow$. b) $1.225\sqrt{gL} \leftarrow$.
- 17.44** $15.03 \text{ ft/s} \downarrow$.
- 17.45** $84.7 \text{ rpm} \downarrow$.
- 17.46** $110.8 \text{ rpm} \downarrow$.
- 17.47** $0.770 \text{ m/s} \leftarrow$.
- 17.48** a) $21.2 \text{ N} \cdot \text{m}$. b) $127.3 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 17.50** a) $39.8 \text{ N} \cdot \text{m}$. b) $95.5 \text{ N} \cdot \text{m}$. c) $229 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 17.52** $1.212 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 17.53** 47.4 min .
- 17.54** 2.84 s .
- 17.57** 5.26 s .
- 17.59** 3.88 s .
- 17.60** 5.22 s .
- 17.61** 3.13 s .
- 17.63** $\omega_0(1 + m_A/m_B)$.
- 17.64** a) $686 \text{ rpm} \uparrow$, $514 \text{ rpm} \downarrow$. b) $4.18 \text{ lb} \cdot \text{s} \uparrow$.
- 17.69** a) $r^2 gt \operatorname{sen} \beta / (r^2 + \bar{k}^2) \angle \beta$. b) $\bar{k}^2 \tan \beta / (r^2 + \bar{k}^2)$.
- 17.70** 2.79 ft .
- 17.71** a) $2.55 \text{ m/s} \uparrow$. b) 10.53 N .
- 17.72** a) $27.6 \text{ ft/s} \downarrow$. b) 4.00 lb .
- 17.74** a) $2.12 \text{ m/s} \rightarrow$. b) $0.706 \text{ m/s} \rightarrow$.
- 17.75** a) $0.706 \text{ m/s} \rightarrow$. b) $1.235 \text{ m/s} \rightarrow$.
- 17.77** a) $0.286 r \omega_0 / \mu_k g$. b) $0.286 r \omega_0 \rightarrow$, $0.286 \omega_0 \downarrow$.
- 17.78** a) $2.50 \bar{v}_0 / r$. b) $\bar{v}_0 / \mu_k g$.
- 17.79** 84.2 rpm .
- 17.81** a) 2.54 rad/s . b) 1.902 J .
- 17.82** a) 5.00 rad/s . b) 3.13 rad/s .
- 17.83** 18.07 rad/s .
- 17.84** -24.4 rpm .
- 17.86** disco: 337 rpm ; placa: 23.5 rpm .
- 17.87** 37.2 rpm .
- 17.88** a) 15.00 rad/s . b) 6.14 m/s .
- 17.89** a) 149.2 mm . b) 4.44 rad/s .
- 17.90** 1.136 m/s .
- 17.94** 1.542 m/s .
- 17.95** $2.01 \text{ ft/s} \leftarrow$.
- 17.96** a) $25.2 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $1545 \text{ lb} \rightarrow$.
- 17.97** a) 10.00 in . b) $22.6 \text{ rad/s} \downarrow$.
- 17.98** a) $2.16 \text{ m/s} \rightarrow$. b) $4.87 \text{ kN} \angle 66.9^\circ$.
- 17.99** a) 79.2 mm . b) $1.992 \text{ m/s} \rightarrow$.

CAPÍTULO 17

- 17.1** $87.8 \text{ lb} \cdot \text{ft}$.
- 17.2** 5.230 rev .
- 17.3** 0.760 .
- 17.4** 98.8 mm .
- 17.5** a) 293 rpm . b) 15.92 rev .
- 17.8** 19.77 rev .
- 17.9** a) 6.35 rev . b) 7.14 N .

- 17.100** 242 mm/s \rightarrow .
- 17.101** 302 mm/s \leftarrow .
- 17.102** 14.10 rad/s \uparrow .
- 17.105** $\omega_1/2 \downarrow, L\omega_1/4 \uparrow$.
- 17.106** a) $3v_1/L \downarrow, v_1/2 \downarrow$. b) $3v_1/L \uparrow, v_1/2 \uparrow$. c) $0, v_1 \uparrow$.
- 17.107** $\pi L/3$.
- 17.108** $(2 + 5 \cos \beta)\omega_1/7 \uparrow, (2 + 5 \cos \beta)\bar{v}_1/7 \leftarrow$.
- 17.110** $6v_1 \operatorname{sen} \beta/(1 + 3 \operatorname{sen}^2 \beta)L \downarrow$.
- 17.112** $0.750 v_0/L \downarrow, 0.910 v_0 \nearrow 74.1^\circ$.
- 17.113** $0.706 v_0/L \downarrow, 0.949 v_0 \nearrow 87.9^\circ$.
- 17.114** 0.366.
- 17.115** 8.80 ft/s.
- 17.116** 5.12° .
- 17.117** 55.9°.
- 17.120** a) 2.86 in. b) 2.05 in.
- 17.121** a) $3.85 \text{ ft/s} \downarrow$. b) $5.13 \text{ rad/s} \downarrow$.
- 17.122** a) 0.256 ft/s .
- 17.123** $0.650\sqrt{gL} \rightarrow$.
- 17.124** $0.866\sqrt{gL} \rightarrow$.
- 17.125** 725 mm.
- 17.126** 447 mm.
- 17.128** a) $2.60 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $1.635 \text{ m/s} \nwarrow 53.4^\circ$.
- 17.131** a) $\mathbf{v}_A = 0, \boldsymbol{\omega}_A = v_1/r \downarrow; \mathbf{v}_B = v_1 \rightarrow; \boldsymbol{\omega}_B = 0$.
b) $\mathbf{v}'_A = 2v_1/7; \mathbf{v}'_B = 5v_1/7$.
- 17.132** $1.25 v_0/r$.
- 17.133** a) $\mathbf{v}_A = (v_0 \operatorname{sen} \theta) \mathbf{j}, \mathbf{v}_B = (v_0 \cos \theta) \mathbf{i}, \boldsymbol{\omega}_A = v_0 (-\operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \gamma, \boldsymbol{\omega}_B = 0$. b) $\mathbf{v}'_B = (5 v_0 \cos \theta/7) \mathbf{i}$.
- 17.134** $\boldsymbol{\omega}_{AB} = 2.65 \text{ rad/s} \downarrow, \boldsymbol{\omega}_{BC} = 13.25 \text{ rad/s} \uparrow$.
- 17.135** $\mathbf{A} = 100.1 \text{ N} \uparrow, \mathbf{B} = 43.9 \text{ N} \rightarrow$.
- 17.136** a) 118.7 rev. b) 7.16 s.
- 17.138** a) 53.1° . b) $1.095\sqrt{gL} \nwarrow 53.1^\circ$.
- 17.139** $7.83 \text{ N} \rightarrow, 7.35 \text{ N} \uparrow$.
- 17.141** a) $1.500 v_1/b \downarrow$. b) $0.791 v_1 \nearrow 18.4^\circ$.
- 17.143** a) $4.81 \text{ rad/s} \downarrow$. b) $6.81 \text{ rad/s} \downarrow$.
- 17.145** 0.400 r
- 17.146** a) $1.286 \text{ rad/s} \uparrow$. b) $0.719 \text{ lb} \rightarrow, 1.006 \text{ lb} \uparrow$.
- 18.1** $0.357 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}; \theta_x = 48.6^\circ, \theta_y = 41.4^\circ, \theta_z = 90^\circ$.
- 18.2** $0.250 mr^2\omega_2 \mathbf{j} + 0.500 mr^2\omega_1 \mathbf{k}$.
- 18.3** $(ma^2\omega/12)(3 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k})$.
- 18.4** 11.88° .
- 18.7** a) $0.276 ma^2\omega$. b) 25.2° .
- 18.8** a) $0.432 ma^2\omega$. b) 20.2° .
- 18.9** $-(1.747 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{i} + (3.59 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{j} + (0.0582 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{k}$.
- 18.10** $(1.848 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{i} - (0.455 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{j} + (1.118 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{k}$.
- 18.11** a) 2.91 rad/s . b) 0.0551 rad/s .
- 18.12** $(0.320 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{i} - (0.009 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{j} - (467 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{k}$.
- 18.15** a) $mr^2\omega (0.379 \mathbf{i} - 0.483 \mathbf{j})$. b) 51.9° .
- 18.16** a) $(0.063 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{i} + (0.216 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{j}$.
b) $-(0.513 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{i} + (0.216 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{j}$.
- 18.19** a) $-(1.041 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{i} + (1.041 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{j} + (2.31 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{k}$. b) 147.5° .
- 18.20** a) $-(1.041 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{i} - (1.041 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{j} + (2.31 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{k}$. b) 32.5° .
- 18.21** 226 lb.
- 18.22** 2.66 s.
- 18.23** a) $-(0.300 \text{ m/s}) \mathbf{k}$. b) $-(0.962 \text{ rad/s}) \mathbf{i} - (0.577 \text{ m/s}) \mathbf{j}$.
- 18.24** a) $(0.300 \text{ m/s}) \mathbf{j}$.
b) $-(3.46 \text{ rad/s}) \mathbf{i} + (1.923 \text{ rad/s}) \mathbf{j} - (0.857 \text{ rad/s}) \mathbf{k}$.
- 18.25** a) $(F\Delta t/m) \mathbf{i}$. b) $(F\Delta t/m)(-1.714 \mathbf{j} + 8.57 \mathbf{k})$.
- 18.26** a) $(F\Delta t/m) \mathbf{i}$. b) $(F\Delta t/m)(3.43 \mathbf{j} - 5.14 \mathbf{k})$.
- 18.29** a) $0.125 \omega_0 (-\mathbf{i} + \mathbf{j})$. b) $0.0884 a\omega_0 \mathbf{k}$.
- 18.30** a) $0.1031 ma\omega_0 \mathbf{k}$. b) $-0.01473 ma\omega_0 \mathbf{k}$.
- 18.31** $(0.429 \bar{v}_0/c) \mathbf{i} + (0.429 \bar{v}_0/a) \mathbf{k}$.
- 18.32** a) $-(6 \bar{v}_0/7) \mathbf{j}$. b) $(m\bar{v}_0/7) \mathbf{j}$.
- 18.33** a) $C y B$. b) $C: 8.16 \text{ s}, D: 4.84 \text{ s}$. c) 0.520 s .
- 18.34** a) $D y A$. b) $D: 6.82 \text{ s}, A: 1.848 \text{ s}$. c) 0.347 s .
- 18.39** 1.417 J .
- 18.40** $0.1250 mr^2(\omega_2^2 + 2\omega_1^2)$.
- 18.41** $0.1250 ma^2\omega^2$.
- 18.42** $0.228 mr^2\omega^2$.
- 18.43** $0.1896 mr^2\omega^2$.
- 18.44** 1.296 J .
- 18.47** $13.34 \text{ ft} \cdot \text{lb}$.
- 18.48** $12.67 \text{ ft} \cdot \text{lb}$.
- 18.49** $0.1250 ma^2\omega^2$.
- 18.50** $0.203 ma^2\omega^2$.
- 18.53** $16.75 \text{ ft} \cdot \text{lb}$.
- 18.54** $39.9 \text{ ft} \cdot \text{lb}$.
- 18.55** $(3.21 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{k}$.
- 18.56** $0.500 mr^2\omega_1\omega_2 \mathbf{i}$.
- 18.57** $0.1667 ma^2\omega^2 \mathbf{i}$.
- 18.58** $-0.958 mr^2\omega^2 \mathbf{k}$.
- 18.59** $(2.91 \text{ lb} \cdot \text{ft}) \mathbf{i}$.
- 18.61** $(1.890 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{i} + (2.14 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{j} + (3.21 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{k}$.
- 18.62** $-(1.890 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{i} - (2.14 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{j} + (3.21 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{k}$.
- 18.65** $\mathbf{A} = -(12.00 \text{ N}) \mathbf{i}, \mathbf{B} = -(4.00 \text{ N}) \mathbf{i}$.
- 18.66** $\mathbf{C} = \frac{1}{6} mb\omega^2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta \mathbf{i}$,
 $\mathbf{D} = -\frac{1}{6} mb\omega^2 \operatorname{sen} \beta \cos \beta \mathbf{i}$.
- 18.67** $\mathbf{A} = (3.35 \text{ lb}) \mathbf{k}, \mathbf{B} = -(3.35 \text{ lb}) \mathbf{k}$.
- 18.68** $\mathbf{A} = -(1.103 \text{ lb}) \mathbf{j} - (0.920 \text{ lb}) \mathbf{k}$,
 $\mathbf{B} = (1.103 \text{ lb}) \mathbf{j} + (0.920 \text{ lb}) \mathbf{k}$.
- 18.71** a) $(20.0 \text{ rad/s}^2) \mathbf{k}$. b) $\mathbf{A} = -(3.75 \text{ N}) \mathbf{k}, \mathbf{B} = -(1.250 \text{ N}) \mathbf{k}$.
- 18.72** a) $(3 M_0/m b^2 \cos^2 \beta) \mathbf{j}$.
b) $\mathbf{C} = (M_0 \tan \beta/2b) \mathbf{k}, \mathbf{D} = -(M_0 \tan \beta/2b) \mathbf{k}$.
- 18.75** a) $(2.33 \text{ lb} \cdot \text{ft}) \mathbf{i}$.
b) $\mathbf{A} = (0.466 \text{ lb}) \mathbf{j}, \mathbf{B} = -(0.466 \text{ lb}) \mathbf{j}$.
- 18.76** a) $(0.873 \text{ lb} \cdot \text{ft}) \mathbf{i}$.
b) $\mathbf{A} = -(0.218 \text{ lb}) \mathbf{j} + (0.262 \text{ lb}) \mathbf{k}$,
 $\mathbf{B} = (0.218 \text{ lb}) \mathbf{j} - (0.262 \text{ lb}) \mathbf{k}$.
- 18.77** a) $(0.1301 \text{ lb} \cdot \text{ft}) \mathbf{i}$. b) $\mathbf{A} = -(0.0331 \text{ lb}) \mathbf{j} + (0.0331 \text{ lb}) \mathbf{k}$,
 $\mathbf{B} = (0.0331 \text{ lb}) \mathbf{j} - (0.0331 \text{ lb}) \mathbf{k}$.
- 18.78** $\mathbf{A} = -(0.444 \text{ lb}) \mathbf{j} - (0.383 \text{ lb}) \mathbf{k}$,
 $\mathbf{B} = (0.444 \text{ lb}) \mathbf{j} + (0.383 \text{ lb}) \mathbf{k}$.
- 18.79** a) $10.47 \text{ N} \cdot \text{m}$. b) $10.47 \text{ N} \cdot \text{m}$.
- 18.80** 4.29 kN · m.
- 18.81** $-(0.457 \text{ lb} \cdot \text{ft}) \mathbf{i}$.
- 18.83** 24.0 N.
- 18.84** $1.138^\circ \downarrow$. El punto A ascenderá.
- 18.85** a) 38.1° . b) 11.78 rad/s .
- 18.86** 13.46 rad/s .
- 18.87** a) 53.6° . b) 8.79 rad/s .
- 18.88** $\omega = 10 \cdot 20 \text{ rad/s}$.
- 18.89** 5.45 rad/s.
- 18.90** $2.11 \text{ N} \nearrow 18.7^\circ$.
- 18.93** a) $\mathbf{C} = -(123.4 \text{ N}) \mathbf{i}, \mathbf{D} = (123.4 \text{ N}) \mathbf{i}$.
b) $\mathbf{C} = \mathbf{D} = 0$.
- 18.94** 91.2 rpm.
- 18.95** $\mathbf{A} = (0.1906 \text{ lb}) \mathbf{k}, \mathbf{B} = -(0.1906 \text{ lb}) \mathbf{k}$.
- 18.96** 7.87 rad/s

CAPÍTULO 18

- 18.1** $0.357 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}; \theta_x = 48.6^\circ, \theta_y = 41.4^\circ, \theta_z = 90^\circ$.
- 18.2** $0.250 mr^2\omega_2 \mathbf{j} + 0.500 mr^2\omega_1 \mathbf{k}$.
- 18.3** $(ma^2\omega/12)(3 \mathbf{j} + 2 \mathbf{k})$.
- 18.4** 11.88° .
- 18.7** a) $0.276 ma^2\omega$. b) 25.2° .
- 18.8** a) $0.432 ma^2\omega$. b) 20.2° .
- 18.9** $-(1.747 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{i} + (3.59 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{j} + (0.0582 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{k}$.
- 18.10** $(1.848 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{i} - (0.455 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{j} + (1.118 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{k}$.
- 18.11** a) 2.91 rad/s . b) 0.0551 rad/s .
- 18.12** $(0.320 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{i} - (0.009 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{j} - (467 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{k}$.
- 18.15** a) $mr^2\omega (0.379 \mathbf{i} - 0.483 \mathbf{j})$. b) 51.9° .
- 18.16** a) $(0.063 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{i} + (0.216 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{j}$.
b) $-(0.513 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{i} + (0.216 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}) \mathbf{j}$.
- 18.19** a) $-(1.041 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{i} + (1.041 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{j} + (2.31 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{k}$. b) 147.5° .
- 18.20** a) $-(1.041 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{i} - (1.041 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{j} + (2.31 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}) \mathbf{k}$. b) 32.5° .
- 18.21** 226 lb.
- 18.22** 2.66 s.
- 18.23** a) $-(0.300 \text{ m/s}) \mathbf{k}$. b) $-(0.962 \text{ rad/s}) \mathbf{i} - (0.577 \text{ m/s}) \mathbf{j}$.
- 18.24** a) $(0.300 \text{ m/s}) \mathbf{j}$.
b) $-(3.46 \text{ rad/s}) \mathbf{i} + (1.923 \text{ rad/s}) \mathbf{j} - (0.857 \text{ rad/s}) \mathbf{k}$.
- 18.25** a) $(F\Delta t/m) \mathbf{i}$. b) $(F\Delta t/m)(-1.714 \mathbf{j} + 8.57 \mathbf{k})$.

- 18.99** $(11.23 \text{ N} \cdot \text{m}) \cos^2 \theta \mathbf{i} + (11.23 \text{ N} \cdot \text{m}) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \mathbf{j} - (2.81 \text{ N} \cdot \text{m}) \operatorname{sen} \theta \cos \theta \mathbf{k}$.
- 18.101** $\mathbf{C} = -(89.8 \text{ N})\mathbf{i} + (52.8 \text{ N})\mathbf{k}$,
 $\mathbf{D} = -(89.8 \text{ N})\mathbf{i} - (52.8 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 18.102** a) $(0.1962 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$ b) $\mathbf{C} = -(48.6 \text{ N})\mathbf{i} + (38.9 \text{ N})\mathbf{k}$,
 $\mathbf{D} = -(48.6 \text{ N})\mathbf{i} - (38.9 \text{ N})\mathbf{k}$.
- 18.103** a) $-(5.39 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j}$. b) $\mathbf{A} = -(11.65 \text{ lb})\mathbf{i} + (3.49 \text{ lb})\mathbf{k}$,
 $\mathbf{M}_A = (5.53 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i} + (8.73 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$.
- 18.104** a) $(1.382 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i}$. b) $\mathbf{D} = -(6.70 \text{ lb})\mathbf{j} + (4.89 \text{ lb})\mathbf{k}$,
 $\mathbf{E} = -(1.403 \text{ lb})\mathbf{j} + (4.89 \text{ lb})\mathbf{k}$.
- 18.107** 299 rpm.
- 18.108** 55.3° .
- 18.109** 1666 rpm.
- 18.111** 45.9 rpm, 533 rpm.
- 18.113** 23.7° .
- 18.114** a) 52.7 rad/s . b) 6.44 rad/s .
- 18.115** a) 40.0° . b) 23.5° . c) 85.3° .
- 18.116** a) 56.1 rad/s . b) 5.30 rad/s .
- 18.125** a) $\theta_x = 52.5^\circ$, $\theta_y = 37.5^\circ$, $\theta_z = 90^\circ$.
b) 53.8 rev/h . c) 6.68 rev/h .
- 18.126** a) $\theta_x = 90^\circ$, $\theta_y = 17.65^\circ$, $\theta_z = 72.35^\circ$.
b) 44.8 rev/h . c) 6.68 rev/h .
- 18.129** a) 13.19° . b) 1 242 rpm (retrógrada).
- 18.130** a) 109.4 rpm ; $\gamma_x = 90^\circ$, $\gamma_y = 100.05^\circ$, $\gamma_z = 10.05^\circ$.
b) $\theta_x = 90^\circ$, $\theta_y = 113.9^\circ$, $\theta_z = 23.9^\circ$.
c) precesión: 47.1 rpm; giro: 64.6 rpm.
- 18.131** a) 4.00 rad/s . b) 5.66 rad/s .
- 18.132** a) $\theta_0 \leq \theta \leq 180^\circ - \theta_0$.
b) $\dot{\theta}_{\max} = \dot{\phi}_0 \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0$ c) $\dot{\phi}_{\min} = \dot{\phi}_0 \operatorname{sen}^2 \theta_0$
- 18.133** a) $30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$. b) $\dot{\phi}_{\min} = 2.40 \text{ rad/s}$.
e) $\dot{\theta}_{\max} = 3.29 \text{ rad/s}$.
- 18.134** a) $\dot{\phi}_{\min} = 1.200 \text{ rad/s}$. b) $\dot{\theta}_{\max} = 2.68 \text{ rad/s}$.
- 18.137** a) 44.1° . b) $\dot{\phi} = -8.72 \text{ rad/s}$, $\psi = 56.3 \text{ rad/s}$.
- 18.138** a) 32.7 rad/s . b) $\varphi = -13.33 \text{ rad/s}$, $\psi = 44.3 \text{ rad/s}$.
- 18.140** a) $\frac{1}{2}I'(\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta)^2 + \frac{1}{2}I'\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\omega_z^2 + mge \cos \theta = E$.
- 18.147** $(0.234 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{j} + (1.250 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.
- 18.148** a) $-(1.098 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s})\mathbf{i} + (1.098 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s})\mathbf{j} + (2.74 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s})\mathbf{k}$.
b) 150.5° .
- 18.150** a) $-\frac{1}{6}\omega_0\mathbf{i} + \frac{1}{6}\omega_0\mathbf{j}$. b) $\frac{1}{6}\omega_0\mathbf{a}\mathbf{k}$.
- 18.151** $\frac{5}{48}ma^2\omega_0^2$.
- 18.153** a) 52.1 rad/s^2 . b) $\mathbf{A} = -(2.50 \text{ N})\mathbf{i}$, $\mathbf{B} = (2.50 \text{ N})\mathbf{i}$.
- 18.154** a) 53.4° . b) 9.27 rad/s .
- 18.155** a) $(2.71 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j}$. b) $\mathbf{F} = -(5.30 \text{ lb})\mathbf{i} - (1.988 \text{ lb})\mathbf{k}$;
 $\mathbf{M}_0 = (2.69 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i} - (4.42 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$.
- 18.156** a) $\mathbf{A} = (1.786 \text{ kN})\mathbf{i} + (143.5 \text{ kN})\mathbf{j}$;
 $\mathbf{B} = -(1.786 \text{ kN})\mathbf{i} + (150.8 \text{ kN})\mathbf{j}$. b) $-(35.7 \text{ kN} \cdot \text{m})\mathbf{k}$.
- 18.157** 1 326 rpm.

CAPÍTULO 19

- 19.1** 1.047 ft/s , 65.8 ft/s^2 .
- 19.2** 0.950 mm , 239 mm/s .
- 19.3** 1.225 m/s , 0.650 Hz .
- 19.4** a) 0.391 s , 2.55 Hz . b) 2.81 ft/s , 45.1 ft/s^2 .
- 19.5** a) 0.324 s , 3.08 Hz . b) 12.91 mm , 484 m/s^2 .
- 19.6** a) 10.75° . b) 6.04 ft/s^2 .
- 19.7** a) 0.557 Hz . b) 293 mm/s .
- 19.9** a) 3.14 s . b) 6.40 m . c) 38.7° .
- 19.11** a) 5.49 m . b) $80.5 \text{ m/s}^2 \downarrow$.
- 19.12** a) 0.0352 s . b) $6.34 \text{ ft/s} \uparrow$, $64.9 \text{ ft/s}^2 \downarrow$.
- 19.13** $0.445 \text{ ft} \uparrow$, $2.27 \text{ ft/s} \downarrow$, $114.7 \text{ ft/s}^2 \downarrow$.
- 19.14** a) 3.89° . b) 0.1538 m/s , 0.666 m/s^2 .
- 19.17** a) 0.208 s , 4.81 Hz . b) 1.361 m/s , 41.1 m/s^2 .
- 19.18** a) 0.416 s , 2.41 Hz . b) 0.680 m/s , 10.29 m/s^2 .
- 19.19** a) 0.361 s , 2.77 Hz . b) 2.54 ft/s , 441 ft/s^2 .
- 19.20** 2.63 s .
- 19.23** a) 6.82 lb . b) 33.4 lb/ft .
- 19.24** a) 6.80 kg . b) 0.583 s .
- 19.25** a) 35.6 lb/in . b) 5.01 lb .
- 19.26** 192.0 lb/ft .
- 19.27** a) 22.3 MN/m . b) 266 Hz .
- 19.30** a) 55.4 mm . b) 1.497 Hz .
- 19.34** 16.3° .
- 19.35** a) 1.737 s . b) 1.864 s . c) 2.05 s .
- 19.36** 28.1 in .
- 19.37** a) 3.36 Hz . b) 42.6 mm .
- 19.38** a) 0.315 s . b) 0.665 ft/s .
- 19.39** a) 0.1957 s . b) 171.7 ft/s^2 .
- 19.40** a) 0.491 s . b) 9.60 in./s .
- 19.43** a) 1.117 rad/s . b) 400 mm .
- 19.44** a) 2.28 s . b) 1.294 m .
- 19.45** 75.5° .
- 19.46** 0.379 Hz .
- 19.47** a) 1.067 s . b) 89.7 mm .
- 19.49** a) 0.933 s . b) 0.835 s .
- 19.50** a) 1.617 s . b) 1.676 s .
- 19.55** a) 2.21 Hz . b) 115.3 N/m .
- 19.56** 3.03 Hz .
- 19.57** 0.945 Hz .
- 19.58** $0.276 \sqrt{k/m - g/4L}$.
- 19.59** a) 88.1 mm/s . b) 85.1 mm/s .
- 19.61** 82.1 mm/s .
- 19.63** a) 21.3 kg . b) 1.838 s .
- 19.64** a) 0.826 s . b) 1.048 s .
- 19.65** a) 1.951 s . b) 1.752 m/s .
- 19.66** $4.86 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$.
- 19.69** $2\pi\sqrt{l/g}$.
- 19.70** 3.18 s .
- 19.71** 1.476 m/s , 31.1 m/s^2 .
- 19.72** 1.379 in. , 888 in./s^2 .
- 19.73** 0.289 l .
- 19.76** 130.6 mm .
- 19.77** $0.276 \sqrt{k/m - g/4L}$.
- 19.78** a) 0.715 s . b) 0.293 ft/s .
- 19.79** 2.10 Hz .
- 19.80** 0.387 s .
- 19.83** 1.834 s .
- 19.84** $0.1899 \sqrt{g/l}$.
- 19.85** 1.327 s .
- 19.88** 2.39 s .
- 19.89** $2\pi\sqrt{2m/3k}$.
- 19.90** 0.911 Hz .
- 19.91** a) $0.1592\sqrt{(g/l)(ka^2/\omega l - 1)}$. b) $\sqrt{\omega l/k}$.
- 19.92** 6.64 lb .
- 19.94** 0.742 Hz .
- 19.96** $(2\pi/\cos \beta) \sqrt{m/6k}$.
- 19.97** a) 0.352 s . b) 0.352 s .
- 19.98** $1.814 \text{ l}/\sqrt{gr}$.
- 19.99** 11.40 N .
- 19.100** a) 0.1304 ft (en fase). b) 1.464 ft (fuera de fase).
- 19.101** a) 10.99 lb/ft . b) 2.99 lb/ft .

- 19.102** $\sqrt{k/2m} < \omega_f < \sqrt{3k/2m}$.
- 19.105** $\omega_f < 8.16$ rad/s.
- 19.106** 22.5 mm, 5.63 mm.
- 19.107** $\omega_f < 9.83$ rad/s. y $\omega_f > 17.02$ rad/s.
- 19.108** 651 rpm.
- 19.109** a) 90.0 mm. b) 18.00 N.
- 19.112** a) 25.2 mm. b) $-0.437 \operatorname{sen}(\pi t)$ N.
- 19.113** Demuestre . . .
- 19.114** 22.0 mm.
- 19.115** $\omega_f \leq 322$ rpm y $\omega_f \geq 329$ rpm.
- 19.116** 783 rpm.
- 19.118** 39.1 kg
- 19.120** $\omega_f \leq 254$ rpm and $\omega_f \geq 303$ rpm.
- 19.121** a) 4.17%. b) 84.9 Hz.
- 19.122** 8.04%.
- 19.123** 1) $|1/(1 - \omega_f^2/\omega_n^2)|$; (2) $|1/(1 - \omega_f^2/\omega_n^2)|$.
- 19.124** a) 1 399 rpm. b) 0.01669 in.
- 19.132** a) 0.01393. b) 0.0417 lb · s/ft.
- 19.133** a) 6.49 kip · s/ft. b) 230 kips/ft.
- 19.134** 56.9 mm.
- 19.136** a) 6 490 lb/ft. b) 0.1939 s.
- 19.137** a) $\ddot{\theta} + (3 c/m) \dot{\theta} + (3k/4m) \theta = 0$. b) $\sqrt{km/3}$.
- 19.139** 0.0725 in.
- 19.141** $c/c_c \geq 0.707$.
- 19.143** a) 0.0905. b) 366 N · s/m.
- 19.144** a) -0.324 mm. b) 0.0884 mm.
- 19.145** 13.01 mm.
- 19.146** a) 2 210 kN/m. b) 0.0286.
- 19.147** 134.8 mm, 143.7 N.
- 19.149** a) 16.18 lb. b) 8.18 lb.
- 19.151** a) $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = \delta_m (k \operatorname{sen} \omega_f t + c \omega_f \cos \omega_f t)$
donde $\omega_f = 2\pi\nu/L$.
b) $\delta_m \sqrt{k^2 + (c\omega_f)^2} / \sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}$.
- 19.153** $R < 2\sqrt{LC}$.
- 19.154** a) E/R b) L/R
- 19.155** Trace . . .
- 19.156** Trace . . .
- 19.157** a) $kx_A + c \frac{d}{dt}(x_A - x_m) = 0$,
 $m \frac{d^2x_m}{dt^2} + c \frac{d}{dt}(x_m - x_A) = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$.
b) $\frac{1}{C} q_A + R \frac{d}{dt}(q_A - q_m) = 0$,
 $L \frac{d^2q_m}{dt^2} + R \frac{d}{dt}(q_m - q_A) = E_m \operatorname{sen} \omega_f t$.
- 19.158** a) $m \frac{d^2x_m}{dt^2} + k_2(x_m - x_A) = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$.
 $C \frac{dx_A}{dt} + k_1 x_A + k_2(x_A + x_m) = 0$.
b) $L \frac{d^2q_m}{dt^2} + \frac{1}{C_2}(q_m - q_A) = E_m \operatorname{sen} \omega_f t$.
 $R \frac{dq_A}{dt} + \frac{1}{C_1} q_A + \frac{1}{C_2}(q_A - q_m) = 0$.
- 19.159** a) $2\pi\sqrt{2a/3g}$. b) 0.1667 a.
- 19.161** 1.785 s.
- 19.163** a) 6.16 Hz, 4.91 mm, 0.1900 m/s. b) 4.91 N, c) 0.1542 m/s ↓.
- 19.164** a) 0.316 L. b) $0.200\sqrt{g/L}$.
- 19.166** 1.456 m.
- 19.169** a) 5.75 N. b) 0.00710 mm.
- 19.170** a) $m\ddot{x} + 4Tx/l = 0$ b) $\pi\sqrt{ml/T}$.

Prefijos del SI

Factor multiplicativo	Prefijo	Símbolo
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	tera	T
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$	giga	G
$1\ 000\ 000 = 10^6$	mega	M
$1\ 000 = 10^3$	kilo	k
$100 = 10^2$	hecto [†]	h
$10 = 10^1$	deca [†]	da
$0.1 = 10^{-1}$	deci [†]	d
$0.01 = 10^{-2}$	centi [†]	c
$0.001 = 10^{-3}$	milí	m
$0.000\ 001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0.\ 000\ 000\ 001 = 10^{-9}$	nano	n
$0.000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$	pico	p
$0.000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-15}$	femto	f
$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-18}$	ato	a

[†] Debe evitarse el uso de estos prefijos, excepto en las medidas de áreas y volúmenes y para el uso no técnico del centímetro, como en las medidas referentes a la ropa y al cuerpo.

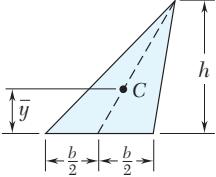
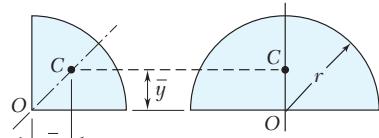
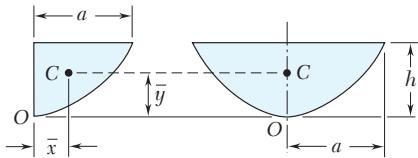
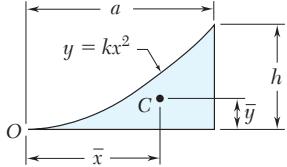
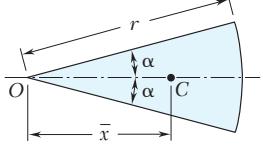
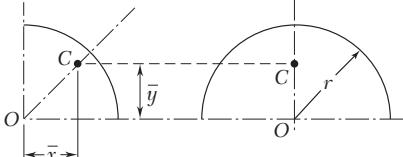
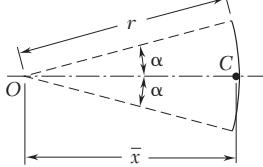
Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	...	m/s^2
Ángulo	Radián	rad	[†]
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	...	rad/s^2
Velocidad angular	Radián por segundo	...	rad/s
Área	Metro cuadrado	...	m^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	...	kg/m^3
Energía	Joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$
Fuerza	Newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	...	$\text{kg} \cdot \text{m/s}$
Longitud	Metro	m	[‡]
Masa	Kilogramo	kg	[‡]
Momento de una fuerza	Newton-metro	...	$\text{N} \cdot \text{m}$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	Segundo	s	[‡]
Velocidad	Metro por segundo	...	m/s
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	...	m^3
Líquidos	Litro	L	10^{-3} m^3
Trabajo	Joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$

[†] Unidad suplementaria (1 revolución = 2π rad = 360°).

[‡] Unidad básica.

Centroides de áreas y líneas comunes

Forma		\bar{x}	\bar{y}	Área
Área triangular		$(1/3(a+b))$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
			$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Área semicircular		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
			$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Tímpano parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Sector circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de un círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

**Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalencias
en unidades del SI**

Cantidad	Unidades de uso común en Estados Unidos	Equivalente del SI
Aceleración	ft/s ² in./s ²	0.3048 m/s ² 0.0254 m/s ²
Área	ft ² in. ²	0.0929 m ² 645.2 mm ²
Energía	ft · lb	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	lb · s	4.448 N · s
Longitud	ft	0.3048 m
	in.	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	ton	907.2 kg
Momento de una fuerza	lb · ft	1.356 N · m
	lb · in.	0.1130 N · m
Momento de inercia		
de un área	in. ⁴	0.4162 × 10 ⁶ mm ⁴
de una masa	lb · ft · s ²	1.356 kg · m ²
Cantidad de movimiento	lb · s	4.448 kg · m/s
Potencia	ft · lb/s	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o esfuerzo	lb/ft ²	47.88 Pa
	lb/in. ² (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in./s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen	ft ³	0.02832 m ³
	in. ³	16.39 cm ³
Líquidos	gal	3.785 L
	qt	0.9464 L
Trabajo	ft · lb	1.356 J