Trabajo práctico: unidad 6

Probabilidad y estadística

Martín Rossi

1.

X_i : 'resultado en la apuesta i' para $i = 1...50$ con distribuciones:
$P_{X_i}(5c) = 0.1$
$P_{X_i}(-c) = 0.9$
Entonces para $i = 1...50$:
$E(X_i) = 5c * 0.1 + (-c) * 0.9 = -0.4c$
$E(X_i^2) = (5c)^2 * 0.1 + (-c)^2 * 0.9 = 25c^2 * 0.1 + c^2 * 0.9 = 3.4c^2$
$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = 3.4c^2 - (-0.4c)^2 = 3.4c^2 - 0.16c^2 = 3.24c^2$

Ahora defino la variable aleatoria:
$S = X_1 + X_2 + ... + X_{50}$
Lo que hay que calcular es $P(S \geq 0)$.

Como las X_i son independientes, por el teorema central del límite S es aproximadamente normal y sus parámetros son:
$\mu = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_{50}) = 50 * (-0.4c) = -20c$
$\sigma = \sqrt{V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_{50})} = \sqrt{50 * 3.24c^2} = 12.7279c$

Si defino $Z = \frac{S-\mu}{\sigma} = \frac{S+20c}{12.7279c}, Z \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned} P(S \geq 0) &= P(\frac{S+20c}{12.7279c} \geq \frac{0+20c}{12.7279c}) \\ &= P(Z \geq 1.5714) \\ &= 1 - P(Z < 1.5714) \\ &\approx 1 - 0.9418 \\ &= 0.0582 \end{aligned}$$

Por lo tanto la probabilidad de que después de 50 apuestas no se pierda dinero es aproximadamente 5.82%.

2.

R : 'longitud del recipiente en cm', $R \sim N(\mu = 65cm, \sigma = 0.5cm)$
A : 'longitud de un bloque tipo A en cm', $A \sim N(\mu = 1.95cm, \sigma = 0.01cm)$
B : 'longitud de un bloque tipo B en cm', $B \sim N(\mu = 0.83cm, \sigma = 0.02cm)$

Y defino las nuevas variables aleatorias:
$S = 20 * A + 30 * B$ (porque un ensamble tiene 20 bloques A y 30 bloques B)
$X = S - R$

Como S es combinación lineal de variables aleatorias independientes con distribución normal, S también es normal con parámetros:
$\mu = 20 * 1.95cm + 30 * 0.83cm = 63.9cm$
$\sigma = \sqrt{20^2 * (0.01cm)^2 + 30^2 * (0.02cm)^2} = \sqrt{0.04cm^2 + 0.36cm^2} = \sqrt{0.4cm^2} = 0.6325cm$

X es una resta de variables aleatorias normales independientes, X también lo es y sus parámetros son:
$\mu = 63.9cm - 65cm = -1.1cm$
$\sigma = \sqrt{(0.6325cm)^2 + (0.5cm)^2} = \sqrt{0.4cm^2 + 0.25cm^2} = \sqrt{0.65cm^2} = 0.8062cm$
Lo que hay que calcular es $P(S \leq R) \iff P(S - R \leq 0) \iff P(X \leq 0)$.

Si ahora defino $Z = \frac{X+1.1cm}{0.8062cm}, Z \sim N(0,1)$.

$$
\begin{aligned}
P_X(X \leq 0) &= P_X(\frac{X + 1.1cm}{0.8062cm} \leq \frac{1.1cm}{0.8062cm}) \\
&= P_Z(Z \leq 1.3644) \qquad \text{(Por la probabilidad de sucesos equivalentes)} \\
&\approx 0.9131
\end{aligned}
$$

El ensamble entrará en el recipiente con una probabilidad de aproximadamente 91.31%.

3.

a.

X \ Y	0	1	2	$P_x(x)$
0	0.25	0.35	0.1	0.7
1	0.15	0.05	0.1	0.3
$P_y(y)$	0.4	0.4	0.2	1

$\mathbf{P_y(Y=2)=0.2}$

$\mathbf{P(X=1,Y=0)=0.15}$

$0.3=E(X)=0*P_x(X=0)+1*P_x(X=1)=P_x(X=1) \iff \mathbf{P_x(X=1)=0.3}$

$1=P_x(X=0)+P_x(X=1)=P_x(X=0)+0.3 \iff \mathbf{P_x(X=0)=0.7}$

$0.8=E(Y)=0*P_y(Y=0)+1*P_y(Y=1)+2*P_y(Y=2)=P_y(Y=1)+2*0.2 \iff \mathbf{P_y(Y=1)=0.4}$

$1=P_y(Y=0)+P_y(Y=1)+P_y(Y=2)=P_y(Y=0)+0.4+0.2 \iff \mathbf{P_y(Y=0)=0.4}$

$0.5=P(Y=1|X=0)=\frac{P(Y=1,X=0)}{P_x(X=0)} \iff \mathbf{P(Y=1,X=0)=0.5*0.7=0.35}$

$0.4=P_y(Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)=0.35+P(X=1,Y=1) \iff \mathbf{P(X=1,Y=1)=0.05}$

$0.4=P_y(Y=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)=P(X=0,Y=0)+0.15 \iff \mathbf{P(X=0,Y=0)=0.25}$

$0.7=P_x(X=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)=0.25+0.35+P(X=0,Y=2) \iff \mathbf{P(X=0,Y=2)=0.1}$

$0.3=P_x(X=1)=P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)=0.15+0.05+P(X=0,Y=2) \iff \mathbf{P(X=0,Y=2)=0.1}$

Verificación de las varianzas:

$0.21=V(X)=E(X^2)-E(X)^2=0.3-0.3^2=0.21$

$0.56=V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=(0.4+4*0.2)-0.8^2=0.56$

b.

Para ver si las variables son independientes se comprueba $P(X = x, Y = y) = P_x(x)P_y(y), \forall x, y$:

$P(X = 0, Y = 0) = 0.25$
$P_x(0)P_y(0) = 0.4 * 0.7 = 0.28$
Por lo tanto las variables no son independientes.

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\
&= \frac{\sum_{(x,y)\in S} P(x,y)(x-0.3)(y-0.8)}{0.3429} && \text{(Covarianza de variables discretas)} \\
&= \frac{0.01}{0.3429} \\
&= 0.02916
\end{aligned}$$

c.

$P(Y = 2|X = 0) = \frac{P(Y=2,X=0)}{P_x(X=0)} = \frac{0.1}{0.7} = 0.1429$

Dado que no hay defectos de tipo D1 en una pieza, hay un 14.29% de probabilidades de que haya 2 defectos de tipo D2 en la misma.

d.

C : 'costo de reparación en una pieza'
$C = 3 * X + 4 * Y$

$$\begin{aligned}
E(C) &= E(3 * X + 4 * Y) \\
&= 3 * E(X) + 4 * E(Y) \qquad (1) \\
&= 3 * 0.3 + 4 * 0.8 \\
&= 4.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(C) &= V(3 * X + 4 * Y) \\
&= 3^2 * V(X) + 4^2 * V(Y) \qquad (2) \\
&= 9 * 0.21 + 16 * 0.56 \\
&= 10.85
\end{aligned}$$

(1)Esperanza de una combinación lineal.
(2)Varianza de una combinación lineal, porque las variables X e Y son independientes.