Trabajo práctico: unidad 6

Probabilidad y estadística

Martín Rossi

1.

X_i : 'beneficio obtenido en la apuesta i' para $i = 1...50$ con distribuciones:
$P_{X_i}(5c) = 0.1$
$P_{X_i}(-c) = 0.9$

Entonces para $i = 1...50$:
$E(X_i) = 5c * 0.1 + (-c) * 0.9 = -0.4c$
$E(X_i^2) = (5c)^2 * 0.1 + (-c)^2 * 0.9 = 25c^2 * 0.1 + c^2 * 0.9 = 3.4c^2$
$V(X_i) = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = 3.4c^2 - (-0.4c)^2 = 3.4c^2 - 0.16c^2 = 3.24c^2$

Ahora defino la variable aleatoria:
$S = X_1 + X_2 + ... + X_{50}$
Lo que hay que calcular es $P(S \geq 0)$.
Como las X_i son independientes y con varianzas finitas, por el teorema central del límite S es aproximadamente normal y sus parámetros son:
$\mu = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_{50}) = 50 * (-0.4c) = -20c$
$\sigma = \sqrt{V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_{50})} = \sqrt{50 * 3.24c^2} = 12.7279c$

Si defino $Z = \frac{S-\mu}{\sigma} = \frac{S+20c}{12.7279c}, Z \sim N(0, 1)$

$$\begin{aligned}
P(S \geq 0) &= P(\frac{S + 20c}{12.7279c} \geq \frac{0 + 20c}{12.7279c}) \\
&= P(Z \geq 1.5714) \\
&= 1 - P(Z < 1.5714) \\
&\approx 1 - 0.9418 \\
&= 0.0582
\end{aligned}$$

Por lo tanto la probabilidad de que después de 50 apuestas no se pierda dinero es aproximadamente 5.82%.

2.

R : 'longitud del recipiente en cm', $R \sim N(\mu = 65, \sigma = 0.5)$
A : 'longitud de un bloque tipo A en cm', $E(A) = 1.95, SD(A) = 0.01$
B : 'longitud de un bloque tipo B en cm', $E(B) = 0.83, SD(B) = 0.02$

Y defino las variables aleatorias:
$S_A = A + A + ... + A$ (20 veces)
$S_B = B + B + ... + B$ (30 veces)
Por el teorema central del límite, como S_A y S_B son suma de variables aleatorias independientes con varianzas finitas, las dos tienen aproximadamente una distribución normal y sus parámetros son:
$E(S_A) = 20 * E(A) = 20 * 1.95 = 39$
$SD(S_A) = +\sqrt{20 * 0.01^2} = 0.0447$

$E(S_B) = 30 * E(B) = 30 * 0.83 = 24.9$
$SD(S_B) = +\sqrt{30 * 0.02^2} = 0.1095$

Ahora defino las nuevas variables aleatorias:
$S = S_A + S_B$
$X = S - R$

Como S es suma de variables aleatorias independientes con distribución aproximadamente normal, por la propiedad reproductiva de la distribución normal S también es aproximadamente normal con parámetros:
$E(S) = 39 + 24.9 = 63.9$
$SD(S) = +\sqrt{0.0447^2 + 0.1095^2} = 0.1183$

X es una resta de variables aleatorias normales independientes, X también lo es y sus parámetros son:
$E(X) = 63.9 - 65 = -1.1$
$SD(X) = \sqrt{0.1183^2 + 0.5^2} = \sqrt{0.014 + 0.25} = 0.5138$
Lo que hay que calcular es $P(S \leq R) \iff P(S - R \leq 0) \iff P(X \leq 0)$.

Si ahora defino $Z = \frac{X+1.1}{0.5138}, Z \sim N(0, 1)$.

$$\begin{aligned} P_X(X \leq 0) &= P_X(\frac{X + 1.1}{0.5138} \leq \frac{1.1}{0.5138}) \\ &= P_Z(Z \leq 2.1409) \qquad \text{(Por la probabilidad de sucesos equivalentes)} \\ &\approx 0.9838 \end{aligned}$$

El ensamble entrará en el recipiente con una probabilidad de aproximadamente 98.38%.

3.

a.

X \ Y	0	1	2	$P_x(x)$
0	0.25	0.35	0.1	0.7
1	0.15	0.05	0.1	0.3
$P_y(y)$	0.4	0.4	0.2	1

$\mathbf{P_y(Y = 2) = 0.2}$

$\mathbf{P(X = 1, Y = 0) = 0.15}$

$0.3 = E(X) = 0 * P_x(X = 0) + 1 * P_x(X = 1) = P_x(X = 1) \iff \mathbf{P_x(X = 1) = 0.3}$

$1 = P_x(X = 0) + P_x(X = 1) = P_x(X = 0) + 0.3 \iff \mathbf{P_x(X = 0) = 0.7}$

$0.8 = E(Y) = 0 * P_y(Y = 0) + 1 * P_y(Y = 1) + 2 * P_y(Y = 2) = P_y(Y = 1) + 2 * 0.2 \iff \mathbf{P_y(Y = 1) = 0.4}$

$1 = P_y(Y = 0) + P_y(Y = 1) + P_y(Y = 2) = P_y(Y = 0) + 0.4 + 0.2 \iff \mathbf{P_y(Y = 0) = 0.4}$

$0.5 = P(Y = 1|X = 0) = \frac{P(Y=1,X=0)}{P_x(X=0)} \iff \mathbf{P(Y = 1, X = 0) = 0.5 * 0.7 = 0.35}$

$0.4 = P_y(Y = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) = 0.35 + P(X = 1, Y = 1) \iff \mathbf{P(X = 1, Y = 1) = 0.05}$

$0.4 = P_y(Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) = P(X = 0, Y = 0) + 0.15 \iff \mathbf{P(X = 0, Y = 0) = 0.25}$

$0.7 = P_x(X = 0) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) = 0.25 + 0.35 + P(X = 0, Y = 2) \iff \mathbf{P(X = 0, Y = 2) = 0.1}$

$0.3 = P_x(X = 1) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 2) = 0.15 + 0.05 + P(X = 0, Y = 2) \iff \mathbf{P(X = 0, Y = 2) = 0.1}$

Verificación de las varianzas:

$0.21 = V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0.3 - 0.3^2 = 0.21$

$0.56 = V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = (0.4 + 4 * 0.2) - 0.8^2 = 0.56$

b.

Para ver si las variables son independientes se comprueba $P(X = x, Y = y) = P_x(x)P_y(y), \forall x, y$:

$P(X = 0, Y = 0) = 0.25$
$P_x(0)P_y(0) = 0.4 * 0.7 = 0.28$
Por lo tanto las variables no son independientes.

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} \\
&= \frac{\sum_{(x,y)\in S} P(x,y)(x-0.3)(y-0.8)}{0.3429} \qquad (1) \\
&= \frac{0.01}{0.3429} \\
&= 0.02916
\end{aligned}$$

(1)$Cov(X,Y) = \sum_{(x,y)\in S} P(x,y)(x - E(X))(y - E(Y))$ para variables discretas.

c.

$P(Y = 2|X = 0) = \frac{P(Y=2, X=0)}{P_x(X=0)} = \frac{0.1}{0.7} = 0.1429$
Dado que no hay defectos de tipo D1 en una pieza, hay un 14.29% de probabilidades de que haya 2 defectos de tipo D2 en la misma.

d.

C : 'costo de reparación en una pieza'
$C = 3 * X + 4 * Y$

$$\begin{aligned}
E(C) &= E(3 * X + 4 * Y) \\
&= 3 * E(X) + 4 * E(Y) && \text{(Esperanza de combinación lineal)} \\
&= 3 * 0.3 + 4 * 0.8 \\
&= 4.1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(C^2) &= E((3 * X + 4 * Y)^2) \\
&= E(9 * X^2 + 24 * X * Y + 16 * Y^2) \\
&= 9 * E(X^2) + 24 * E(X * Y) + 16 * E(Y^2) && \text{(Linealidad de la esperanza)} \\
&= 9 * 0.3 + 24 * E(X * Y) + 16 * 0.8 && \text{(Apartado } \textbf{a.}\text{)} \\
&= 15.5 + 24 * (Cov(X,Y) + E(X) * E(Y)) && \text{(Definción de covarianza)} \\
&= 15.5 + 24 * (0.01 + 0.3 * 0.8) && (Cov(X,Y) = 0.01, \text{ apartado } \textbf{b.}) \\
&= 21.5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V(C) &= E(C^2) - E(C)^2 \\
&= 21.5 - 4.1^2 \\
&= 4.69
\end{aligned}
$$