

- *14.83** La profundidad del agua que fluye en un canal rectangular de ancho b a una rapidez v_1 y a una profundidad d_1 aumenta a una profundidad d_2 , en un *salto hidráulico*. Exprese el gasto Q en términos de b , d_1 y d_2 .



Figura P14.83

- *14.84** Determine el gasto en el canal del problema 14.83, si se sabe que $b = 12$ ft, $d_1 = 4$ ft y $d_2 = 5$ ft.

- 14.85** La grava que se muestra en la figura cae casi con velocidad cero sobre la banda transportadora a una razón constante $q = dm/dt$. a) Determine la magnitud de la fuerza \mathbf{P} requerida para mantener una velocidad constante v en la banda. b) Demuestre que la energía cinética adquirida por la grava en un intervalo de tiempo dado es igual a la mitad del trabajo realizado en ese intervalo por la fuerza \mathbf{P} . Explique qué le sucede a la otra mitad del trabajo realizado por \mathbf{P} .

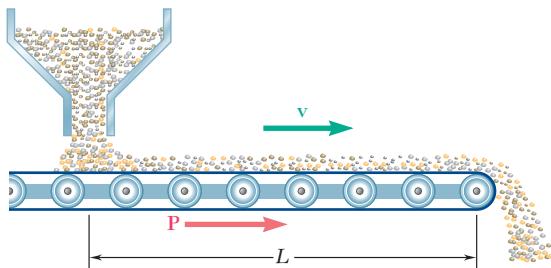


Figura P14.85

- 14.86** Una cadena de longitud l y masa m cae por un pequeño agujero en una placa. Al principio, cuando y es muy pequeña, la cadena está en reposo. En cada caso mostrado, determine a) la aceleración del primer eslabón A como una función de y , b) la velocidad de la cadena cuando el último eslabón pasa por el agujero. En el caso 1 suponga que los eslabones individuales están en reposo hasta que caen por el agujero. En el caso 2 considere que en cualquier instante todos los eslabones tienen la misma rapidez. Desprecie el efecto de la fricción.

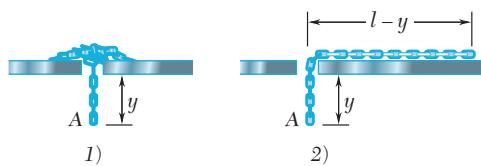


Figura P14.86

- 14.87** Una cadena de longitud l y masa m se encuentra amontonada sobre el piso. Si su extremo A se levanta verticalmente a una rapidez constante v , exprese en términos de la longitud y de la cadena que está fuera del piso en cualquier instante dado a) la magnitud de la fuerza \mathbf{P} aplicada en A, b) la reacción del piso.

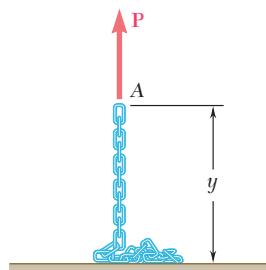


Figura P14.87



Figura P14.89 y P14.90

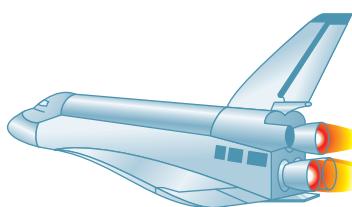


Figura P14.91 y P14.92

14.88 Retome el problema 14.87, y ahora suponga que la cadena se *baja* hacia el suelo a una rapidez constante v .

14.89 Un automóvil de juguete se impulsa mediante agua expulsada desde un tanque interno a una velocidad constante relativa al automóvil de 6 ft/s. El peso del automóvil vacío es de 0.4 lb y puede contener 2 lb de agua. Si se desprecian las demás fuerzas tangenciales, determine la rapidez máxima del automóvil.

14.90 Un automóvil de juguete se impulsa mediante agua expulsada desde un tanque interno. El peso del automóvil vacío es de 0.4 lb y puede contener 2 lb de agua. Si se sabe que la rapidez máxima del automóvil es de 8 ft/s, determine la velocidad relativa del agua que se expulsa desde el tanque interior.

14.91 El principal sistema de propulsión del transbordador espacial consiste en tres motores de cohete idénticos, cada uno de los cuales quema el propelente de hidrógeno-oxígeno a razón de 340 kg/s y lo expulsa a una velocidad relativa de 3 750 m/s. Determine el empuje total que proporcionan los tres motores.

14.92 El principal sistema de propulsión del transbordador espacial consiste en tres motores de cohetes idénticos que proporcionan un empuje total de 6 MN. Determine la razón a la cual cada uno de los tres motores quema el propulsor de hidrógeno-oxígeno, si se sabe que éste se expulsa con una velocidad relativa de 3 750 m/s.

14.93 Un vehículo espacial que describe una órbita circular alrededor de la Tierra a una rapidez de 24×10^3 km/h libera en su extremo frontal una cápsula que tiene masa bruta de 600 kg, incluyendo 400 kg de combustible. Si el combustible se consume a razón de 18 kg/s y se expulsa con una velocidad relativa de 3 000 m/s, determine *a)* la aceleración tangencial de la cápsula cuando se enciende su motor, *b)* la máxima rapidez que alcanza la cápsula.



Figura P14.93



Figura P14.95

14.94 Un cohete tiene una masa de 1 200 kg que incluyen 1 000 kg de combustible, el cual se consume a razón de 12.5 kg/s y se expulsa con una velocidad relativa de 4 000 m/s. Si se sabe que el cohete se lanza verticalmente desde el suelo, determine su aceleración *a)* cuando éste es lanzado, *b)* cuando se consume la última partícula de combustible.

14.95 Un satélite de comunicaciones climatológico con un peso de 10 000 lb, que incluye al combustible, ha sido expulsado de un transbordador espacial que describe una órbita circular baja alrededor de la Tierra. Después de que el satélite se ha alejado lentamente del transbordador hasta una distancia segura, se enciende su motor para incrementar la velocidad en 8 000 ft/s como primer paso en su transferencia a una órbita geosíncrona. Si se sabe que el combustible se expulsa con una velocidad relativa de 13 750 ft/s, determine el peso de combustible consumido en esta maniobra.

14.96 Determine el aumento en la velocidad del satélite del problema 14.95 después de que se han consumido 2 500 lb del combustible.

14.97 Una nave espacial de 540 kg se monta en la parte superior de un cohete de 19 Mg de masa, lo que incluye 17.8 Mg de combustible. Si se sabe que el combustible se consume a razón de 225 kg/s y que se expulsa con una velocidad relativa de 3 600 m/s, determine la rapidez máxima que se imparte a la nave espacial cuando el cohete es lanzado verticalmente desde el suelo.



Figura P14.97



Figura P14.98

14.98 El cohete que se usó para lanzar la nave espacial de 540 kg del problema 14.97 se rediseñó para incluir dos etapas A y B, cada una con una masa de 9.5 Mg, que incluyen 8.9 Mg de combustible. En este caso el combustible también se consume a razón de 225 kg/s y se expulsa con una velocidad relativa de 3 600 m/s. Si se sabe que cuando la etapa A expulsa su última partícula de combustible, su cubierta se desprende y se dispara, determine *a*) la rapidez del cohete en ese instante, *b*) la rapidez máxima que se imparte a la nave espacial.

14.99 Determine la altura alcanzada por la nave espacial del problema 14.97 cuando todo el combustible de su cohete de lanzamiento se ha consumido.

14.100 Para la nave espacial y el cohete de lanzamiento de dos etapas del problema 14.98, determine la altura a la cual *a*) se desprende la etapa A del cohete, *b*) se ha consumido el combustible de ambas etapas.

14.101 En el problema 14.95 determine la distancia que separa al satélite de comunicaciones del transbordador espacial 60 s después de haber encendido el motor, si se sabe que el combustible se consume a una tasa de 37.5 lb/s.

14.102 Para el cohete del problema 14.94, determine *a*) la altura a la cual se ha consumido el combustible, *b*) la velocidad del cohete en ese momento.

14.103 Un avión de propulsión desperdicia la energía cinética impartida a los gases de escape. La potencia útil es igual al producto de la fuerza disponible para impulsarlo y su velocidad. Si v es la rapidez del avión y u es la rapidez relativa de los gases expulsados, muestre que la eficiencia mecánica del avión es $\eta = 2v/(u + v)$. Explique por qué $\eta = 1$ cuando $u = v$.

14.104 En la propulsión de un cohete se desperdicia la energía cinética que se imparte al combustible consumido y expulsado. La potencia útil es igual al producto de la fuerza disponible para impulsarlo y su velocidad. Si v es la rapidez del cohete y u es la rapidez relativa del combustible expulsado, muestre que la eficiencia mecánica del cohete es $\eta = 2uv/(u^2 + v^2)$. Explique por qué $\eta = 1$ cuando $u = v$.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 14

En este capítulo se estudió el movimiento de *sistemas de partículas*, esto es, el movimiento de un gran número de partículas consideradas juntas. En la primera parte del capítulo se consideraron los sistemas compuestos por partículas bien definidas, mientras que en la segunda parte se analizaron sistemas que continuamente ganan o pierden partículas, o ambas cosas al mismo tiempo.

Fuerzas efectivas

Se definió primero la *fuerza efectiva* de una partícula P_i de un sistema dado como el producto $m_i\mathbf{a}_i$ de su masa m_i y su aceleración \mathbf{a}_i con respecto al sistema de referencia newtoniano centrado en O [sección 14.2]. Se mostró después que *el sistema de fuerzas externas que actúan sobre las partículas y el sistema de las fuerzas efectivas de las partículas son equipolentes*; esto es, ambos sistemas tienen la *misma resultante y el mismo momento resultante* alrededor de O :

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i \quad (14.4)$$

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) \quad (14.5)$$

Cantidad de movimiento lineal y angular de un sistema de partículas

Al definir la *cantidad de movimiento lineal \mathbf{L}* y la *cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O* alrededor del punto O del sistema de partículas [sección 14.3] como

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad \mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (14.6, 14.7)$$

se mostró que las ecuaciones (14.4) y (14.5) pueden sustituirse por las ecuaciones

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (14.10, 14.11)$$

que expresa que *la resultante y el momento resultante alrededor de O de las fuerzas externas son, respectivamente, iguales a las tasas de cambio de la cantidad de movimiento lineal y de la cantidad de movimiento angular alrededor de O del sistema de partículas*.

Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas

En la sección 14.4 se definió el centro de masa de un sistema de partículas como el punto G cuyo vector de posición $\bar{\mathbf{r}}$ satisface la ecuación

$$m\bar{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \quad (14.12)$$

donde m representa la masa total $\sum_{i=1}^n m_i$ de las partículas. Al diferenciar dos veces ambos miembros de la ecuación (14.12) con respecto a t , se obtienen las relaciones

$$\mathbf{L} = m\bar{\mathbf{v}} \quad \dot{\mathbf{L}} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (14.14, 14.15)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ y $\bar{\mathbf{a}}$ representan, respectivamente, la velocidad y la aceleración del centro de masa G . Al sustituir $\dot{\mathbf{L}}$ de (14.15) en (14.10), se obtuvo la ecuación

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (14.16)$$

a partir de la cual se concluyó que *el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si la masa total del sistema y todas las fuerzas externas estuvieran concentradas en ese punto* [problema resuelto 14.1].

En la sección 14.5 se consideró el movimiento de la partícula de un sistema con respecto a un sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$ unido al centro de masa G del sistema y en traslación con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$ (figura 14.14). Se definió la *cantidad de movimiento angular* del sistema *alrededor de su centro de masa G* como la suma de los momentos alrededor de G de las cantidades de movimiento $m_i \mathbf{v}_i'$ de las partículas en su movimiento relativo al sistema de referencia $Gx'y'z'$. También se advirtió que el mismo resultado puede obtenerse considerando los momentos alrededor de G de las cantidades de movimiento $m_i \mathbf{v}_i$ de las partículas en su movimiento absoluto. Por lo tanto, se escribió

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i) \quad (14.24)$$

y se dedujo la relación

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (14.23)$$

que expresa que *el momento resultante alrededor de G de las fuerzas externas es igual a la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular alrededor de G del sistema de partículas*. Como se verá después, esta relación es fundamental para el estudio del movimiento de cuerpos rígidos.

Cuando no actúan fuerzas externas sobre un sistema de partículas [sección 14.6] se concluye a partir de las ecuaciones (14.10) y (14.11) que la cantidad de movimiento lineal \mathbf{L} y la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del sistema se conservan [problemas resueltos 14.2 y 14.3]. En los problemas en los que intervienen fuerzas centrales, la cantidad del movimiento angular del sistema alrededor del centro de fuerza O también se conservará.

La energía cinética T de un sistema de partículas se definió como la suma de las energías cinéticas de las partículas [sección 14.7]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \quad (14.28)$$

Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas alrededor de su centro de masa

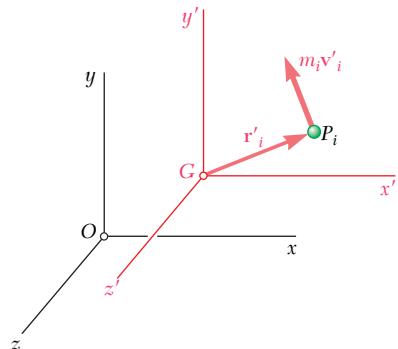


Figura 14.14

Conservación de la cantidad de movimiento

Energía cinética de un sistema de partículas

Principio del trabajo y la energía

Conservación de la energía

Principio del impulso y la cantidad de movimiento

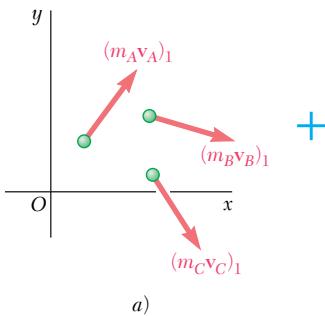


Figura 14.15

Uso de los principios de conservación en la solución de problemas en los que intervienen sistemas de partículas

Utilizando el sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$ de la figura 14.14 se advirtió que la energía cinética del sistema también puede obtenerse al sumar la energía cinética $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ asociado con el movimiento del centro de masa G y la energía cinética del sistema en su movimiento relativo al sistema de referencia $Gx'y'z'$:

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2 \quad (14.29)$$

El *principio del trabajo y la energía* puede aplicarse a un sistema de partículas, así como a partículas individuales [sección 14.8]. Se escribe

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (14.30)$$

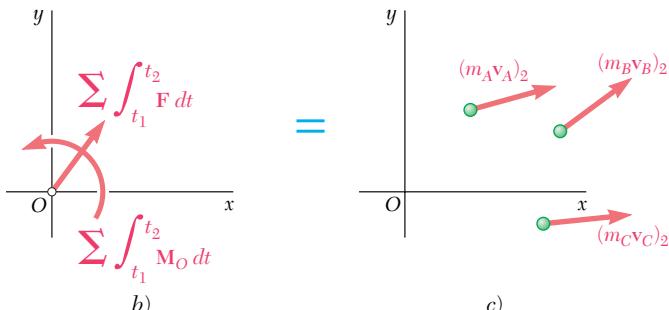
y se señaló que $U_{1 \rightarrow 2}$ representa el trabajo de *todas* las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema, internas y externas.

Si todas las fuerzas que actúan sobre las partículas del sistema son *conservativas*, es posible determinar la energía potencial V del sistema y escribir

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (14.31)$$

que expresa el *principio de conservación de la energía* para un sistema de partículas.

Se vio en la sección 14.9 que el *principio del impulso y la cantidad de movimiento* para un sistema de partículas se expresa gráficamente como se muestra en la figura 14.15. Se establece que las cantidades de movimiento en las partículas en el tiempo t_1 y los impulsos de las fuerzas externas desde t_1 hasta t_2 forman un sistema de vectores equipolentes al sistema de cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo t_2 .



b)

c)

Si ninguna fuerza externa actúa sobre las partículas del sistema, los sistemas de las cantidades de movimiento indicados en los incisos a) y c) de la figura 14.15 son equipolentes y se tiene

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 \quad (\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \quad (14.36, 14.37)$$

Muchos problemas que implican el movimiento de sistemas de partículas pueden resolverse aplicando de manera simultánea el principio del impulso y la cantidad de movimiento y el principio de la conservación de la energía [problema resuelto 14.4] o expresando que la cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular y la energía del sistema se conservan [problema resuelto 14.5].

En la segunda parte del capítulo se consideraron los *sistemas variables de partículas*. Primero se estudió una *corriente estacionaria de partículas*, como una corriente de agua desviada por una paleta fija o el flujo de aire a través de un motor a reacción [sección 14.11]. Al aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento a un sistema S de partículas durante un intervalo de tiempo Δt y al incluir las partículas que entran al sistema en A durante ese intervalo de tiempo y aquellas (de la misma masa Δm) que dejan el sistema en B , se concluyó que *el sistema formado por la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ de las partículas que entran por S en el tiempo Δt y los impulsos de las fuerzas ejercidas sobre S durante ese tiempo es equipolente a la cantidad de movimiento $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ de las partículas que salen de S en el mismo tiempo Δt* .

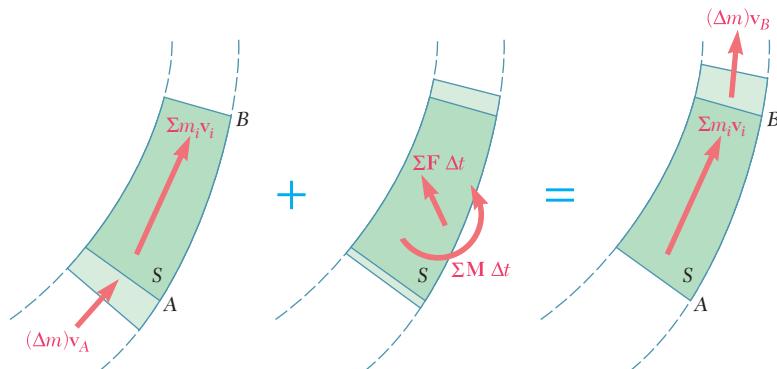


Figura 14.16

mo tiempo Δt (figura 14.16). Al igualar las componentes x , las componentes y y los momentos alrededor de un punto fijo de los vectores que intervienen, se podrían obtener hasta tres ecuaciones, en las que se podrían resolver las incógnitas deseadas [problemas resueltos 14.6 y 14.7]. De este resultado sería posible obtener la siguiente expresión para la resultante $\Sigma \mathbf{F}$ de las fuerzas ejercidas sobre S ,

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \quad (14.39)$$

donde $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ representa la diferencia entre los vectores \mathbf{v}_B y \mathbf{v}_A y donde dm/dt es el gasto de masa de la corriente (véase la nota al pie, pág. 891).

Considerando a continuación un sistema de partículas que gana masa al absorber partículas de manera continua o que pierde masa al expulsar partículas continuamente (sección 14.12), como en el caso de un cohete, se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema durante el intervalo de tiempo Δt , teniendo cuidado de incluir las partículas ganadas o perdidas durante ese intervalo de tiempo [problema resuelto 14.8]. También se advirtió que la acción sobre un sistema S de las partículas que se están *absorbiendo* por S era equivalente a un empuje

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt} \mathbf{u} \quad (14.44)$$

donde dm/dt es la tasa a la cual se está absorbiendo la masa y \mathbf{u} es la velocidad de las partículas *relativa a S* . En el caso de partículas que están siendo *expulsadas* por S , la tasa dm/dt es negativa y el empuje \mathbf{P} se ejerce en una dirección opuesta a aquella en la cual las partículas están siendo expulsadas.

Sistemas que ganan o pierden masa

Problemas de repaso

14.105 Una bala de 30 g se dispara con una velocidad de 480 m/s hacia un bloque A, el cual tiene una masa de 5 kg. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y el carrito BC es de 0.50. Si se sabe que el carrito tiene una masa de 4 kg y puede rodar libremente, determine *a*) la velocidad final del carrito y el bloque, *b*) la posición final del bloque sobre el carrito.

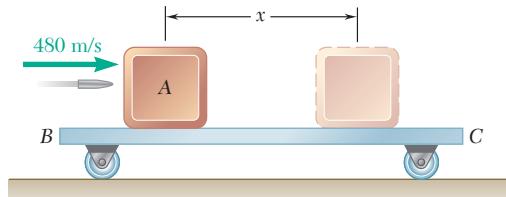


Figura P14.105

14.106 Una locomotora A de 80 Mg que viaja a 6.5 km/h choca con un carro plataforma C de 20 Mg que transporta una carga B de 30 Mg, la cual puede deslizarse a lo largo del piso ($\mu_k = 0.25$). Si se sabe que el carro plataforma estaba en reposo, sin frenos, y que se acopló automáticamente con la locomotora luego del impacto, determine la velocidad del carro plataforma *a*) inmediatamente después del impacto, *b*) después de que la carga se ha deslizado con relación al carro plataforma hasta llegar a un tope.

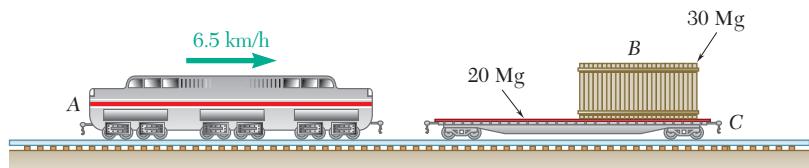


Figura P14.106

14.107 Tres vagones de carga idénticos tienen las velocidades que se indican en la figura. Si el vagón A primero golpea al vagón B, determine la velocidad de cada vagón después de que hayan ocurrido todas las colisiones si *a*) los tres vagones se acoplan de manera automática, *b*) si los vagones A y B se acoplan automáticamente mientras que los vagones B y C rebotan uno contra el otro con un coeficiente de restitución $e = 0.8$.

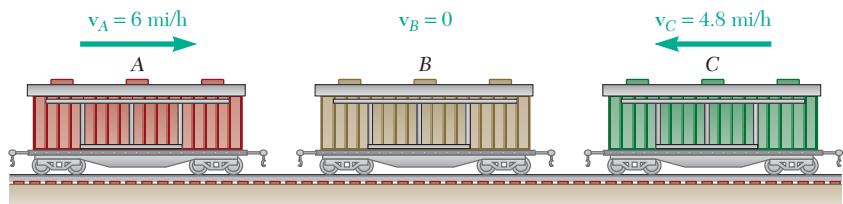


Figura P14.107

14.108 Un helicóptero A de 9 000 lb viajaba hacia el este a una rapidez de 75 mi/h y a una altura de 2 500 ft, cuando fue golpeado por un helicóptero B de 12 000 lb. Como resultado de la colisión, los dos helicópteros perdieron altura y sus restos trenzados cayeron al suelo en 12 s en un punto localizado 1 500 ft al este y 384 ft al sur del punto de impacto. Si se desprecia la resistencia del aire, determine las componentes de la velocidad del helicóptero B justo antes del choque.

14.109 Un bloque B de 15 lb se encuentra en reposo y un resorte de constante $k = 72 \text{ lb/in.}$ se mantiene comprimido 3 in. mediante una cuerda. Después de colocar el bloque A de 5 lb contra el extremo del resorte, se corta la cuerda ocasionando que A y B se muevan. Si se desprecia la fricción, determine las velocidades de los bloques A y B inmediatamente después de que A despegue de B.

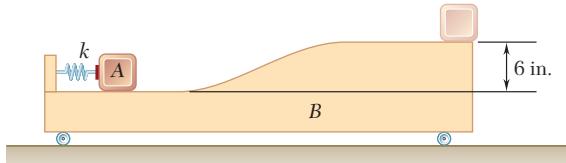


Figura P14.109

14.110 Un bloque B de 9 kg parte del reposo y se desliza hacia debajo sobre la superficie inclinada de una cuña A de 15 kg, la cual está soportada por una superficie horizontal. Si se desprecia la fricción, determine a) la velocidad de B en relación con A después de que el bloque se haya deslizado hacia abajo 0.6 m sobre la superficie de la cuña, b) la velocidad correspondiente de la cuña.

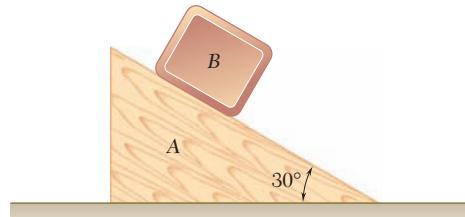


Figura P14.110

14.111 Cada unidad de tiempo se descarga una masa q de arena sobre una banda transportadora que se mueve con una velocidad \mathbf{v}_0 . La arena se desvía mediante una placa A de modo que cae en una corriente vertical. Después de caer una distancia h , la arena se desvía de nuevo mediante una placa curva en B. Si se desprecia la fricción entre la arena y las placas, determine la fuerza requerida para mantener en la posición mostrada a) la placa A, b) la placa B.

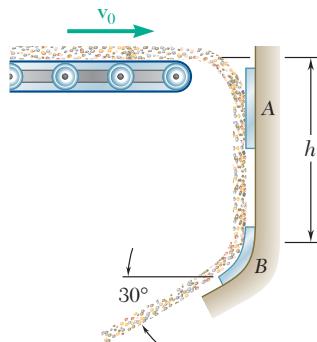


Figura P14.111

14.112 La componente final de un sistema transportador recibe arena a razón de 100 kg/s en A y la descarga en B. La arena se mueve horizontalmente en A y B con una velocidad de magnitud $v_A = v_B = 4.5 \text{ m/s}$. Si se sabe que el peso combinado de la componente y de la arena que soporta es $W = 4 \text{ kN}$, determine las reacciones en C y D.

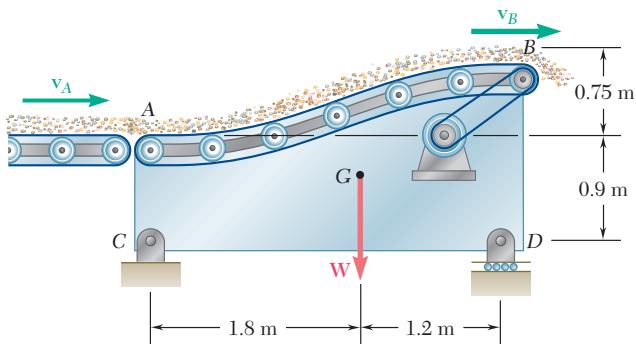


Figura P14.112

14.113 Un aspersor de jardín tiene cuatro brazos rotatorios, cada uno de los cuales consta de dos secciones rectas horizontales de tubo que forman un ángulo de 120° . Cada brazo descarga agua a razón de 20 L/min con una velocidad de 18 m/s relativa al brazo. Si se sabe que la fricción entre las partes móviles y estacionarias del aspersor es equivalente a un par de magnitud $M = 0.375 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine la razón constante a la cual gira el aspersor.

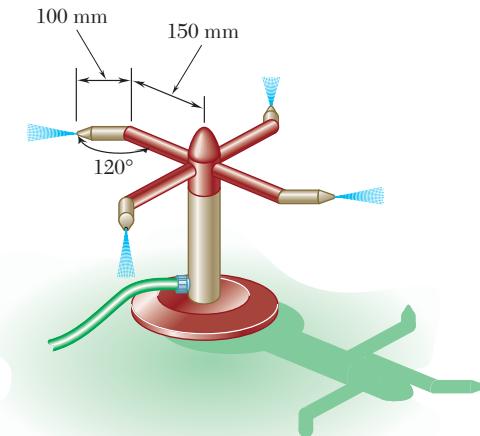


Figura P14.113

- 14.114** Los eslabones de los extremos de una cadena se encuentran amontonados en A y C. Cuando se le da una velocidad inicial v , la cadena se mantiene en movimiento libre a esa rapidez sobre la polea en B. Desprecie la fricción y determine el valor requerido de h .

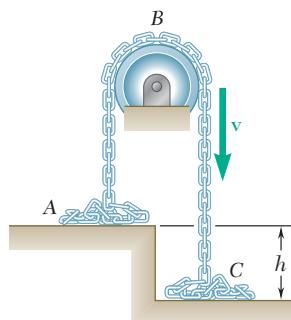


Figura P14.114

- 14.115** Un vagón de ferrocarril de longitud L y masa m_0 cuando está vacío, se mueve con libertad sobre una vía horizontal mientras se carga con arena que proviene de un conducto estacionario a una razón $dm/dt = q$. Si se sabe que el vagón se aproximaba al conducto a una rapidez v_0 , determine a) la masa del vagón y su carga después de que éste ha dejado atrás al conducto, b) la rapidez del vagón en ese momento.

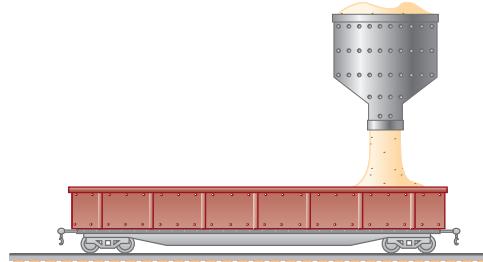


Figura P14.115

- 14.116** Un método posible para reducir la rapidez de un avión de entrenamiento cuando desciende sobre un portaviones consiste en enganchar la cola del avión al extremo de una cadena pesada de longitud l , la cual está amontonada debajo de la cubierta. Si se denota con m la masa del avión y con v_0 su rapidez al hacer contacto con el portaaviones, y se supone que no existe otra fuerza retardadora, determine a) la masa requerida de la cadena si la rapidez del avión debe reducirse a βv_0 , donde $\beta < 1$, b) el máximo valor de la fuerza ejercida por la cadena sobre el avión.

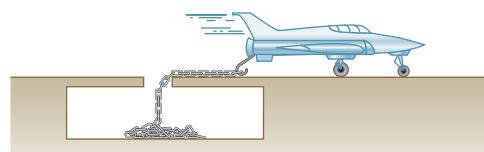


Figura P14.116

Problemas de computadora

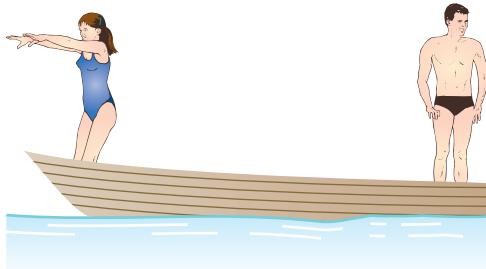


Figura P14.C1

14.C1 Un hombre y una mujer de pesos W_h y W_m , están de pie en extremos opuestos de un bote de peso W_b , listos para lanzarse con velocidades relativas al bote v_h y v_m , respectivamente. Use software para determinar la velocidad del bote después de que ambos se hayan lanzado, si *a)* la mujer se lanza primero, *b)* el hombre se lanza primero. En primer lugar utilice este software para resolver el problema 14.4 como se estableció originalmente, después resuelva ese problema suponiendo que las velocidades de la mujer y el hombre relativas al bote son, respectivamente, *i)* 14 ft/s y 18 ft/s, *ii)* 18 ft/s y 14 ft/s.

14.C2 Un sistema de partículas está formado por n partículas A_i de masa m_i y coordenadas x_i , y_i y z_i con velocidades de componentes $(v_x)_i$, $(v_y)_i$ y $(v_z)_i$. Deduzca expresiones para las componentes de la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor del origen O de las coordenadas. Utilice software para resolver los problemas 14.9 y 14.13.

14.C3 Una bomba que se mueve con una velocidad de componentes conocidas v_x , v_y y v_z explota en tres fragmentos de pesos W_1 , W_2 y W_3 en el punto A_0 a una distancia d de una pared vertical. Use software para determinar las velocidades de los tres fragmentos inmediatamente después de la explosión, si se conocen las coordenadas x_i y y_i , de los puntos A_i ($i = 1, 2, 3$) donde los fragmentos golpean la pared. Utilice este software para resolver *a)* el problema 14.25, *b)* el problema 14.26.

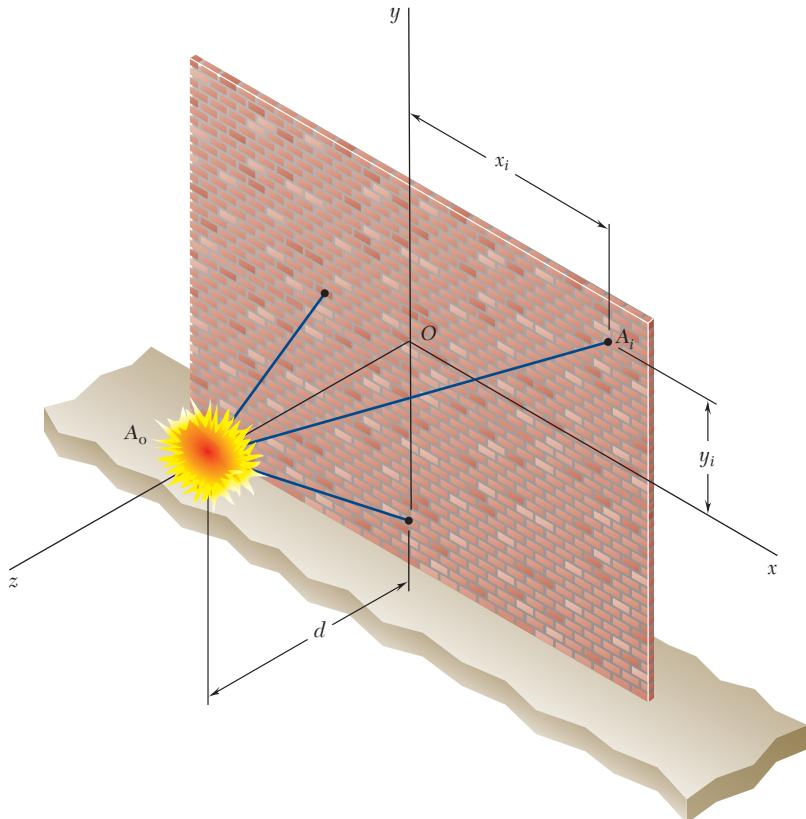


Figura P14.C3

14.C4 Cuando un avión de entrenamiento de 6 000 kg desciende sobre un portaaviones con una velocidad de 180 km/h, su cola se engancha en el extremo de una larga cadena de 80 m que se encuentra amontonada debajo de la cubierta. Si se sabe que la cadena tiene una masa por unidad de longitud de 50 kg/m y se supone que no hay otra fuerza retardadora, utilice software para determinar la distancia recorrida por el avión mientras la cadena está siendo jalada y los valores correspondientes del tiempo transcurrido, así como la velocidad y la desaceleración del avión.

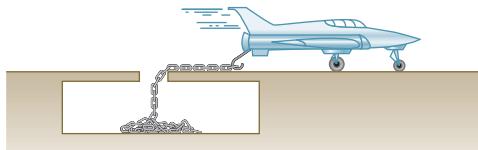


Figura P14.C4

14.C5 Un avión a propulsión de 16 Mg mantiene una velocidad constante de 774 km/h mientras asciende con un ángulo $\alpha = 18^\circ$. El avión succiona aire a razón de 300 kg/s y lo descarga con una velocidad relativa a la aeronave de 665 m/s. Si se sabe que el piloto cambia el ángulo de ascenso α mientras mantiene a los motores funcionando igual, use software para calcular y graficar con los valores de α entre 0 y 20° *a)* la aceleración inicial del avión, *b)* la rapidez máxima que alcanzará. Suponga que el arrastre debido a la fricción del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez.

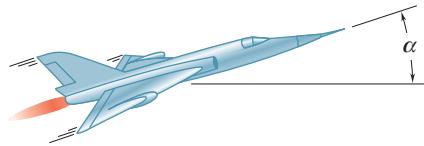


Figura P14.C5

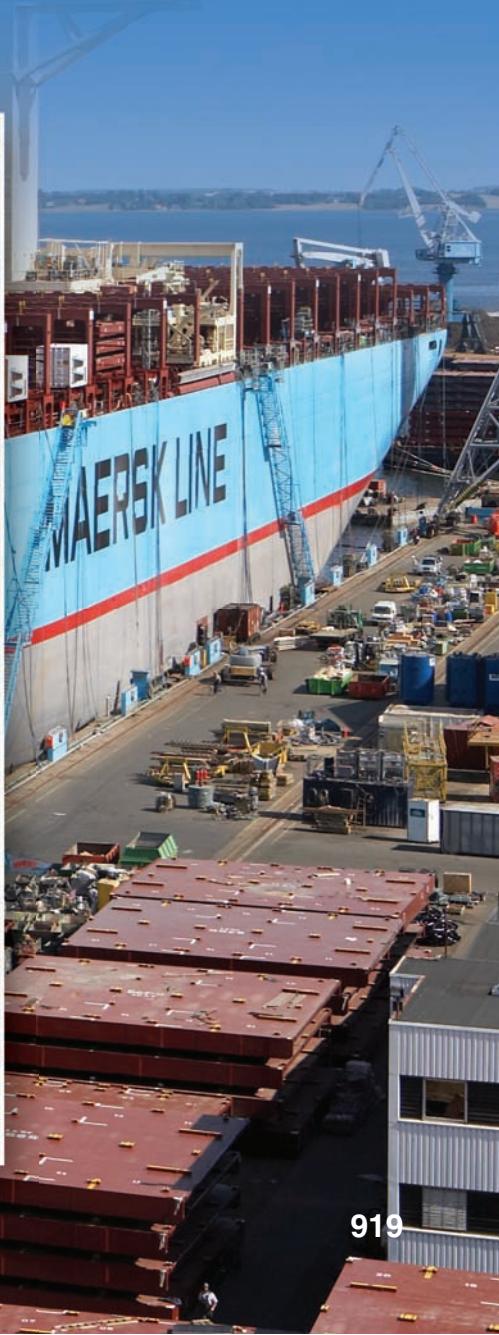
14.C6 Un cohete tiene una masa de 2 400 lb, lo que incluye 2 000 lb de combustible, el cual se consume a razón de 25 lb/s y se expulsa con una velocidad relativa de 12 000 ft/s. Si se sabe que el cohete se dispara verticalmente desde el suelo y se supone un valor constante para la aceleración de la gravedad, utilice intervalos de tiempo de 4 s y software para calcular y graficar, desde el momento del encendido hasta el instante en que se consume la última partícula de combustible, *a)* la aceleración a del cohete en ft/s^2 , *b)* su velocidad v en ft/s y *c)* su elevación h sobre el suelo en millas. (*Sugerencia:* Use para v la expresión obtenida en el problema resuelto 14.8 e integre esta expresión analíticamente para obtener h .)

El enorme cigüeñal pertenece a un motor a diesel de dos tiempos Wartsila-Sulzer RTA96-C turbocargado. En este capítulo usted aprenderá a llevar a cabo el análisis cinemático de cuerpos rígidos que realizan *traslación, rotación alrededor de un eje fijo y movimiento plano general.*



CAPÍTULO 15

Cinemática de cuerpos rígidos



CAPÍTULO 15 CINEMÁTICA DE CUERPOS RÍGIDOS

- 15.1** Introducción
- 15.2** Traslación
- 15.3** Rotación alrededor de un eje fijo
- 15.4** Ecuaciones que definen la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo
- 15.5** Movimiento plano general
- 15.6** Velocidad absoluta y velocidad relativa en el movimiento plano
- 15.7** Centro instantáneo de rotación en el movimiento plano
- 15.8** Aceleraciones absoluta y relativa en el movimiento plano
- 15.9** Análisis del movimiento plano en términos de un parámetro
- 15.10** Razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia en rotación
- 15.11** Movimiento plano de una partícula relativa a un sistema de referencia en rotación. Aceleración de Coriolis
- 15.12** Movimiento alrededor de un punto fijo
- 15.13** Movimiento general
- 15.14** Movimiento tridimensional de una partícula con respecto a un sistema de referencia en rotación. Aceleración de Coriolis
- 15.15** Sistema de referencia en movimiento general

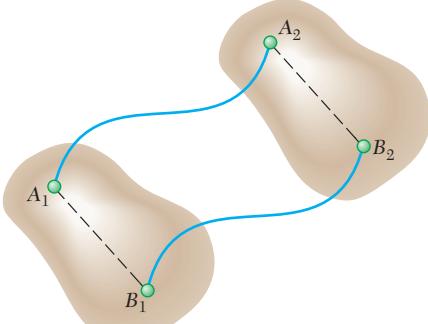


Figura 15.1

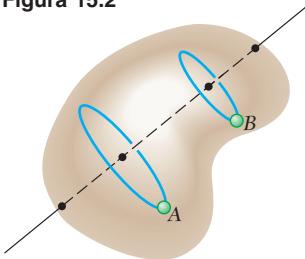


Figura 15.2

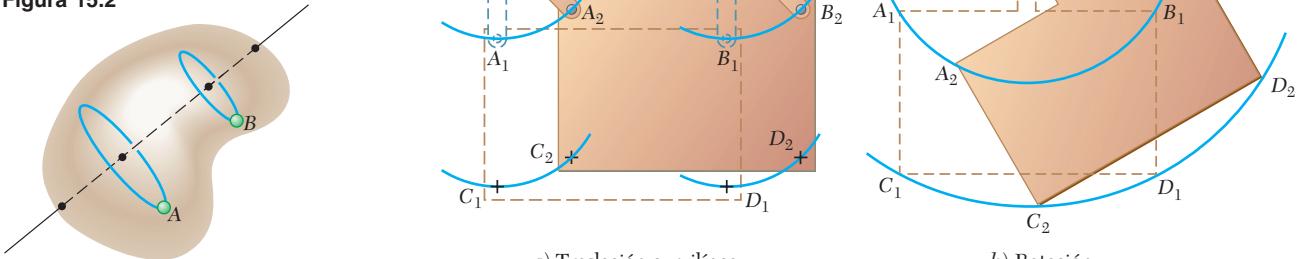


Figura 15.3

15.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se considera la cinemática de *cuerpos rígidos*. Se investigan las relaciones existentes entre el tiempo, las posiciones, las velocidades y las aceleraciones de las diferentes partículas que forman un cuerpo rígido. Como se verá, los diferentes tipos de movimiento de cuerpo rígido pueden agruparse de manera conveniente en la forma que sigue:

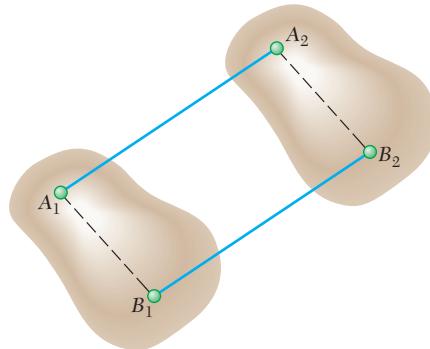


Figura 15.1

- 1.** *Traslación*. Se afirma que un movimiento será de traslación si toda línea recta dentro del cuerpo mantiene la misma dirección durante el movimiento. También puede observarse que en la traslación todas las partículas que constituyen el cuerpo se mueven a lo largo de trayectorias paralelas. Si estas trayectorias son líneas rectas, se afirma que el movimiento es una *traslación rectilínea* (figura 15.1); si las trayectorias son líneas curvas, el movimiento es una *traslación curvilínea* (figura 15.2).
- 2.** *Rotación alrededor de un eje fijo*. En este movimiento, las partículas que forman al cuerpo rígido se mueven en planos paralelos a lo largo de círculos centrados sobre el mismo eje fijo (figura 15.3). Si este eje, llamado *eje de rotación*, interseca al cuerpo rígido, las partículas localizadas sobre el eje tienen velocidad cero y aceleración cero.

La rotación no debe confundirse con ciertos tipos de traslación curvilínea. Por ejemplo, la placa que se muestra en la figura 15.4a es una traslación curvilínea, con todas sus partículas moviéndose a lo largo de círculos *paralelos*, mientras que la placa que se muestra en la figura 15.4b está en rotación, con todas sus partículas moviéndose a lo largo de círculos *concéntricos*.

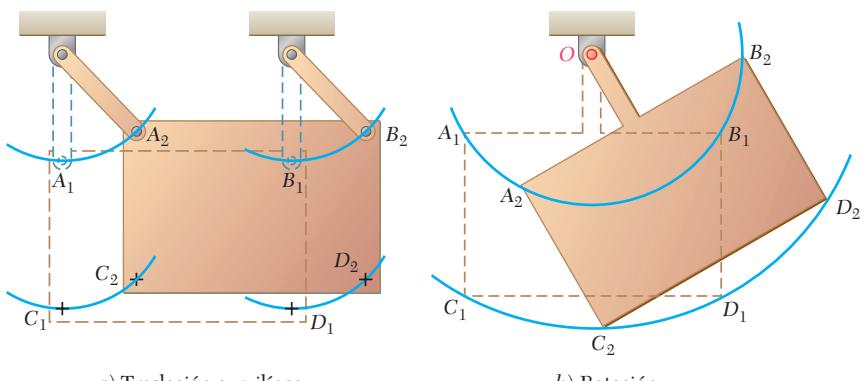


Figura 15.4

En el primer caso, cualquier línea recta dada dibujada sobre la placa mantendrá la misma dirección, en tanto que en el segundo caso, el punto O permanece fijo.

Como cada partícula se mueve en un plano determinado, se afirma que la rotación del cuerpo alrededor de un eje fijo es un *movimiento plano*.

3. *Movimiento plano general.* Hay muchos otros tipos de movimiento plano, esto es, movimientos en los cuales todas las partículas del cuerpo se mueven en planos paralelos. Cualquier movimiento plano que no es ni una rotación ni una traslación se conoce como un movimiento plano general. En la figura 15.5 se dan dos ejemplos de movimiento plano general.

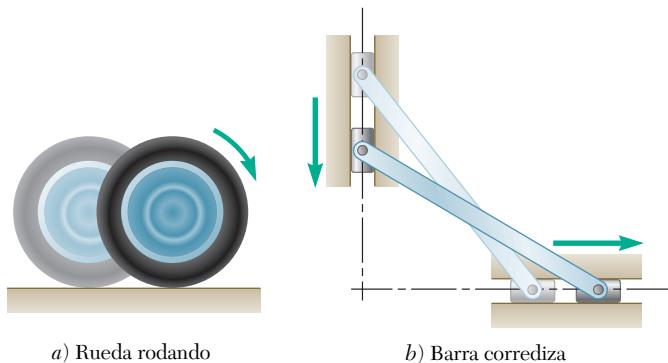


Figura 15.5

4. *Movimiento alrededor de un punto fijo.* El movimiento tridimensional de un cuerpo rígido unido a un punto fijo O , por ejemplo, el movimiento de un trompo sobre un piso rugoso (figura 15.6), se conoce como movimiento alrededor de un punto fijo.
5. *Movimiento general.* Cualquier movimiento de un cuerpo rígido que no entra en ninguna de las categorías anteriores se conoce como movimiento general.

Después de un breve análisis en la sección 15.2 del movimiento de traslación, en la sección 15.3 se considera la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo. Se definirá la *velocidad angular* y la *aceleración angular* de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, y el lector aprenderá a expresar la velocidad y la aceleración de un punto dado del cuerpo en términos de su vector de posición, de la velocidad angular y de la aceleración angular del cuerpo.

Las siguientes secciones se dedican al estudio del movimiento plano general de un cuerpo rígido y a su aplicación al análisis de mecanismos tales como engranes, bielas y eslabones conectados por medio de pasadores. Al descomponer el movimiento plano de una placa en una traslación y una rotación (secciones 15.5 y 15.6), se expresará la velocidad de un punto B de la placa como la suma de la velocidad de un punto de referencia A y de la velocidad de B relativa al sistema de referencia que se traslada con A (esto es, que se mueve con A pero que no gira). El mismo planteamiento se utiliza posteriormente en la sección 15.8 para expresar la aceleración de B en términos de la aceleración de A , y la aceleración de B relativa a un sistema de referencia que se traslada con A .

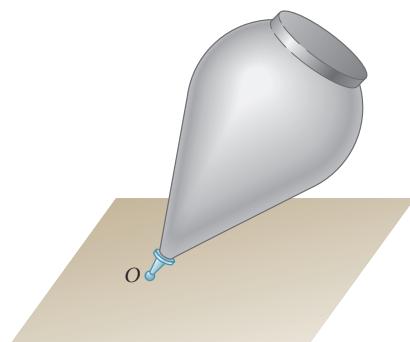


Figura 15.6

Un método alternativo para el análisis de velocidades en movimiento plano, basado en el concepto de *centro instantáneo de rotación*, se proporciona en la sección 15.7; e incluso otro método de análisis, basado en el uso de expresiones paramétricas para las coordenadas de un punto dado, se presenta en la sección 15.9.

El movimiento de una partícula relativa a un sistema de referencia en rotación y el concepto de *aceleración de Coriolis* se estudian en las secciones 15.10 y 15.11, y los resultados que se obtienen se aplican al análisis del movimiento plano de mecanismos que contienen partes que deslizan entre sí.

La parte restante del capítulo se dedica al análisis del movimiento en tres dimensiones de un cuerpo rígido, a saber, el movimiento de un cuerpo rígido como un punto fijo y el movimiento general de un cuerpo rígido. En las secciones 15.12 y 15.13 se utiliza un sistema de referencia fijo o sistema de referencia en traslación para realizar este análisis; en las secciones 15.14 y 15.15 será considerado el movimiento del cuerpo relativo al sistema de referencia en rotación o a un sistema de referencia en movimiento general, y se volverá a usar el concepto de aceleración de Coriolis.



Fotografía 15.1 Esta réplica de un ariete en Château des Baux, Francia, realiza traslación curvilínea.

15.2. TRASLACIÓN

Considere un cuerpo rígido en traslación (ya sea rectilínea o curvilínea), y deje que A y B sean cualesquiera dos de sus partículas (figura 15.7a). Al denotar, respectivamente, por \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B los vectores de posición de A y B con respecto a un sistema de referencia fijo y mediante $\mathbf{r}_{B/A}$ al vector que une a A y B, se escribe

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \quad (15.1)$$

Se diferencia esta relación con respecto a t . Hay que resaltar que de la definición pura de traslación, el vector $\mathbf{r}_{B/A}$ debe mantener una dirección constante; su magnitud también debe ser constante, ya que A

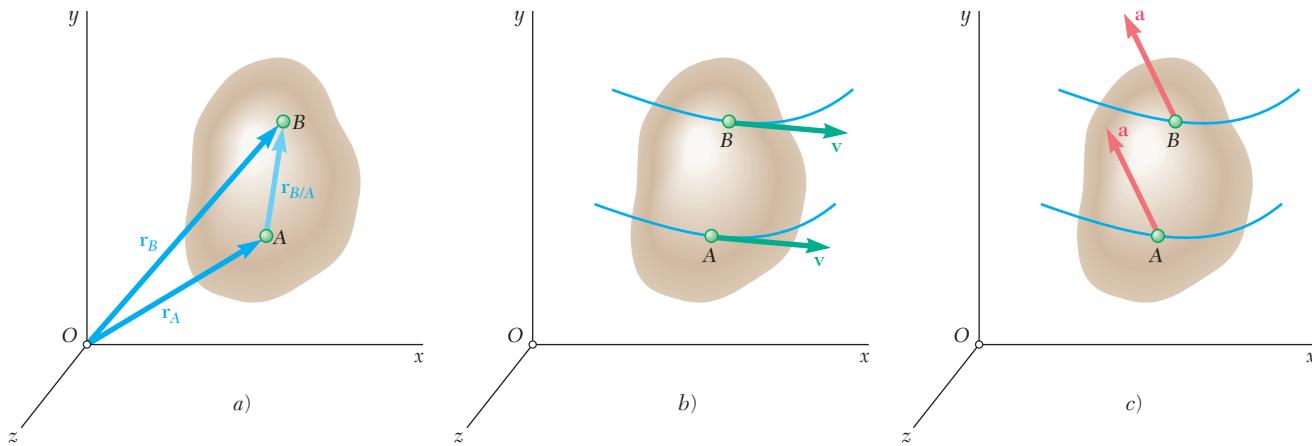


Figura 15.7

y B pertenecen al mismo cuerpo rígido. De tal modo, la derivada de $\mathbf{r}_{B/A}$ es cero y se tiene

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A \quad (15.2)$$

Al diferenciar una vez más, se escribe

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A \quad (15.3)$$

En consecuencia, *cuando un cuerpo rígido está en traslación, todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad y la misma aceleración en cualquier instante dado* (figura 15.7b y c). En el caso de traslación curvilínea, la velocidad y la aceleración cambian en dirección, así como en magnitud, en cada instante. En el caso de traslación rectilínea, todas las partículas del cuerpo se mueven a lo largo de líneas rectas paralelas, y su velocidad y aceleración se mantienen en la misma dirección durante el movimiento completo.

15.3. ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

Considere un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo AA' . Sea P un punto del cuerpo y \mathbf{r} su vector de posición con respecto a un sistema de referencia fijo. Por conveniencia, se supone que el sistema de referencia está centrado en el punto O sobre AA' y que el eje z coincide con AA' (figura 15.8). Sea B la proyección de P sobre AA' ; puesto que P debe permanecer a una distancia constante de B , describirá un círculo de centro B y de radio $r \sin \phi$, donde ϕ denota el ángulo formado por \mathbf{r} y AA' .

La posición de P y del cuerpo completo está definida totalmente por el ángulo θ que forma la línea BP con el plano zx . El plano θ se conoce como *coordenada angular* del cuerpo y se define como positiva cuando se ve en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde A' . La coordenada angular se expresará en radianes (rad) o, en ocasiones, en grados ($^{\circ}$) o revoluciones (rev). Recuérdese que

$$1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad} = 360^{\circ}$$

Recuérdese de la sección 11.9 que la velocidad $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ de una partícula P es un vector tangente a la trayectoria de P y de magnitud $v = ds/dt$. Al observar que la longitud Δs del arco descrito por P cuando el cuerpo gira un ángulo $\Delta\theta$ es

$$\Delta s = (BP) \Delta\theta = (r \sin \phi) \Delta\theta$$

y al dividir ambos miembros entre Δt , se obtiene en el límite, cuando Δt tiende a cero,

$$v = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta} \sin \phi \quad (15.4)$$

donde $\dot{\theta}$ denota la derivada en el tiempo de θ . (Advierta que el ángulo θ depende de la posición de P dentro del cuerpo, pero que la razón de cambio $\dot{\theta}$ es en sí misma independiente de P .) La conclusión es que

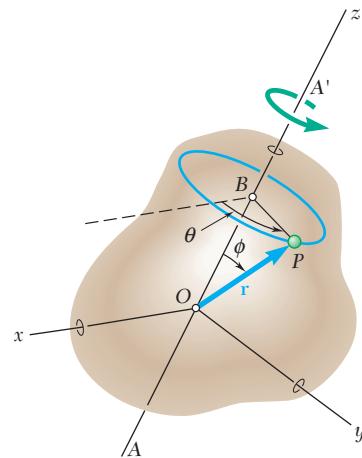


Figura 15.8



Fotografía 15.2 Para el engrane central que gira alrededor de un eje fijo, su velocidad y aceleración angulares son vectores dirigidos a lo largo del eje de rotación vertical.

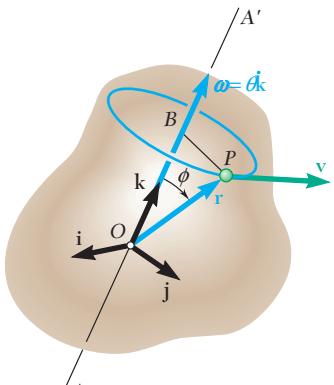


Figura 15.9

la velocidad \mathbf{v} de P es un vector perpendicular al plano que contiene a AA' y \mathbf{r} , y de magnitud v definida por (15.4). Pero éste es precisamente el resultado que se obtendría al dibujar un vector $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$ a lo largo de AA' y se formara el producto vectorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (figura 15.9). Entonces se escribe

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (15.5)$$

El vector

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{k} = \dot{\theta}\mathbf{k} \quad (15.6)$$

que está dirigido a lo largo del eje de rotación se denomina la *velocidad angular* del cuerpo y es igual en magnitud a la razón de cambio $\dot{\theta}$ de la coordenada angular; su sentido puede obtenerse mediante la regla de la mano derecha (sección 3.6) con base en el sentido de rotación del cuerpo.[†]

La aceleración \mathbf{a} de la partícula P se determinará a continuación. Al diferenciar (15.5) y recordar la regla de diferenciación de un producto vectorial (sección 11.10), se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (15.7)$$

El vector $d\boldsymbol{\omega}/dt$ se denota mediante $\boldsymbol{\alpha}$ y se denomina *aceleración angular* del cuerpo. Al sustituir también \mathbf{v} de (15.5), se tiene

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (15.8)$$

Al diferenciar (15.6) y recordar que \mathbf{k} es constante en magnitud y dirección, se tiene

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{k} = \dot{\omega}\mathbf{k} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \quad (15.9)$$

De tal modo, la aceleración angular de un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo es un vector dirigido a lo largo del eje de rotación, y es igual en magnitud a la tasa de cambio $\dot{\omega}$ de la velocidad angular. Volviendo a (15.8), observe que la aceleración de P es la suma de dos vectores. El primer vector es igual al producto vectorial $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$; es tangente al círculo descrito por P y, por lo tanto, representa la componente tangencial de la aceleración. El segundo vector es igual al *triple producto vectorial (mixto de tres vectores)* $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ obtenido al formar el producto vectorial de $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$; ya que $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ es tangente al círculo que describe P , el triple producto vectorial está dirigido hacia el centro B del círculo y, por consiguiente, representa la componente normal de la aceleración.

[†]Se demostrará en la sección 15.12 en el caso más general de un cuerpo rígido que rota simultáneamente alrededor de ejes que tienen diferentes direcciones, que las velocidades angulares obedecen la ley de suma del paralelogramo y, por ello, verdaderamente son cantidades vectoriales.

Rotación de una placa representativa. La rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo puede definirse mediante el movimiento de una placa representativa en un plano de referencia perpendicular al eje de rotación. Se elige el plano xy como el plano de referencia y se supone que coincide con el plano de la figura, con el eje z apuntando hacia fuera del papel (figura 15.10). Al recordar de (15.6) que $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$, se

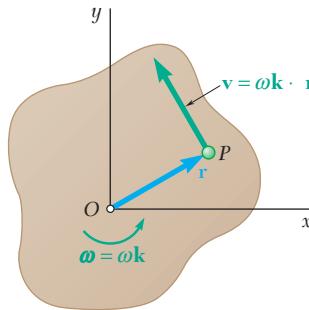


Figura 15.10

nota que un valor positivo del escalar ω corresponde a una rotación en el sentido contrario al de las manecillas del reloj de la placa representativa, y un valor negativo a una rotación en el sentido de las manecillas del reloj. Al sustituir $\omega \mathbf{k}$ por $\boldsymbol{\omega}$ en la ecuación (15.5), se expresa la velocidad de cualquier punto P dado de la placa como

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{r} \quad (15.10)$$

Puesto que los vectores \mathbf{k} y \mathbf{r} son mutuamente perpendiculares, la magnitud de la velocidad \mathbf{v} es

$$v = r\omega \quad (15.10')$$

y su dirección puede obtenerse al girar \mathbf{r} 90° en el sentido de rotación de la placa.

Al sustituir $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{k}$ en la ecuación (15.8) y observar que el doble producto cruz de \mathbf{r} por \mathbf{k} origina una rotación de 180° del vector \mathbf{r} , se expresa la aceleración del punto P como

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{k} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r} \quad (15.11)$$

Al descomponer \mathbf{a} en las componentes tangencial y normal (figura 15.11), se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \boldsymbol{\alpha} \mathbf{k} \times \mathbf{r} & a_t &= r\alpha \\ \mathbf{a}_n &= -\omega^2 \mathbf{r} & a_n &= r\omega^2 \end{aligned} \quad (15.11')$$

La componente tangencial \mathbf{a}_t apunta en la dirección contraria a la del movimiento de las manecillas del reloj si el escalar α es positivo, y en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj si α es negativo. La componente normal \mathbf{a}_n siempre apunta en la dirección opuesta a la de \mathbf{r} , esto es, hacia O .

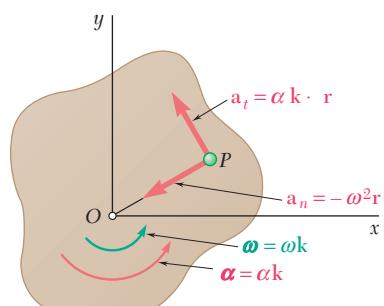


Figura 15.11

15.4. ECUACIONES QUE DEFINEN LA ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

Se afirma que se *conoce* el movimiento de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo AA' cuando su coordenada angular θ puede expresarse como una función conocida de t . Sin embargo, en la práctica la rotación de un cuerpo rígido rara vez se define mediante una relación entre θ y t . Con mayor frecuencia, las condiciones de movimiento se especificarán mediante el tipo de aceleración angular que posea el cuerpo. Por ejemplo, es posible que α se dé como una función de t , como una función de θ o como una función de ω . Al recordar las relaciones (15.6) y (15.9), se escribe

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (15.12)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (15.13)$$

o, al despejar (15.12) dt y sustituir en (15.13),

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \quad (15.14)$$

Puesto que estas ecuaciones son similares a las que se obtuvieron en el capítulo 11 para el movimiento rectilíneo de una partícula, su integración puede efectuarse siguiendo el procedimiento descrito en la sección 11.3.

Con frecuencia se encuentran dos casos particulares de rotación:

- 1. Rotación uniforme.** Este caso se caracteriza por el hecho de que la aceleración angular es cero. Consecuentemente, la aceleración angular es constante, y la coordenada angular está dada por la fórmula

$$\theta = \theta_0 + \omega t \quad (15.15)$$

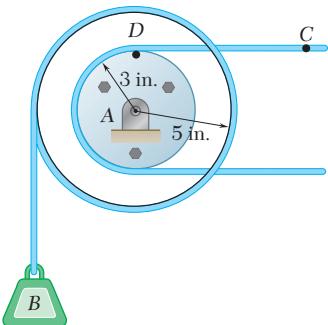
- 2. Rotación acelerada uniformemente.** En este caso, la aceleración angular es constante. Las siguientes fórmulas que relacionan la velocidad angular, la coordenada angular y el tiempo pueden obtenerse entonces de manera similar a la que se describe en la sección 11.5. La similitud entre las fórmulas derivadas aquí y aquellas obtenidas para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de una partícula es manifiesta.

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)\end{aligned} \quad (15.16)$$

Debe subrayarse que la fórmula (15.15) sólo se usa cuando $\alpha = 0$, y las fórmulas (15.16) sólo cuando $\alpha = \text{constante}$. En cualquier otro caso, deben emplearse las fórmulas generales (15.12) a (15.14).



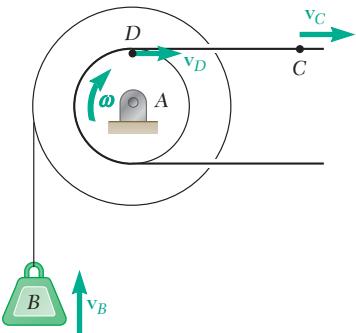
Fotografía 15.3 Si el rollo inferior tiene una velocidad angular constante, la rapidez con la que el papel está siendo enrollado se incrementa conforme el radio aumenta.



PROBLEMA RESUELTO 15.1

La carga *B* se conecta a una polea doble mediante uno de los dos cables inextensibles que se muestran. El movimiento de la polea se controla mediante el cable *C*, el cual tiene una aceleración constante de 9 in./s² y una velocidad inicial de 12 in./s, ambas dirigidas hacia la derecha. Determine *a)* el número de revoluciones ejecutadas por la polea en 2 s, *b)* la velocidad y el cambio en la posición de la carga *B* después de 2 s, y *c)* la aceleración del punto *D* sobre el borde de la polea interna cuando *t* = 0.

SOLUCIÓN



a) Movimiento de la polea. Puesto que el cable es inextensible, la velocidad del punto *D* es igual a la velocidad del punto *C* y la componente tangencial de la aceleración de *D* es igual a la aceleración de *C*.

$$(v_D)_0 = (v_C)_0 = 12 \text{ in./s} \rightarrow (a_D)_t = a_C = 9 \text{ in./s}^2 \rightarrow$$

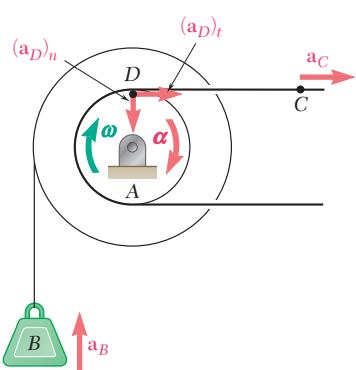
Al observar que la distancia desde *D* hasta el centro de la polea es de 3 in., se escribe

$$(v_D)_0 = r\omega_0 \quad 12 \text{ in./s} = (3 \text{ in.})\omega_0 \quad \omega_0 = 4 \text{ rad/s} \downarrow \\ (a_D)_t = r\alpha \quad 9 \text{ in./s}^2 = (3 \text{ in.})\alpha \quad \alpha = 3 \text{ rad/s}^2 \downarrow$$

Con base en las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado, se obtiene, para *t* = 2 s,

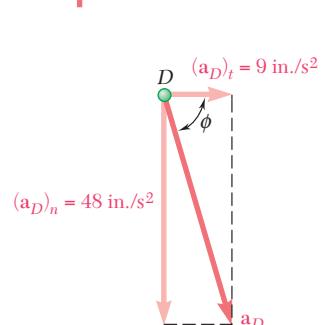
$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 4 \text{ rad/s} + (3 \text{ rad/s}^2)(2 \text{ s}) = 10 \text{ rad/s} \\ \omega = 10 \text{ rad/s} \downarrow \\ \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = (4 \text{ rad/s})(2 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3 \text{ rad/s}^2)(2 \text{ s})^2 = 14 \text{ rad} \\ \theta = 14 \text{ rad} \downarrow$$

$$\text{Número de revoluciones} = (14 \text{ rad}) \left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 2.23 \text{ rev} \quad \blacktriangleleft$$



b) Movimiento de la carga *B*. Mediante el uso de las relaciones siguientes entre el movimiento lineal y el angular con *r* = 5 in., se escribe

$$v_B = r\omega = (5 \text{ in.})(10 \text{ rad/s}) = 50 \text{ in./s} \quad v_B = 50 \text{ in./s} \uparrow \\ \Delta y_B = r\theta = (5 \text{ in.})(14 \text{ rad}) = 70 \text{ in.} \quad \Delta y_B = 70 \text{ in. hacia arriba} \quad \blacktriangleleft$$



c) Aceleración del punto *D* en *t* = 0. La componente tangencial de la aceleración es

$$(a_D)_t = a_C = 9 \text{ in./s}^2 \rightarrow$$

Puesto que, en *t* = 0, $\omega_0 = 4 \text{ rad/s}$, la componente normal de la aceleración es

$$(a_D)_n = r_D\omega_0^2 = (3 \text{ in.})(4 \text{ rad/s})^2 = 48 \text{ in./s}^2 \quad (a_D)_n = 48 \text{ in./s}^2 \downarrow$$

La magnitud y dirección de la aceleración total puede obtenerse al escribir

$$\tan \phi = (48 \text{ in./s}^2)/(9 \text{ in./s}^2) \quad \phi = 79.4^\circ \\ a_D \sin 79.4^\circ = 48 \text{ in./s}^2 \quad a_D = 48.8 \text{ in./s}^2 \\ a_D = 48.8 \text{ in./s}^2 \angle 79.4^\circ \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se inicia el estudio del movimiento de cuerpos rígidos considerando dos tipos particulares de su movimiento: *traslación* y *rotación* alrededor de un *eje fijo*.

1. Cuerpo rígido en traslación. En cualquier instante dado, todos los puntos de un cuerpo rígido en traslación tienen la *misma velocidad* y la *misma aceleración* (figura 15.7).

2. Cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo. La posición de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo se definió en cualquier instante dado mediante la *coordenada angular* θ , que suele medirse en *radianes*. Al elegir el vector unitario \mathbf{k} a lo largo del eje fijo, de manera tal que la rotación del cuerpo aparece en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde la punta de \mathbf{k} , se definió la *velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ y la *aceleración angular* $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\alpha} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \quad (15.6, 15.9)$$

En la solución de problemas, téngase presente que los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ están dirigidos ambos a lo largo del eje fijo de rotación y que su sentido puede obtenerse mediante la regla de la mano derecha.

a) La velocidad de un punto P de un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo se determinó como

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (15.5)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo y \mathbf{r} es el vector de posición dibujado desde cualquier punto sobre el eje de rotación hasta el punto P (figura 15.9).

b) La aceleración del punto P se determinó como

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (15.8)$$

Puesto que los productos vectoriales no son comutativos, *hay que asegurarse de escribir los vectores en el orden indicado* cuando se use cualquiera de las dos ecuaciones anteriores.

3. Rotación de una placa representativa. En muchos problemas se puede reducir el análisis de la rotación de un cuerpo tridimensional alrededor de un eje fijo mediante el estudio de la rotación de una placa representativa en un plano perpendicular al eje fijo. El eje z debe dirigirse a lo largo del eje de rotación y apuntar hacia fuera del papel. Así, la placa representativa girará en el plano xy alrededor del origen O del sistema de coordenadas (figura 15.10).

Para resolver problemas de este tipo es necesario realizar lo siguiente:

a) Dibujar un diagrama de la placa representativa que muestre sus dimensiones, su velocidad angular y la aceleración angular, así como los vectores que representan las velocidades y aceleraciones de los puntos de la placa para los cuales se tiene o se busca información.

b) Relacionar la rotación de la placa y el movimiento de los puntos de la misma al escribir las ecuaciones

$$v = r\omega \quad (15.10')$$

$$a_t = r\alpha \quad a_n = r\omega^2 \quad (15.11')$$

Recuerde que la velocidad \mathbf{v} y la componente \mathbf{a}_t de la aceleración de un punto P de la placa son tangentes a la trayectoria circular descrita por P . Las direcciones de \mathbf{v} y \mathbf{a}_t se encuentran al girar el vector de posición \mathbf{r} 90° en el sentido indicado por $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, respectivamente. La componente normal \mathbf{a}_n de la aceleración de P siempre está dirigida hacia el eje de rotación.

4. Ecuaciones que definen la rotación de un cuerpo rígido. Es posible que le complazca la similitud que existe entre las ecuaciones que definen la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo [ecuaciones (15.12) a la (15.16)] y las del capítulo 11 que definen el movimiento rectilíneo de una partícula [ecuaciones (11.1) a (11.8)]. Todo lo que se necesita hacer para obtener un nuevo conjunto de ecuaciones es sustituir θ , ω y α por x , v y a en las ecuaciones del capítulo 11.

Problemas

15.1 El movimiento de una leva se define por medio de la relación $\theta = t^3 - 9t^2 + 15t$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Determine la coordenada angular, la velocidad angular y la aceleración angular de la leva cuando *a)* $t = 0$, *b)* $t = 3$ s.

15.2 Para la leva del problema 15.1, determine el tiempo, la coordenada angular y la aceleración angular cuando la velocidad angular es cero.

15.3 El movimiento de una manivela oscilante se define por medio de la relación $\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\pi t/T) - (0.5\theta_0) \operatorname{sen}(2\pi t/T)$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Si se sabe que $\theta_0 = 6$ rad y $T = 4$ s, determine la coordenada angular, la velocidad angular y la aceleración angular de la manivela cuando *a)* $t = 0$, *b)* $t = 2$ s.

15.4 Retome el problema 15.3, cuando $t = 1$ s.

15.5 El movimiento de un disco que gira en un baño de aceite se define mediante la relación $\theta = \theta_0(1 - e^{-t/4})$, donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Si se sabe que $\theta_0 = 0.40$ rad, determine la coordenada angular, la velocidad angular y la aceleración angular del disco cuando *a)* $t = 0$, *b)* $t = 3$ s, *c)* $t = \infty$.

15.6 La aceleración angular de un disco oscilante se define mediante la relación $\alpha = -k\theta$. Determine *a)* el valor de k para el cual $\omega = 8$ rad/s cuando $\theta = 0$ y $\theta = 4$ rad cuando $\omega = 0$, *b)* la velocidad angular del disco cuando $\theta = 3$ rad.

15.7 Cuando se pone en operación, un motor alcanza su velocidad nominal de 3 300 rpm en 6 s y cuando el motor se desactiva tarda 80 s para llegar al reposo. Si se supone que el movimiento es uniformemente acelerado, determine el número de revoluciones que ejecuta el motor *a)* para alcanzar la velocidad nominal, *b)* para detenerse.

15.8 El rotor de una turbina de gas está girando a una velocidad de 6 900 rpm cuando la turbina se desactiva. Se observa que se necesitan 4 min para que el rotor llegue al reposo. Si se supone que el movimiento es uniformemente acelerado, determine *a)* la aceleración angular, *b)* el número de revoluciones que ejecuta el rotor antes de llegar al reposo.

15.9 La aceleración angular de una flecha se define mediante la relación $\alpha = -0.25\omega$, donde α se expresa en rad/s^2 y ω en rad/s. Si se sabe que en $t = 0$ la velocidad angular de la flecha es 20 rad/s, determine *a)* el número de revoluciones que la flecha ejecutará antes de detenerse, *b)* el tiempo requerido para que la flecha se detenga y *c)* el tiempo necesario para que la velocidad angular de la flecha se reduzca en 1 por ciento de su valor inicial.

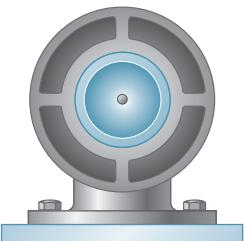


Figura P15.7

15.10 El ensamble que se muestra en la figura está compuesto por la varilla recta ABC que pasa por, y está soldada a la placa rectangular $DEFH$. El ensamble gira alrededor del eje AC con una velocidad angular constante de 9 rad/s. Si el movimiento es en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde C , determine la velocidad y la aceleración de la esquina F .

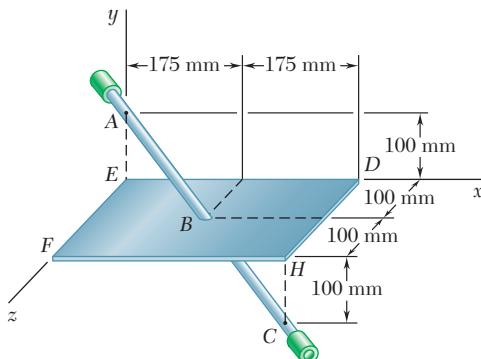


Figura P15.10

15.11 En el problema 15.10 determine la aceleración de la esquina H , suponiendo que la velocidad angular es de 9 rad/s y disminuye a razón de 18 rad/s².

15.12 La varilla doblada $ABCDE$ gira alrededor de una línea que une los puntos A y E con una velocidad angular constante de 9 rad/s. Si se sabe que la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj según se observa desde E , determine la velocidad y aceleración de la esquina C .

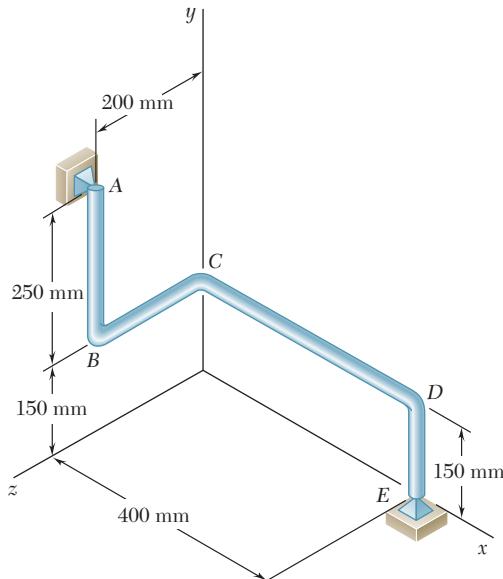


Figura P15.12

15.13 En el problema 15.12 determine la velocidad y aceleración de la esquina B , suponiendo que la velocidad angular es de 9 rad/s y que aumenta a razón de 45 rad/s².

15.14 Una placa triangular y dos placas rectangulares se sueldan a una barra recta AB . La unidad soldada completa gira alrededor del eje AB con una velocidad angular constante de 5 rad/s. Si se sabe que en el instante considerado la velocidad de la esquina E se dirige hacia abajo, determine la velocidad y la aceleración de la esquina D .

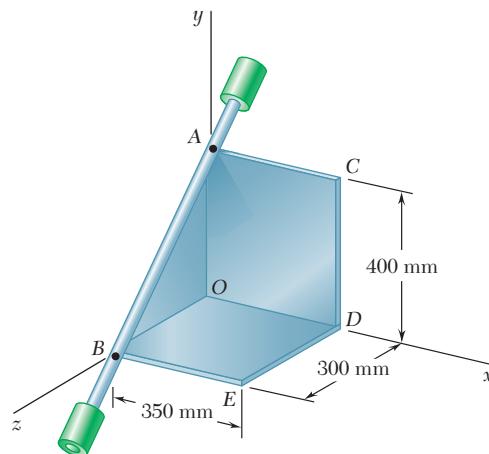


Figura P15.14

15.15 En el problema 15.14 determine la aceleración de la esquina D , suponiendo que la velocidad angular es de 5 rad/s y que disminuye a razón de 20 rad/s².

15.16 La Tierra realiza una revolución completa sobre su eje en 23 h 56 min. Si se sabe que el radio medio de la Tierra es de 3 960 mi, determine la velocidad lineal y la aceleración de un punto sobre la superficie de la Tierra a) en el ecuador, b) en Filadelfia, 40° latitud norte, c) en el polo norte.

15.17 La Tierra realiza una revolución completa alrededor del Sol en 365.24 días. Si se supone que la órbita de la Tierra es circular y que tiene un radio de 93 000 000 mi, determine la velocidad y aceleración de la Tierra.

15.18 La placa circular que se muestra en la figura está inicialmente en reposo. Si se sabe que $r = 200$ mm y que la placa tiene una aceleración angular constante de 0.3 rad/s², determine la magnitud de la aceleración total del punto B cuando a) $t = 0$, b) $t = 2$ s, c) $t = 4$ s.

15.19 La aceleración angular de la placa circular de 600 mm de radio que se muestra en la figura, está definida por la relación $\alpha = \alpha_0 e^{-t}$. Si se sabe que la placa está en reposo cuando $t = 0$ y que $\alpha_0 = 10$ rad/s², determine la magnitud de la aceleración total del punto B cuando a) $t = 0$, b) $t = 0.5$ s, c) $t = \infty$.

15.20 La placa circular de 250 mm de radio que se muestra en la figura, está inicialmente en reposo y tiene una aceleración angular definida por la relación $\alpha = \alpha_0 \cos(\pi t/T)$. Si se sabe que $T = 1.5$ s y $\alpha_0 = 10$ rad/s², determine la magnitud de la aceleración total del punto B cuando a) $t = 0$, b) $t = 0.5$ s, c) $t = 0.75$ s.

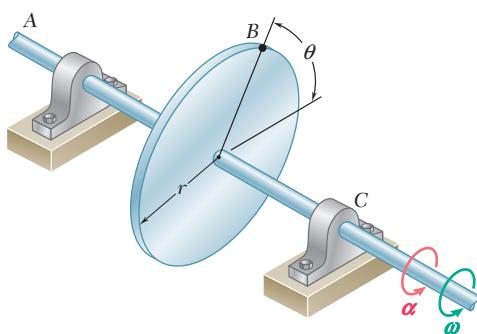


Figura P15.18, P15.19 y P15.20

15.21 Una serie de pequeños componentes de máquina se mueven por medio de una banda transportadora que pasa sobre una polea guía de 6 in. de radio. En el instante que se muestra, la velocidad del punto A es 15 in./s hacia la izquierda y su aceleración es de 9 in./s² hacia la derecha. Determine *a)* la velocidad angular y la aceleración angular de la polea guía y *b)* la aceleración total de los componentes de máquina en B.

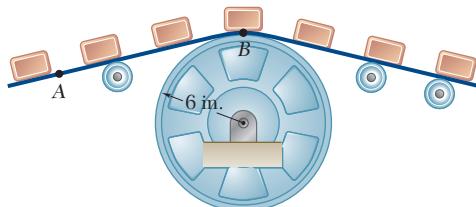


Figura P15.21 y P15.22

15.22 Una serie de pequeños componentes de máquina se mueven por medio de una banda transportadora que pasa sobre una polea guía de 6 in. de radio. En el instante que se muestra, la velocidad angular de la polea guía es de 4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la aceleración angular de la polea para la cual la magnitud de la aceleración total del componente de máquina en B es 120 in./s².

15.23 La lijadora de banda que se muestra en la figura se encuentra inicialmente en reposo. Si el tambor propulsor B tiene una aceleración angular constante de 120 rad/s² en sentido contrario de las manecillas del reloj, determine la magnitud de la aceleración de la banda en el punto C cuando *a)* $t = 0.5$ s, *b)* $t = 2$ s.

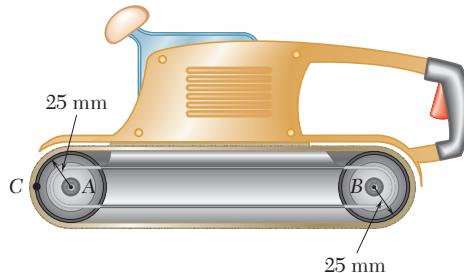


Figura P15.23 y P15.24

15.24 La velocidad nominal del tambor B de la lijadora de banda que se muestra es de 2 400 rpm. Cuando se apaga, se observa que la lijadora sigue funcionando libremente desde su velocidad nominal hasta detenerse en 10 s. Si se supone movimiento uniformemente desacelerado, determine la velocidad y la aceleración del punto C de la banda, *a)* inmediatamente antes de ser apagada, *b)* 9 s después.

15.25 El anillo C tiene un radio interior de 55 mm y un radio exterior de 60 mm, se encuentra colocado entre dos ruedas A y B, cada una con 24 mm de radio exterior. Si se sabe que la rueda A gira con una velocidad angular constante de 300 rpm y que no se presenta deslizamiento, determine *a)* la velocidad angular del anillo C y de la rueda B, *b)* la aceleración de los puntos A y B que están en contacto con C.

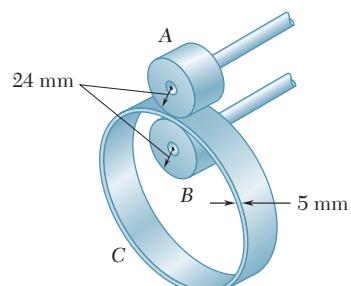


Figura P15.25

15.26 El anillo *B* tiene un radio interior r_2 y cuelga de un eje horizontal *A* en la forma indicada. Si la flecha *A* gira con una velocidad angular constante ω_A y no ocurre deslizamiento, obtenga una relación en términos de r_1 , r_2 , r_3 y ω_A para *a)* la velocidad angular del anillo *B*, y *b)* la aceleración de los puntos de la flecha *A* y del anillo *B* que están en contacto.

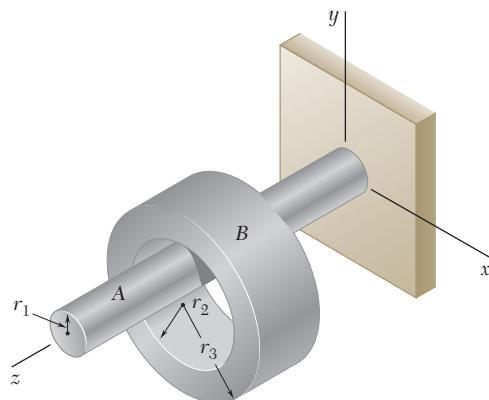


Figura P15.26 y P15.27

15.27 El anillo *B* tiene un radio interior r_2 y cuelga de la flecha horizontal *A* en la forma que se indica. La flecha *A* gira con una velocidad angular constante de 25 rad/s y no ocurre deslizamiento. Si $r_1 = 12$ mm, $r_2 = 30$ mm y $r_3 = 40$ mm, determine *a)* la velocidad angular del anillo *B*, *b)* la aceleración de los puntos de la flecha *A* y del anillo *B* que están en contacto y *c)* la magnitud de la aceleración de un punto sobre la superficie exterior del anillo *B*.

15.28 El cilindro *A* desciende con una velocidad de 9 ft/s cuando se aplica de manera repentina el freno al tambor. Si el cilindro desciende 18 ft antes de detenerse y se supone movimiento uniformemente acelerado, determine *a)* la aceleración angular del tambor, *b)* el tiempo requerido para que el cilindro se detenga.

15.29 El sistema se mantiene en reposo mediante el sistema de freno y tambor que se ilustra en la figura. Después de que el freno se libera parcialmente en $t = 0$, se observa que el cilindro se mueve 16 ft en 5 s. Si se supone un movimiento uniformemente acelerado, determine *a)* la aceleración angular del tambor, *b)* la velocidad angular del tambor en $t = 4$ s.

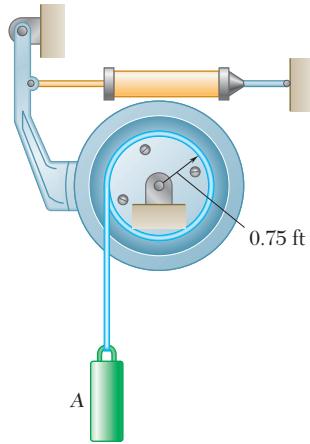


Figura P15.28 y P15.29

15.30 Una polea y dos cargas se conectan mediante cuerdas inextensibles como se muestra en la figura. La carga A tiene una aceleración constante de 300 mm/s^2 y una velocidad inicial de 240 mm/s , ambas dirigidas hacia arriba. Determine, *a*) el número de revoluciones ejecutadas por la polea en 3 s , *b*) la velocidad y la posición de la carga B después de 3 s , *c*) la aceleración del punto D sobre el aro de la polea en el tiempo $t = 0$.

15.31 Una polea y dos bloques se conectan mediante cuerdas inextensibles como se muestra en la figura. La polea parte desde el reposo en $t = 0$ y se acelera a una razón uniforme de 2.4 rad/s^2 en el sentido de las manecillas del reloj. En $t = 4 \text{ s}$, determine la velocidad y posición de *a*) la carga A, *b*) la carga B.

15.32 El disco B está en reposo cuando se pone en contacto con el disco A que gira libremente a 450 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Después de 6 s de deslizamiento, durante el cual cada disco tiene una aceleración angular constante, el disco A alcanza una velocidad angular final de 140 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la aceleración angular de cada disco durante el periodo de deslizamiento.

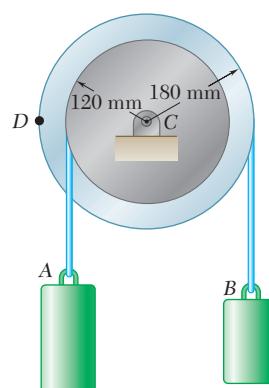


Figura P15.30 y P15.31

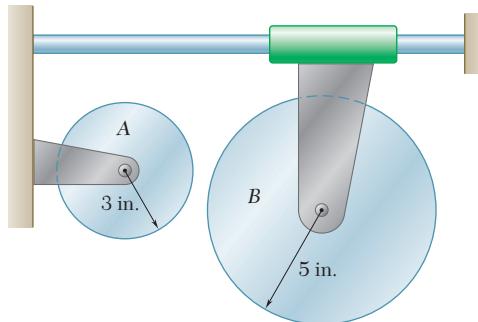


Figura P15.32 y P15.33

15.33 y 15.34 Un sistema de propulsión simple consiste en dos discos A y B. Inicialmente, el disco A tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de 500 rpm , y el disco B se encuentra en reposo. Se sabe que el disco A quedará en reposo en 60 s . Sin embargo, en lugar de esperar hasta que ambos discos estén en reposo para unirlos, el disco B recibe una aceleración angular constante de 2.5 rad/s^2 en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine *a*) en qué tiempo pueden unirse los discos si no resbalan, *b*) la velocidad angular de cada disco cuando se hace el contacto.

15.35 Dos discos de fricción A y B giran con libertad a 240 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj, cuando se ponen en contacto. Después de 8 s de deslizamiento, durante los cuales cada disco tiene una aceleración angular constante, el disco A alcanza una velocidad angular final de 60 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine *a*) la aceleración angular de cada disco durante el periodo de deslizamiento, *b*) el tiempo en el cual la velocidad angular del disco B es igual a cero.

***15.36** En un proceso de impresión continuo, las prensas tiran del papel a una velocidad constante v . Si se denota con r el radio del rodillo de papel en cualquier tiempo dado y con b el espesor del papel, obtenga una expresión para la aceleración angular del rollo de papel.

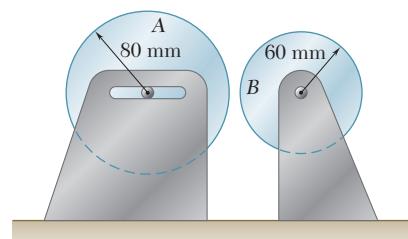


Figura P15.34 y P15.35

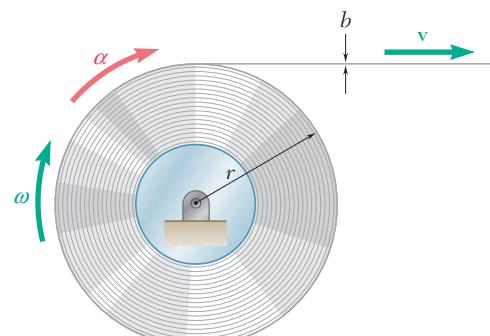


Figura P15.36

- *15.37** Una cinta de grabación de televisión se rebobina en un carrete de una videograbadora que gira con una velocidad angular constante ω_0 . Si se denota con r el radio del carrete en cualquier tiempo dado y con b el grosor de la cinta, obtenga una expresión para la aceleración de la cinta al aproximarse al carrete.

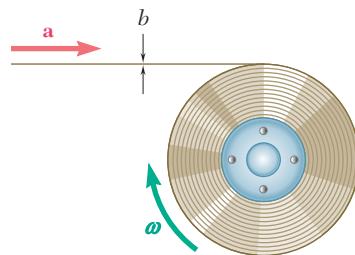


Figura P15.37

15.5. MOVIMIENTO PLANO GENERAL

Tal como se indicó en la sección 15.1, el movimiento plano general es un movimiento plano que no es ni una traslación ni una rotación. Sin embargo, como se verá, *un movimiento plano general siempre puede considerarse como la suma de una traslación y una rotación*.

Considere, por ejemplo, una rueda que gira sobre una pista recta (figura 15.12). A lo largo de cierto intervalo, dos puntos dados A y B se habrán movido, respectivamente, desde A_1 hasta A_2 y desde B_1 hasta B_2 . El mismo resultado podría obtenerse mediante una traslación que llevaría a A y a B hacia A_2 y B'_1 (la línea AB se mantiene vertical), seguida por una rotación alrededor de A que llevaría a B a B_2 . Aunque el movimiento de giro original difiere de la combinación de traslación y rotación cuando estos movimientos se toman en forma sucesiva, el movimiento original puede duplicarse de manera exacta mediante una combinación de traslación y rotación simultáneas.

Otro ejemplo de movimiento plano lo proporciona la figura 15.13, la cual representa una varilla cuyos extremos se deslizan a lo largo de una pista horizontal y una vertical, respectivamente. Este movimiento

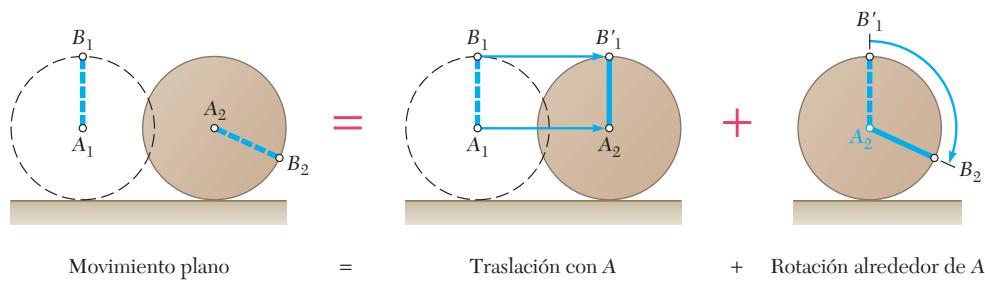


Figura 15.12

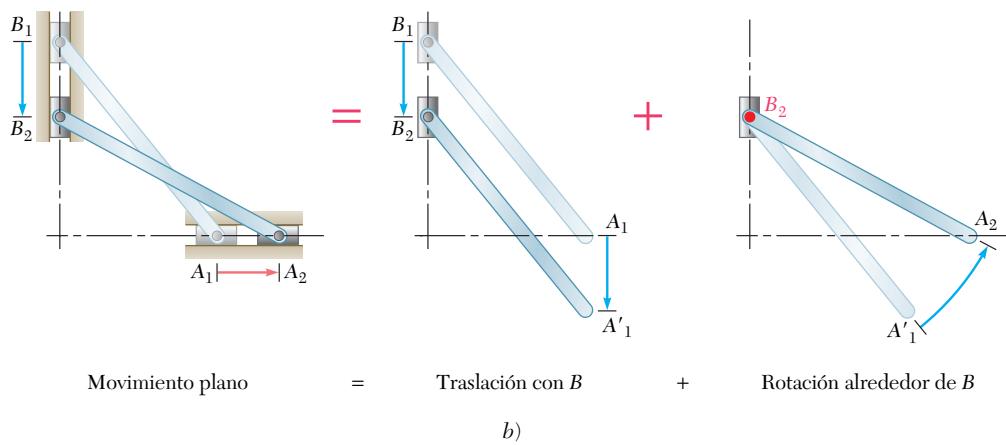
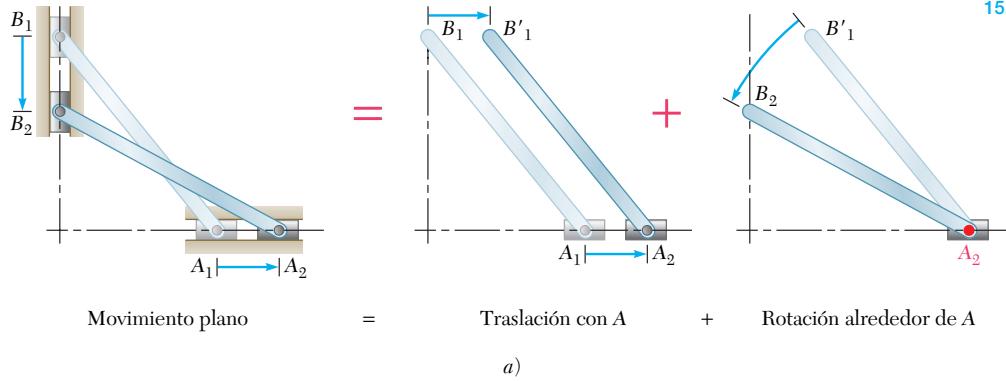


Figura 15.13

puede sustituirse por una traslación en una dirección horizontal y una rotación alrededor de A (figura 15.13a) o por una traslación en una dirección vertical y una rotación alrededor de B (figura 15.13b).

En el caso general de movimiento plano se consideró un pequeño desplazamiento que lleva a dos partículas A y B de una placa representativa, respectivamente, de A_1 y B_1 a A_2 y B_2 (figura 15.14). Este desplazamiento puede dividirse en dos partes: en una, las partículas se mueven hacia A_2 y B'_1 mientras la línea AB mantiene la misma dirección; en el otro, B se mueve hacia B_2 mientras A permanece fijo. La primera parte del movimiento es claramente una traslación y la segunda parte una rotación alrededor de A.

Si se recuerda de la sección 11.12 la definición de movimiento relativo de una partícula con respecto a un sistema de referencia móvil —lo que se opone a su movimiento absoluto con respecto a un sistema de referencia fijo— es posible enunciar del modo siguiente el resultado que se obtuvo antes: dadas dos partículas A y B de una placa rígida en movimiento plano, el movimiento relativo de B con respecto a un sistema de referencia unido a A y de orientación fija es una rotación. Para un observador que se mueve con A, pero que no gira, la partícula B parecerá describir un arco de un círculo centrado en A.

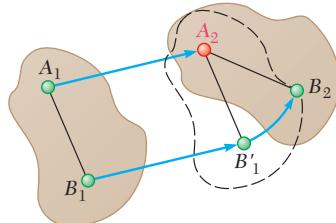


Figura 15.14

15.6. VELOCIDAD ABSOLUTA Y VELOCIDAD RELATIVA EN EL MOVIMIENTO PLANO



Fotografía 15.4 Los sistemas de engranajes planetarios se usan a altas razones de reducción con espacio y peso mínimos. Los engranajes pequeños realizan movimiento plano general.

En la sección anterior se analizó que cualquier movimiento plano de una placa puede ser reemplazado por una traslación definida mediante el movimiento de un punto de referencia arbitrario A y una rotación simultánea alrededor de A . La velocidad absoluta \mathbf{v}_B de una partícula B de la cadena se obtiene de la fórmula de velocidad relativa que se obtuvo en la sección 11.12,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (15.17)$$

donde el miembro del lado derecho representa una suma vectorial. La velocidad \mathbf{v}_A corresponde a la traslación de la placa con A , mientras que la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ se asocia con la rotación de la placa en torno a A y se mide con respecto a ejes centrados en A de orientación fija (figura 15.15). Al denotar mediante $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A , y por $\omega \mathbf{k}$ la velocidad angular de la placa con respecto a los ejes de orientación fija, se tiene de (15.10) y (15.10')

$$\mathbf{v}_{B/A} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad v_{B/A} = r\omega \quad (15.18)$$

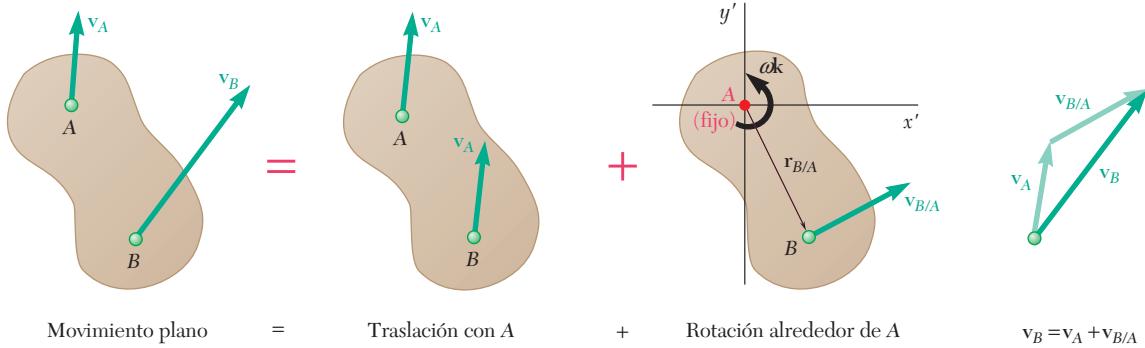


Figura 15.15

donde r es la distancia de A a B . Sustituyendo $\mathbf{v}_{B/A}$ de (15.18) en (15.17), también se puede escribir

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad (15.17')$$

Como ejemplo, se necesita considerar otra vez la varilla AB de la figura 15.13. Suponiendo que se conoce la velocidad \mathbf{v}_A del extremo A , se propone encontrar la velocidad \mathbf{v}_B del extremo B y la velocidad angular ω de la varilla, en términos de la velocidad \mathbf{v}_A , la longitud l y el ángulo θ . Al elegir A como un punto de referencia, se expresa que el movimiento dado es equivalente a la traslación con A y una rotación simultánea alrededor de A (figura 15.16). La velocidad absoluta de B debe entonces ser igual a la suma vectorial

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (15.17)$$

Advierta que mientras se conozca la dirección de $\mathbf{v}_{B/A}$, su magnitud $l\omega$ es desconocida. Sin embargo, esto se compensa por el hecho de que se conoce la dirección \mathbf{v}_B . Por lo tanto, es posible completar el diagrama de la figura 15.16. Al despejar las magnitudes de v_B y ω se escribe

$$v_B = v_A \tan \theta \quad \omega = \frac{v_{B/A}}{l} = \frac{v_A}{l \cos \theta} \quad (15.19)$$

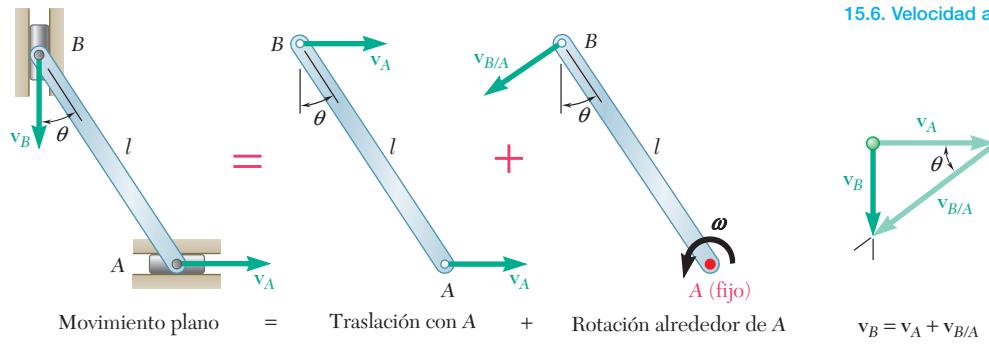


Figura 15.16

El mismo resultado se obtiene utilizando *B* como un punto de referencia. Al descomponer el movimiento dado en una traslación con *B* y una rotación simultánea alrededor de *B* (figura 15.17), se escribe la ecuación

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \quad (15.20)$$

que se representa de manera gráfica en la figura 15.17. Note que $\mathbf{v}_{A/B}$ y $\mathbf{v}_{B/A}$ tienen la misma magnitud $l\omega$ pero sentido opuesto. Por lo tanto, el sentido de la velocidad relativa depende del punto de referencia que se ha elegido y es necesario determinarlo de manera cuidadosa en el diagrama apropiado (figura 15.16 o 15.17).

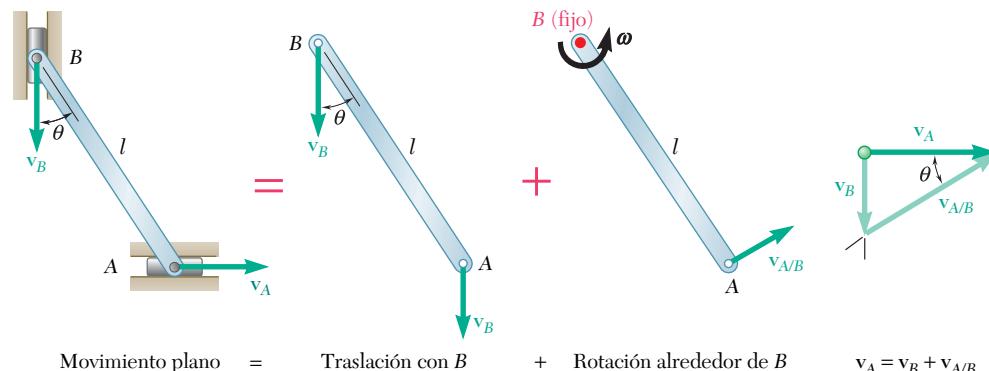
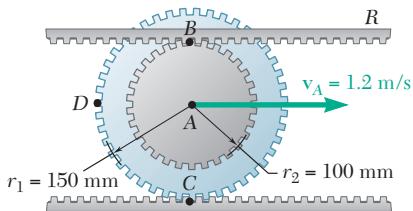


Figura 15.17

Por último, observe que la velocidad angular ω de la varilla en su rotación alrededor de *B* es la misma que en su rotación en torno a *A*. En ambos casos se mide mediante la razón de cambio del ángulo θ . Este resultado es bastante general; por lo tanto, se debe tener presente que *la velocidad angular ω de un cuerpo rígido en movimiento plano es independiente del punto de referencia*.

La mayoría de los mecanismos no consisten en una sino en *varias* partes móviles. Cuando las distintas partes de un mecanismo se unen mediante pasadores, el análisis del mecanismo puede efectuarse considerando cada parte como un cuerpo rígido, teniendo en cuenta que los puntos donde se unen dos partes deben tener la misma velocidad absoluta (véase el problema resuelto 15.3). Es posible utilizar un análisis similar cuando intervienen engranes, ya que los dientes en contacto también deben tener la misma velocidad absoluta. Sin embargo, cuando un mecanismo contiene partes que se deslizan entre sí, la velocidad relativa de las partes en contacto debe tomarse en cuenta (véanse las secciones 15.10 y 15.11).



PROBLEMA RESUELTO 15.2

El engrane doble que se muestra rueda sobre una cremallera estacionaria inferior; la velocidad de su centro A es 1.2 m/s dirigida hacia la derecha. Determine a) la velocidad angular del engrane, b) las velocidades de la cremallera superior R y del punto D del engrane.

SOLUCIÓN

a) Velocidad angular del engrane. Puesto que el engrane rueda sobre la cremallera inferior, su centro A se mueve una distancia igual a la circunferencia exterior $2\pi r_1$ por cada revolución completa del engrane. Al observar que 1 rev = 2π rad y que cuando A se mueve hacia la derecha ($x_A > 0$) el engrane gira en el sentido de las manecillas del reloj ($\theta < 0$), se escribe

$$\frac{x_A}{2\pi r_1} = -\frac{\theta}{2\pi} \quad x_A = -r_1\theta$$

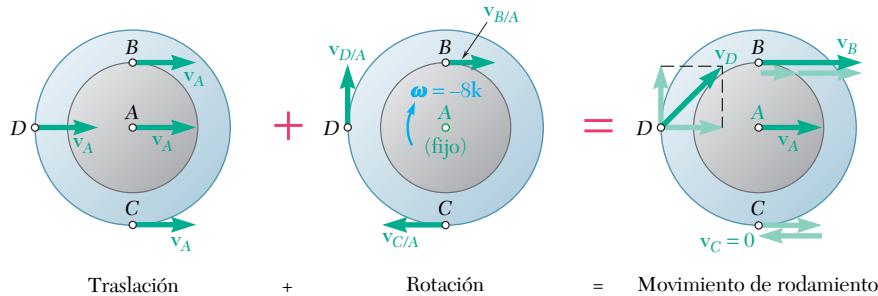
Al diferenciar con respecto al tiempo t y sustituir los valores conocidos $v_A = 1.2 \text{ m/s}$ y $r_1 = 150 \text{ mm} = 0.150 \text{ m}$, se obtiene

$$v_A = -r_1\omega \quad 1.2 \text{ m/s} = -(0.150 \text{ m})\omega \quad \omega = -8 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \omega \mathbf{k} = -(8 \text{ rad/s})\mathbf{k}$$

donde \mathbf{k} es un vector que apunta hacia fuera del papel.

b) Velocidades. El movimiento de rodamiento se transforma en dos movimientos componentes: una traslación con el centro A y una rotación alrededor del centro A. En la traslación, todos los puntos del engrane se mueven con la misma velocidad \mathbf{v}_A . En la rotación, cada punto P del engrane se mueve alrededor de A con una velocidad relativa $\mathbf{v}_{P/A} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{P/A}$, donde $\mathbf{r}_{P/A}$ es el vector de posición de P relativo a A.



Velocidad de la cremallera superior. La velocidad de la cremallera superior es igual a la velocidad del punto B; se escribe

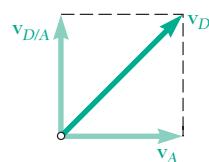
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_R &= \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \\ &= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times (0.100 \text{ m})\mathbf{j} \\ &= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0.8 \text{ m/s})\mathbf{i} = (2 \text{ m/s})\mathbf{i} \end{aligned}$$

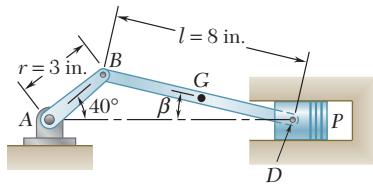
$$\mathbf{v}_R = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

Velocidad del punto D.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{D/A} = \mathbf{v}_A + \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/A} \\ &= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times (-0.150 \text{ m})\mathbf{i} \\ &= (1.2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1.2 \text{ m/s})\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_D = 1.697 \text{ m/s} \angle 45^\circ$$

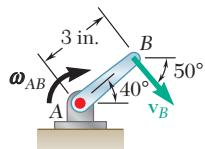




PROBLEMA RESUELTO 15.3

En el mecanismo mostrado, la manivela AB tiene una velocidad angular constante en el sentido de las manecillas del reloj de 2000 rpm. Para la posición indicada de la manivela, determine *a)* la velocidad angular de la biela BD , *b)* la velocidad del pistón P .

SOLUCIÓN



Movimiento de la manivela AB . La manivela AB gira alrededor del punto A . Al expresar ω_{AB} en rad/s y escribir $v_B = r\omega_{AB}$ se obtiene

$$\omega_{AB} = \left(2000 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 209.4 \text{ rad/s}$$

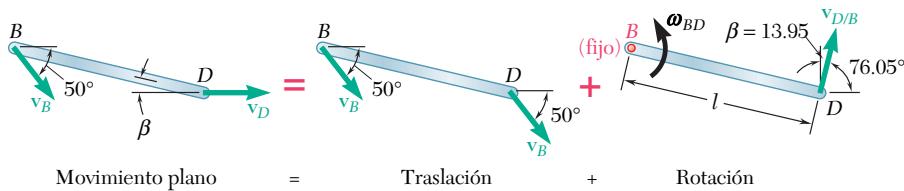
$$v_B = (AB)\omega_{AB} = (3 \text{ in.})(209.4 \text{ rad/s}) = 628.3 \text{ in./s}$$

$$v_B = 628.3 \text{ in./s} \rightarrow 50^\circ$$

Movimiento de la biela BD . Este movimiento se considera como un movimiento plano general. Utilizando la ley de los senos, se calcula el ángulo β entre la biela y la horizontal:

$$\frac{\sin 40^\circ}{8 \text{ in.}} = \frac{\sin \beta}{3 \text{ in.}} \quad \beta = 13.95^\circ$$

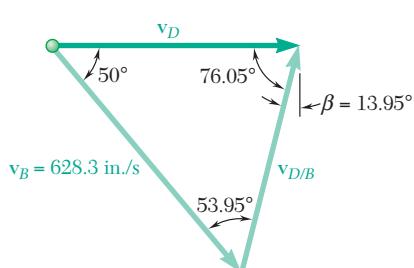
La velocidad \mathbf{v}_D del punto D , donde la biela está unida al pistón, debe ser horizontal, en tanto que la velocidad del punto B es igual a la velocidad \mathbf{v}_B que se obtuvo antes. Descomponiendo el movimiento de BD en una traslación con B y una rotación alrededor de B , se obtiene



Al expresar la relación entre las velocidades \mathbf{v}_D , \mathbf{v}_B y $\mathbf{v}_{D/B}$, se escribe

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B}$$

A continuación se dibuja el diagrama vectorial correspondiente a esta ecuación. Si se recuerda que $\beta = 13.95^\circ$, se determinan los ángulos del triángulo y se escribe



$$\frac{v_D}{\sin 53.95^\circ} = \frac{v_{D/B}}{\sin 50^\circ} = \frac{628.3 \text{ in./s}}{\sin 76.05^\circ}$$

$$v_{D/B} = 495.9 \text{ in./s} \quad \mathbf{v}_{D/B} = 495.9 \text{ in./s} \rightarrow 76.05^\circ$$

$$v_D = 523.4 \text{ in./s} = 43.6 \text{ ft/s} \quad \mathbf{v}_D = 43.6 \text{ ft/s} \rightarrow$$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_D = 43.6 \text{ ft/s} \rightarrow \blacktriangleleft$$

Puesto que $v_{D/B} = l\omega_{BD}$, se obtiene

$$495.9 \text{ in./s} = (8 \text{ in.})\omega_{BD} \quad \omega_{BD} = 62.0 \text{ rad/s} \blacktriangleright$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a analizar la velocidad de cuerpos en *movimiento plano general*. Se observó que un movimiento plano general siempre puede considerarse como la suma de los dos movimientos estudiados en esta lección, a saber, *una traslación y una rotación*.

Para resolver un problema en el que interviene la velocidad de un cuerpo en movimiento plano deben seguirse los siguientes pasos.

1. Determinar siempre que sea posible la velocidad de los puntos del cuerpo donde éste se encuentre conectado a otro cuerpo cuyo movimiento se conozca. Ese otro cuerpo tal vez sea un brazo o una manivela que gira con una velocidad angular determinada [problema resuelto 15.3].

2. A continuación, dibujar una “ecuación de diagrama” que se utilizará en la solución (figuras 15.15 y 15.16). Esta “ecuación” consistirá en los siguientes diagramas.

a) Diagrama de movimiento plano: Dibuje un diagrama del cuerpo que incluya todas las dimensiones y que muestre aquellos puntos para los que se conozca o se busque la velocidad.

b) Diagrama de traslación: Elija un punto de referencia A para el cual conozca la dirección y/o la magnitud de la velocidad \mathbf{v}_A , y dibuje un segundo diagrama que muestre el cuerpo en traslación con todos sus puntos con la misma velocidad \mathbf{v}_A .

c) Diagrama de rotación: Considere el punto A como un punto fijo y dibuje un diagrama que muestre al cuerpo en rotación alrededor de A. Indique la velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{k}$ del cuerpo y las velocidades relativas con respecto a A de los otros puntos, como la velocidad $\mathbf{v}_{B/A}$ de B relativa a A.

3. Escribir la fórmula de velocidad relativa

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

Aunque es factible resolver esta ecuación vectorial en forma analítica al escribir las ecuaciones escalares correspondientes, usualmente usted encontrará más sencillo resolverla utilizando un triángulo de vectores (figura 15.16).

4. Es posible utilizar un punto de referencia diferente para obtener una solución equivalente. Por ejemplo, si se elige el punto B como el punto de referencia, la velocidad del punto A se expresa como

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

Advierta que las velocidades relativas $\mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{v}_{A/B}$ tienen la misma magnitud, pero sentido opuesto. Por lo tanto, las velocidades relativas dependen del punto de referencia que se ha seleccionado. Sin embargo, la velocidad angular es independiente de la elección del punto de referencia.

Problemas

15.38 El movimiento de la varilla AB es guiado por los pasadores en A y B , los cuales se deslizan en las ranuras mostradas. En el instante que se indica, $\theta = 40^\circ$ y el pasador en B se mueve hacia arriba y a la izquierda con una velocidad constante de 6 in./s. Determine *a)* la velocidad angular de la varilla y *b)* la velocidad del pasador en el extremo A .

15.39 El movimiento de la varilla AB es guiado por los pasadores en A y B , los cuales se deslizan en las ranuras indicadas. En el instante mostrado, $\theta = 30^\circ$ y el pasador en A se mueve hacia abajo con una velocidad constante de 9 in./s. Determine *a)* la velocidad angular de la varilla y *b)* la velocidad del pasador en el extremo B .

15.40 Se han unido unas pequeñas ruedas a los extremos de la varilla AB y ruedan libremente a lo largo de las superficies que se muestran. Si la rueda A se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 1.5 m/s, determine *a)* la velocidad angular de la varilla, *b)* la velocidad del extremo B de la varilla.

15.41 El collarín A se mueve hacia arriba con una velocidad constante de 1.2 m/s. En el instante mostrado cuando $\theta = 25^\circ$, determine *a)* la velocidad angular de la varilla AB , *b)* la velocidad del collarín B .

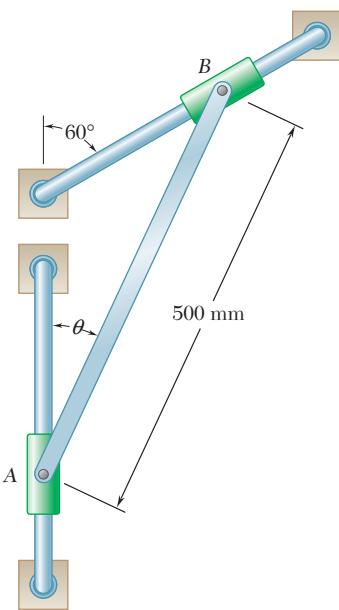


Figura P15.41 y P15.42

15.42 El collarín B se mueve hacia abajo y a la izquierda con una velocidad constante de 1.6 m/s. En el instante mostrado cuando $\theta = 40^\circ$, determine *a)* la velocidad angular de la varilla AB , *b)* la velocidad del collarín A .

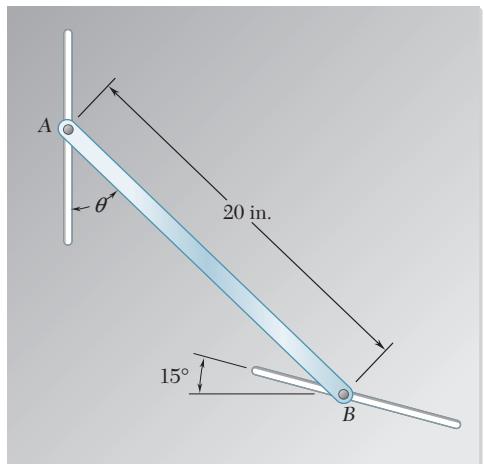


Figura P15.38 y P15.39

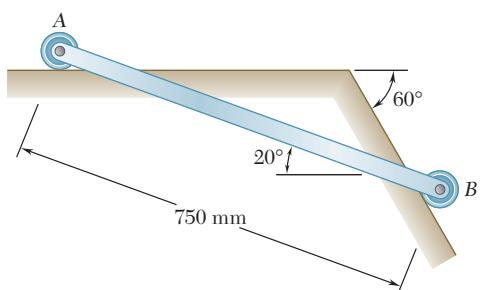


Figura P15.40

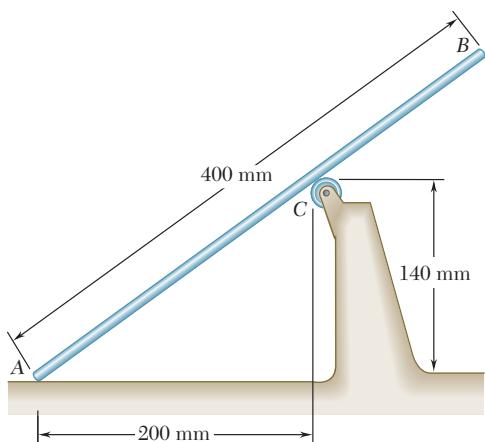


Figura P15.43

15.43 La varilla AB se mueve sobre una pequeña rueda en C mientras el extremo A se desplaza hacia la derecha con una velocidad constante de 500 mm/s. En el instante mostrado, determine *a*) la velocidad angular de la varilla y *b*) la velocidad del extremo B de la varilla.

15.44 La placa mostrada en la figura se mueve en el plano xy . Si $(v_A)_x = 12$ in./s, $(v_B)_x = -4$ in./s y $(v_C)_y = -24$ in./s, determine *a*) la velocidad angular de la placa, *b*) la velocidad del punto B .

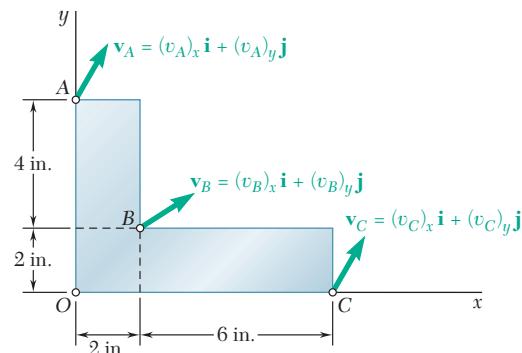


Figura P15.44

15.45 En el problema 15.44 determine *a*) la velocidad del punto A , *b*) el punto de la placa con velocidad cero.

15.46 La placa mostrada en la figura se mueve en el plano xy . Si $(v_A)_x = 120$ mm/s, $(v_B)_y = 300$ mm/s y $(v_C)_y = -60$ mm/s, determine *a*) la velocidad angular de la placa, *b*) la velocidad del punto A .

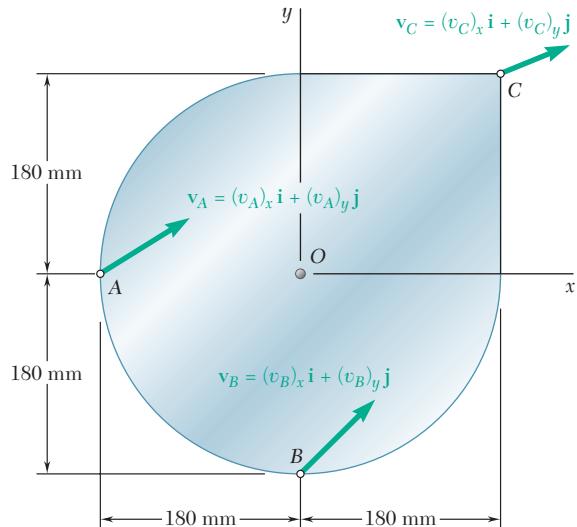


Figura P15.46

15.47 En el problema 15.46 determine *a*) la velocidad del punto B , *b*) el punto de la placa con velocidad cero.

- 15.48** En el sistema de engranes planetarios que se muestra en la figura, el radio de los engranes A, B, C y D es de 3 in. y el radio del engrane exterior E es de 9 in. Si se sabe que el engrane E tiene una velocidad angular de 120 rpm en el sentido de las manecillas del reloj y que el engrane central tiene una velocidad angular de 150 rpm en el mismo sentido, determine a) la velocidad angular de cada engrane planetario y b) la velocidad angular de la araña que conecta a los engranes planetarios.

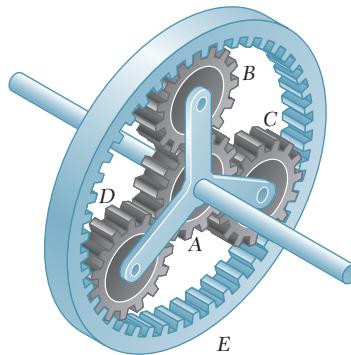


Figura P15.48 y P15.49

- 15.49** En el sistema de engranes planetarios que se muestra en la figura, el radio del engrane central A es a , el radio de los engranes planetarios es b y el radio del engrane exterior E es $a + 2b$. La velocidad angular del engrane A es ω_A en el sentido de las manecillas del reloj, y el engrane exterior es estacionario. Si la velocidad angular de la araña BCD debe ser $\omega_A/5$ en el sentido de las manecillas del reloj, determine a) el valor requerido del cociente b/a y b) la correspondiente velocidad angular de cada engrane planetario.

- 15.50** El engrane A gira con una velocidad angular de 120 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Si se sabe que la velocidad angular del brazo AB es de 90 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la velocidad angular correspondiente del engrane B.

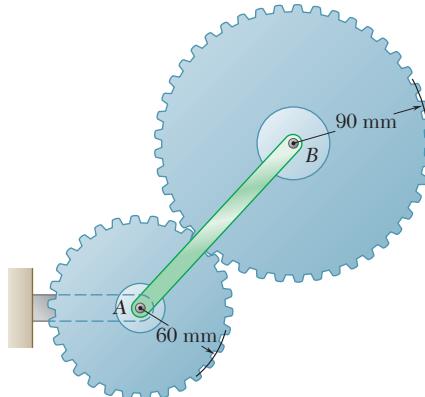


Figura P15.50 y P15.51

- 15.51** El brazo AB gira con una velocidad angular de 42 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la velocidad angular requerida del engrane A para la cual a) la velocidad angular del engrane B es de 20 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj, b) el movimiento del engrane B es una traslación curvilínea.

- 15.52** El brazo AB gira con una velocidad angular de 20 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Si se sabe que el engrane exterior C es estacionario, determine a) la velocidad angular del engrane B, b) la velocidad del diente del engrane localizado en el punto D.

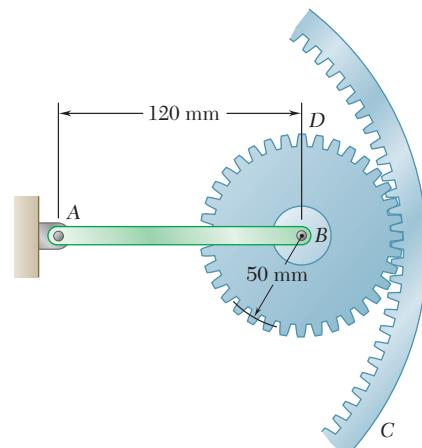


Figura P15.52

15.53 y 15.54 El brazo ACB gira alrededor del punto C con una velocidad angular de 40 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por medio de pasadores insertados en sus centros, dos discos de fricción A y B se montan sobre el brazo ACB como se muestra en la figura. Si los dos discos ruedan sin deslizarse en las superficies de contacto, determine la velocidad angular de *a)* el disco A , *b)* el disco B .

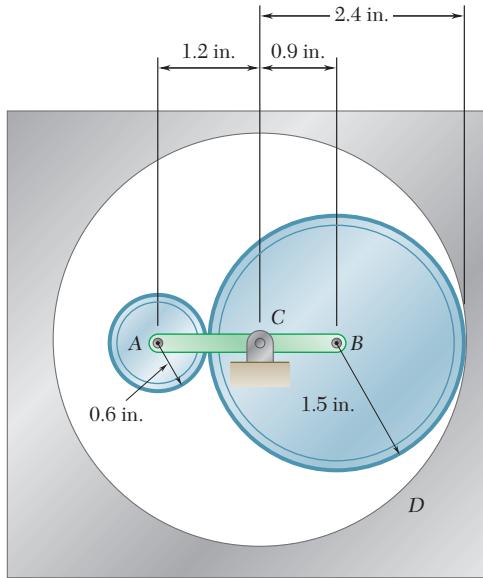


Figura P15.53

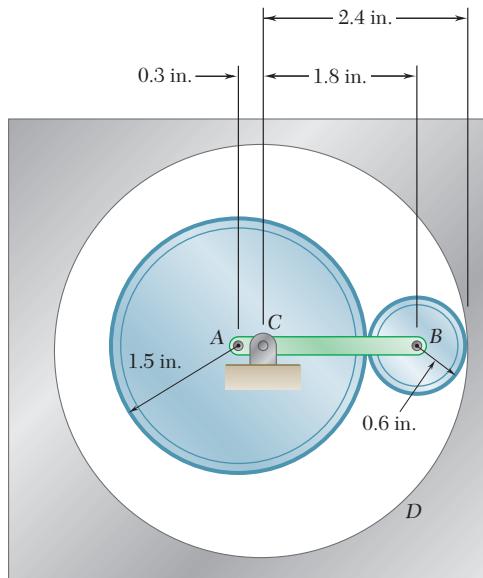


Figura P15.54

15.55 Si la manivela AB tiene una velocidad angular constante de 160 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la velocidad angular de la varilla BD y la velocidad del collarín D cuando *a)* $\theta = 0$, *b)* $\theta = 90^\circ$.

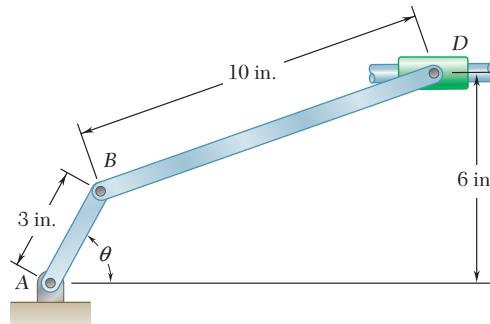


Figura P15.55 y P15.56

15.56 Si la manivela AB tiene una velocidad angular constante de 160 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la velocidad angular de la varilla BD y la velocidad del collarín D cuando $\theta = 60^\circ$.

15.57 En el mecanismo mostrado, $l = 160$ mm y $b = 60$ mm. Si la manivela AB gira con una velocidad angular constante de 1 000 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la velocidad del pistón P y la velocidad angular de la biela cuando *a)* $\theta = 0^\circ$ *y b)* $\theta = 90^\circ$.

15.58 En el mecanismo que se muestra en la figura P15.57 y P15.58, $l = 160$ mm y $b = 60$ mm. Si la manivela AB gira con una velocidad angular constante de 1 000 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la velocidad del pistón P y la velocidad angular de la biela cuando $\theta = 60^\circ$.

15.59 Una cremallera recta descansa sobre un engrane de radio r y está fija a un bloque B en la forma que se indica. Si se denota con ω_D la velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj del engrane D y con θ el ángulo que forma la cremallera y la horizontal, obtenga expresiones para la velocidad del bloque B y la velocidad angular de la cremallera en términos de r , θ y ω_D .

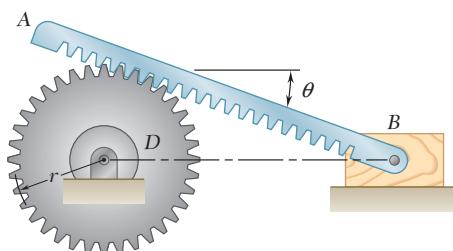


Figura P15.59, P15.60 y P15.61

15.60 Una cremallera recta descansa sobre un engrane de radio $r = 75$ mm y está fija a un bloque B en la forma que se indica. Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad angular del engrane D es de 15 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj y que $\theta = 20^\circ$, determine *a)* la velocidad del bloque B , *b)* la velocidad angular de la cremallera.

15.61 Una cremallera recta descansa sobre un engrane de radio $r = 60$ mm y está fija a un bloque B en la forma que se indica. Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad del bloque B es de 200 mm/s hacia la derecha y que $\theta = 25^\circ$, determine *a)* la velocidad angular del engrane D , *b)* la velocidad angular de la cremallera.

15.62 En la rueda excéntrica que se muestra, un disco de 2 in. de radio gira alrededor del eje O que se ubica a 0.5 in. del centro A del disco. La distancia entre el centro A del disco y el pasador en B es de 8 in. Si la velocidad angular del disco es de 900 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la velocidad del bloque cuando $\theta = 30^\circ$.

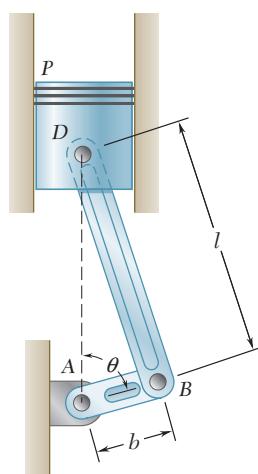


Figura P15.57 y P15.58

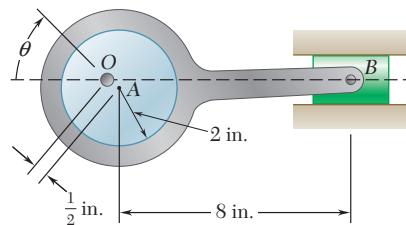


Figura P15.62

15.63 a 15.65 En la posición mostrada, la barra *AB* tiene una velocidad angular de 4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la velocidad angular de las barras *BD* y *DE*.

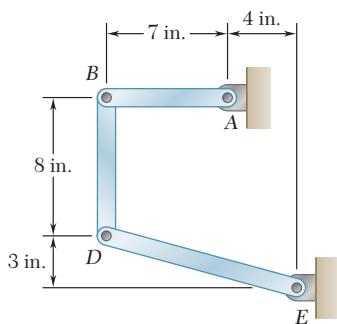


Figura P15.63

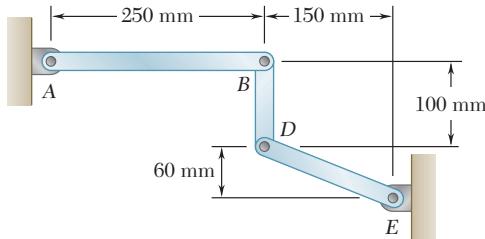


Figura P15.64

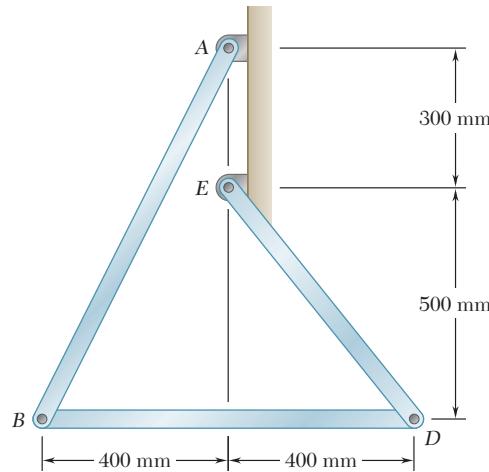


Figura P15.65

15.66 En la posición mostrada, la barra *DE* tiene una velocidad angular constante de 10 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Si $h = 500$ mm, determine *a*) la velocidad angular de la barra *FBD*, *b*) la velocidad del punto *F*.

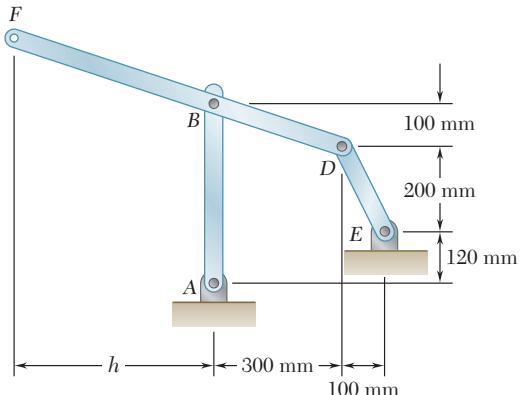


Figura P15.66 y P15.67

15.67 En la posición mostrada, la barra DE tiene una velocidad angular constante de 10 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Determine *a*) la distancia h para la cual la velocidad del punto F es vertical, *b*) la velocidad correspondiente del punto F .

15.68 En la posición mostrada, la barra AB tiene aceleración angular nula y una velocidad angular constante de 20 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine *a*) la velocidad angular del elemento BDH , *b*) la velocidad del punto G .

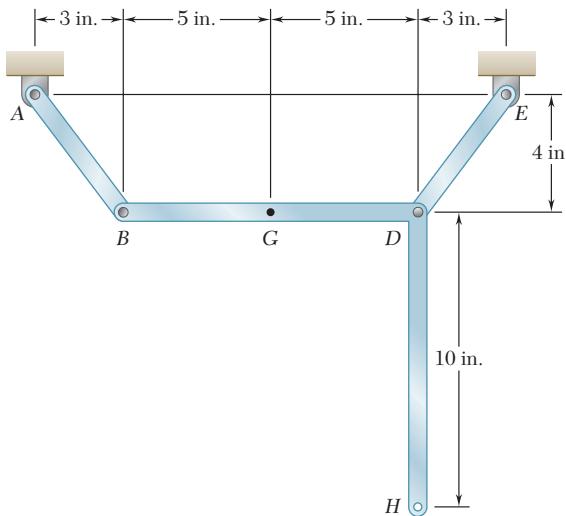


Figura P15.68 y P15.69

15.69 En la posición mostrada, la barra AB tiene aceleración angular nula y una velocidad angular constante de 20 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine *a*) la velocidad angular del elemento BDH , *b*) la velocidad del punto H .

15.70 Un automóvil viaja hacia la derecha a una rapidez constante de 48 mi/h. Si el diámetro del neumático es de 22 in., determine las velocidades de los puntos B , C , D y E en el borde del mismo.

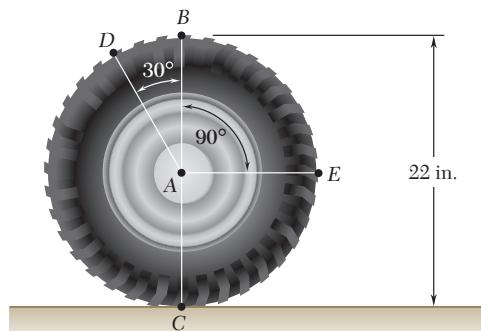


Figura P15.70

- 15.71** La rueda de 80 mm de radio que se muestra en la figura, gira hacia la izquierda con una velocidad de 900 mm/s. Si la distancia AD es de 50 mm, determine la velocidad del collarín y la velocidad angular de la varilla AB cuando *a)* $\beta = 0$ y *b)* $\beta = 90^\circ$.

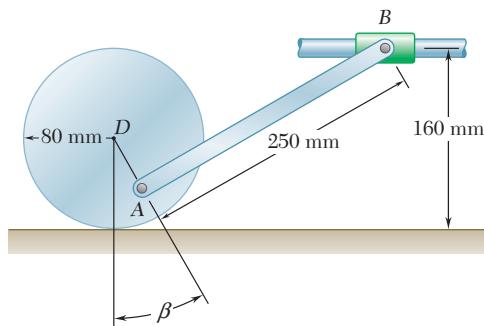


Figura P15.71

- *15.72** Para el arreglo de engranes que se muestra en la figura, obtenga una expresión para la velocidad angular ω_C del engrane C y demuestre que ω_C es independiente del radio del engrane B . Suponga que el punto A está fijo y denote las velocidades angulares de la barra ABC y del engrane A con ω_{ABC} y ω_A , respectivamente.

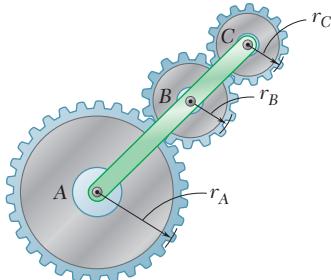


Figura P15.72

15.7. CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN EN EL MOVIMIENTO PLANO

Considere el movimiento plano general de una placa. Se intenta demostrar que, en cualquier instante dado, la velocidad de las diversas partículas de la placa es la misma como si la placa girara alrededor de cierto eje perpendicular a su plano, el cual se conoce como *eje de rotación instantáneo*. Este eje interseca el plano de la placa en el punto C , denominado *centro instantáneo de rotación* de la placa.

En primer lugar, recuerde que el movimiento plano de una placa siempre puede sustituirse mediante una traslación definida por el movimiento de un punto de referencia arbitrario A y mediante una rotación en torno a A . En cuanto a las velocidades, la traslación se caracteriza por la velocidad \mathbf{v}_A del punto de referencia A , y la rotación se caracteriza por la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la placa (que es independiente de la elección de A). De este modo, la velocidad \mathbf{v}_A del punto A y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la placa definen por completo las velocidades de todas las demás partículas de la placa (figura 15.18a). A continuación suponga que se conocen \mathbf{v}_A y $\boldsymbol{\omega}$ y que ambas son diferentes de cero.



Fotografía 15.5 Si los neumáticos de este automóvil ruedan sin deslizamiento, el centro instantáneo de rotación de una llanta es el punto de contacto entre el camino y el neumático.

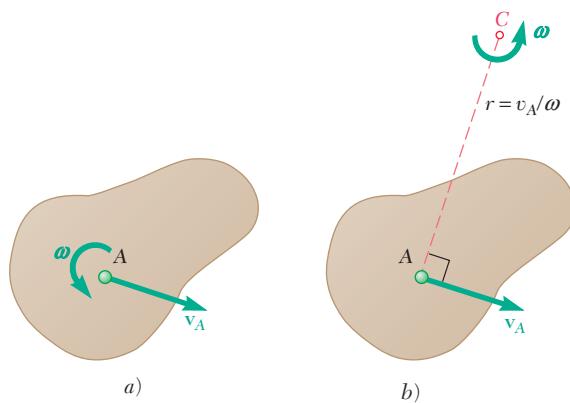


Figura 15.18

(Si $\mathbf{v}_A = 0$, el mismo punto A es el centro instantáneo de rotación y si $\boldsymbol{\omega} = 0$, todas las partículas tienen la misma velocidad \mathbf{v}_A .) Estas velocidades podrían obtenerse dejando que la placa gire con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ alrededor del punto C ubicado sobre la perpendicular a \mathbf{v}_A a una distancia $r = v_A/\omega$ de A , como se indica en la figura 15.18b. Se verifica que la velocidad de A sería perpendicular a AC y que su magnitud sería $r\omega = (v_A/\omega)\omega = v_A$. De esta manera, las velocidades de todas las demás partículas de la placa serían las mismas que se definieron originalmente. Por lo tanto, *en cuanto a lo que se refiere a las velocidades, la placa parece girar alrededor del centro instantáneo C* en el instante considerado.

La posición del centro instantáneo puede definirse de otras dos formas. Si se conocen las direcciones de las velocidades de las dos partículas A y B de la placa y si éstas son diferentes, el centro instantáneo C se obtiene dibujando la perpendicular a \mathbf{v}_A a través de A y la perpendicular a \mathbf{v}_B a través de B y determinando el punto en el cual se intersecan estas dos líneas (figura 15.19a). Si las velocidades \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B de las dos partículas A y B son perpendiculares a la línea AB y si se conocen sus magnitudes, el centro instantáneo puede encontrarse intersectando la línea AB con la línea que une los extremos de los vectores \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B (figura 15.19b). Advierta que si \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B fueran paralelas en la figura 15.19a o si \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B tuvieran la misma magnitud en la figura 15.19b,

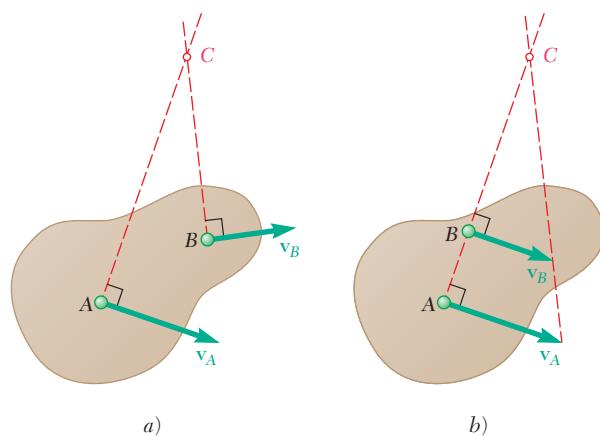


Figura 15.19

el centro instantáneo C estaría a una distancia infinita y ω sería cero. Todos los puntos de la placa tendrían la misma velocidad.

Para observar cómo es posible poner en práctica el concepto de centro instantáneo de rotación considere de nuevo la varilla de la sección 15.6. Al dibujar la perpendicular a \mathbf{v}_A a través de A y la perpendicular a \mathbf{v}_B a través de B (figura 15.20), se obtiene el centro instantáneo C . En el instante considerado, las velocidades de todas las partículas de la varilla

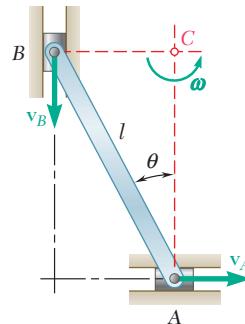


Figura 15.20

son las mismas, como si esta última girara en torno a C . Ahora bien, si se conoce la magnitud v_A de la velocidad A , la magnitud ω de la velocidad angular de la varilla puede obtenerse al escribir

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l \cos \theta}$$

La magnitud de la velocidad de B se obtiene entonces al escribir

$$v_B = (BC)\omega = l \operatorname{sen} \theta \frac{v_A}{l \cos \theta} = v_A \operatorname{tan} \theta$$

Advierta que sólo las *velocidades absolutas* intervienen en el cálculo.

El centro instantáneo de la placa en el movimiento plano se localiza en la placa o fuera de la misma. Si ocurriera lo primero, la partícula C que coincide con el centro instantáneo en un instante dado t debe tener velocidad cero en ese instante. Sin embargo, debe notarse que el centro de rotación instantáneo sólo es válido en un instante determinado. De tal modo, la partícula C de la placa que coincide con el centro instantáneo en el tiempo t generalmente no coincidirá con el centro instantáneo en el tiempo $t + \Delta t$; si bien su velocidad es cero en el tiempo t , probablemente será diferente de cero en el tiempo $t + \Delta t$. Lo anterior significa que, en general, la partícula C *no tiene aceleración cero* y, por lo tanto, que las *aceleraciones* de las diversas partículas de la placa *no pueden* determinarse como si la placa estuviera girando alrededor de C .

Conforme avance el movimiento de la placa, el centro instantáneo se mueve en el espacio. Sin embargo, se señaló que la posición del centro instantáneo de la placa se mantiene sin cambio. Por consiguiente, el centro instantáneo describe una curva en el espacio, llamada *centroda espacial*, y otra curva en la placa, llamada *centroda corporal* (figura 15.21). Es posible demostrar que en cualquier instante, estas dos curvas son tangentes en C y que cuando la placa se mueve, la centroda corporal *rodará* sobre la centroda espacial.

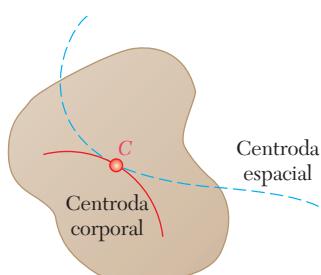
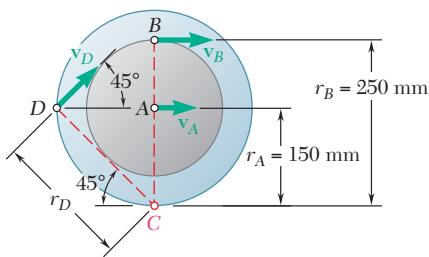


Figura 15.21

PROBLEMA RESUELTO 15.4

Resuelva el problema resuelto 15.2 con el método del centro instantáneo de rotación.

SOLUCIÓN



a) Velocidad angular del engrane. Puesto que el engrane rueda sobre la cremallera inferior estacionaria, el punto de contacto C del engrane con la cremallera no tiene velocidad; el punto C es en consecuencia el centro instantáneo de rotación. Se escribe

$$v_A = r_A \omega \quad 1.2 \text{ m/s} = (0.150 \text{ m})\omega$$

$$\omega = 8 \text{ rad/s} \leftarrow$$

b) Velocidades. En lo que se refiere a las velocidades, todos los puntos del engrane parecen girar alrededor del centro instantáneo.

Velocidad de la cremallera superior. Si se recuerda que $v_R = v_B$, se escribe

$$v_R = v_B = r_B \omega \quad v_R = (0.250 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 2 \text{ m/s}$$

$$v_R = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

Velocidad del punto D. Puesto que $r_D = (0.150 \text{ m})\sqrt{2} = 0.2121 \text{ m}$, se escribe

$$v_D = r_D \omega \quad v_D = (0.2121 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 1.697 \text{ m/s}$$

$$v_D = 1.697 \text{ m/s} \angle 45^\circ \leftarrow$$

PROBLEMA RESUELTO 15.5

Resuelva el problema resuelto 15.3 con el método del centro instantáneo de rotación.

SOLUCIÓN

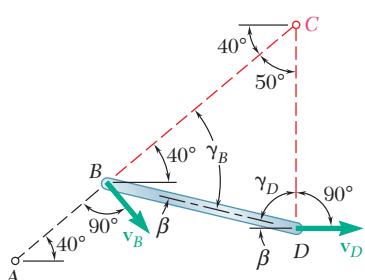
Movimiento de la manivela AB. Con referencia al problema resuelto 15.3, se obtiene la velocidad del punto B; $v_B = 628.3 \text{ in./s} \angle 50^\circ$.

Movimiento de la biela BD. Se localiza primero el centro instantáneo C dibujando líneas perpendiculares a las velocidades absolutas v_B y v_D . Al recordar del problema resuelto 15.3 que $\beta = 13.95^\circ$ y que $BD = 8 \text{ in.}$, se resuelve el triángulo BCD .

$$\gamma_B = 40^\circ + \beta = 53.95^\circ \quad \gamma_D = 90^\circ - \beta = 76.05^\circ$$

$$\frac{BC}{\sin 76.05^\circ} = \frac{CD}{\sin 53.95^\circ} = \frac{8 \text{ in.}}{\sin 50^\circ}$$

$$BC = 10.14 \text{ in.} \quad CD = 8.44 \text{ in.}$$



Puesto que la biela BD parece girar alrededor del punto C, se escribe

$$v_B = (BC)\omega_{BD}$$

$$628.3 \text{ in./s} = (10.14 \text{ in.})\omega_{BD}$$

$$\omega_{BD} = 62.0 \text{ rad/s} \leftarrow$$

$$v_D = (CD)\omega_{BD} = (8.44 \text{ in.})(62.0 \text{ rad/s})$$

$$= 523 \text{ in./s} = 43.6 \text{ ft/s}$$

$$v_P = v_D = 43.6 \text{ ft/s} \rightarrow$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se presentó el *centro instantáneo de rotación* en un movimiento plano. Esto proporcionó una manera alternativa de resolver problemas en los que intervienen *velocidades* de diversos puntos de un cuerpo en movimiento plano.

Como su nombre sugiere, el *centro instantáneo de rotación* es el punto alrededor del cual es posible suponer que un cuerpo está girando en un instante dado, al determinar las velocidades de los puntos del cuerpo en ese instante.

A. Para determinar el centro instantáneo de rotación del cuerpo en movimiento plano, es necesario utilizar uno de los siguientes procedimientos.

1. Si se conocen tanto la velocidad v_A del punto A como la velocidad angular ω del cuerpo (figura 15.18):

a) Dibujar un bosquejo del cuerpo, en el que se muestre el punto A, su velocidad v_A y la velocidad angular ω del cuerpo.

b) A partir de A dibujar una línea perpendicular a v_A del lado v_A desde donde se ve que esta velocidad tiene *el mismo sentido que ω* .

c) Localizar el centro instantáneo C sobre esta línea, a una distancia $r = v_A/\omega$ desde el punto A.

2. Si las direcciones de las velocidades de los dos puntos A y B se conocen y son diferentes (figura 15.19a):

a) Dibujar un bosquejo del cuerpo en el que se muestren los puntos A y B y sus velocidades v_A y v_B .

b) Desde A y B dibujar líneas perpendiculares a v_A y v_B , respectivamente. El centro instantáneo C se ubica en el punto donde se intersectan las dos líneas.

c) Si se conoce la velocidad de uno de los dos puntos es posible determinar la velocidad angular del cuerpo. Por ejemplo, si se conoce v_A , se puede escribir $\omega = v_A/AC$, donde AC es la distancia desde el punto A hasta el centro instantáneo C.

3. Si se conocen las velocidades de los dos puntos A y B y ambas son perpendiculares a la línea AB (figura 15.19b):

a) Dibujar un bosquejo del cuerpo en el que se muestren los puntos A y B con sus velocidades v_A y v_B dibujadas a escala.

b) Dibujar una línea a través de los puntos A y B y otra línea a través de las puntas de los vectores v_A y v_B . El centro instantáneo C se localiza en los puntos donde se cortan las dos líneas.

c) La velocidad angular del cuerpo se obtiene al dividir v_A entre AC o v_B entre BC.

d) Si las velocidades v_A y v_B tienen la misma magnitud, las dos líneas que se dibujaron en la parte b no se intersectan; el centro instantáneo C está a una distancia infinita. La velocidad angular ω es cero y *el cuerpo está en traslación*.

B. Una vez que se ha determinado el centro instantáneo y la velocidad angular del cuerpo, se puede determinar la velocidad v_P de cualquier punto P del cuerpo de la siguiente manera:

1. Dibujar un bosquejo del cuerpo en el que se muestre el punto P, el centro instantáneo de rotación C y la velocidad angular ω .

2. Dibujar una línea desde P hasta el centro instantáneo C y medir o calcular la distancia desde P hasta C.

3. La velocidad v_P es un vector perpendicular a la línea PC, del mismo sentido que ω , y de magnitud $v_P = (PC)\omega$.

Por último, tenga presente que el centro instantáneo de rotación *sólo* se puede utilizar para determinar velocidades. *No es posible emplearlo para determinar aceleraciones.*

Problemas

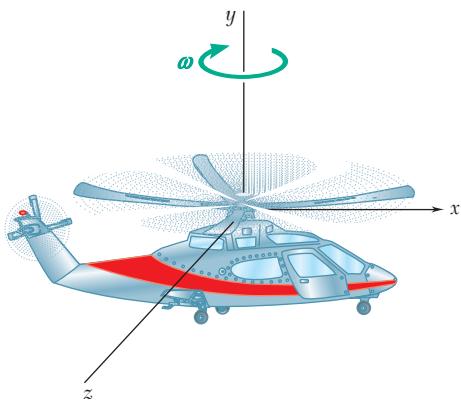


Figura P15.74

- 15.73** Una viga AE de 10 ft se baja por medio de dos grúas viajeras. En el instante que se muestra la velocidad del punto D es de 24 in./s hacia abajo y la velocidad en el punto E es de 36 in./s hacia abajo. Determine *a)* el centro instantáneo de rotación de la viga y *b)* la velocidad del punto A .

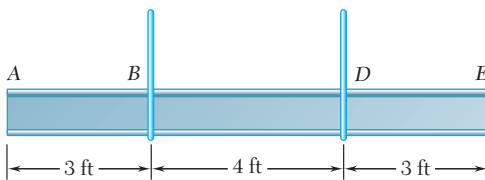


Figura P15.73

- 15.74** Un helicóptero se mueve horizontalmente en la dirección x a una rapidez de 120 mi/h. Si se sabe que las aspas principales giran en el sentido de las manecillas del reloj con una velocidad angular de 180 rpm, determine el eje de rotación instantáneo de las aspas principales.

- 15.75** El carrete de cinta que se muestra y el armazón en el que está montado se jalan hacia arriba a una rapidez $v_A = 750 \text{ mm/s}$. Si el carrete de 80 mm de radio tiene una velocidad angular de 15 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y en el instante mostrado el grosor total de la cinta en el carrete es de 20 mm, determine *a)* el centro instantáneo de rotación del carrete, *b)* las velocidades de los puntos B y D .

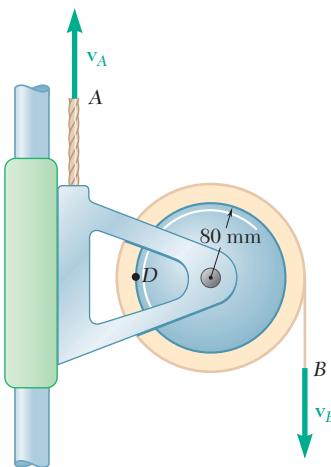


Figura P15.75 y P15.76

- 15.76** El carrete de cinta que se muestra y el armazón en el que está montado se jalan hacia arriba a una rapidez $v_A = 100 \text{ mm/s}$. Si el extremo B de la cinta se jala hacia abajo con una velocidad de 300 mm/s y en el instante mostrado el grosor total de la cinta en el carrete es de 20 mm, determine *a)* el centro instantáneo de rotación del carrete, *b)* la velocidad del punto D del carrete.

15.77 Retome el problema resuelto 15.2, y ahora suponga que la cremallera inferior no es estacionaria sino que se mueve a la izquierda con una velocidad de 0.6 m/s.

15.78 Una polea doble se fija a un bloque corredizo mediante un pasador en A. La polea interna de 30 mm de radio se une rígidamente a otra polea exterior de 60 mm de radio. Si cada una de las dos cuerdas se jala a una rapidez constante en la forma indicada, determine a) el centro instantáneo de rotación de la doble polea, b) la velocidad del bloque corredizo y c) el número de milímetros de cuerda enrollada o desenrollada de cada polea por segundo.

15.79 Retome el problema 15.78, y ahora suponga que la cuerda E se jala hacia arriba con una rapidez de 160 mm/s y la cuerda F se jala hacia abajo a una rapidez de 200 mm/s.

15.80 y 15.81 Un tambor de 3 in. de radio se une de manera rígida a un tambor de 5 in. de radio en la forma que se indica. Uno de los tambores rueda sin deslizarse sobre la superficie mostrada y una cuerda se enrolla alrededor del otro tambor. Si se sabe que el extremo E de la cuerda se jala hacia la izquierda con una velocidad de 6 in./s, determine a) la velocidad angular de los tambores, b) la velocidad del centro de los tambores y c) la longitud de la cuerda enrollada o desenrollada por segundo.

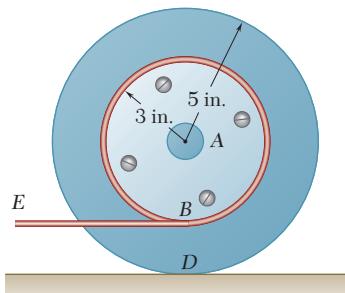


Figura P15.80

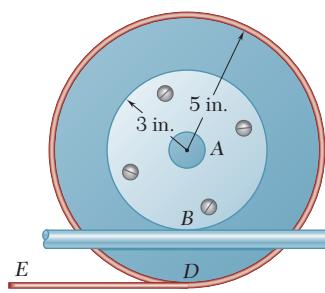


Figura P15.81

15.82 Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad angular de la varilla AB es de 15 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine a) la velocidad angular de la varilla BD, b) la velocidad del punto medio de la varilla BD.

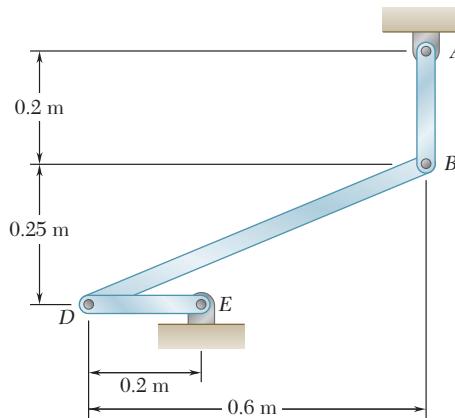


Figura P15.82 y P15.83

15.83 Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad del punto D es de 2.4 m/s hacia arriba, determine a) la velocidad angular de la barra AB, b) la velocidad del punto medio de la barra BD.

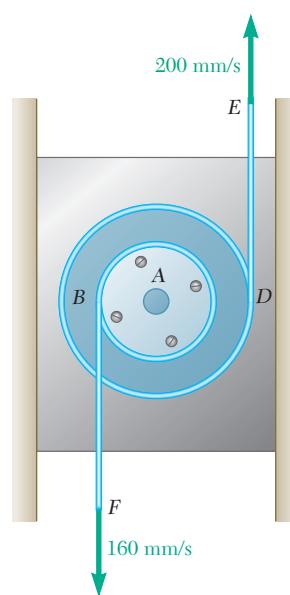


Figura P15.78

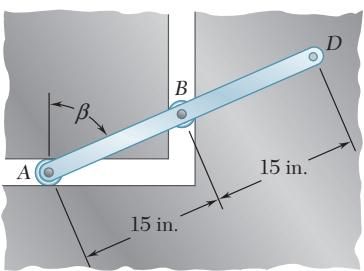


Figura P15.84

15.84 Las ruedas en *A* y *B* giran sobre los carriles horizontal y vertical indicados y guían a la varilla *ABD*. Si en el instante que se muestra $\beta = 60^\circ$ y la velocidad de la rueda *B* es de 40 in./s hacia abajo, determine *a*) la velocidad angular de la varilla y *b*) la velocidad del punto *D*.

15.85 Una puerta levadiza se guía mediante dos ruedas en *A* y *B* que giran sobre las correderas horizontal y vertical que se muestran en la figura. Si cuando $\theta = 40^\circ$ la velocidad de la rueda *B* es de 1.5 ft/s hacia arriba, determine *a*) la velocidad angular de la puerta y *b*) la velocidad del extremo *D* de la puerta.

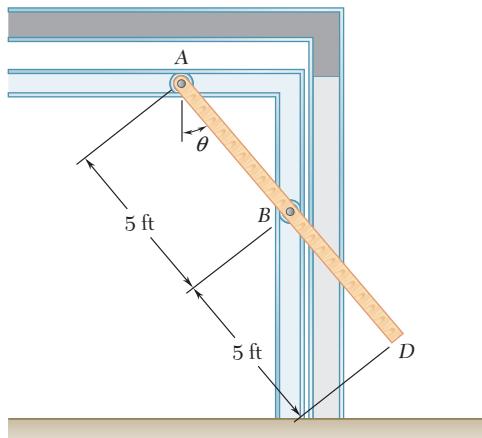


Figura P15.85

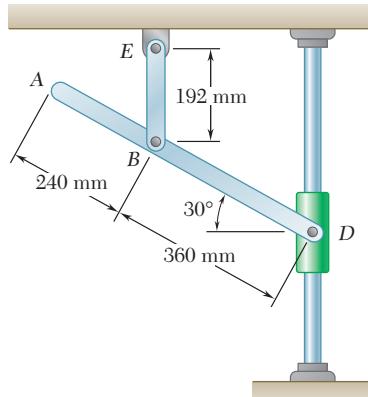


Figura P15.86 y P15.87

15.86 Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad angular de la varilla *BE* es de 4 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a*) la velocidad angular de la varilla *AD*, *b*) la velocidad del collarín *D*, *c*) la velocidad del punto *A*.

15.87 Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad angular del collarín *D* es 1.6 m/s hacia arriba, determine *a*) la velocidad angular de la varilla *AD*, *b*) la velocidad del punto *B*, *c*) la velocidad del punto *A*.

15.88 La barra *AB* puede deslizarse libremente a lo largo del piso y el plano inclinado. Si se denota con \mathbf{v}_A la velocidad del punto *A*, obtenga una expresión para *a*) la velocidad angular de la barra, *b*) la velocidad del extremo *B*.

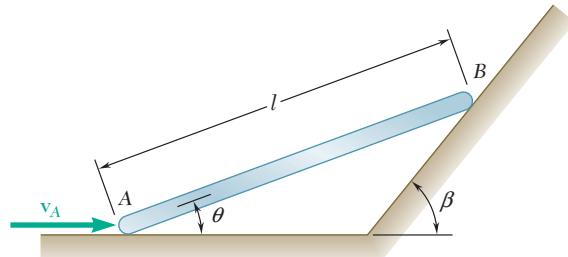


Figura P15.88 y P15.89

15.89 La barra *AB* puede deslizarse libremente a lo largo del piso y el plano inclinado. Si se sabe que $\theta = 20^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $l = 0.6$ m y $v_A = 3$ m/s, determine *a*) la velocidad angular de la barra, *b*) la velocidad del extremo *B*.

- 15.90** El brazo ABD se une mediante pasadores a un collarín en B y a la manivela DE . Si la velocidad del collarín B es de 400 mm/s hacia arriba, determine *a)* la velocidad angular del brazo ABD , *b)* la velocidad del punto A .

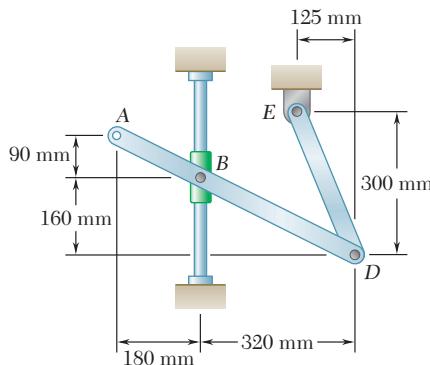


Figura P15.90 y P15.91

- 15.91** El brazo ABD se une mediante pasadores a un collarín en B y a la manivela DE . Si la velocidad angular de la manivela DE es de 1.2 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a)* la velocidad angular del brazo ABD , *b)* la velocidad del punto A .

- 15.92** En la placa FG se han cortado dos ranuras y la placa se ha colocado de manera que en las ranuras entren dos pasadores fijos A y B . Si se sabe que en el instante mostrado la velocidad angular de la manivela DE es de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine *a)* la velocidad del punto F , *b)* la velocidad del punto G .

- 15.93** Dos varillas idénticas ABF y DBE se unen mediante un pasador en B . Si en el instante indicado la velocidad del punto D es de 10 in./s hacia arriba, determine la velocidad de *a)* el punto E y *b)* el punto F .

- 15.94** La barra AB está unida a un collarín en A y está acoplado con una pequeña rueda en B . Si se sabe que cuando $\theta = 60^\circ$ la velocidad del collarín es de 250 mm/s hacia arriba, determine *a)* la velocidad angular de la barra AB , *b)* la velocidad del punto B .

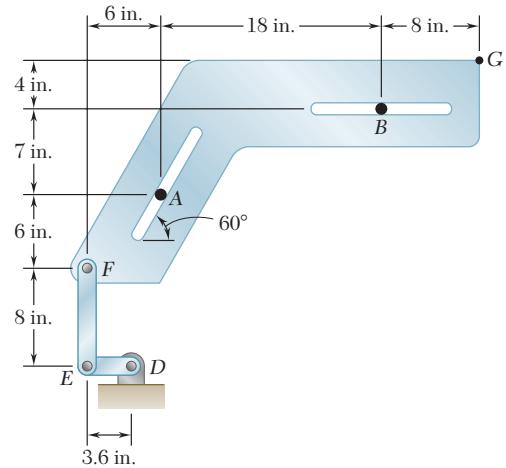


Figura P15.92

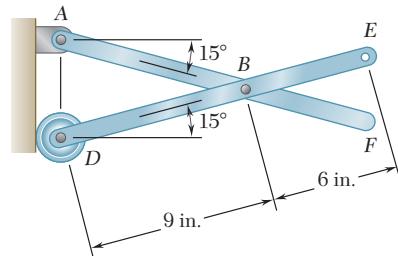


Figura P15.93

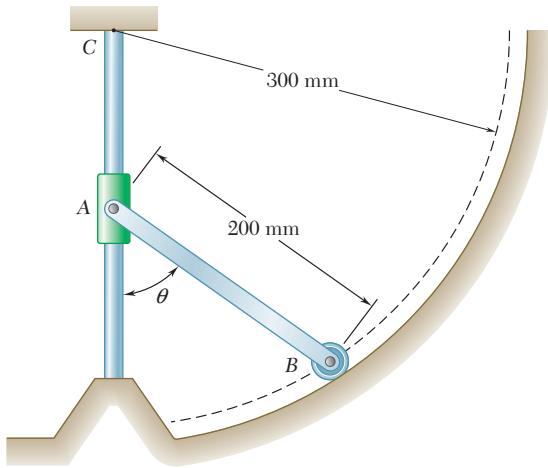


Figura P15.94

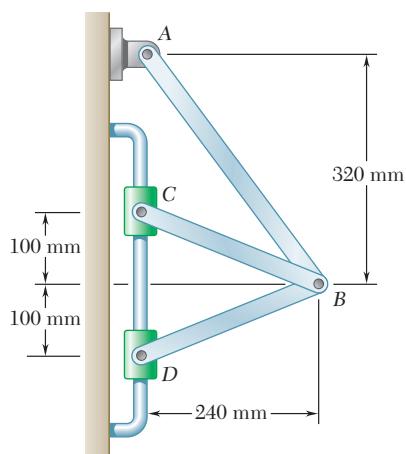


Figura P15.95

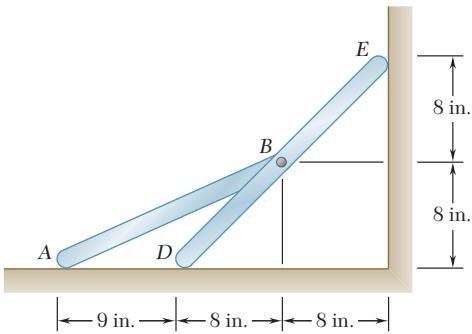
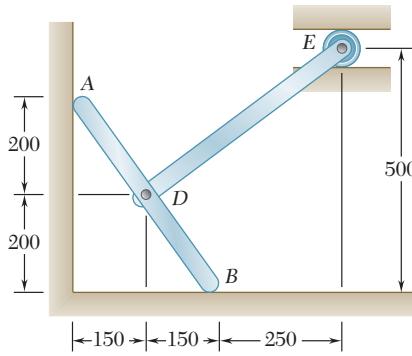


Figura P15.97

15.95 Dos collarines *C* y *D* se mueven a lo largo de la varilla vertical que se muestra en la figura. Si se sabe que la velocidad del collarín *C* es de 660 mm/s hacia abajo, determine *a)* la velocidad del collarín *D*, *b)* la velocidad angular del elemento *AB*.

15.96 Dos varillas de 500 mm están conectadas mediante un pasador en *D* como lo indica la figura. Si el punto *B* se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 360 mm/s, determine para el instante mostrado *a)* la velocidad angular de cada varilla y *b)* la velocidad de *E*.



Dimensiones en mm

Figura P15.96

15.97 Dos varillas *AB* y *DE* están conectadas como se indica en la figura. Si el punto *D* se mueve hacia la izquierda con una velocidad de 40 in./s, determine *a)* la velocidad angular de cada varilla y *b)* la velocidad del punto *A*.

15.98 Dos varillas *AB* y *DE* están conectadas como se indica en la figura. Si el punto *B* se mueve hacia abajo con una velocidad de 60 in./s, determine *a)* la velocidad angular de cada varilla y *b)* la velocidad del punto *E*.

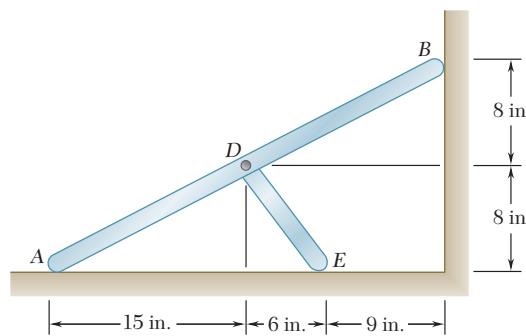


Figura P15.98

15.99 Describa la centroda espacial y la centroda corporal de la varilla *ABD* del problema 15.84. (*Sugerencia:* La centroda corporal no tiene que estar en la parte física de la varilla.)

15.100 Describa la centroda espacial y la centroda corporal del engrane del problema resuelto 15.2, cuando gira sobre una cremallera horizontal estacionaria.

15.101 Con el método de la sección 15.7, retome el problema 15.62.

15.102 Con el método de la sección 15.7, retome el problema 15.64.

15.103 Con el método de la sección 15.7, retome el problema 15.65.

15.104 Con el método de la sección 15.7, retome el problema 15.70.

15.8. ACCELERACIONES ABSOLUTA Y RELATIVA EN EL MOVIMIENTO PLANO

En la sección 15.5 se analizó que cualquier movimiento plano puede sustituirse por una traslación definida por el movimiento de un punto de referencia arbitrario A y una rotación simultánea alrededor de A . Esta propiedad se utilizó en la sección 15.6 para determinar la velocidad de los diferentes puntos de la placa en movimiento. La misma propiedad se utilizará ahora para determinar la aceleración de los puntos de la placa.

Hay que recordar primero que la aceleración absoluta \mathbf{a}_B de una partícula de la placa puede obtenerse de la fórmula de la aceleración relativa que se dedujo en la sección 11.12,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (15.21)$$

donde el miembro del lado derecho representa una suma vectorial. La aceleración \mathbf{a}_A corresponde a la traslación de la placa con A , en tanto que la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ se asocia con la rotación de la placa en torno a A y se mide con respecto a los ejes centrados en A y de orientación fija. Hay que recordar de la sección 15.3 que la aceleración relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ puede descomponerse en dos componentes, una *componente tangencial* $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ perpendicular a la línea AB , y una *componente normal* $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ dirigida hacia A (figura 15.22). Denotando por $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A y, respectivamente, mediante $\omega \mathbf{k}$ y $\alpha \mathbf{k}$ la velocidad angular y la aceleración angular de la placa con respecto a los ejes de orientación fija, se tiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{B/A})_t &= \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} & (a_{B/A})_t &= r\alpha \\ (\mathbf{a}_{B/A})_n &= -\omega^2 \mathbf{r}_{B/A} & (a_{B/A})_n &= r\omega^2 \end{aligned} \quad (15.22)$$

donde r es la distancia desde A hasta B . Al sustituir en (15.21) las expresiones que se obtienen para las componentes tangencial y normal de $\mathbf{a}_{B/A}$, también se puede escribir

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A} \quad (15.21')$$



Fotografía 15.6 El engrane central gira alrededor de un eje fijo y está conectado mediante pasadores a tres barras que realizan movimiento plano general.

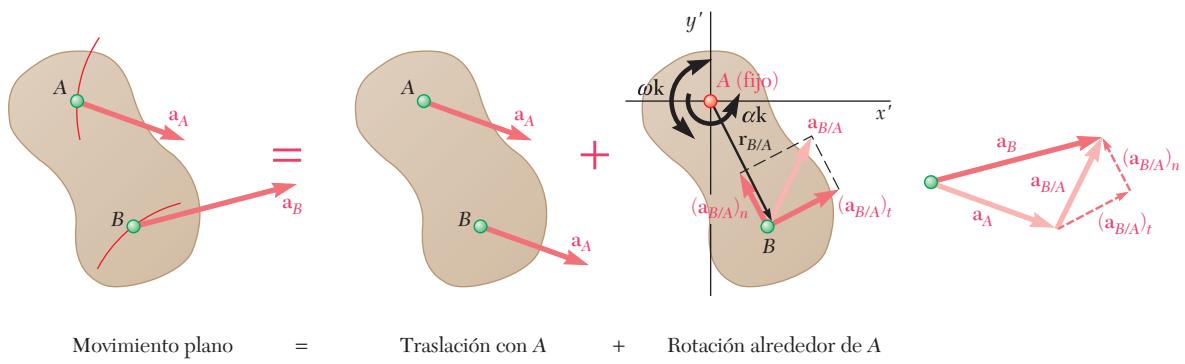


Figura 15.22

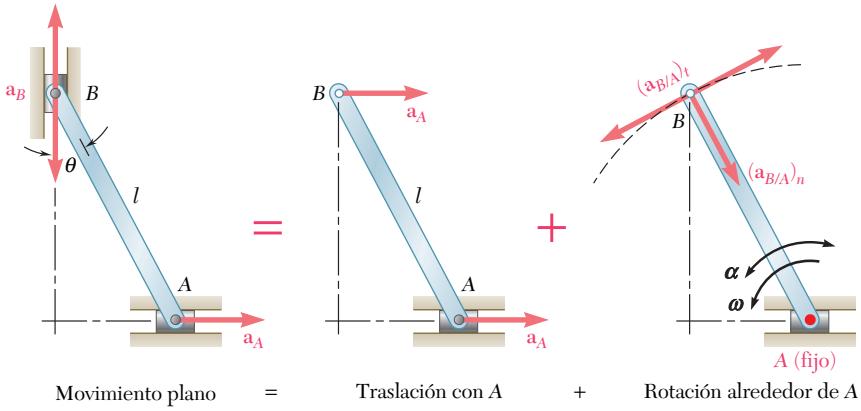


Figura 15.23

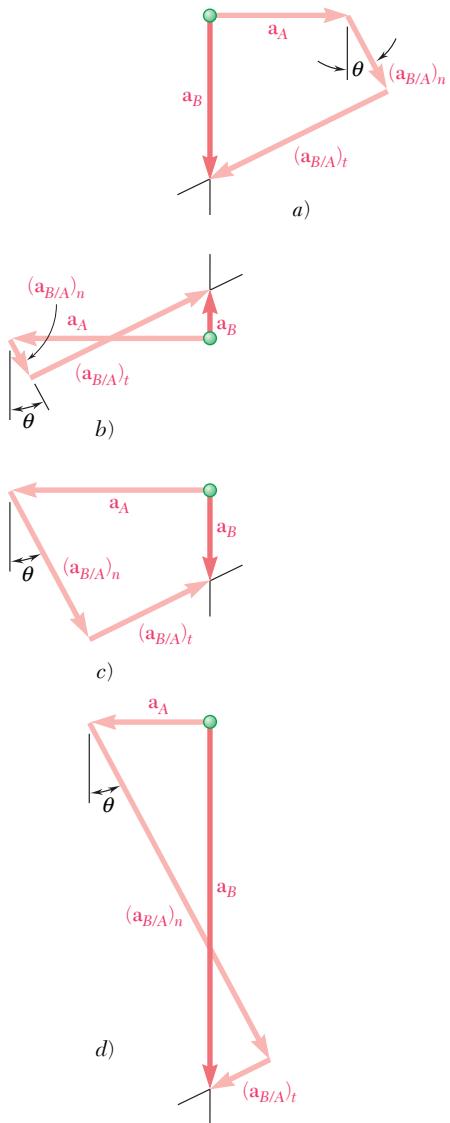


Figura 15.24

Como ejemplo, hay que considerar otra vez la varilla AB cuyos extremos se deslizan, respectivamente, a lo largo de una corredera horizontal y una vertical (figura 15.23). Si se supone que se conocen la velocidad \mathbf{v}_A y la aceleración \mathbf{a}_A de A, se determina la aceleración \mathbf{a}_B de B y la aceleración angular α de la varilla. Al elegir A como un punto de referencia, se expresa que el movimiento dado es equivalente a una traslación con A y a una rotación alrededor de A. La aceleración absoluta de B debe ser igual a la suma

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t \quad (15.23)$$

donde $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ tiene la magnitud $l\omega^2$ y está dirigida hacia A, en tanto que $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ tiene la magnitud $l\alpha$ y es perpendicular a AB. Se advertirá que no hay forma de indicar si la componente tangencial $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ está dirigida hacia la izquierda o hacia la derecha y, por lo tanto, ambas direcciones posibles para esta componente se indican en la figura 15.23. De modo similar, se indican ambos sentidos posibles para \mathbf{a}_B , ya que no se sabe si el punto B se acelera hacia arriba o hacia abajo.

La ecuación (15.23) se ha expresado de manera geométrica en la figura 15.24. Es posible obtener cuatro polígonos vectoriales diferentes, dependiendo del sentido de \mathbf{a}_A y de la magnitud relativa de a_A y $(a_{B/A})_n$. Si se va a determinar a_B y α de uno de estos diagramas, no sólo se debe conocer a_A y θ , sino también ω . Por consiguiente, la velocidad angular de la varilla debe determinarse por separado mediante uno de los métodos indicados en las secciones 15.6 y 15.7. Los valores de a_B y α pueden obtenerse de ese modo considerando de manera sucesiva las componentes x y y de los vectores mostrados en la figura 15.24. En el caso de un polígono a, por ejemplo, se escribe

$$\begin{aligned} \rightarrow & \text{ componentes } x: & 0 &= a_A + l\omega^2 \sin \theta - l\alpha \cos \theta \\ \uparrow & \text{ componentes } y: & -a_B &= -l\omega^2 \cos \theta - l\alpha \sin \theta \end{aligned}$$

y se resuelve para a_B y α . Las dos incógnitas también se obtienen mediante la medición directa sobre el polígono vectorial. En ese caso, debe tenerse cuidado para dibujar primero los vectores conocidos \mathbf{a}_A y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$.

Resulta bastante evidente que la determinación de las aceleraciones es considerablemente más complicada que la determinación de las velocidades. Sin embargo, en el ejemplo que se considera aquí, los ex-

tremos A y B de la varilla se estaban moviendo a lo largo de correderas rectas, y los diagramas dibujados eran relativamente simples. Si A y B se hubieran movido a lo largo de correderas curvas, habría sido necesario descomponer las aceleraciones \mathbf{a}_A y \mathbf{a}_B en las componentes normal y tangencial y la solución del problema habría implicado seis vectores diferentes.

Cuando un mecanismo consta de varias partes móviles que están conectadas mediante pasadores, el análisis del mecanismo puede efectuarse considerando cada parte como un cuerpo rígido, teniendo presente que los puntos en los cuales se conectan las dos partes deben tener la misma aceleración absoluta (véase el problema resuelto 15.7). En el caso de engranes dentados, las componentes tangenciales de la aceleración de los dientes en contacto son iguales, aunque sus componentes normales son diferentes.

*15.9. ANÁLISIS DEL MOVIMIENTO PLANO EN TÉRMINOS DE UN PARÁMETRO

En el caso de ciertos mecanismos, es posible expresar las coordenadas x y y de todos los puntos importantes del mecanismo por medio de expresiones analíticas simples que contienen un solo parámetro. En estos casos a veces es ventajoso determinar de manera directa la velocidad absoluta y la aceleración absoluta de los diferentes puntos del mecanismo, ya que las componentes de la velocidad y de la aceleración de un punto dado pueden obtenerse diferenciando las coordenadas x y y de ese punto.

Hay que considerar otra vez la varilla AB cuyos extremos se deslizan, de manera respectiva, en una corredera horizontal y en una vertical (figura 15.25). Las coordenadas x_A y y_B de los extremos de la varilla pueden expresarse en términos del ángulo θ que forman la varilla con la vertical

$$x_A = l \sin \theta \quad y_B = l \cos \theta \quad (15.24)$$

Al diferenciar las ecuaciones (15.24) dos veces con respecto a t , se escribe

$$\begin{aligned} v_A &= \dot{x}_A = l\dot{\theta} \cos \theta \\ a_A &= \ddot{x}_A = -l\dot{\theta}^2 \sin \theta + l\ddot{\theta} \cos \theta \\ v_B &= \dot{y}_B = -l\dot{\theta} \sin \theta \\ a_B &= \ddot{y}_B = -l\dot{\theta}^2 \cos \theta - l\ddot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

Si se recuerda que $\dot{\theta} = \omega$ y $\ddot{\theta} = \alpha$, se obtiene

$$v_A = l\omega \cos \theta \quad v_B = -l\omega \sin \theta \quad (15.25)$$

$$a_A = -l\omega^2 \sin \theta + l\alpha \cos \theta \quad a_B = -l\omega^2 \cos \theta - l\alpha \sin \theta \quad (15.26)$$

Hay que observar que el signo positivo de v_A o a_A indica que la velocidad \mathbf{v}_A o la aceleración \mathbf{a}_A está dirigida hacia la derecha; un signo positivo para v_B o a_B indica que \mathbf{v}_B o \mathbf{a}_B apunta hacia arriba. Las ecuaciones (15.25) pueden utilizarse para determinar, por ejemplo, v_B y ω cuando se conocen v_A y θ . Al sustituir ω en (15.26), se puede determinar entonces a_B y α si se conoce a_A .

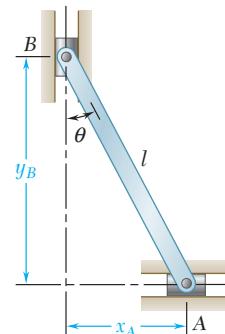
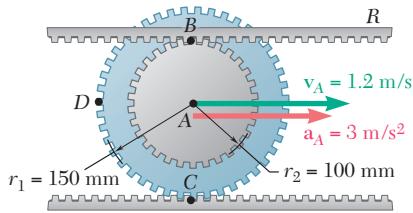


Figura 15.25



PROBLEMA RESUELTO 15.6

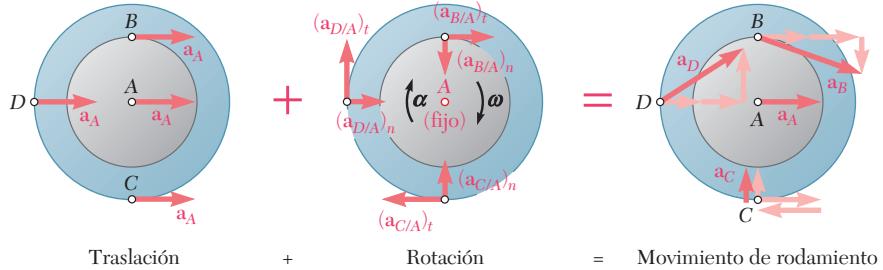
El centro del engrane doble del problema resuelto 15.2 tiene una velocidad de 1.2 m/s hacia la derecha y una aceleración de 3 m/s² hacia la derecha. Recordando que la cremallera inferior es estacionaria, determine a) la aceleración angular del engrane, b) la aceleración de los puntos B, C y D del engrane.

SOLUCIÓN

a) Aceleración angular del engrane. En el problema resuelto 15.2, $x_A = -r_1\theta$ y $v_A = -r_1\omega$. Diferenciando la última ecuación con respecto al tiempo, se obtiene $a_A = -r_1\alpha$.

$$\begin{aligned} v_A &= -r_1\omega & 1.2 \text{ m/s} &= -(0.150 \text{ m})\omega & \omega &= -8 \text{ rad/s} \\ a_A &= -r_1\alpha & 3 \text{ m/s}^2 &= -(0.150 \text{ m})\alpha & \alpha &= -20 \text{ rad/s}^2 \\ && && \pmb{\alpha} &= \alpha \mathbf{k} = -(20 \text{ rad/s}^2) \mathbf{k} \end{aligned}$$

b) Aceleraciones. El movimiento de rodamiento del engrane se descompone en una traslación con A y una rotación alrededor de A.



Aceleración del punto B. Al sumar vectorialmente las aceleraciones correspondientes a la traslación y a la rotación, se obtiene

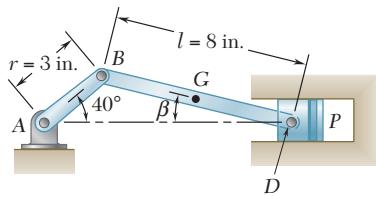
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n \\ &= \mathbf{a}_A + \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A} \\ &= (3 \text{ m/s}^2) \mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2) \mathbf{k} \times (0.100 \text{ m}) \mathbf{j} - (8 \text{ rad/s})^2 (0.100 \text{ m}) \mathbf{j} \\ &= (3 \text{ m/s}^2) \mathbf{i} + (2 \text{ m/s}^2) \mathbf{i} - (6.40 \text{ m/s}^2) \mathbf{j} \\ \mathbf{a}_B &= 8.12 \text{ m/s}^2 \angle 52.0^\circ \end{aligned}$$

Aceleración del punto C

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{C/A} = \mathbf{a}_A + \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{C/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{C/A} \\ &= (3 \text{ m/s}^2) \mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2) \mathbf{k} \times (-0.150 \text{ m}) \mathbf{j} - (8 \text{ rad/s})^2 (-0.150 \text{ m}) \mathbf{j} \\ &= (3 \text{ m/s}^2) \mathbf{i} - (3 \text{ m/s}^2) \mathbf{i} + (9.60 \text{ m/s}^2) \mathbf{j} \\ \mathbf{a}_C &= 9.60 \text{ m/s}^2 \uparrow \end{aligned}$$

Aceleración del punto D

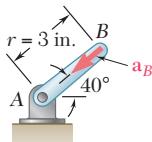
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_D &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{D/A} = \mathbf{a}_A + \alpha \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{D/A} \\ &= (3 \text{ m/s}^2) \mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2) \mathbf{k} \times (-0.150 \text{ m}) \mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})^2 (-0.150 \text{ m}) \mathbf{i} \\ &= (3 \text{ m/s}^2) \mathbf{i} + (3 \text{ m/s}^2) \mathbf{j} + (9.60 \text{ m/s}^2) \mathbf{i} \\ \mathbf{a}_D &= 12.95 \text{ m/s}^2 \angle 13.4^\circ \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 15.7

La manivela **AB** del mecanismo del problema resuelto 15.3 tiene una velocidad angular constante en el sentido de las manecillas del reloj de 2000 rpm. Para la posición que se muestra de la manivela, determine la aceleración angular de la biela **BD** y la aceleración del punto **D**.

SOLUCIÓN



Movimiento de la manivela **AB.** Puesto que la manivela gira alrededor de **A** con una velocidad angular constante $\omega_{AB} = 2000 \text{ rpm} = 209.4 \text{ rad/s}$, se tiene $\alpha_{AB} = 0$. Por lo tanto, la aceleración de **B** está dirigida hacia **A** y tiene una magnitud

$$a_B = r\omega_{AB}^2 = (\frac{3}{12} \text{ ft})(209.4 \text{ rad/s})^2 = 10962 \text{ ft/s}^2$$

$$\mathbf{a}_B = 10962 \text{ ft/s}^2 \angle 40^\circ$$

Movimiento de la biela **BD.** La velocidad angular ω_{BD} y el valor de β se obtuvieron en el problema resuelto 15.3:

$$\omega_{BD} = 62.0 \text{ rad/s} \quad \beta = 13.95^\circ$$

El movimiento de **BD** se descompone en una traslación con **B** y una rotación alrededor de **B**. La aceleración relativa $\mathbf{a}_{D/B}$ se descompone en las componentes normal y tangencial:

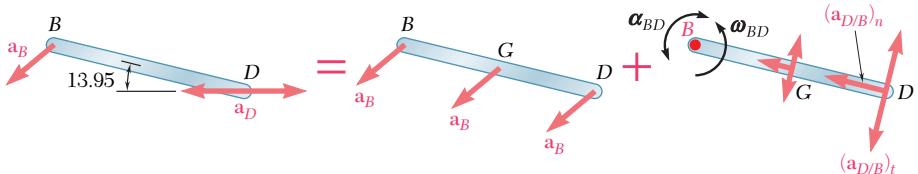
$$(a_{D/B})_n = (BD)\omega_{BD}^2 = (\frac{8}{12} \text{ ft})(62.0 \text{ rad/s})^2 = 2563 \text{ ft/s}^2$$

$$(\mathbf{a}_{D/B})_n = 2563 \text{ ft/s}^2 \angle 13.95^\circ$$

$$(a_{D/B})_t = (BD)\alpha_{BD} = (\frac{8}{12})\alpha_{BD} = 0.6667\alpha_{BD}$$

$$(\mathbf{a}_{D/B})_t = 0.6667\alpha_{BD} \angle 76.05^\circ$$

Si bien $(\mathbf{a}_{D/B})_t$ debe ser perpendicular a **BD**, no se conoce su sentido.



$$\text{Movimiento plano} = \text{Traslación} + \text{Rotación}$$

Al advertir que la aceleración \mathbf{a}_D debe ser horizontal, se escribe

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B} = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{D/B})_n + (\mathbf{a}_{D/B})_t$$

$$[a_D \leftrightarrow] = [10962 \angle 40^\circ] + [2563 \angle 13.95^\circ] + [0.6667\alpha_{BD} \angle 76.05^\circ]$$

Al igualar las componentes x y y , se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

\rightarrow componentes x :

$$-a_D = -10962 \cos 40^\circ - 2563 \cos 13.95^\circ + 0.6667\alpha_{BD} \sin 13.95^\circ$$

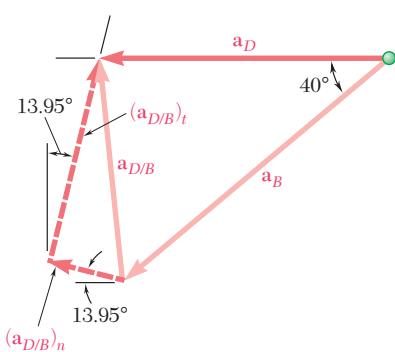
\uparrow componentes y :

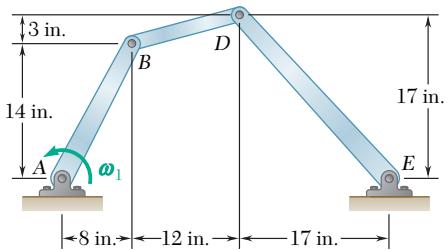
$$0 = -10962 \sin 40^\circ + 2563 \sin 13.95^\circ + 0.6667\alpha_{BD} \cos 13.95^\circ$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones, se obtiene $\alpha_{BD} = +9940 \text{ rad/s}^2$ y $a_D = +9290 \text{ ft/s}^2$. Los signos positivos indican que los sentidos mostrados sobre el polígono vectorial son correctos; se escribe

$$\omega_{BD} = 9940 \text{ rad/s}^2 \uparrow$$

$$a_D = 9290 \text{ ft/s}^2 \leftarrow$$

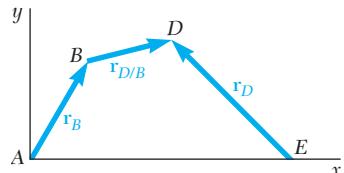




PROBLEMA RESUELTO 15.8

El varillaje $ABDE$ se mueve en el plano vertical. Si se sabe que en la posición mostrada la manivela AB tiene una velocidad angular constante ω_1 de 20 rad/s en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine las velocidades angulares y las aceleraciones angulares de la barra acopladora BD y de la manivela DE .

SOLUCIÓN



$$\mathbf{r}_B = 8\mathbf{i} + 14\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_D = -17\mathbf{i} + 17\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_{D/B} = 12\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Este problema podría resolverse mediante el método que se utilizó en el problema resuelto 15.7. En este caso, sin embargo, se usará el método vectorial. Los vectores de posición \mathbf{r}_B , \mathbf{r}_D y $\mathbf{r}_{D/B}$ se eligen como se muestra en el bosquejo.

Velocidades. Puesto que el movimiento de cada elemento del varillaje está contenido en el plano de la figura, se tiene

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\mathbf{k} = (20 \text{ rad/s})\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\omega}_{BD} = \omega_{BD}\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\omega}_{DE} = \omega_{DE}\mathbf{k}$$

donde \mathbf{k} es un vector unitario que apunta hacia fuera del papel. A continuación se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B} \\ \boldsymbol{\omega}_{DE}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_D &= \boldsymbol{\omega}_{AB}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_{BD}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/B} \\ \boldsymbol{\omega}_{DE}\mathbf{k} \times (-17\mathbf{i} + 17\mathbf{j}) &= 20\mathbf{k} \times (8\mathbf{i} + 14\mathbf{j}) + \boldsymbol{\omega}_{BD}\mathbf{k} \times (12\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \\ -17\boldsymbol{\omega}_{DE}\mathbf{j} - 17\boldsymbol{\omega}_{DE}\mathbf{i} &= 160\mathbf{j} - 280\mathbf{i} + 12\boldsymbol{\omega}_{BD}\mathbf{j} - 3\boldsymbol{\omega}_{BD}\mathbf{i} \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes de los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j} , se obtienen las siguientes dos ecuaciones escalares:

$$-17\boldsymbol{\omega}_{DE} = -280 - 3\boldsymbol{\omega}_{BD}$$

$$-17\boldsymbol{\omega}_{DE} = +160 + 12\boldsymbol{\omega}_{BD}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{BD} = -(29.33 \text{ rad/s})\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\omega}_{DE} = (11.29 \text{ rad/s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Aceleraciones. Al notar que en el instante considerado la manivela AB tiene una velocidad angular constante, se escribe

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{AB} &= 0 & \boldsymbol{\alpha}_{BD} &= \boldsymbol{\alpha}_{BD}\mathbf{k} & \boldsymbol{\alpha}_{DE} &= \boldsymbol{\alpha}_{DE}\mathbf{k} \\ \mathbf{a}_D &= \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B} \end{aligned} \quad (1)$$

Cada término de la ecuación (1) se evalúa por separado:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_D &= \boldsymbol{\alpha}_{DE}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_D - \omega_{DE}^2 \mathbf{r}_D \\ &= \boldsymbol{\alpha}_{DE}\mathbf{k} \times (-17\mathbf{i} + 17\mathbf{j}) - (11.29)^2(-17\mathbf{i} + 17\mathbf{j}) \\ &= -17\boldsymbol{\alpha}_{DE}\mathbf{j} - 17\boldsymbol{\alpha}_{DE}\mathbf{i} + 2170\mathbf{i} - 2170\mathbf{j} \\ \mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\alpha}_{AB}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B = 0 - (20)^2(8\mathbf{i} + 14\mathbf{j}) \\ &= -3200\mathbf{i} - 5600\mathbf{j} \\ \mathbf{a}_{D/B} &= \boldsymbol{\alpha}_{BD}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/B} - \omega_{BD}^2 \mathbf{r}_{D/B} \\ &= \boldsymbol{\alpha}_{BD}\mathbf{k} \times (12\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (29.33)^2(12\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \\ &= 12\boldsymbol{\alpha}_{BD}\mathbf{j} - 3\boldsymbol{\alpha}_{BD}\mathbf{i} - 10320\mathbf{i} - 2580\mathbf{j} \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación (1) e igualar los coeficientes de \mathbf{i} y \mathbf{j} , se obtiene

$$-17\boldsymbol{\alpha}_{DE} + 3\boldsymbol{\alpha}_{BD} = -15690$$

$$-17\boldsymbol{\alpha}_{DE} - 12\boldsymbol{\alpha}_{BD} = -6010$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{BD} = -(645 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \quad \boldsymbol{\alpha}_{DE} = (809 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección se dedicó a la determinación de las *aceleraciones* de los puntos de un *cuerpo rígido en movimiento plano*. Como se hizo previamente para velocidades, se considerará de nuevo el movimiento plano de un cuerpo rígido como la suma de dos movimientos, a saber, *una traslación y una rotación*.

Para resolver un problema que implica aceleraciones en movimiento plano es necesario seguir estos pasos:

1. Determinar la velocidad angular del cuerpo. Para encontrar ω es posible

- a) Considerar el movimiento del cuerpo como la suma de la traslación y la rotación, como se hizo en la sección 15.6, o
- b) Utilizar el centro instantáneo de rotación del cuerpo como en la sección 15.7. Sin embargo, *recuerde que no es posible utilizar el centro instantáneo para determinar aceleraciones*.

2. Iniciar dibujando una “ecuación de diagrama” que usará en su solución: esta “ecuación” incluirá los siguientes diagramas (figura 15.44):

- a) **Diagrama de movimiento plano.** Elabore un bosquejo del cuerpo que incluya todas las dimensiones, así como la velocidad angular ω . Muestre la aceleración angular α con su magnitud y sentido si es que los conoce. También indique aquellos puntos para los cuales conoce o busca las aceleraciones, indicando todo lo que se sepa acerca de las mismas.

- b) **Diagrama de traslación.** Elija un punto de referencia A para el que conozca la dirección, la magnitud o una componente de la aceleración \mathbf{a}_A . Dibuje un segundo diagrama que muestre el cuerpo en traslación en el que cada punto tenga la misma aceleración que el punto A.

- c) **Diagrama de rotación.** Considerando el punto A como un punto de referencia fijo, dibuje un tercer diagrama que muestre al cuerpo en rotación alrededor de A. Indique las componentes normal y tangencial de las aceleraciones relativas de los otros puntos, del mismo modo que las componentes $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ de la aceleración del punto B con respecto al punto A.

3. Escribir la fórmula de la aceleración relativa

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad \text{o} \quad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t$$

Los problemas resueltos ilustran tres formas diferentes de utilizar esta ecuación vectorial:

(continúa)

a) Si α se da o puede determinarse con facilidad, es posible utilizar esta ecuación para determinar las aceleraciones de diferentes puntos del cuerpo [problema resuelto 15.6].

b) Si α no se puede determinar con facilidad, elija para el punto B otro punto en el que usted conozca la dirección, la magnitud o una componente de la aceleración \mathbf{a}_B y dibuje un diagrama vectorial de la ecuación. Empezando en el mismo punto, dibuje todas las componentes conocidas de la aceleración siguiendo el procedimiento de principio a fin para cada miembro de la ecuación. Complete el diagrama dibujando los dos vectores restantes en las direcciones apropiadas, de manera tal que las dos sumas de vectores terminen en un punto común.

Las magnitudes de los dos vectores restantes pueden determinarse gráfica o analíticamente. Por lo común una solución analítica requerirá la solución de dos ecuaciones simultáneas [problema resuelto 15.7]. Sin embargo, si primero se consideran las componentes de diferentes vectores en una dirección perpendicular a uno de los vectores incógnita, resulta factible obtener una ecuación con una sola incógnita.

Uno de los dos vectores obtenido mediante el método que acaba de describirse será $(\mathbf{a}_{B/A})_t$, del cual es posible calcular α . Una vez que se determina α , la ecuación vectorial se utiliza para determinar la aceleración de cualquier otro punto del cuerpo.

c) Un procedimiento vectorial completo también es viable para resolver la ecuación vectorial. Éste se ilustra en el problema resuelto 15.8.

4. El análisis del movimiento plano en términos de un parámetro completó esta lección. Este método debe utilizarse sólo si es posible expresar las coordenadas x y y de todos los puntos importantes del cuerpo en términos de un solo parámetro (sección 15.9). Al diferenciar dos veces con respecto a t las coordenadas x y y de un punto dado, pueden determinarse las componentes rectangulares de la velocidad absoluta y la aceleración absoluta de ese punto.

Problemas

15.105 Una barra de 900 mm descansa sobre una mesa horizontal. Una fuerza \mathbf{P} aplicada como se muestra en la figura, produce las siguientes aceleraciones: $a_A = 3.6 \text{ m/s}^2$ hacia la derecha, $\alpha = 6 \text{ rad/s}^2$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba. Determine la aceleración a) del punto G , b) del punto B .

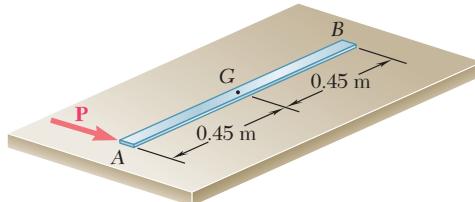


Figura P15.105 y P15.106

15.106 En el problema 15.105, determine el punto de la barra que $a)$ no tiene aceleración, $b)$ tiene una aceleración de 2.4 m/s^2 hacia la derecha.

15.107 Una viga de acero de 10 ft se baja mediante dos cables que se desenrollan a la misma rapidez en dos grúas viajeras. Cuando la viga se acerca al suelo, los operadores de las grúas aplican los frenos para retardar el movimiento de desenrollado. En el instante considerado la desaceleración del cable fijo en A es de 12 ft/s^2 , mientras que la del cable fijo en B es de 5 ft/s^2 . Determine $a)$ la aceleración angular de la viga, $b)$ la aceleración del punto C .

15.108 La aceleración del punto C es de 1 ft/s^2 hacia abajo y la aceleración angular de la viga es de 0.8 rad/s^2 en el sentido de las manecillas del reloj. Si se sabe que la velocidad angular de la viga es cero en el instante considerado, determine la aceleración de cada cable.

15.109 y 15.110 La barra BDE está unida a dos eslabones AB y CD . Si en el instante que se muestra el eslabón AB tiene una aceleración angular nula y una velocidad angular de 3 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración $a)$ del punto D y $b)$ del punto E .

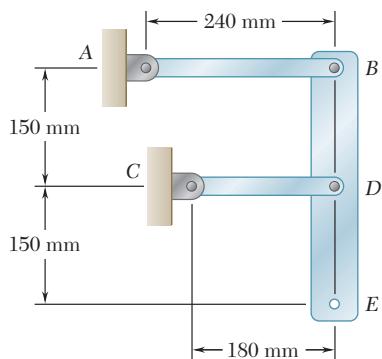


Figura P15.109

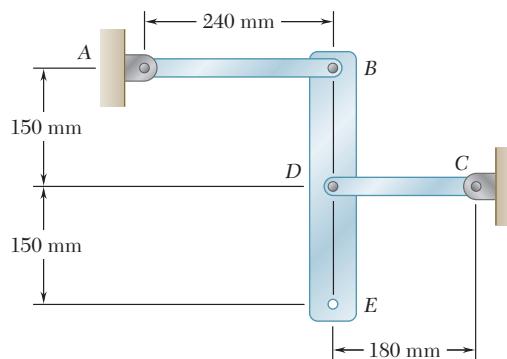


Figura P15.110

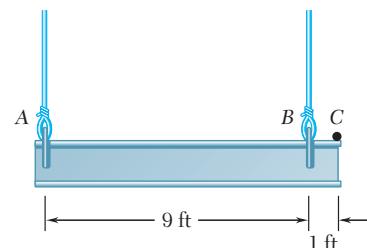


Figura P15.107 y P15.108

15.111 Un automóvil se desplaza hacia la izquierda a una velocidad constante de 48 mi/h. Si el diámetro de la rueda es de 22 in., determine la aceleración *a*) del punto *B*, *b*) del punto *C*, *c*) del punto *D*.

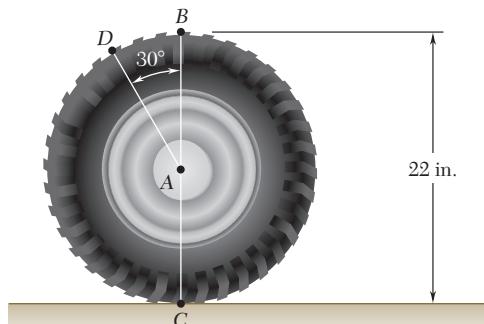


Figura P15.111

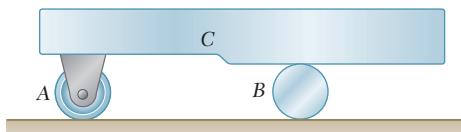


Figura P15.112

15.112 Un carrito *C* está soportado por una rueda móvil *A* y un cilindro *B*, cada uno con 50 mm de diámetro. Si en el instante mostrado, el carrito tiene una aceleración de 2.4 m/s^2 y una velocidad de 1.5 m/s, ambas dirigidas hacia la izquierda, determine *a*) las aceleraciones angulares de la rueda móvil y del cilindro, *b*) las aceleraciones de los centros de la rueda móvil y del cilindro.

15.113 El movimiento del cilindro de 75 mm de radio se controla mediante la cuerda que se muestra en la figura. Si se sabe que el extremo *E* de la cuerda tiene una velocidad de 300 mm/s y una aceleración de 480 mm/s^2 , ambas dirigidas hacia arriba, determine la aceleración *a*) del punto *A*, *b*) del punto *B*.

15.114 El movimiento del cilindro de 75 mm de radio se controla mediante la cuerda que se muestra en la figura. Si se sabe que el extremo *E* de la cuerda tiene una velocidad de 300 mm/s y una aceleración de 480 mm/s^2 , ambas dirigidas hacia arriba, determine las aceleraciones de los puntos *C* y *D* del cilindro.

15.115 y 15.116 Un tambor de 3 in. de radio está rígidamente unido a otro tambor de 5 in. de radio en la forma que se indica. Uno de los tambores rueda sin deslizarse sobre la superficie mostrada, y se enrolla a una cuerda alrededor del otro tambor. Si en el instante que se ilustra el extremo *D* de la cuerda tiene una velocidad de 8 in./s y una aceleración de 30 in./s^2 , ambas dirigidas hacia la izquierda, determine las aceleraciones de los puntos *A*, *B* y *C* de los tambores.

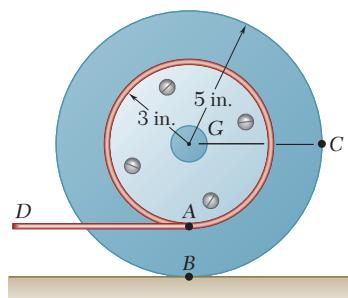


Figura P15.115

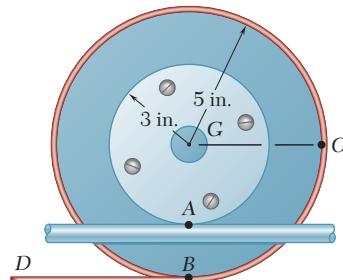


Figura P15.116

- 15.117** El tambor de 150 mm de radio rueda sin deslizarse sobre una banda que se mueve hacia la izquierda con una velocidad constante de 300 mm/s. En el instante en el que la velocidad y la aceleración del centro D del tambor son como se muestra, determine las aceleraciones de los puntos A, B y C del tambor.

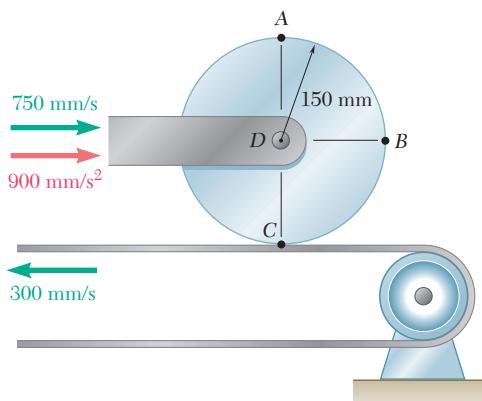


Figura P15.117

- 15.118** El volante de 18 in. de radio está rígidamente unido a una flecha de 1.5 in. de radio que puede rodar a lo largo de rieles paralelos. Si en el instante que se muestra el centro de la flecha tiene una velocidad de 1.2 in./s y una aceleración de 0.5 in./s², ambas dirigidas hacia abajo y hacia la izquierda, determine la aceleración a) del punto A y b) del punto B.

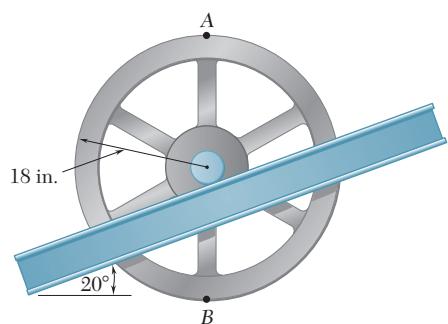


Figura P15.118

- 15.119** En el sistema de engranes planetarios que se muestra, los radios de los engranes A, B, C y D son de 3 in. y el radio del engrane exterior E es de 9 in. Si el engrane A tiene una velocidad angular constante de 150 rpm en el sentido de las manecillas del reloj y el engrane exterior E es estacionario, determine la magnitud de la aceleración de los dientes del engrane D que están en contacto a) con el engrane A, b) con el engrane E.

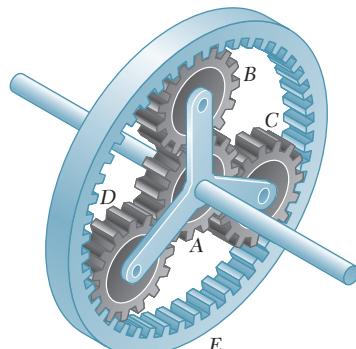


Figura P15.119

- 15.120** El disco mostrado tiene una velocidad angular constante de 500 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Si se sabe que la barra BD tiene 250 mm de longitud, determine la aceleración del collarín D cuando a) $\theta = 90^\circ$, b) $\theta = 180^\circ$.

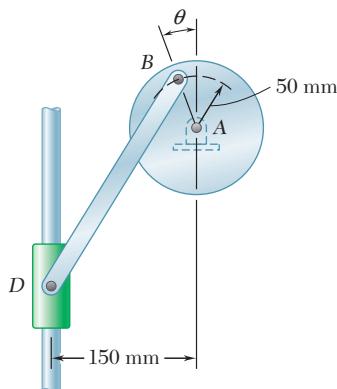


Figura P15.120

- 15.121** En el compresor de aire con dos cilindros que se muestra en la figura las bielas BD y BE tienen una longitud de 190 mm y la manivela AB gira alrededor del punto fijo A con una velocidad angular constante de 1 500 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la aceleración de cada pistón cuando $\theta = 0$.

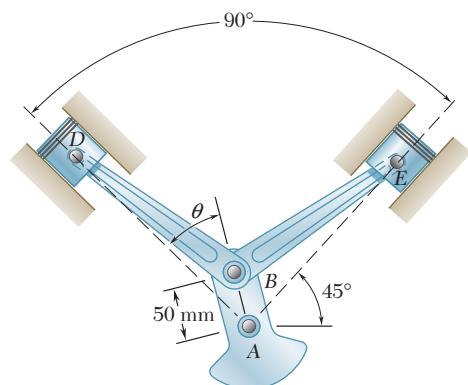


Figura P15.121

15.122 El brazo AB tiene una velocidad angular constante de 16 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En el instante en el que $\theta = 0$, determine la aceleración *a)* del collarín D y *b)* del punto medio G de la barra BD .

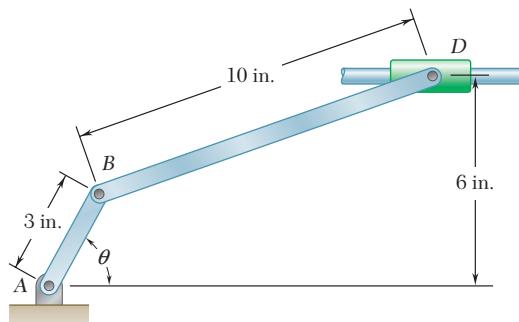


Figura P15.122, P15.123 y P15.124

15.123 El brazo AB tiene una velocidad angular constante de 16 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En el instante en el que $\theta = 90^\circ$, determine la aceleración *a)* del collarín D y *b)* del punto medio G de la barra BD .

15.124 El brazo AB tiene una velocidad angular constante de 16 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. En el instante en el que $\theta = 60^\circ$, determine la aceleración del collarín D .

15.125 Si la manivela AB gira alrededor del punto A con una velocidad angular constante de 900 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración del pistón P cuando $\theta = 60^\circ$.

15.126 Si la manivela AB gira alrededor del punto A con una velocidad angular constante de 900 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración del pistón P cuando $\theta = 120^\circ$.

15.127 Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una aceleración angular nula y una velocidad angular constante de 15 rad/s, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a)* la aceleración angular del brazo DE y *b)* la aceleración del punto D .

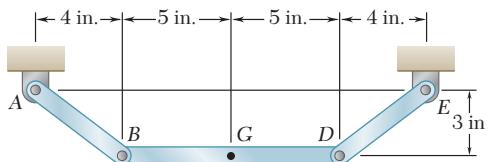


Figura P15.127 y P15.128

15.128 Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una aceleración angular nula y una velocidad angular de 15 rad/s, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a)* la aceleración angular del elemento BD y *b)* la aceleración del punto G .

15.129 Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una velocidad angular constante de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración del punto D .

15.130 Si se sabe que en el instante mostrado la barra AB tiene una velocidad angular constante de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine *a)* la aceleración angular del elemento BDE y *b)* la aceleración del punto E .

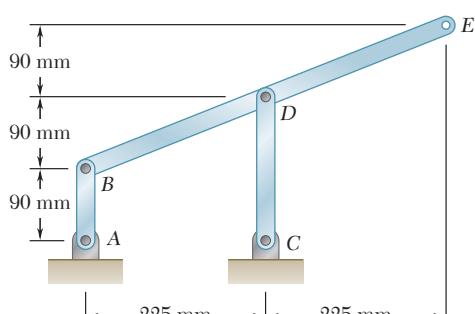


Figura P15.129 y P15.130

- 15.131** Si se sabe que en el instante mostrado la barra *AB* tiene una aceleración angular nula y una velocidad angular ω_0 en el sentido de las manecillas del reloj, determine *a)* la aceleración angular del brazo *DE* y *b)* la aceleración del punto *D*.

- 15.132** Si se sabe que en el instante mostrado la barra *AB* tiene una aceleración angular nula y una velocidad angular de 8 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y que $l = 0.3$ m, determine la aceleración del punto medio *C* del elemento *BD*.

- 15.133 y 15.134** Si en el instante mostrado la barra *AB* tiene una velocidad angular constante de 4 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración angular *a)* de la barra *BD* y *b)* de la barra *DE*.

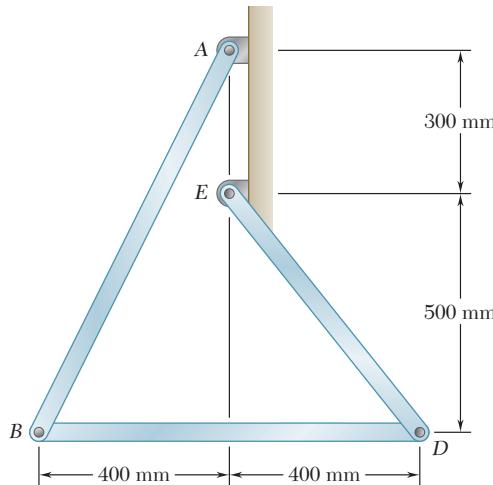


Figura P15.133 y P15.135

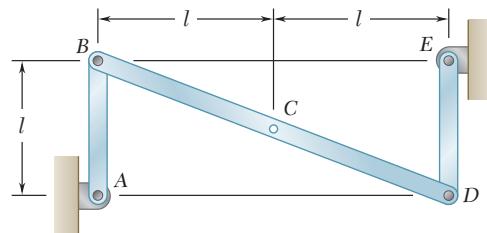


Figura P15.131 y P15.132

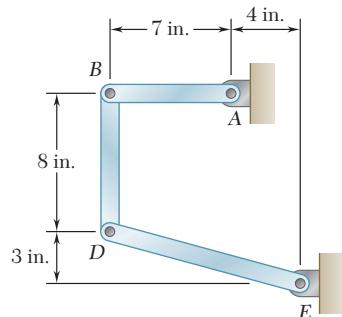


Figura P15.134 y P15.136

- 15.135 y 15.136** Si se sabe que en el instante mostrado la barra *AB* tiene una velocidad angular de 4 rad/s y una aceleración angular de 2 rad/s² en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración angular *a)* de la barra *BD* y *b)* de la barra *DE* con el método vectorial empleado en el problema resuelto 15.8.

- 15.137** Si se denota mediante \mathbf{r}_A el vector de posición del punto *A* de una placa rígida que se encuentra en movimiento plano, demuestre que *a)* el vector de posición \mathbf{r}_C del centro instantáneo de rotación es

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\boldsymbol{\omega}^2}$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la placa y \mathbf{v}_A es la velocidad del punto *A*, *b)* la aceleración del centro de rotación es cero si, y sólo si,

$$\mathbf{a}_A = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{k}$ es la aceleración angular de la placa.

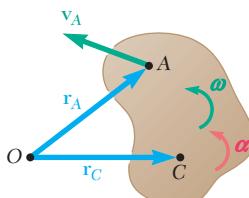


Figura P15.137

***15.138** Se han unido unas pequeñas ruedas a los extremos de la varilla AB y ruedan libremente a lo largo de las superficies que se muestran. Utilice el método de la sección 15.9 a fin de obtener una expresión para la velocidad angular de la varilla en términos de v_B , θ , l y β .

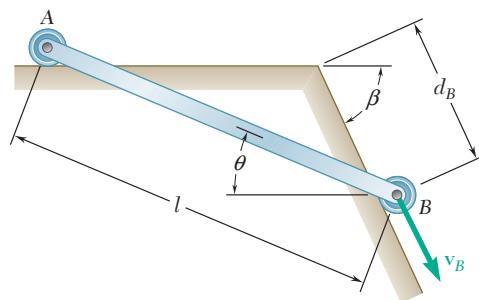


Figura P15.138 y P15.139

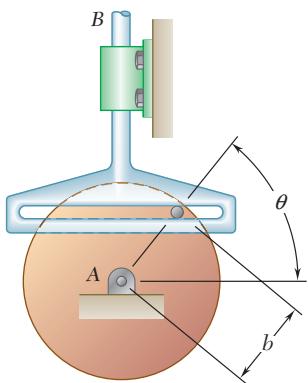


Figura P15.140

***15.139** Se han unido unas pequeñas ruedas a los extremos de la varilla AB y ruedan libremente a lo largo de las superficies que se muestran. Utilice el método de la sección 15.9 y considere que la aceleración de la rueda B es cero a fin de obtener una expresión para la aceleración angular de la varilla en términos de v_B , θ , l y β .

***15.140** El disco propulsor del mecanismo de cruceta Scotch que se muestra tiene una velocidad angular ω y una aceleración angular α , dirigidas en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Utilice el método de la sección 15.9 a fin de obtener expresiones para la velocidad y la aceleración del punto B .

***15.141** La varilla AB se mueve sobre una pequeña rueda en C mientras el extremo A se desplaza hacia la derecha con una velocidad constante \mathbf{v}_A . Con el método de la sección 15.9, deduzca expresiones para la velocidad angular y la aceleración angular de la varilla.

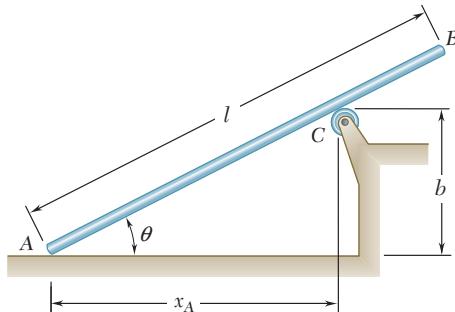


Figura P15.141 y P15.142

***15.142** La varilla AB se mueve sobre una pequeña rueda en C mientras el extremo A se desplaza hacia la derecha con una velocidad constante \mathbf{v}_A . Con el método de la sección 15.9, deduzca expresiones para las componentes horizontal y vertical de la velocidad del punto B .

***15.143** Un disco de radio r rueda hacia la derecha con una velocidad constante \mathbf{v} . Si se denota con P el punto del borde en contacto con el suelo en $t = 0$, deduzca expresiones para las componentes horizontal y vertical de la velocidad de P en cualquier momento t .

***15.144** En el instante mostrado, la varilla AB gira con una velocidad angular ω y una aceleración angular α , dirigidas en el sentido de las manecillas del reloj. Utilice el método de la sección 15.9 a fin de obtener expresiones para la velocidad y la aceleración del punto C .

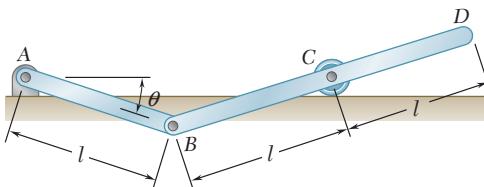


Figura P15.144 y P15.145

***15.145** En el instante mostrado, la varilla AB gira con una velocidad angular ω y una aceleración angular α , dirigidas en el sentido de las manecillas del reloj. Utilice el método de la sección 15.9 a fin de obtener expresiones para las componentes horizontal y vertical de la velocidad y la aceleración del punto D .

***15.146** La posición de la varilla AB se controla por medio de un disco de radio r que se une a la horquilla CD . Si se sabe que la horquilla se mueve verticalmente hacia arriba con una velocidad constante v_0 , deduzca una expresión para la aceleración angular de la varilla AB .

***15.147** En el problema 15.146, obtenga una expresión para la aceleración angular de la varilla AB .

***15.148** Una rueda de radio r gira sin deslizarse a lo largo del interior de un cilindro fijo de radio R con una velocidad angular constante ω . Al denotar con P el punto de la rueda en contacto con el cilindro en $t = 0$, obtenga expresiones para las componentes horizontal y vertical de la velocidad de P en cualquier momento t . (La curva que describe el punto P es una *hipocicloide*.)

***15.149** En el problema 15.148, demuestre que la trayectoria de P es una línea recta vertical cuando $r = R/2$. Obtenga expresiones para la velocidad y la aceleración correspondientes en cualquier momento t .

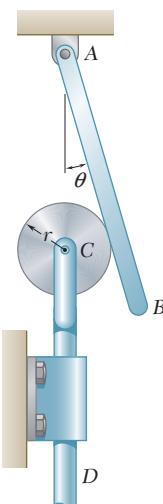


Figura P15.146

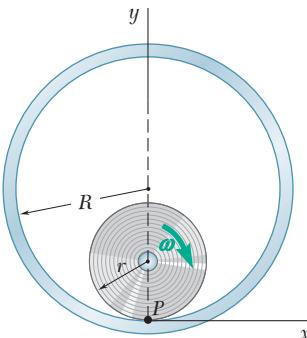
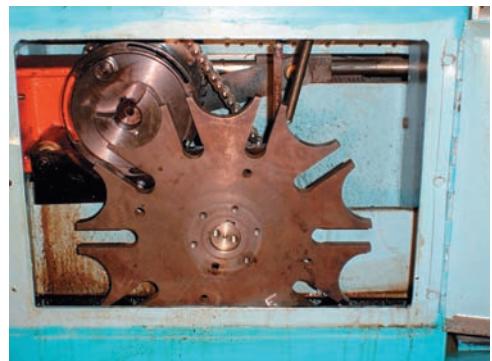


Figura P15.148

15.10. RAZÓN DE CAMBIO DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN SISTEMA DE REFERENCIA EN ROTACIÓN

En la sección 11.10 se analizó que la razón de cambio de un vector es la misma respecto a un sistema de referencia fijo y respecto a un sistema de referencia en traslación. En esta sección se considerarán las razones de cambio de un vector \mathbf{Q} respecto a un sistema de referencia fijo y a un sistema de referencia rotatorio.[†] Se aprenderá a determinar la razón de cambio de \mathbf{Q} respecto a un sistema de referencia cuando \mathbf{Q} se define mediante sus componentes en otro sistema de referencia.



Fotografía 15.7 Un mecanismo de Ginebra se usa para convertir movimiento giratorio en movimiento intermitente.

[†]Debe recordarse que la selección de un sistema de referencia fijo es arbitraria. Cualquier sistema de referencia puede denominarse como “fijo”; todos los demás sistemas se consideran entonces como móviles.

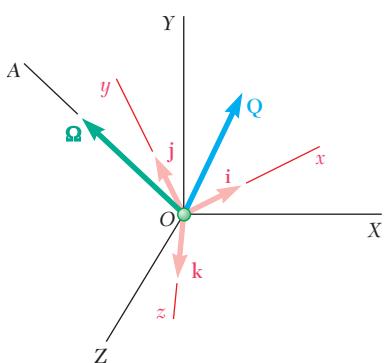


Figura 15.26

Considere dos sistemas de referencias centrados en O , un sistema de referencia fijo $OXYZ$ y un sistema de referencia $Oxyz$ que giran alrededor del eje fijo OA ; deje que $\boldsymbol{\Omega}$ denote la velocidad angular del sistema de referencia $Oxyz$ en un instante dado (figura 15.26). Considere ahora una función vectorial $\mathbf{Q}(t)$ representada por el vector \mathbf{Q} fijo en O ; cuando el tiempo t varía, cambian tanto la dirección como la magnitud de \mathbf{Q} . Puesto que la variación de \mathbf{Q} es vista diferencialmente por un observador que utiliza $OXYZ$ como un sistema de referencia y por un observador que recurre a $Oxyz$, se debe esperar que la tasa de cambio de \mathbf{Q} dependa del sistema de referencia que se ha elegido. Por lo tanto, la razón de cambio de \mathbf{Q} con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ se denotará por medio de $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ y la razón de cambio de \mathbf{Q} con respecto al sistema de referencia rotatorio $Oxyz$ se denotará mediante $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$. La propuesta es determinar la relación que existe entre estas razones de cambio.

Primero se descompone el vector \mathbf{Q} en componentes a lo largo de los ejes x , y y z del sistema de referencia rotatorio. Al denotar por medio de \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} los correspondientes vectores unitarios, se escribe

$$\mathbf{Q} = Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k} \quad (15.27)$$

Al diferenciar (15.27) con respecto a t y considerar fijos los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , se obtiene la razón de cambio de \mathbf{Q} con respecto al sistema de referencia rotatorio $Oxyz$:

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} = \dot{Q}_x \mathbf{i} + \dot{Q}_y \mathbf{j} + \dot{Q}_z \mathbf{k} \quad (15.28)$$

Para obtener la razón de cambio de \mathbf{Q} con respecto a un sistema de referencia fijo $OXYZ$, se deben considerar los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} como variables cuando se realiza la diferenciación (15.27). Por lo tanto, se escribe

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = \dot{Q}_x \mathbf{i} + \dot{Q}_y \mathbf{j} + \dot{Q}_z \mathbf{k} + Q_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + Q_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + Q_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} \quad (15.29)$$

Al recordar (15.28), se observa que la suma de los primeros tres términos en el miembro del lado derecho de (15.29) representa la razón de cambio $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$. Se nota, por otro lado, que la razón de cambio $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ se reduciría a los últimos tres términos (15.29) si el vector \mathbf{Q} estuviera fijo dentro del sistema de referencia $Oxyz$, ya que $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ sería entonces cero. Pero en ese caso $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ representaría la velocidad de la partícula ubicada en la punta de \mathbf{Q} y correspondería a un cuerpo rígidamente unido al sistema de referencia $Oxyz$. De tal modo, los últimos tres términos en (15.29) representan la velocidad de esa partícula; puesto que el sistema de referencia $Oxyz$ tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ con respecto a $OXYZ$ en el instante considerado, se escribe, mediante (15.5),

$$Q_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + Q_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + Q_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \quad (15.30)$$

Al sustituir (15.28) y (15.30) en (15.29), se obtiene la relación fundamental

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \quad (15.31)$$

La conclusión es que la razón de cambio del vector \mathbf{Q} con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ se compone de dos partes: la primera representa la razón de cambio de \mathbf{Q} con respecto al sistema de referencia rotatorio $Oxyz$; la segunda parte, $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}$, se induce por la rotación del sistema de referencia $Oxyz$.

El uso de la relación (15.31) simplifica la determinación de la razón de cambio del vector \mathbf{Q} con respecto a un sistema de referencia fijo $OXYZ$ cuando el vector \mathbf{Q} se define mediante sus componentes a lo largo de los ejes de un sistema de referencia rotatorio $Oxyz$, ya que esta relación no requiere el cálculo separado de las derivadas de los vectores unitarios que definen la orientación del sistema de referencia rotatorio.

15.11. MOVIMIENTO PLANO DE UNA PARTÍCULA RELATIVA A UN SISTEMA DE REFERENCIA EN ROTACIÓN. ACELERACIÓN DE CORIOLIS

Considere dos sistemas de referencia, ambos centrados en O y en el plano de la figura, un sistema de referencia fijo OXY y un sistema de referencia en rotación Oxy (figura 15.27). Sea P una partícula que se mueve en el plano de la figura. El vector de posición \mathbf{r} de P es el mismo en ambos sistemas de referencia, aunque su razón de cambio depende del sistema de referencia que se ha elegido.

La velocidad absoluta \mathbf{v}_P de la partícula se define como la velocidad observada desde el sistema de referencia fijo OXY y es igual a la razón de cambio $(\dot{\mathbf{r}})_{OXY}$ de \mathbf{r} con respecto a ese sistema de referencia. Sin embargo, es posible expresar \mathbf{v}_P en términos de la tasa de cambio $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ que se observa desde el sistema de referencia en rotación si recurrimos a la ecuación (15.31). Denotando mediante $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular del sistema de referencia Oxy con respecto a OXY en el instante que se considera, se escribe

$$\mathbf{v}_P = (\dot{\mathbf{r}})_{OXY} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} \quad (15.32)$$

Pero $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ define la velocidad de la partícula P relativa al sistema de referencia en rotación Oxy . Al denotar el sistema de referencia en rotación mediante \mathcal{F} se representa la velocidad $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ de P relativa al sistema de referencia por $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$. Imagine que una placa rígida se ha unido al sistema de referencia en rotación. En ese caso $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ representa la velocidad de P a lo largo de la trayectoria que éste describe sobre la placa (figura 15.28), y el término $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ en (15.32) representa la velocidad $\mathbf{v}_{P'}$ del punto P' de la placa —o del sistema de referencia en rotación— que coincide con P en el instante que se está considerando. De tal modo, se tiene

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \quad (15.33)$$

donde \mathbf{v}_P = velocidad absoluta de la partícula P

$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad de punto P' del sistema de referencia en movimiento \mathcal{F} coincidiendo con P

$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidad de P relativa al sistema de referencia en movimiento \mathcal{F}

La aceleración absoluta \mathbf{a}_P de la partícula se define como la razón de cambio de \mathbf{v}_P con respecto al sistema de referencia fijo OXY . Al calcular las razones de cambio con respecto a OXY de los términos en (15.32), se escribe

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}] \quad (15.34)$$

donde todas las derivadas se definen con respecto a OXY , excepto donde se indica de otro modo. Con referencia a la ecuación (15.31), se advierte que el último término en (15.34) puede expresarse como

$$\frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}] = (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy} + \boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$$

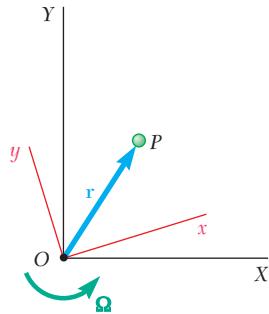


Figura 15.27

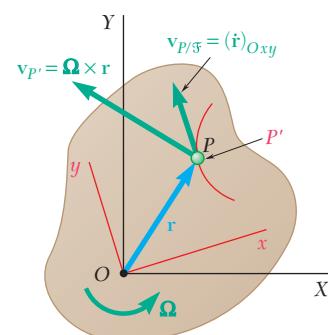


Figura 15.28

Por otro lado, $\dot{\mathbf{r}}$ representa la velocidad \mathbf{v}_P y puede sustituirse por el miembro del lado derecho de la ecuación (15.32). Después de completar estas dos sustituciones en (15.34), se escribe

$$\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} + (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy} \quad (15.35)$$

Con referencia a la expresión (15.8) que se obtuvo en la sección 15.3 para la aceleración de una partícula en un cuerpo rígido rotatorio alrededor de un eje fijo, se nota que la suma de los primeros dos términos representa la aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto P' del sistema de referencia en rotación que coincide con P en el instante en que se ha considerado. Por otro lado, el último término define la aceleración $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ de P relativa al sistema de referencia en rotación. Si no fuera por el tercer término, el cual no se ha tomado en cuenta, podría haberse escrito una relación similar a (15.33) para las aceleraciones y \mathbf{a}_P podría expresarse como la suma de $\mathbf{a}_{P'}$ y $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$. Sin embargo, es claro que *una relación de este tipo sería incorrecta* y debemos incluir el término adicional. Este término, que se denotará por \mathbf{a}_c , se denomina *aceleración complementaria*, o *aceleración de Coriolis*, en honor al matemático francés De Coriolis (1792-1843). Se escribe

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \quad (15.36)$$

donde \mathbf{a}_P = aceleración absoluta de la partícula P

$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema de referencia en movimiento \mathcal{F} que coincide con P

$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleración de P relativa al sistema de referencia \mathcal{F}

$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$

= aceleración complementaria, o de Coriolis[†]

Al observar que el punto P' se mueve en un círculo alrededor del origen O , su aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ tiene, en general, dos componentes: una componente $(\mathbf{a}_{P'})_t$ tangente al círculo y una componente $(\mathbf{a}_{P'})_n$ dirigida hacia O . De manera similar, la aceleración $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ por lo general cuenta con dos componentes: una componente $(\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}})_t$ tangente a la trayectoria que describe P sobre la placa en rotación, y una componente $(\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}})_n$ dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria. Además advierta que puesto que el vector $\boldsymbol{\Omega}$ es perpendicular al plano de movimiento y , en consecuencia, a $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$, la magnitud de la aceleración de Coriolis $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ es igual a $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$, y su dirección se puede obtener al girar el vector $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ 90° en el sentido de rotación del sistema de referencia en movimiento (figura 15.29). La aceleración de Coriolis se reduce a cero cuando ya sea $\boldsymbol{\Omega}$ o $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ es cero.

El siguiente ejemplo ayudará a comprender el significado físico de la aceleración de Coriolis. Considere un collarín P que se hace desli-

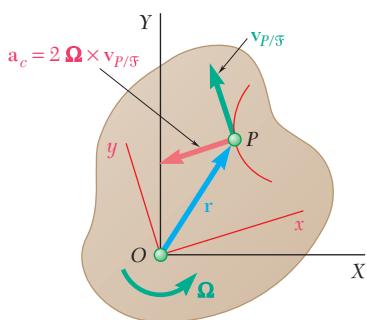


Figura 15.29

[†]Es importante notar la diferencia entre la ecuación (15.36) y la ecuación (15.21) de la sección 15.8. Cuando se escribió

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (15.21)$$

en la sección 15.8, se expresó la aceleración absoluta del punto B como la suma de su aceleración $\mathbf{a}_{B/A}$ relativa a un *sistema de referencia en traslación* y la aceleración \mathbf{a}_A de un punto de ese sistema de referencia. Ahora se trata de relacionar la aceleración absoluta del punto P con su aceleración $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ relativa a un *sistema de referencia en rotación* \mathcal{F} y a la aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto P' de ese sistema de referencia que coincide con P ; la ecuación (15.36) muestra que debido a que el sistema de referencia está en rotación, es necesario incluir un término adicional que representa la aceleración de Coriolis \mathbf{a}_c .

zar a una velocidad relativa constante u a lo largo de una varilla OB que gira a una velocidad angular constante ω alrededor de O (figura 15.30a). De acuerdo con la fórmula (15.36), la aceleración absoluta de P puede obtenerse sumando vectorialmente la aceleración \mathbf{a}_A del punto A de la varilla que coincide con P , la aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/OB}$ de P con respecto a la varilla y la aceleración de Coriolis \mathbf{a}_c . Puesto que la velocidad angular ω de la varilla es constante, \mathbf{a}_A se reduce a su componente normal ($\mathbf{a}_A)_n$, de magnitud $r\omega^2$; y puesto que u es constante, la aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/OB}$ es cero. De acuerdo con la definición dada arriba, la aceleración de Coriolis es un vector perpendicular OB , de magnitud $2\omega u$ y apunta como se indica en la figura. La aceleración del collarín P consta, por tanto, de los dos vectores mostrados en la figura 15.30a. Advierta que la resultante que se obtiene puede verificarse al aplicar la relación (11.44).

Para entender mejor el significado de la aceleración de Coriolis, se considera la velocidad absoluta de P en el tiempo t y en el tiempo $t + \Delta t$ (figura 15.30b). La velocidad en el tiempo t puede descomponerse en sus componentes \mathbf{u} y \mathbf{v}_A ; la velocidad en el tiempo $t + \Delta t$ se descompone en sus componentes \mathbf{u}' y $\mathbf{v}_{A'}$. Dibujando estas componentes desde el mismo origen (figura 15.30c), se nota que el cambio en la velocidad durante el tiempo Δt puede representarse por medio de la suma de tres vectores, $\overrightarrow{RR'}$, $\overrightarrow{TT''}$, y $\overrightarrow{T''T'}$. El vector $\overrightarrow{TT''}$ mide el cambio en la dirección de la velocidad \mathbf{v}_A , y el cociente $\overrightarrow{TT''}/\Delta t$ representa la aceleración \mathbf{a}_A cuando Δt tiende a cero. Se verifica que la dirección de $\overrightarrow{TT''}$ es la de \mathbf{a}_A cuando Δt se aproxima a cero y que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{TT''}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_A \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega\omega = r\omega^2 = a_A$$

El vector $\overrightarrow{RR'}$ mide el cambio en la dirección de \mathbf{u} debido a la rotación de la varilla; el vector $\overrightarrow{T''T'}$ mide el cambio en magnitud de \mathbf{v}_A debido al movimiento de P sobre la varilla. Los vectores $\overrightarrow{RR'}$ y $\overrightarrow{T''T'}$ son el resultado del efecto combinado del movimiento relativo de P y de la rotación de la barra; se anularían si *cualquiera* de estos dos movimientos se interrumpieran. Se verifica con facilidad que la suma de estos dos vectores define la aceleración de Coriolis. Su dirección es la de \mathbf{a}_c cuando Δt tiende a cero, y puesto que $\overrightarrow{RR'} = u \Delta\theta$ y $\overrightarrow{T''T'} = v_{A'} - v_A = (r + \Delta r)\omega - r\omega = \omega \Delta r$, se confirma que \mathbf{a}_c es igual a

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\overrightarrow{RR'}}{\Delta t} + \frac{\overrightarrow{T''T'}}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(u \frac{\Delta\theta}{\Delta t} + \omega \frac{\Delta r}{\Delta t} \right) = u\omega + \omega u = 2\omega u$$

Las fórmulas (15.33) y (15.36) se pueden usar para analizar el movimiento de mecanismos que contienen partes que se deslizan una respecto a otras. Posibilitan, por ejemplo, relacionar movimientos absolutos y relativos de pasadores y collarines deslizantes (véanse los problemas resueltos 15.9 y 15.10). El concepto de aceleración de Coriolis también es muy útil en el estudio de proyectiles de largo alcance y de otros cuerpos cuyos movimientos resultan afectados de manera apreciable por la rotación de la Tierra. Como se señaló en la sección 12.2, un sistema de ejes unidos a la Tierra no constituye en verdad un sistema de referencia newtoniano; un sistema de ejes de este tipo en realidad debe considerarse como rotatorio. Las fórmulas que se obtuvieron en esta sección facilitarán consecuentemente el estudio del movimiento de cuerpos con respecto a ejes fijos a la Tierra.

a)

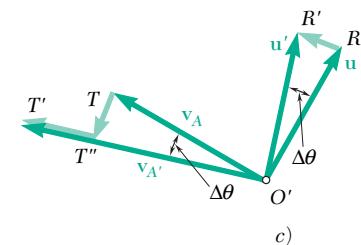
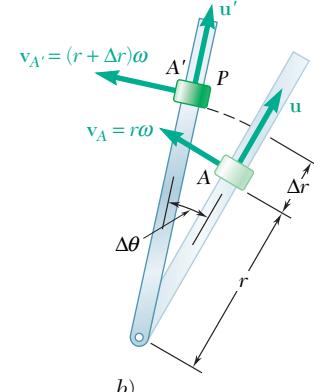
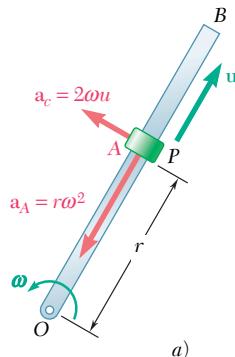
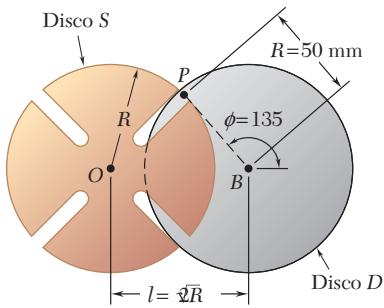


Figura 15.30



PROBLEMA RESUELTO 15.9

El mecanismo de Ginebra o Cruz de Malta que se muestra se utiliza en muchos instrumentos de conteo y en otras aplicaciones donde se requiere un movimiento giratorio intermitente. El disco D gira con una velocidad angular constante ω_D en el sentido contrario al de las manecillas del reloj de 10 rad/s. Un pasador P se coloca en el disco D y desliza a lo largo de varias ranuras que se cortan en el disco S . Es deseable que la velocidad angular del disco S sea cero cuando el pasador entra y sale de cada ranura; en el caso de cuatro ranuras, esto ocurrirá si la distancia entre los centros de los discos es $l = \sqrt{2}R$.

En el instante en el que $\phi = 150^\circ$, determine a) la velocidad angular del disco S , b) la velocidad del pasador P relativa al disco S .

SOLUCIÓN

Se resuelve el triángulo OPB , el cual corresponde a la posición $\phi = 150^\circ$. Utilizando la ley de los cosenos, se escribe

$$r^2 = R^2 + l^2 - 2Rl \cos 30^\circ = 0.551R^2 \quad r = 0.742R = 37.1 \text{ mm}$$

De la ley de los senos,

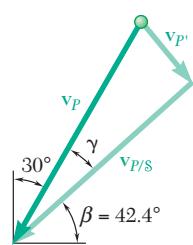
$$\frac{\sin \beta}{R} = \frac{\sin 30^\circ}{r} \quad \sin \beta = \frac{\sin 30^\circ}{0.742} \quad \beta = 42.4^\circ$$

Puesto que el pasador P está unido al disco D , y en vista de que D gira alrededor del punto B , la magnitud de la velocidad absoluta de P es

$$v_P = R\omega_D = (50 \text{ mm})(10 \text{ rad/s}) = 500 \text{ mm/s}$$

$$v_P = 500 \text{ mm/s} \angle 60^\circ$$

Hay que considerar ahora el movimiento del pasador P a lo largo de la ranura en el disco S . Al denotar por P' el punto del disco S que coincide con P en el instante que se considera y al seleccionar un sistema de referencia en rotación \mathcal{S} unido al disco S , se escribe



Al notar que $v_{P'}$ es perpendicular al radio OP y que $v_{P/\mathcal{S}}$ está dirigida a lo largo de la ranura, se dibuja el triángulo de la velocidad correspondiente a la ecuación anterior. De acuerdo con el triángulo, se calcula

$$\gamma = 90^\circ - 42.4^\circ - 30^\circ = 17.6^\circ$$

$$v_{P'} = v_P \operatorname{sen} \gamma = (500 \text{ mm/s}) \operatorname{sen} 17.6^\circ$$

$$v_{P'} = 151.2 \text{ mm/s} \angle 42.4^\circ$$

$$v_{P/\mathcal{S}} = v_P \operatorname{cos} \gamma = (500 \text{ mm/s}) \operatorname{cos} 17.6^\circ$$

$$v_{P/\mathcal{S}} = v_{P/\mathcal{S}} = 477 \text{ mm/s} \angle 42.4^\circ$$

Puesto que $v_{P'}$ es perpendicular al radio OP , se escribe

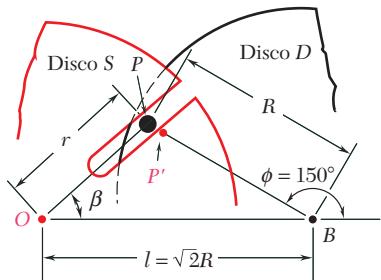
$$v_{P'} = r\omega_{\mathcal{S}} \quad 151.2 \text{ mm/s} = (37.1 \text{ mm})\omega_{\mathcal{S}}$$

$$\omega_{\mathcal{S}} = \omega_{\mathcal{S}} = 4.08 \text{ rad/s}$$

PROBLEMA RESUELTO 15.10

En el mecanismo de Ginebra o Cruz de Malta del problema resuelto 15.9, el disco D gira con una velocidad angular constante ω_D en sentido contrario al de las manecillas del reloj y de magnitud igual a 10 rad/s. En el instante en que $\phi = 150^\circ$, determine la aceleración angular del disco S .

SOLUCIÓN



Si se recurre al problema resuelto 15.9, se obtiene la velocidad angular del sistema de referencia \mathcal{S} unido al disco S y la velocidad del pasador relativa a \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}\omega_{\mathcal{S}} &= 4.08 \text{ rad/s} \\ \beta &= 42.4^\circ \quad \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}} = 477 \text{ mm/s} \angle 42.4^\circ\end{aligned}$$

Puesto que el pasador P se mueve con respecto al sistema de referencia \mathcal{S} , se escribe

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{S}} + \mathbf{a}_c \quad (1)$$

Cada término de esta ecuación vectorial se investiga por separado.

Aceleración absoluta \mathbf{a}_P . Puesto que el disco D gira con una velocidad angular constante, la aceleración absoluta \mathbf{a}_P se dirige hacia B . Se tiene

$$\begin{aligned}a_P &= R\omega_D^2 = (500 \text{ mm})/(10 \text{ rad/s})^2 = 5000 \text{ mm/s}^2 \\ \mathbf{a}_P &= 5000 \text{ mm/s}^2 \angle 30^\circ\end{aligned}$$

Aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto coincidente P' . La aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto P' del sistema de referencia \mathcal{S} que coincide con P en el instante considerado se descompone en las componentes normal y tangencial. (Recuerde del problema resuelto 15.9 que $r = 37.1 \text{ mm}$.)

$$\begin{aligned}(a_{P'})_n &= r\omega_{\mathcal{S}}^2 = (37.1 \text{ mm})(4.08 \text{ rad/s})^2 = 618 \text{ mm/s}^2 \\ (a_{P'})_n &= 618 \text{ mm/s}^2 \angle 42.4^\circ \\ (a_{P'})_t &= r\alpha_{\mathcal{S}} = 37.1\alpha_{\mathcal{S}} \quad (a_{P'})_t = 37.1\alpha_{\mathcal{S}} \angle 42.4^\circ\end{aligned}$$

Aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/\mathcal{S}}$. Puesto que el pasador P se mueve en una ranura recta cortada en el disco S , la aceleración relativa $\mathbf{a}_{P/\mathcal{S}}$ debe ser paralela a la ranura; esto es, su dirección debe ser $\angle 42.4^\circ$.

Aceleración de Coriolis \mathbf{a}_c . Si se hace girar la velocidad relativa $\mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$ 90° en el sentido de $\omega_{\mathcal{S}}$ obtenemos la dirección de la componente de Coriolis de la aceleración $\angle 42.4^\circ$. Se escribe

$$\begin{aligned}a_c &= 2\omega_{\mathcal{S}}v_{P/\mathcal{S}} = 2(4.08 \text{ rad/s})(477 \text{ mm/s}) = 3890 \text{ mm/s}^2 \\ \mathbf{a}_c &= 3890 \text{ mm/s}^2 \angle 42.4^\circ\end{aligned}$$

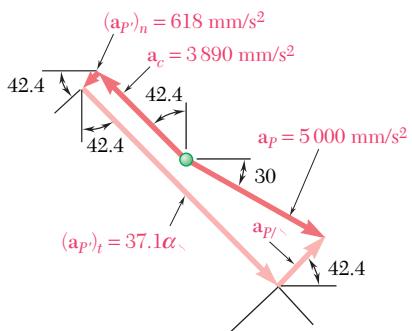
Se reescribe la ecuación (1) y se sustituyen las aceleraciones encontradas antes:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_P &= (\mathbf{a}_{P'})_n + (\mathbf{a}_{P'})_t + \mathbf{a}_{P/\mathcal{S}} + \mathbf{a}_c \\ [5000 \angle 30^\circ] &= [618 \angle 42.4^\circ] + [37.1\alpha_{\mathcal{S}} \angle 42.4^\circ] \\ &\quad + [a_{P/\mathcal{S}} \angle 42.4^\circ] + [3890 \angle 42.4^\circ]\end{aligned}$$

Al igualar las componentes en la dirección perpendicular a la ranura,

$$5000 \cos 17.6^\circ = 37.1\alpha_{\mathcal{S}} - 3890$$

$$\alpha_{\mathcal{S}} = \alpha_{\mathcal{S}} = 233 \text{ rad/s}^2 \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudió la razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia en rotación, y luego se aplicó lo aprendido al análisis del movimiento plano de una partícula relativa a un sistema de referencia rotatorio.

1. Razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia fijo y con respecto a un sistema de referencia rotatorio. Al denotar por $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ la razón de cambio de un vector \mathbf{Q} con respecto a un sistema de referencia fijo $OXYZ$ y por $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ su razón de cambio con respecto a un sistema de referencia en rotación $Oxyz$, se obtuvo la relación fundamental

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \quad (15.31)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema de referencia en rotación.

Esta relación fundamental se aplicará ahora a la solución de problemas bidimensionales.

2. Movimiento plano de una partícula relativo a un sistema de referencia rotatorio. Utilizando la relación fundamental anterior y designando por medio de \mathcal{F} el sistema de referencia rotatorio, se obtuvieron las siguientes expresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula P :

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \quad (15.33)$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \quad (15.36)$$

En estas ecuaciones:

a) **El subíndice P** se refiere al movimiento absoluto de la partícula P , esto es, a su movimiento con respecto a un sistema de referencia fijo OXY .

b) **El subíndice P'** se refiere al movimiento del punto P' del sistema rotatorio \mathcal{F} que coincide con P en el instante que se considera.

c) **El subíndice P/\mathcal{F}** se refiere al movimiento de la partícula P relativo al sistema de referencia de rotación \mathcal{F} .

d) **El término \mathbf{a}_c representa la aceleración de Coriolis del punto P .** Su magnitud es $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$ y su dirección se encuentra al rotar $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ 90° en el sentido de rotación del sistema de referencia \mathcal{F} .

No hay que olvidar que la aceleración de Coriolis debe tomarse en cuenta si una parte del mecanismo que se analiza se mueve con respecto a otra parte que está girando. Los problemas de esta lección incluyen collarines que se deslizan sobre varillas rotatorias, plumas que se extienden sobre grúas rotatorias en un plano vertical, etcétera.

Al resolver un problema que implica un sistema de referencia en rotación, se encontrará conveniente dibujar diagramas vectoriales que representen, respectivamente, las ecuaciones (15.33) y (15.36) y utilizarlos para obtener la solución analítica o la solución gráfica.

Problemas

15.150 y 15.151 Dos varillas giratorias se conectan por medio del bloque deslizante P . La varilla unida en A gira con una velocidad angular constante ω_A . Con los datos siguientes, determine para la posición que se muestra *a)* la velocidad angular de la varilla unida en B , *b)* la velocidad relativa del bloque deslizante P con respecto a la varilla sobre la cual se desliza.

15.150 $b = 8 \text{ in.}$, $\omega_A = 6 \text{ rad/s.}$

15.151 $b = 300 \text{ mm}$, $\omega_A = 10 \text{ rad/s.}$

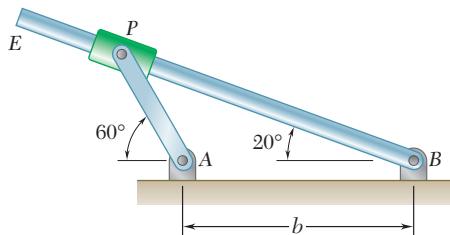


Figura P15.150 y P15.152

15.152 y 15.153 Dos varillas giratorias se conectan por medio del bloque deslizante P . La velocidad v_0 del bloque deslizante relativa a la varilla es constante y dirigida hacia fuera. Para los datos dados, determine la velocidad angular de cada varilla en la posición mostrada.

15.152 $b = 300 \text{ mm}$, $v_0 = 480 \text{ mm/s.}$

15.153 $b = 8 \text{ in.}$, $v_0 = 9 \text{ in./s.}$

15.154 y 15.155 El pasador P está unido al collarín que se muestra en la figura; una ranura cortada en la varilla BD y el collarín que se desliza sobre la varilla AE guían el movimiento del pasador. Si en el instante considerado las varillas giran en el sentido de las manecillas del reloj con velocidades angulares constantes, determine para los siguientes datos la velocidad del pasador P .

15.154 $\omega_{AE} = 4 \text{ rad/s}$, $\omega_{BD} = 1.5 \text{ rad/s.}$

15.155 $\omega_{AE} = 3.5 \text{ rad/s}$, $\omega_{BD} = 2.4 \text{ rad/s.}$

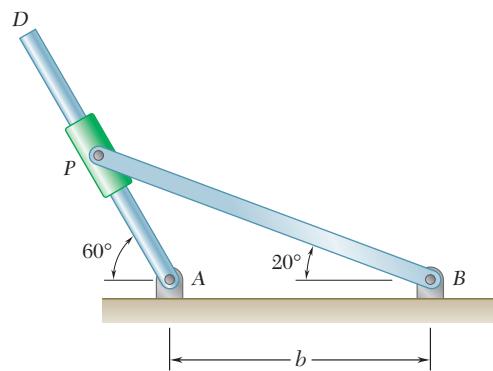


Figura P15.151 y P15.153

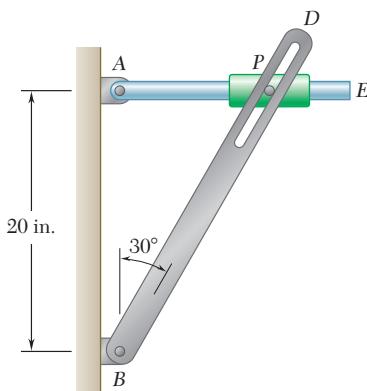


Figura P15.154 y P15.155

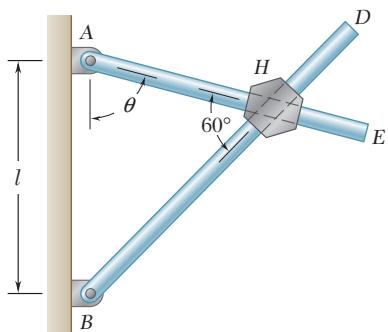


Figura P15.156 y P15.157

15.156 y 15.157 Dos varillas AE y BD pasan a través de orificios perforados en un bloque hexagonal. (Los orificios están taladrados en diferentes planos de manera que las varillas no se toquen entre sí.) Si en el instante considerado la varilla AE gira en contra de las manecillas del reloj con una velocidad angular constante ω , determine para los datos dados, la velocidad relativa del bloque con respecto a cada varilla.

15.156 $a) \theta = 90^\circ, b) \theta = 60^\circ.$

15.157 $\theta = 45^\circ.$

15.158 Cuatro pasadores se deslizan en cuatro ranuras independientes cortadas en una placa circular como se muestra en la figura. Cuando la placa está en reposo, cada pasador tiene una velocidad dirigida en la forma que se indica y de la misma magnitud constante u . Si cada pasador mantiene la misma velocidad relativa a la placa cuando ésta gira alrededor de O con una velocidad angular constante ω en contra de las manecillas del reloj, determine la aceleración de cada pasador.

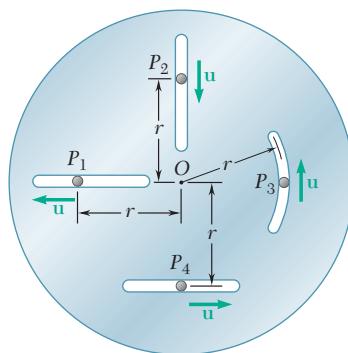


Figura P15.158

15.159 Retome el problema 15.158, y ahora suponga que la placa gira alrededor de O con una velocidad angular constante ω en el sentido de las manecillas del reloj.

15.160 En el instante que se muestra la longitud de la pluma AB se reduce a una velocidad constante de 0.2 m/s, y la pluma desciende a razón constante de 0.08 rad/s. Determine *a)* la velocidad del punto B , *b)* la aceleración del punto B .

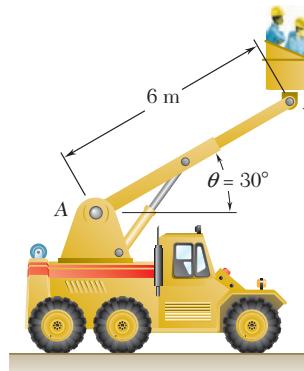


Figura P15.160 y P15.161

15.161 En el instante que se muestra la longitud de la pluma AB se incrementa a una velocidad constante de 0.2 m/s, y la pluma desciende a razón constante de 0.08 rad/s. Determine *a)* la velocidad del punto B , *b)* la aceleración del punto B .

15.162 y 15.163 La manga BC está soldada a un brazo que gira alrededor de A con una velocidad angular constante ω . En la posición mostrada la varilla DF está siendo movida hacia la izquierda a una velocidad constante $u = 16 \text{ in./s}$ relativa a la manga. Para la velocidad angular ω dada, determine la aceleración a del punto D , b) del punto de la varilla DF que coincide con el punto E .

15.162 $\omega = (3 \text{ rad/s})\mathbf{i}$.

15.163 $\omega = (3 \text{ rad/s})\mathbf{j}$.

15.164 La jaula del elevador de una mina desciende a una velocidad constante de 40 ft/s . Determine la magnitud y dirección de la aceleración de Coriolis de la jaula si el elevador se localiza $a)$ en el ecuador, $b)$ en la latitud 40° norte y $c)$ en la latitud 40° sur.

15.165 Un trineo de propulsión se somete a una prueba en una pista recta que se construye a lo largo de un meridiano. Si se sabe que la pista se ubica en una latitud 40° norte, determine la aceleración de Coriolis del trineo cuando se mueve hacia el norte a una velocidad de 900 km/h .

15.166 El brazo AB controla el movimiento de la manguera D . En el instante que se indica, el brazo gira en contra de las manecillas del reloj a razón constante $\omega = 2.4 \text{ rad/s}$ y la extensión BC se alarga a razón constante $u = 10 \text{ in./s}$ con respecto al brazo. Para cada uno de los arreglos que se muestran, determine la aceleración de la manguera D .

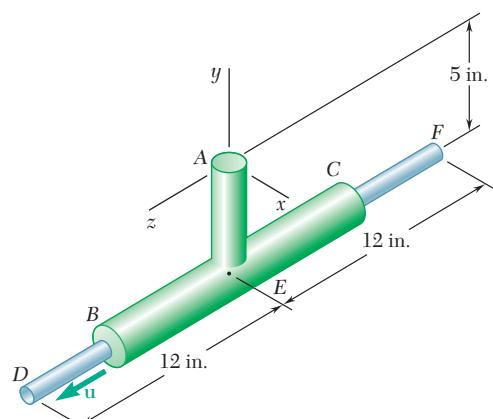
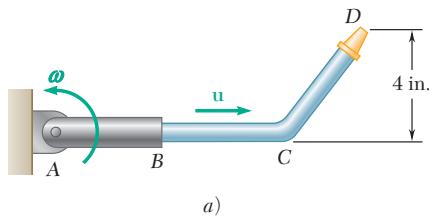
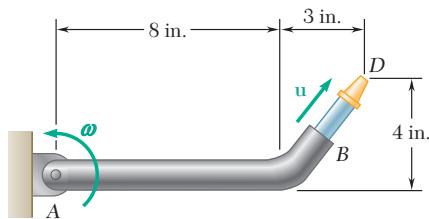


Figura P15.162 y P15.163



a)



b)

Figura P15.166

15.167 Retome el problema 15.166, y ahora suponga que la dirección de la velocidad relativa u se invierte de manera que la porción BD se retraiga.

15.168 y 15.169 Una cadena se enrolla alrededor de dos engranes de 40 mm de radio que giran libremente con respecto al brazo AB de 320 mm . La cadena se mueve alrededor del brazo AB en el sentido de las manecillas del reloj a razón constante relativa al brazo de 80 mm/s . Si en la posición que se indica el brazo AB gira en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de A a razón constante $\omega = 0.75 \text{ rad/s}$, determine la aceleración de los eslabones de la cadena que se indican a continuación.

15.168 Eslabones 1 y 2.

15.169 Eslabones 3 y 4.

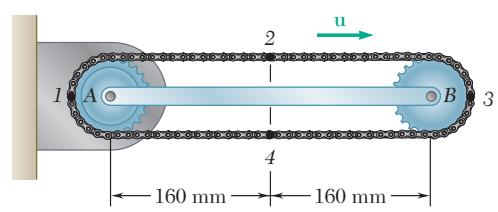


Figura P15.168 y P15.169

15.170 La varilla AB de longitud R gira alrededor de A con una velocidad angular ω_1 en el sentido de las manecillas del reloj. Al mismo tiempo, la varilla BD de longitud r gira alrededor de B con una velocidad angular constante ω_2 en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a la varilla AB . Demuestre que si $\omega_2 = 2\omega_1$, la aceleración del punto D pasa por el punto A . Además muestre que este resultado es independiente de R , r y θ .

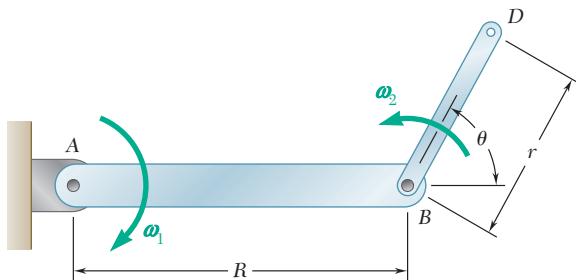


Figura P15.170 y P15.171

15.171 La varilla AB de longitud $R = 15$ in. gira alrededor de A con una velocidad angular constante ω_1 de 5 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Al mismo tiempo, la varilla BD de longitud $r = 8$ in. gira alrededor de B con una velocidad angular constante ω_2 de 3 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto a la varilla AB . Si $\theta = 60^\circ$, determine la aceleración del punto D para la posición mostrada.

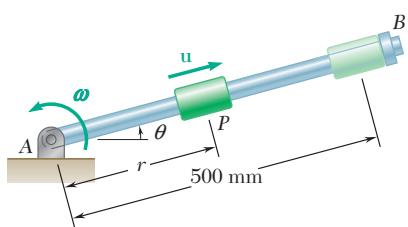


Figura P15.172

15.172 El collarín P se desliza hacia fuera a una velocidad relativa constante u a lo largo de la varilla AB , la cual gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una velocidad angular constante de 20 rpm . Si $r = 250 \text{ mm}$ cuando $\theta = 0$ y el collarín llega a B cuando $\theta = 90^\circ$, determine la magnitud de la aceleración del collarín P justo cuando llegue a B .

15.173 El pasador P se desliza en una ranura cortada en la placa que se muestra a una velocidad relativa constante $u = 90 \text{ mm/s}$. Si en el instante indicado la placa gira en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de A a una velocidad constante $\omega = 3 \text{ rad/s}$, determine la aceleración del pasador si éste se ubica en *a)* el punto A , *b)* el punto B y *c)* el punto C .

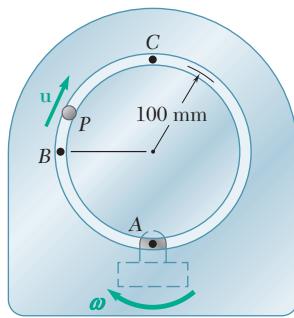


Figura P15.173 y P15.174

15.174 El pasador P se desliza en una ranura circular cortada en la placa que se muestra a una velocidad relativa constante $u = 90 \text{ mm/s}$. Si se sabe que en el instante indicado la velocidad angular ω de la placa es de 3 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y que decrece a razón de 5 rad/s^2 , determine la aceleración del pasador si éste se localiza en *a)* el punto A , *b)* el punto B , *c)* el punto C .

- 15.175 y 15.176** Si en el instante mostrado la varilla unida a *B* gira con una velocidad angular constante ω_B de 6 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la velocidad angular y la aceleración angular de la varilla unida en *A*.

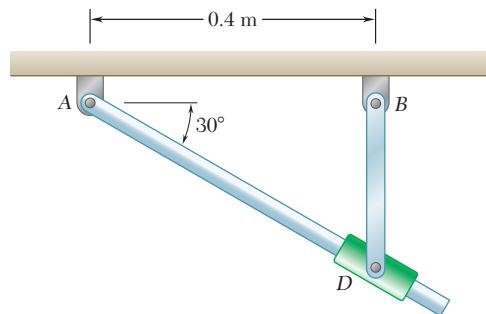


Figura P15.175

- 15.177** En el instante mostrado, la barra *BC* tiene una velocidad angular de 3 rad/s y una aceleración angular de 2 rad/s², ambas en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la aceleración angular de la placa.

- 15.178** En el instante mostrado, la barra *BC* tiene una velocidad angular de 3 rad/s y una aceleración angular de 2 rad/s², ambas en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración angular de la placa.

- 15.179** El mecanismo de Ginebra o Cruz de Malta que se muestra se utiliza para proporcionar un movimiento rotatorio intermitente del disco *S*. El disco *D* gira con una velocidad angular constante ω_D de 8 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Se une un pasador *P* al disco *D*, el cual tiene la posibilidad de deslizarse en una de las seis ranuras cortadas con igual espaciado en el disco *S*. Se desea que la velocidad angular del disco *S* sea cero cuando el pasador entre y salga de cada una de las seis ranuras; esto ocurrirá si la distancia entre los centros de los discos y los radios de los mismos se relacionan de la manera indicada. Determine la velocidad y la aceleración angulares del disco *S* en el instante en el que $\phi = 150^\circ$.

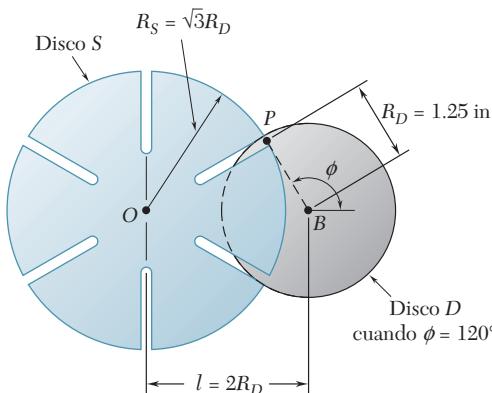


Figura P15.179

- 15.180** En el problema 15.179, determine la velocidad angular y la aceleración angular del disco *S* en el instante en el que $\phi = 135^\circ$.

- 15.181** El disco que se muestra gira con una velocidad angular constante de 12 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. En el instante indicado, determine *a*) la velocidad angular y la aceleración angular de la varilla *BD*, *b*) la velocidad y la aceleración del punto de la varilla que coincide con *E*.

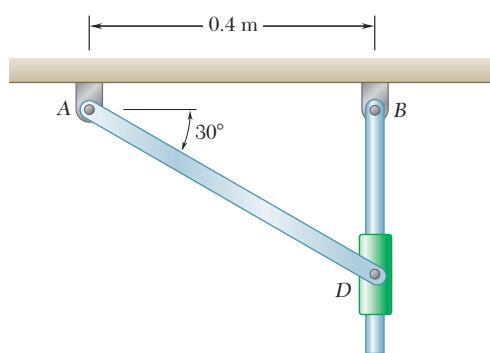


Figura P15.176

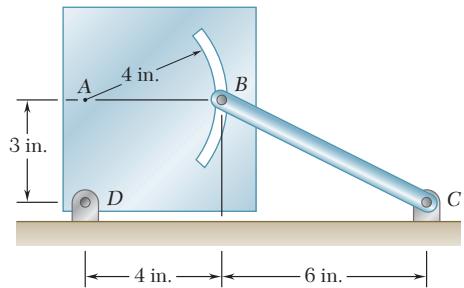


Figura P15.177 y P15.178

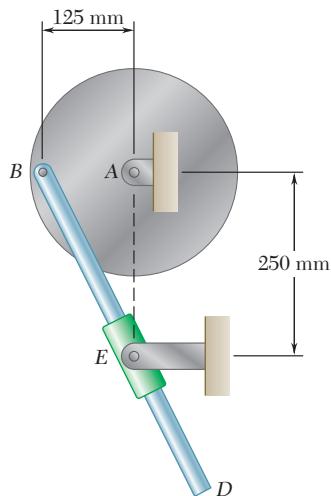


Figura P15.181

***15.182** La varilla AB pasa a través de un collarín que está soldado al eslabón DE . Si se sabe que en el instante mostrado el bloque A se mueve hacia la derecha a una velocidad constante de 75 in./s, determine *a)* la velocidad angular de la varilla AB , *b)* la velocidad relativa al collarín del punto de la varilla que está en contacto con el collarín, *c)* la aceleración del punto de la varilla que está en contacto con el collarín. (Sugerencia: La varilla AB y el eslabón DE tienen la misma ω y la misma α .)

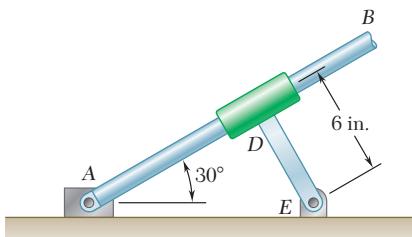


Figura P15.182

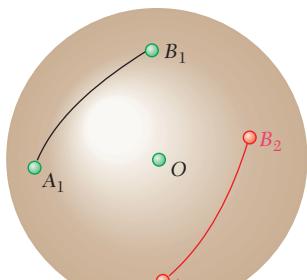
***15.183** Retome el problema 15.182, y ahora suponga que el bloque A se mueve hacia la izquierda a una velocidad constante de 75 in./s.

*15.12. MOVIMIENTO ALREDEDOR DE UN PUNTO FIJO

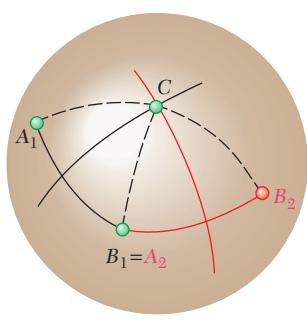
En la sección 15.3 se consideró el movimiento de un cuerpo rígido restringido a girar alrededor de un eje fijo. A continuación se examinará el caso más general del movimiento de un cuerpo rígido que tiene un punto fijo O .

En primer lugar se demostrará que *el desplazamiento más general de un cuerpo rígido con un punto fijo O es equivalente a una rotación del cuerpo en torno a un eje que pasa por O* .[†] En vez de considerar al cuerpo rígido en su totalidad, es posible desprender una esfera del centro O del cuerpo y analizar el movimiento de tal esfera. Queda claro que el movimiento de la esfera caracteriza por completo al movimiento del cuerpo dado. Puesto que son tres los puntos que definen la posición de un sólido en el espacio, el centro O y dos puntos A y B sobre la superficie de la esfera definirán la posición de ésta y, en consecuencia, la posición del cuerpo. Sean A_1 y B_1 las que caractericen la posición de la esfera en un instante determinado, y A_2 y B_2 las que caractericen su posición en un instante posterior (figura 15.31a). Como la esfera es rígida, las longitudes de los arcos de mayor círculo A_1B_1 y A_2B_2 deben ser iguales, aunque, salvo por este requerimiento, las posiciones de A_1 , A_2 , B_1 y B_2 son arbitrarias. Aquí se pretende probar que los puntos A y B pueden trasladarse, respectivamente, desde A_1 y B_1 y hasta A_2 y B_2 mediante una sola rotación de la esfera alrededor de un eje.

Por conveniencia, y sin pérdida de generalidad, se elige el punto B de manera que su posición inicial coincida con la posición inicial de A ; de tal modo, $B_1 = A_2$ (figura 15.31b). Se trazan los arcos de círculo amplio A_1A_2 , A_2B_2 y los arcos que bisecan, respectivamente, A_1A_2 y A_2B_2 . Sea C el punto de intersección de estos dos últimos arcos; la estructura se completa al trazar A_1C , A_2C y B_2C . Tal como fue señalado antes, a causa de la rigidez de la esfera, $A_1B_1 = A_2B_2$. Puesto que C es por construcción equidistante desde A_1 , A_2 y B_2 , se tiene también que $A_1C = A_2C = B_2C$. Como resultado, los triángulos esféricos A_1CA_2 y



a)



b)

Figura 15.31

[†]Éste se conoce como *teorema de Euler*.

B_1CB_2 son congruentes y los ángulos A_1CA_2 y B_1CB_2 son iguales. Denotando por θ el valor común de estos ángulos, se concluye que la esfera puede llevarse desde su posición inicial hasta su posición final mediante una sola rotación θ alrededor del eje OC .

Se concluye que el movimiento durante el intervalo de tiempo Δt de un cuerpo rígido con un punto fijo O puede considerarse como una rotación $\Delta\theta$ alrededor de cierto eje. Al dibujar a lo largo de ese eje un vector de magnitud $\Delta\theta/\Delta t$ y al dejar que Δt tienda a cero, se obtiene en el límite el *eje de rotación instantáneo* y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo en el instante considerado (figura 15.32). La velocidad de la partícula P del cuerpo puede obtenerse entonces, como en la sección 15.3, formando el producto vectorial de $\boldsymbol{\omega}$ y el vector de posición \mathbf{r} de la partícula:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (15.37)$$

La aceleración de la partícula se obtiene diferenciando (15.37) con respecto a t . Como en la sección 15.3, se tiene

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (15.38)$$

donde la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ se define como la derivada

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \quad (15.39)$$

de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

En el caso del movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo, la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ y del eje de rotación instantáneo cambia de un instante a otro. La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ refleja consecuentemente el cambio en dirección de $\boldsymbol{\omega}$, así como su cambio en magnitud y, en general, *no está dirigida a lo largo del eje instantáneo de rotación*. Si bien las partículas del cuerpo ubicadas en el eje de rotación instantáneo tienen velocidad cero en el instante considerado, no tienen aceleración cero. Además, la aceleración de las diversas partículas del cuerpo *no pueden* determinarse como si el cuerpo estuviera rotando de manera permanente alrededor del eje instantáneo.

Si se recuerda la definición de la velocidad de una partícula con vector de posición \mathbf{r} , se advierte que la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ como se expresa en (15.39), representa la velocidad de la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$. Esta propiedad tal vez sea útil en la determinación de la aceleración angular de un cuerpo rígido. Por ejemplo, se concluye que el vector $\boldsymbol{\alpha}$ es tangente a la curva descrita en el espacio por la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$.

Observe que el vector $\boldsymbol{\omega}$ se mueve dentro del cuerpo, así como en el espacio. En consecuencia, se generan dos conos denominados, respectivamente, *cono corporal* y *cono espacial* (figura 15.33).[†] Es posible demostrar que en cualquier instante dado los dos conos son tangentes a lo largo del eje de rotación instantáneo, y que conforme se mueve el cuerpo, el cono corporal parece *rodar* sobre el espacial.

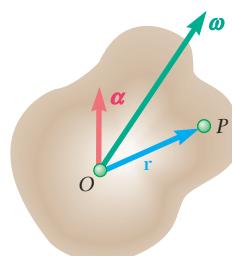


Figura 15.32

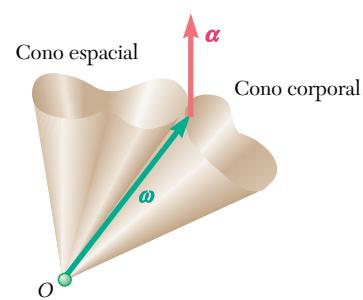


Figura 15.33

[†]Se recuerda que un *cono* es, por definición, una superficie generada por una línea recta que pasa por un punto fijo. En general, los conos considerados aquí *no serán conos circulares*.



Fotografía 15.8 Cuando la escalera gira alrededor de su base fija, es posible obtener su velocidad angular al sumar las velocidades angulares que corresponden a rotaciones simultáneas alrededor de dos ejes diferentes.

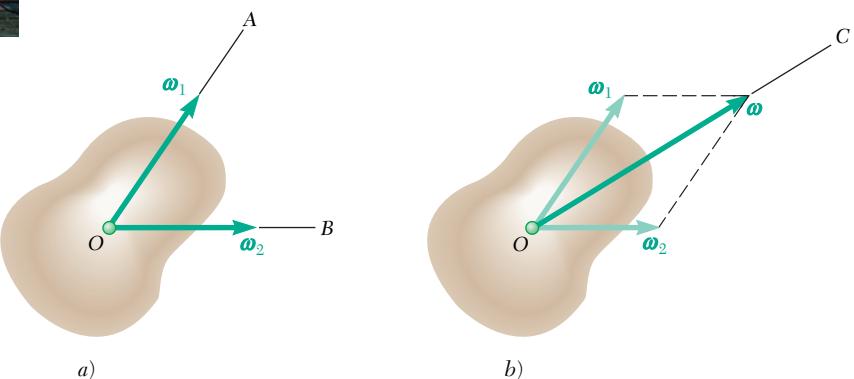


Figura 15.34

Considere un cuerpo rígido con un punto fijo O que en un instante dado rota simultáneamente alrededor de los ejes OA y OB con velocidades angulares ω_1 y ω_2 (figura 15.34a). Se sabe que este movimiento debe ser equivalente en el instante considerado a una sola rotación de velocidad angular ω . Se trata de demostrar que

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \quad (15.40)$$

esto es, que la velocidad angular resultante puede obtenerse al sumar ω_1 y ω_2 mediante la ley del paralelogramo (figura 15.34b).

Considere una partícula P del cuerpo, definida por el vector de posición \mathbf{r} . Denotando, respectivamente, mediante \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 y \mathbf{v} la velocidad de P cuando el cuerpo gira únicamente alrededor del eje OA , únicamente alrededor de OB y alrededor de ambos ejes simultáneamente, se escribe

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} \quad \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \quad (15.41)$$

Pero el carácter vectorial de las velocidades *lineales* está bien establecido (puesto que representan las derivadas de los vectores de posición). Por lo tanto, se tiene

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

donde el signo más indica suma vectorial. Al sustituir los valores de (15.41), se escribe

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} &= \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} &= (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

donde el signo más sigue indicando adición vectorial. Puesto que la relación obtenida se cumple para un \mathbf{r} arbitrario, se concluye que (15.40) debe ser cierta.

*15.13. MOVIMIENTO GENERAL

15.13. Movimiento general 991

A continuación se considerará el movimiento más general de un cuerpo rígido en el espacio. Sean A y B dos partículas del cuerpo. Hay que recordar de la sección 11.12 que la velocidad de B con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ puede expresarse como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (15.42)$$

donde $\mathbf{v}_{B/A}$ es la velocidad de B relativa al sistema de referencia $AX'Y'Z'$ fijo en A y de orientación fija (figura 15.35). Puesto que A está fijo en este sistema de referencia, el movimiento del cuerpo relativo a $AX'Y'Z'$ es el movimiento de un cuerpo con un punto fijo. En consecuencia, la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ puede obtenerse de (15.37) después de que \mathbf{r} sea sustituido por el vector de posición $\mathbf{r}_{B/A}$ de B relativa a A . Al sustituir $\mathbf{v}_{B/A}$ en (15.42), se escribe

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad (15.43)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado.

La aceleración de B se obtiene mediante un razonamiento similar. Se escribe primero

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

y, si se recuerda la ecuación (15.38),

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \quad (15.44)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es la aceleración angular del cuerpo en el instante considerado.

Las ecuaciones (15.43) y (15.44) muestran que *el movimiento más general de un cuerpo rígido es equivalente, en cualquier instante dado, a la suma de una traslación*, en el cual todas las partículas del cuerpo tienen la misma velocidad y aceleración que una partícula de referencia A , y de un movimiento en el que la partícula A se supone fija.[†]

Al resolver (15.43) y (15.44) para \mathbf{v}_A y \mathbf{a}_A , se demuestra con facilidad que el movimiento del cuerpo con respecto al sistema de referencia fijo a B se caracterizaría por medio de los mismos vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ como en su movimiento con respecto a $AX'Y'Z'$. La velocidad y la aceleración angulares del cuerpo rígido en un instante dado son así independientes de la elección del punto de referencia. Por otro lado, debe tenerse presente que si el sistema de referencia en movimiento está fijo en A o en B , debe mantener una orientación fija; esto es, debe conservarse paralelo al sistema de referencia fijo $OXYZ$ durante todo el movimiento del cuerpo rígido. En muchos problemas resultará más conveniente utilizar un sistema de referencia en movimiento al que se le permita tanto la rotación como la traslación. El uso de este tipo de sistemas de referencia en movimiento se estudiará en las secciones 15.14 y 15.15.

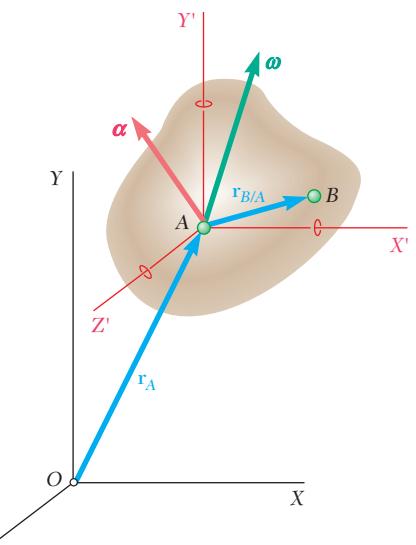
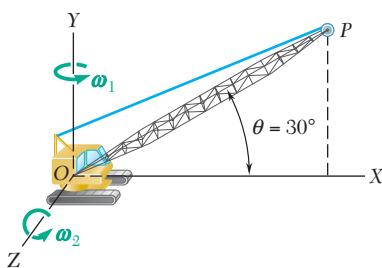


Figura 15.35

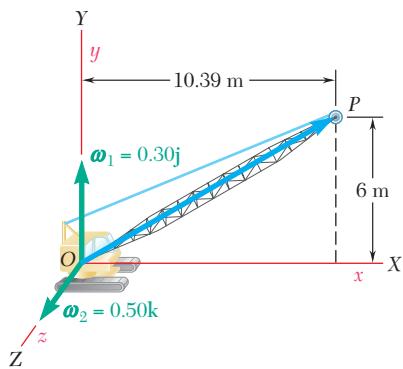
[†]Hay que recordar de la sección 15.12 que, en general, los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ no son colineales, y que la aceleración de las partículas del cuerpo en su movimiento relativo al sistema de referencia $AX'Y'Z'$ no puede determinarse como si el cuerpo estuviera rotando permanentemente alrededor del eje instantáneo que pasa por A .



PROBLEMA RESUELTO 15.11

La rueda que se muestra gira con una velocidad angular constante ω_1 de 0.30 rad/s. De manera simultánea, se está elevando la pluma con una velocidad angular constante ω_2 de 0.50 rad/s relativa a la cabina. Si la longitud de la pluma OP es $l = 12$ m, determine a) la velocidad angular ω de la pluma, b) la aceleración angular α de la pluma, c) la velocidad v de la punta de la pluma, d) la aceleración a de la punta de la pluma.

SOLUCIÓN



a) **Velocidad angular de la pluma.** Al sumar la velocidad angular ω_1 de la cabina y la velocidad angular ω_2 de la pluma relativa a la cabina, se obtiene la velocidad angular ω de la pluma en el instante que se considera:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \quad \omega = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$$

b) **Aceleración angular de la pluma.** La aceleración angular α de la pluma se obtiene al diferenciar ω . Puesto que el vector ω_1 es de magnitud y dirección constantes, se tiene

$$\alpha = \dot{\omega} = \dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 = 0 + \dot{\omega}_2$$

donde la razón de cambio $\dot{\omega}_2$ se calcula con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$. Sin embargo, es más conveniente utilizar un sistema de referencia $Oxyz$ fijo a la cabina y que rote con ella, ya que el vector ω_2 también gira con la cabina y, por ello, tiene una razón de cambio cero con respecto a ese sistema de referencia. Al utilizar la ecuación (15.31) con $\mathbf{Q} = \omega_2$ y $\mathbf{\Omega} = \omega_1$, se escribe

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} &= (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q} \\ (\dot{\omega}_2)_{OXYZ} &= (\dot{\omega}_2)_{Oxyz} + \omega_1 \times \omega_2 \\ \alpha &= (\dot{\omega}_2)_{OXYZ} = 0 + (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\alpha = (0.15 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$$

c) **Velocidad de la punta de la pluma.** Al advertir que el vector de posición del punto P es $\mathbf{r} = (10.39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}$ y al utilizar la expresión que se encontró para ω en la parte a), se escribe

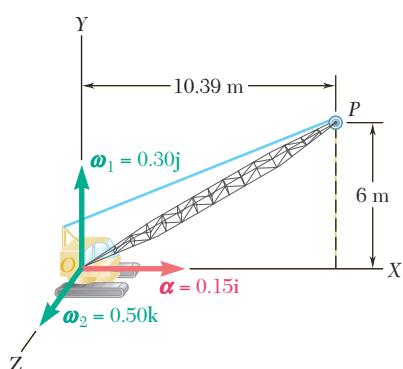
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \omega \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.30 \text{ rad/s} & 0.50 \text{ rad/s} \\ 10.39 \text{ m} & 6 \text{ m} & 0 \end{vmatrix} \\ \mathbf{v} &= -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j} - (3.12 \text{ m/s})\mathbf{k} \end{aligned}$$

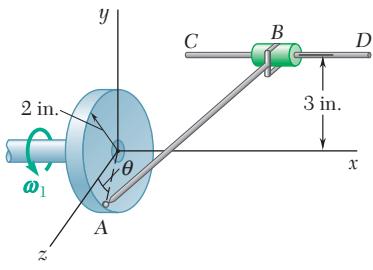
d) **Aceleración de la punta de la pluma.** Si se recuerda que $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, se escribe

$$\mathbf{a} = \alpha \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) = \alpha \times \mathbf{r} + \omega \times \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.15 & 0 & 0 \\ 10.39 & 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.30 & 0.50 \\ -3 & 5.20 & -3.12 \end{vmatrix} \\ &= 0.90\mathbf{k} - 0.94\mathbf{i} - 2.60\mathbf{i} - 1.50\mathbf{j} + 0.90\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = -(3.54 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (1.50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (1.80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$$





PROBLEMA RESUELTO 15.12

La varilla AB , de 7 in. de longitud, está conectada al disco mediante una articulación de rótula, y al collarín B por medio de una horquilla. El disco gira en el plano yz a una razón constante $\omega_1 = 12 \text{ rad/s}$, mientras el collarín tiene la libertad de deslizar a lo largo de la varilla horizontal CD . En la posición $\theta = 0$, determine *a)* la velocidad del collarín, *b)* la velocidad angular de la varilla.

SOLUCIÓN

a) Velocidad del collarín. Puesto que el punto A está fijo al disco y como el collarín B se mueve en una dirección paralela al eje x , se tiene

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_A = 12\mathbf{i} \times 2\mathbf{k} = -24\mathbf{j} \quad \mathbf{v}_B = v_B \mathbf{i}$$

Denotando por $\boldsymbol{\omega}$ la velocidad angular de la varilla, se escribe

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$v_B \mathbf{i} = -24\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$v_B \mathbf{i} = -24\mathbf{j} + (-2\omega_y - 3\omega_z)\mathbf{i} + (6\omega_z + 2\omega_x)\mathbf{j} + (3\omega_x - 6\omega_y)\mathbf{k}$$

Al igualar los coeficientes de los vectores unitarios, se obtiene

$$v_B = -2\omega_y - 3\omega_z \quad (1)$$

$$24 = 2\omega_x + 6\omega_z \quad (2)$$

$$0 = 3\omega_x - 6\omega_y \quad (3)$$

Al multiplicar las ecuaciones (1), (2) y (3), respectivamente, por 6, 3 y -2 para después sumarlas, se obtiene:

$$6v_B + 72 = 0 \quad v_B = -12 \quad \mathbf{v}_B = -(12 \text{ in./s})\mathbf{i} \quad \blacktriangleleft$$

b) Velocidad angular de la varilla AB . Note que la velocidad angular no puede determinarse a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3), puesto que el determinante formado por los coeficientes de ω_x , ω_y y ω_z es cero. Por lo tanto, debe obtener una ecuación adicional al considerar la restricción impuesta por la horquilla en B .

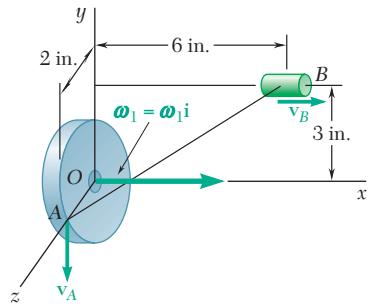
La conexión collarín-horquilla en B permite la rotación de AB alrededor de la varilla CD y también en torno a un eje perpendicular al plano que contiene AB y CD . Esto evita la rotación de AB alrededor del eje EB , que es perpendicular a CD y yace en el plano que contiene a AB y CD . De tal modo la proyección de $\boldsymbol{\omega}$ sobre $\mathbf{r}_{E/B}$ debe ser cero y escribir[†]

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{E/B} = 0 \quad (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 0 \\ -3\omega_y + 2\omega_z = 0 \quad (4)$$

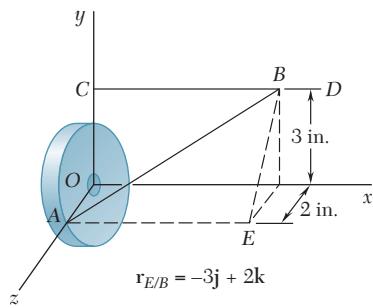
Al resolver de manera simultánea las ecuaciones (1) a (4), se obtiene,

$$v_B = -12 \quad \omega_x = 3.69 \quad \omega_y = 1.846 \quad \omega_z = 2.77$$

$$\boldsymbol{\omega} = (3.69 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (1.846 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (2.77 \text{ rad/s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= 12 \mathbf{i} \\ \mathbf{r}_A &= 2\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_B &= 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \\ \mathbf{r}_{B/A} &= 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \end{aligned}$$



$$\mathbf{r}_{E/B} = -3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

[†]También se observó que la dirección de EB es el triple del producto del vector $\mathbf{r}_{B/C} \times (\mathbf{r}_{B/C} \times \mathbf{r}_{B/A})$ y se escribe $\boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}_{B/C} \times (\mathbf{r}_{B/C} \times \mathbf{r}_{B/A})] = 0$. Esta fórmula puede ser particularmente útil si la varilla CD estuviera sesgada.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se inició el estudio de la *cinemática de cuerpos rígidos en tres dimensiones*. Primero se estudió el *movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo* y luego el *movimiento general de un cuerpo rígido*.

A. Movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo. Para analizar el movimiento de un punto B de un cuerpo en rotación alrededor de un punto fijo O , es posible seguir los pasos siguientes:

1. **Determinar el vector de posición \mathbf{r}** que conecta el punto fijo O con el punto B .
2. **Determinar la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo** con respecto a un sistema de referencia fijo. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ se obtendrá muchas veces al sumar dos velocidades angulares componentes $\boldsymbol{\omega}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2$ [problema resuelto 15.11].
3. **Calcular la velocidad \mathbf{B}** utilizando la ecuación

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (15.37)$$

Su cálculo casi siempre se facilitará si se expresa el producto vectorial como un determinante.

4. Determinar la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo. La aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ representa la razón de cambio $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{OXYZ}$ del vector $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a un sistema de referencia fijo $OXYZ$ y refleja un cambio en la magnitud y un cambio en la dirección de la velocidad angular. Sin embargo, al calcular $\boldsymbol{\alpha}$ se encuentra que es conveniente calcular primero la razón de cambio $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{Oxyz}$ de $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a un sistema de referencia en rotación $Oxyz$ de su elección, y al utilizar la ecuación (15.31) de la lección anterior para obtener $\boldsymbol{\alpha}$. Se escribirá

$$\boldsymbol{\alpha} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{OXYZ} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema de referencia en rotación $Oxyz$ [problema resuelto 15.11].

5. **Calcular la aceleración de \mathbf{B}** utilizando la ecuación

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (15.38)$$

Observe que el producto vectorial $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ representa la velocidad del punto B que se calculó en el paso 3. Además, el cálculo del primer producto vectorial en (15.38) se facilitará si se expresa este producto en forma de determinante. Recuerde que, como en el caso del movimiento plano de un cuerpo rígido, el eje de rotación instantáneo *no puede* utilizarse para determinar aceleraciones.

B. Movimiento general de un cuerpo rígido. El movimiento general de un cuerpo rígido puede considerarse como *la suma de una traslación y una rotación*. Tome en cuenta lo siguiente:

a) En la parte de traslación del movimiento, todos los puntos del cuerpo tienen la *misma velocidad* \mathbf{v}_A y la *misma aceleración* \mathbf{a}_A que el punto A del cuerpo que se ha elegido como el punto de referencia.

b) En la parte de rotación del movimiento se supone que el mismo punto de referencia A es un *punto fijo*.

1. Para determinar la velocidad de un punto B del cuerpo rígido cuando se conoce la velocidad \mathbf{v}_A del punto de referencia A y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo, simplemente se suma \mathbf{v}_A a la velocidad $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ de B en su rotación alrededor de A:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad (15.43)$$

Como se indicó antes, el cálculo del producto vectorial casi siempre se facilitará si se expresa en forma de determinante.

La ecuación (15.43) también se puede utilizar para determinar la magnitud de \mathbf{v}_B cuando se conoce su dirección, incluso si se desconoce $\boldsymbol{\omega}$. Si bien las tres ecuaciones escalares correspondientes son linealmente dependientes y las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ no están determinadas, éstas pueden eliminarse y es posible encontrar \mathbf{v}_A utilizando una combinación lineal apropiada de las tres ecuaciones [problema resuelto 15.12, parte a]. De manera alternativa, es factible asignar un valor arbitrario a una de las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y resolver las ecuaciones para \mathbf{v}_A . Sin embargo, es necesario buscar una ecuación adicional para determinar los valores verdaderos de las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ [problema resuelto 15.12, parte b].

2. Para determinar la aceleración de un punto B del cuerpo rígido cuando se conoce la aceleración \mathbf{a}_A del punto de referencia A y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo, simplemente se suma \mathbf{a}_A a la aceleración de B en su rotación en torno a A, como se expresa mediante la ecuación (15.38):

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \quad (15.44)$$

Observe que el producto vectorial $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$ representa la velocidad $\mathbf{v}_{B/A}$ de B relativa a A y es posible que ya se haya calculado como parte del cálculo de \mathbf{v}_B . También es importante recordar que el cálculo de los otros dos productos vectoriales se facilitará si se expresan estos productos en forma de determinante.

También es posible utilizar las tres ecuaciones escalares asociadas con la ecuación (15.44) para determinar la magnitud de \mathbf{a}_B cuando se conoce su dirección, incluso si se desconocen $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$. Si bien las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ están indeterminadas, se pueden asignar valores arbitrarios a una de las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y a una de las componentes de $\boldsymbol{\alpha}$ y resolver la ecuación para \mathbf{a}_B .

Problemas

15.184 La placa ABD y la varilla OB están rígidamente conectadas y giran alrededor de la junta de rótula O con una velocidad angular $\omega = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$. Si se sabe que $\mathbf{v}_A = (3 \text{ in./s})\mathbf{i} + (14 \text{ in./s})\mathbf{j} + (v_A)_z\mathbf{k}$ y $\omega_x = 1.5 \text{ rad/s}$, determine *a)* la velocidad angular del ensamble, *b)* la velocidad del punto D .

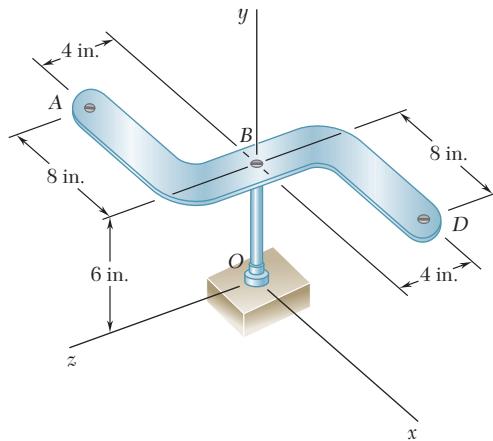


Figura P15.184

15.185 Retome el problema 15.184, y ahora suponga que $\omega_x = -1.5 \text{ rad/s}$.

15.186 En el instante considerado, la antena de radar gira alrededor del origen de coordenadas con una velocidad angular $\omega = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$. Si se sabe que $(v_A)_y = 300 \text{ mm/s}$, $(v_B)_y = 180 \text{ mm/s}$ y $(v_B)_z = 360 \text{ mm/s}$, determine *a)* la velocidad angular de la antena, *b)* la velocidad del punto A.

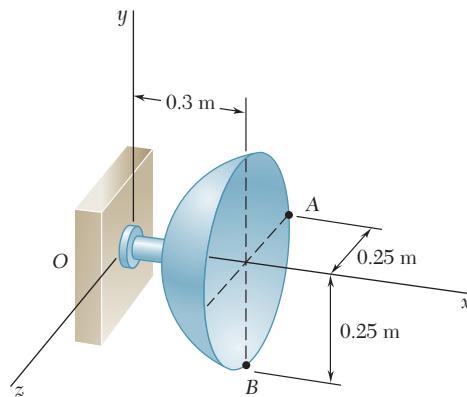


Figura P15.186 y P15.187

15.187 En el instante considerado, la antena de radar gira alrededor del origen de coordenadas con una velocidad angular $\omega = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$. Si se sabe que $(v_A)_x = 100 \text{ mm/s}$, $(v_A)_y = -90 \text{ mm/s}$ y $(v_B)_z = 120 \text{ mm/s}$, determine *a)* la velocidad angular de la antena, *b)* la velocidad del punto A.

15.188 Las aspas de un ventilador oscilante giran con una velocidad angular constante $\omega_1 = -(360 \text{ rpm})\mathbf{i}$ con respecto a la carcasa del motor. Determine la aceleración angular de las aspas, si se sabe que en el instante indicado la velocidad y la aceleración angulares de la carcasa del motor son, respectivamente, $\omega_2 = -(2.5 \text{ rpm})\mathbf{j}$ y $\alpha_2 = 0$.

15.189 El rotor de un motor eléctrico gira a la razón constante $\omega_1 = 1800 \text{ rpm}$. Determine la aceleración angular del rotor cuando el motor gira alrededor del eje y con una velocidad angular constante ω_2 de 6 rpm, en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se ve desde el eje positivo y .

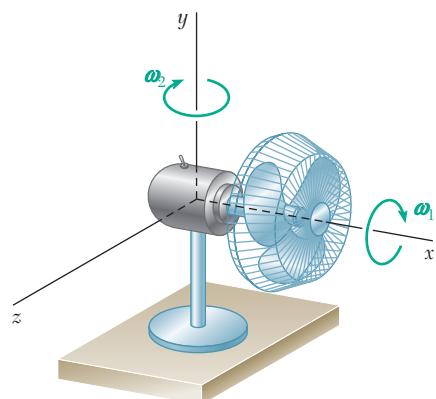


Figura P15.188

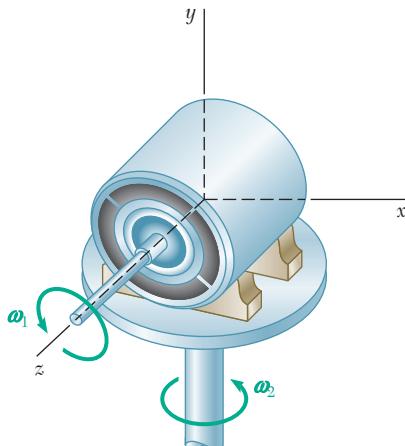


Figura P15.189

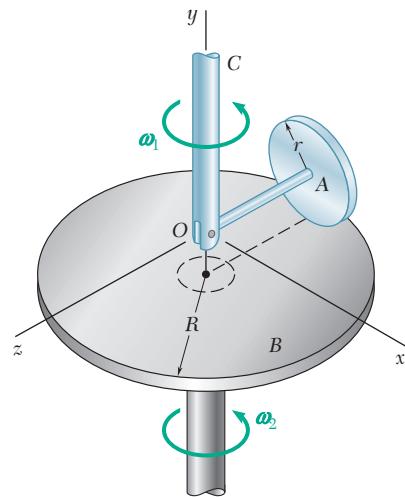


Figura P15.190 y P15.191

15.190 En el sistema mostrado, el disco A puede girar libremente alrededor de la varilla horizontal OA. Si se supone que el disco B es estacionario ($\omega_2 = 0$), y que el eje OC gira con velocidad angular constante ω_1 , determine *a)* la velocidad angular del disco A, *b)* la aceleración angular del disco A.

15.191 En el sistema mostrado, el disco A puede girar libremente alrededor de la varilla horizontal OA. Si se supone que el eje OC y el disco B giran con velocidad angular constante ω_1 y ω_2 , respectivamente, ambos en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a)* la velocidad angular del disco A, *b)* la aceleración angular del disco A.

15.192 El brazo BCD en forma de L gira alrededor del eje z con una velocidad angular constante ω_1 de 5 rad/s. Si se sabe que el disco de 150 mm de radio gira alrededor de BC con una velocidad angular constante ω_2 de 4 rad/s, determine la aceleración angular del disco.

15.193 En el problema 15.192 determine *a)* la velocidad del punto A, *b)* la aceleración del punto A.

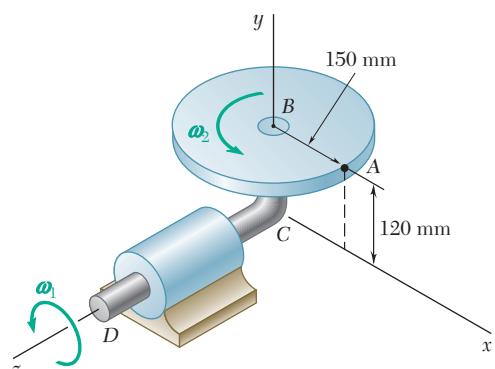


Figura P15.192

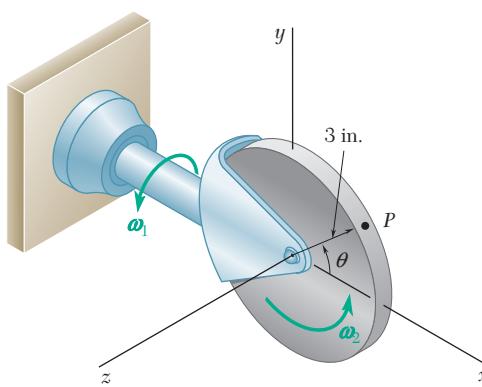


Figura P15.194 y P15.195

15.194 Un disco de 3 in. de radio gira a una velocidad constante $\omega_2 = 4 \text{ rad/s}$ alrededor de un eje que se sostiene mediante un soporte sujeto a una barra horizontal que gira a la velocidad constante $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$. Para la posición que se indica, determine *a)* la aceleración angular del disco, *b)* la aceleración del punto P sobre el borde del disco si $\theta = 0$ y *c)* la aceleración del punto P sobre el borde del disco si $\theta = 90^\circ$.

15.195 Un disco de 3 in. de radio gira a una velocidad constante $\omega_2 = 4 \text{ rad/s}$ alrededor de un eje que se sostiene mediante un soporte sujeto a una barra horizontal que gira a la velocidad constante $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$. Si se sabe que $\theta = 30^\circ$, determine la aceleración del punto P sobre el borde del disco.

15.196 Un cañón de longitud $OP = 4 \text{ m}$ se monta sobre una torreta como se muestra. Para mantener el cañón apuntando hacia un blanco móvil, el ángulo azimutal β se está incrementando a razón de $d\beta/dt = 30^\circ/\text{s}$ y el ángulo de elevación γ se aumenta a razón de $d\gamma/dt = 10^\circ/\text{s}$. Para la posición $\beta = 90^\circ$ y $\gamma = 30^\circ$, determine *a)* la velocidad angular del barril, *b)* la aceleración angular del barril y *c)* la velocidad y la aceleración del punto P .

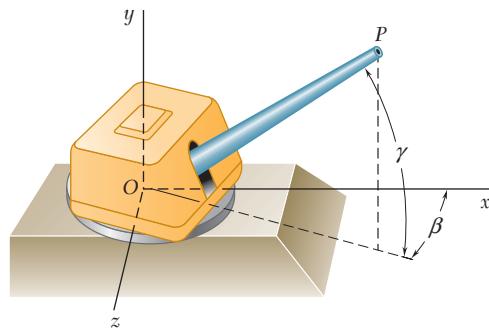


Figura P15.196

15.197 En el sistema de engranes planetarios que se muestra, los engranes A y B se conectan rígidamente entre sí y giran como una unidad alrededor de la flecha inclinada. Los engranes C y D giran con velocidades angulares constantes de 30 y 20 rad/s , respectivamente (ambos en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observan desde la derecha). Si se elige el eje x hacia la derecha, el eje y hacia arriba y el eje z apuntando hacia fuera del plano de la figura, determine *a)* la velocidad angular común de los engranes A y B , *b)* la velocidad angular de la flecha FH , que está unida rígidamente a la flecha inclinada.

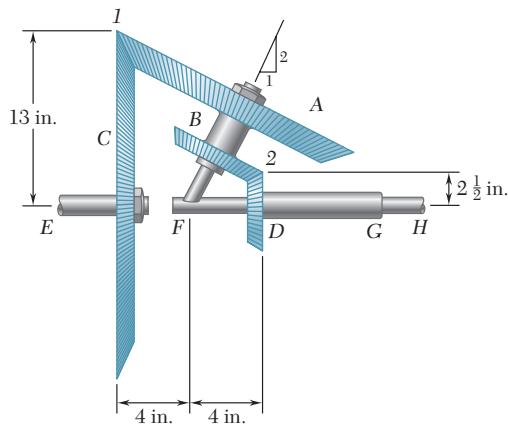


Figura P15.197

- 15.198** Una rueda de 30 mm de radio se monta sobre un eje OB de 100 mm de longitud. La rueda gira sin deslizarse sobre el suelo horizontal, y el eje es perpendicular al plano de la rueda. Si el sistema gira alrededor del eje y a una velocidad constante $\omega_1 = 2.4 \text{ rad/s}$, determine *a)* la velocidad angular de la rueda, *b)* la aceleración angular de la rueda, *c)* la aceleración del punto C localizado en el punto más alto del borde de la rueda.

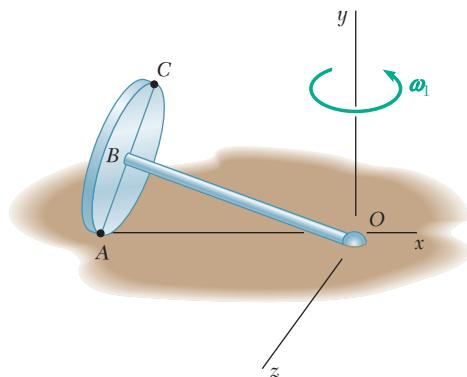


Figura P15.198

- 15.199** Varias barras se sueldan para formar el brazo guía robótico que se muestra en la figura, el cual está unido a una junta de rótula en O . La barra OA se desliza en una ranura inclinada recta mientras que la barra OB se desliza en una ranura paralela al eje z . Si se sabe que en el instante mostrado $\mathbf{v}_B = (180 \text{ mm/s})\mathbf{k}$, determine *a)* la velocidad angular del brazo guía, *b)* la velocidad del punto A , *c)* la velocidad del punto C .

- 15.200** En el problema 15.199, se sabe que la rapidez del punto B es constante. Para la posición mostrada, determine *a)* la aceleración angular del brazo guía, *b)* la aceleración del punto C .

- 15.201** El sector de 45° de una placa circular con 10 in. de radio está unido a una junta de rótula fija en O . Cuando el borde OA se mueve sobre la superficie horizontal, el borde OB se mueve a lo largo de la pared vertical. Si el punto A se mueve a una velocidad constante de 60 in./s, determine para la posición mostrada *a)* la velocidad angular de la placa, *b)* la velocidad del punto B .

- 15.202** La varilla AB de 275 mm de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines A y B , los cuales se deslizan a lo largo de las dos varillas que se muestran. Si el collarín B se mueve hacia el origen O a una velocidad constante de 180 mm/s, determine la velocidad del collarín A cuando $c = 175 \text{ mm}$.

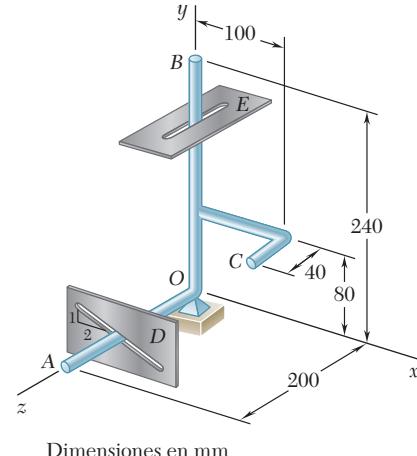


Figura P15.199

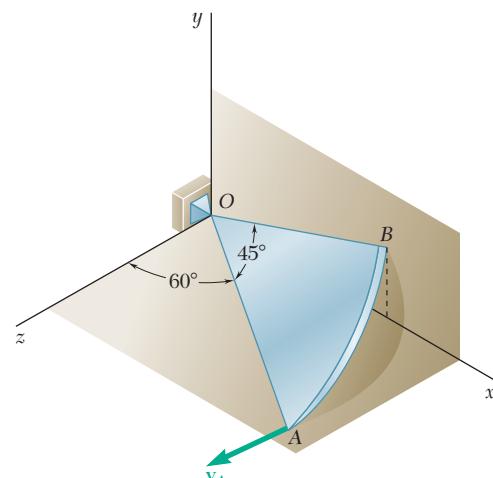


Figura P15.201

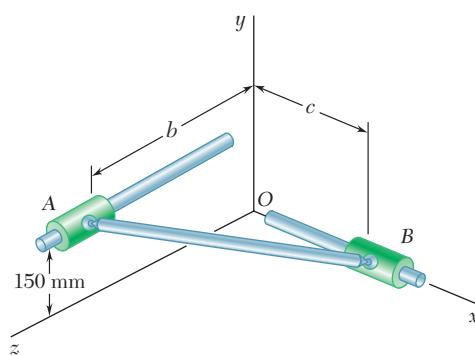


Figura P15.202 y P15.203

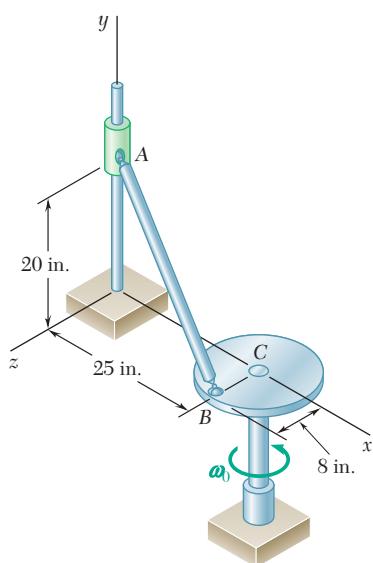


Figura P15.204

15.203 La varilla AB de 275 mm de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines A y B , los cuales se deslizan a lo largo de las dos varillas que se muestran. Si se sabe que el collarín B se aleja del origen O a una velocidad constante de 180 mm/s, determine la velocidad del collarín A cuando $c = 50$ mm.

15.204 La varilla AB se conecta mediante uniones de rótula al collarín A y al disco C de 16 in. de diámetro. Si se sabe que el disco C gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a una razón constante $\omega_0 = 3$ rad/s en el plano zx , determine la velocidad del collarín A para la posición mostrada.

15.205 La varilla AB de 29 in. de longitud se conecta mediante juntas de rótula a la manivela giratoria BC y al collarín A . La manivela BC tiene 8 in. de longitud y gira en el plano horizontal xy a razón constante $\omega_0 = 10$ rad/s. En el instante mostrado, cuando la manivela BC está paralela al eje z , determine la velocidad del collarín A .

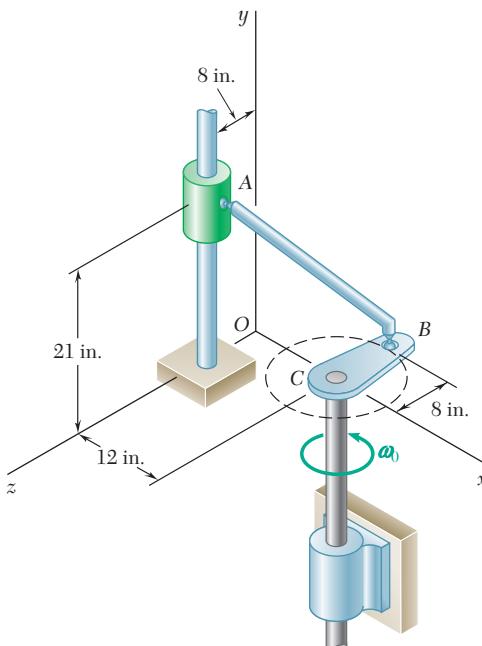


Figura P15.205

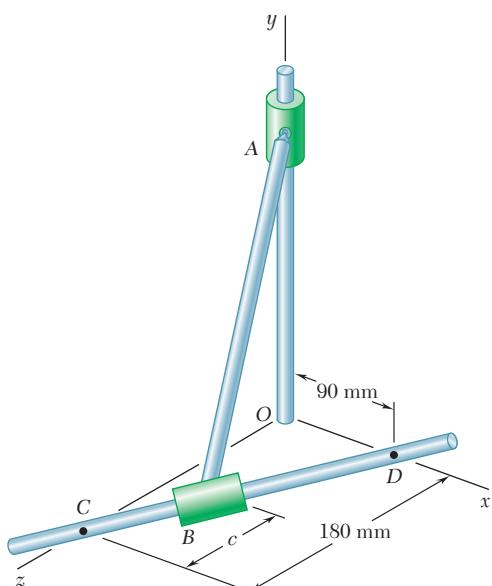


Figura P15.206 y P15.207

15.206 La varilla AB de 300 mm de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines A y B , los cuales se deslizan a lo largo de las dos barras mostradas. Si el collarín B se mueve hacia el punto D a una velocidad constante de 50 mm/s, determine la velocidad del collarín A cuando $c = 80$ mm.

15.207 La varilla AB de 300 mm de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines A y B , los cuales se deslizan a lo largo de las dos barras mostradas. Si el collarín B se mueve hacia el punto D a una velocidad constante de 50 mm/s, determine la velocidad del collarín A cuando $c = 120$ mm.

15.208 La varilla AB de 25 in. de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines A y B , los cuales se deslizan a lo largo de las dos varillas como se indica. Si el collarín B se mueve hacia el punto E a una velocidad constante de 20 in./s, determine la velocidad del collarín A cuando el collarín B pasa por el punto D .

15.209 La varilla AB de 25 in. de longitud se conecta mediante uniones de rótula a los collarines A y B , los cuales se deslizan a lo largo de las dos varillas como se indica. Si el collarín B se mueve hacia el punto E a una rapidez constante de 20 in./s, determine la velocidad del collarín A cuando el collarín B pasa por el punto C .

15.210 Dos ejes AC y EG , que se encuentran en el plano vertical yz , se conectan mediante una junta universal en D . El eje AC gira con velocidad angular constante ω_1 en la forma indicada. En el momento en que el brazo de la cruceta conectada a la flecha AC está en posición vertical, determine la velocidad angular de la flecha EG .

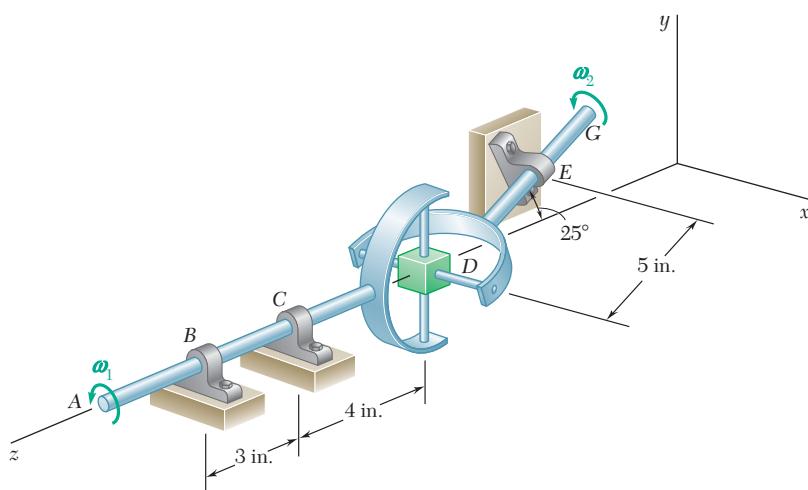


Figura P15.210

15.211 Retome el problema 15.210, y ahora suponga que el brazo de la cruceta conectada a la flecha AC está en posición horizontal.

15.212 En el problema 15.203, la unión de rótula entre la varilla y el collarín A se reemplaza por la horquilla mostrada. Determine *a)* la velocidad angular de la varilla, *b)* la velocidad del collarín A .

15.213 En el problema 15.204, la unión de rótula entre la varilla y el collarín A se reemplaza por la horquilla mostrada. Determine *a)* la velocidad angular de la varilla, *b)* la velocidad del collarín A .

15.214 a 15.219 Para el mecanismo del problema indicado, determine la aceleración del collarín A .

15.214 Mecanismo del problema 15.202.

15.215 Mecanismo del problema 15.203.

15.216 Mecanismo del problema 15.204.

15.217 Mecanismo del problema 15.205.

15.218 Mecanismo del problema 15.206.

15.219 Mecanismo del problema 15.207.

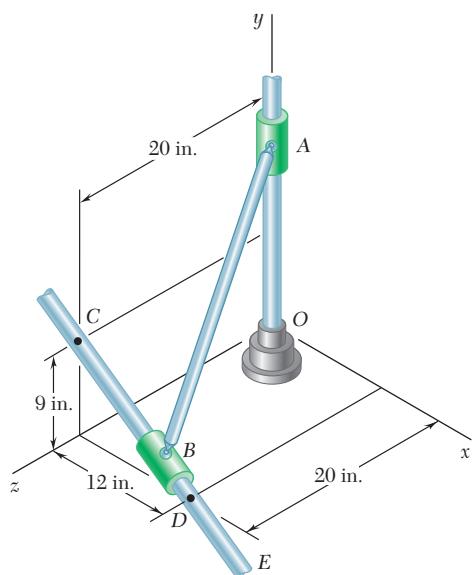


Figura P15.208 y P15.209

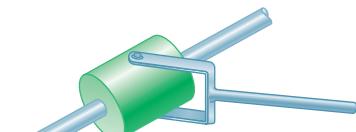


Figura P15.212

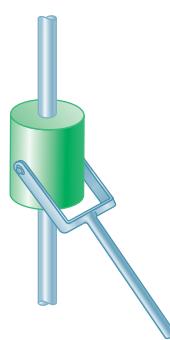


Figura P15.213

*15.14. MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL DE UNA PARCÍCULA CON RESPECTO A UN SISTEMA DE REFERENCIA EN ROTACIÓN. ACCELERACIÓN DE CORIOLIS

En la sección 15.10 se analizó una función vectorial $\mathbf{Q}(t)$ y dos sistemas de referencia centrados en O —un sistema de referencia fijo $OXYZ$ y uno rotatorio $Oxyz$ — las razones de cambio de \mathbf{Q} con respecto a los dos sistemas de referencia satisfacen la relación

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \quad (15.31)$$

En esa ocasión se supuso que el sistema de referencia $Oxyz$ estaba restringido a girar alrededor del eje fijo OA . Sin embargo, la deducción que se presentó en la sección 15.10 sigue siendo válida cuando el sistema de referencia $Oxyz$ se restringe únicamente a tener un punto fijo O . De acuerdo con esta suposición más general, el eje OA representa al eje de rotación *instantáneo* del sistema de referencia $Oxyz$ (sección 15.12) y el vector $\boldsymbol{\Omega}$ representa su velocidad angular en el instante considerado (figura 15.36).

Se considerará ahora el movimiento tridimensional de una partícula P relativa al sistema de referencia en rotación $Oxyz$ restringido a tener un origen fijo O . Sean \mathbf{r} el vector de posición de P en un instante dado y $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular del sistema de referencia $Oxyz$ con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ en el mismo instante (figura 15.37). Las deducciones dadas en la sección 15.11 para los dos movimientos bidimensionales de una partícula pueden ampliarse con facilidad al caso en tres dimensiones, y la velocidad absoluta \mathbf{v}_P de P (esto es, su velocidad con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$) se puede expresar como

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} \quad (15.45)$$

Si se denota por \mathcal{F} el sistema rotatorio $Oxyz$, se escribe esta relación en la forma alternativa

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \quad (15.46)$$

donde \mathbf{v}_P = velocidad absoluta de la partícula P

$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P' del sistema de referencia en movimiento \mathcal{F} que coincide con P

$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidad de P relativa al sistema de referencia en movimiento \mathcal{F}

La aceleración absoluta \mathbf{a}_P de P puede expresarse como

$$\mathbf{a}_P = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} + (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxyz} \quad (15.47)$$

Una forma alternativa es

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \quad (15.48)$$

donde \mathbf{a}_P = aceleración absoluta de la partícula P

$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema de referencia en movimiento \mathcal{F} que coincide con P

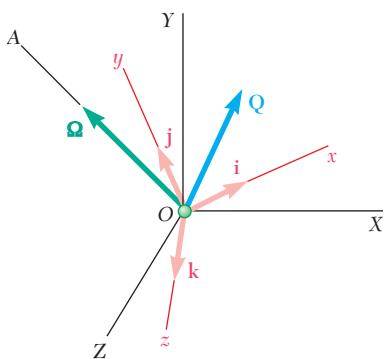


Figura 15.36

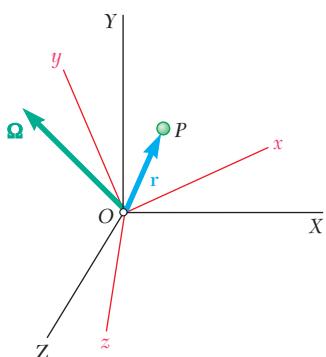


Figura 15.37

$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleración de P relativa al sistema de referencia en movimiento \mathcal{F}

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$$

= aceleración complementaria, o de Coriolis†

Observe que la aceleración de Coriolis es perpendicular a los vectores $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$. Sin embargo, puesto que estos vectores no suelen ser perpendiculares entre sí, la magnitud de \mathbf{a}_c no es en general igual a $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$, como lo fue en el caso del movimiento plano de una partícula. Note también que la aceleración de Coriolis se reduce a cero cuando los vectores $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ son paralelos, o cuando cualquiera de ellos es cero.

Los sistemas de referencia en rotación son particularmente útiles en el estudio del movimiento tridimensional de cuerpos rígidos. Si un cuerpo rígido tiene un punto fijo O , como fue el caso de la grúa del problema resuelto 15.11, se puede utilizar el sistema de referencia $Oxyz$ que no está ni fijo ni conectado de manera rígida al cuerpo rígido. Al denotar mediante $\boldsymbol{\Omega}$ la velocidad angular del sistema de referencia $Oxyz$, se descompone entonces la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo en las componentes $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}}$, donde la segunda componente representa la velocidad angular del cuerpo relativa al sistema de referencia $Oxyz$ (véase el problema resuelto 15.14). Una elección apropiada del sistema de referencia en rotación conduce muchas veces a un análisis más simple del movimiento del cuerpo rígido que lo que sería posible con ejes de orientación fija. Esto es en especial cierto en el caso del movimiento tridimensional general de un cuerpo rígido, es decir, cuando el cuerpo rígido que se estudia no tiene ningún punto fijo (problema resuelto 15.15).

*15.15. SISTEMA DE REFERENCIA EN MOVIMIENTO GENERAL

Considere un sistema de referencia fijo $OXYZ$ y un sistema de referencia $Axyz$ que se mueve de una manera conocida, aunque arbitraria, con respecto a $OXYZ$ (figura 15.38). Sea P una partícula que se mueve en el espacio. La posición de P se define en cualquier instante mediante el vector \mathbf{r}_P en el sistema de referencia fijo, y mediante el vector $\mathbf{r}_{P/A}$ en el sistema de referencia en movimiento. Al denotar por \mathbf{r}_A el vector de posición de A en el sistema de referencia fijo, se tiene

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{P/A} \quad (15.49)$$

La velocidad absoluta \mathbf{v}_P de la partícula se obtiene al escribir

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{P/A} \quad (15.50)$$

donde las derivadas se definen con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$. El primer término en el miembro del lado derecho (15.50) representa entonces la velocidad \mathbf{v}_A del origen A de los ejes en movimiento. Por otro lado, puesto que la razón de cambio de un vector es la misma con respecto a un sistema de referencia fijo y con referencia a uno en traslación (sección 11.10), el segundo término puede considerarse como la velocidad $\mathbf{v}_{P/A}$ de P relativa al sistema de referencia $AX'Y'Z'$ de la misma orientación que $OXYZ$ y el mismo origen que $Axyz$. Por lo tanto, se tiene

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A} \quad (15.51)$$

†Es importante advertir la diferencia entre la ecuación (15.48) y la ecuación (15.21) de la sección 15.8. Véase el pie de la página 978.

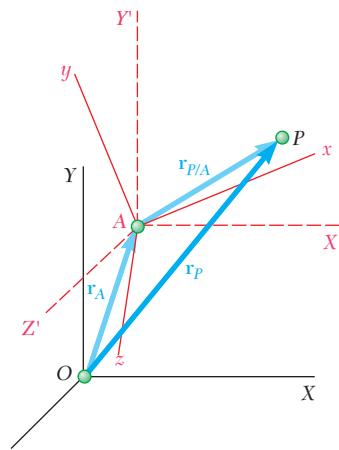


Figura 15.38

Pero la velocidad $\mathbf{v}_{P/A}$ de P relativa a $AX'Y'Z'$ se obtiene de (15.45) al sustituir $\mathbf{r}_{P/A}$ en vez de \mathbf{r} en esa ecuación. Se escribe

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A} + (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Ax\bar{y}\bar{z}} \quad (15.52)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema de referencia $Ax\bar{y}\bar{z}$ en el instante considerado.

La aceleración absoluta \mathbf{a}_P de la partícula se obtiene al diferenciar (15.51) y al escribir

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\mathbf{v}}_{P/A} \quad (15.53)$$

donde las derivadas se definen con respecto a cualquiera de los sistemas de referencia $OXYZ$ o $AX'Y'Z'$. De tal modo, el primer término del miembro del lado derecho de (15.53) representa la aceleración \mathbf{a}_A del origen A de los ejes en movimiento, y el segundo término, la aceleración $\mathbf{a}_{P/A}$ de P relativa al sistema de referencia $AX'Y'Z'$. Esta aceleración puede obtenerse de (15.47) al sustituir $\mathbf{r}_{P/A}$ en lugar de \mathbf{r} . En consecuencia, se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A &+ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A}) \\ &+ 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Ax\bar{y}\bar{z}} + (\ddot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Ax\bar{y}\bar{z}} \end{aligned} \quad (15.54)$$



Fotografía 15.9 El movimiento de las partículas de aire en un huracán puede considerarse como el movimiento relativo a un sistema de referencia montado sobre la Tierra y que gira con ella.

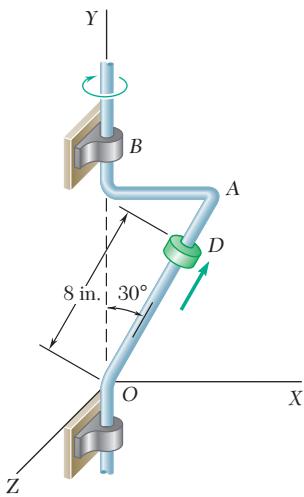
Las fórmulas (15.52) y (15.54) posibilitan la determinación de la velocidad y la aceleración de una partícula dada con respecto a un sistema de referencia fijo, cuando se conoce el movimiento de la partícula con respecto al sistema de referencia en movimiento. Estas fórmulas se volverán más importantes, y bastante más fáciles de recordar, si advertimos que la suma de los dos primeros términos en (15.52) representan la velocidad del punto P' del sistema de referencia en movimiento que coincide con P en el instante considerado, y que la suma de los primeros tres términos en (15.54) representa la aceleración del mismo punto. Por consiguiente, las relaciones (15.46) y (15.48) de la sección anterior siguen siendo válidas en el caso de un sistema de referencia en movimiento general, y es posible escribir

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \quad (15.46)$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \quad (15.48)$$

donde los diversos vectores implicados han sido definidos en la sección 15.14.

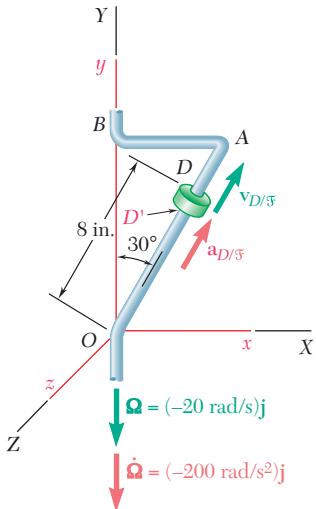
Hay que observar que si el sistema de referencia \mathcal{F} (o $Ax\bar{y}\bar{z}$) están en traslación, la velocidad y aceleración del punto P' del sistema de referencia que coincide con P se vuelve, respectivamente, igual a la velocidad y la aceleración del origen A del sistema de referencia. Por otro lado, puesto que el sistema de referencia mantiene una orientación fija, \mathbf{a}_c es cero, y las relaciones (15.46) y (15.48) se reducen, en forma respectiva, a las relaciones (11.33) y (11.34) deducidas en la sección 11.12.



PROBLEMA RESUELTO 15.13

La barra doblada OAB gira alrededor del eje vertical OB . En el instante considerado, su velocidad y aceleración angulares son, respectivamente, 20 rad/s y 200 rad/s^2 , ambas en el sentido de las manecillas del reloj cuando se observan desde el eje Y positivo. El collarín D se mueve a lo largo de la barra, y en el instante considerado, $OD = 8 \text{ in.}$ La velocidad y la aceleración del collarín relativas a la barra son, respectivamente, 50 in./s y 600 in./s^2 , ambas hacia arriba. Determine *a) la velocidad del collarín, b) la aceleración del collarín.*

SOLUCIÓN



Sistemas de referencia. El sistema de referencia $OXYZ$ está fijo. Se conecta el sistema de referencia en rotación $Oxyz$ a la barra doblada. En consecuencia, su velocidad y aceleración angulares relativos a $OXYZ$ son $\Omega = (-20 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ y $\dot{\Omega} = (-200 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j}$, respectivamente. El vector de posición de D es

$$\mathbf{r} = (8 \text{ in.})(\text{sen } 30^\circ \mathbf{i} + \cos 30^\circ \mathbf{j}) = (4 \text{ in.})\mathbf{i} + (6.93 \text{ in.})\mathbf{j}$$

a) Velocidad v_D . Denotando por D' el punto de la barra que coincide con D y por \mathcal{F} el sistema de referencia en rotación $Oxyz$, se escribe de acuerdo con la ecuación (15.46)

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{D'} + \mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{D'} &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (-20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(4 \text{ in.})\mathbf{i} + (6.93 \text{ in.})\mathbf{j}] = (80 \text{ in./s})\mathbf{k} \\ \mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} &= (50 \text{ in./s})(\text{sen } 30^\circ \mathbf{i} + \cos 30^\circ \mathbf{j}) = (25 \text{ in./s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ in./s})\mathbf{j}\end{aligned}$$

Al sustituir los valores que se obtienen para $\mathbf{v}_{D'}$ y $\mathbf{v}_{D/\mathcal{F}}$ en (1), se encuentra

$$\mathbf{v}_D = (25 \text{ in./s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ in./s})\mathbf{j} + (80 \text{ in./s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

b) Aceleración a_D . De acuerdo con la ecuación (15.48) se escribe

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_{D'} + \mathbf{a}_{D/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \quad (2)$$

donde

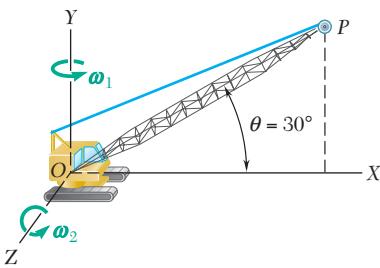
$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{D'} &= \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ &= (-200 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j} \times [(4 \text{ in.})\mathbf{i} + (6.93 \text{ in.})\mathbf{j}] - (20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (80 \text{ in./s})\mathbf{k} \\ &= +(800 \text{ in./s}^2)\mathbf{k} - (1600 \text{ in./s}^2)\mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_{D/\mathcal{F}} = (600 \text{ in./s}^2)(\text{sen } 30^\circ \mathbf{i} + \cos 30^\circ \mathbf{j}) = (300 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} + (520 \text{ in./s}^2)\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_c &= 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} \\ &= 2(-20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(25 \text{ in./s})\mathbf{i} + (43.3 \text{ in./s})\mathbf{j}] = (1000 \text{ in./s}^2)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Al sustituir los valores que se obtienen para $\mathbf{a}_{D'}$, $\mathbf{a}_{D/\mathcal{F}}$ y \mathbf{a}_c en (2),

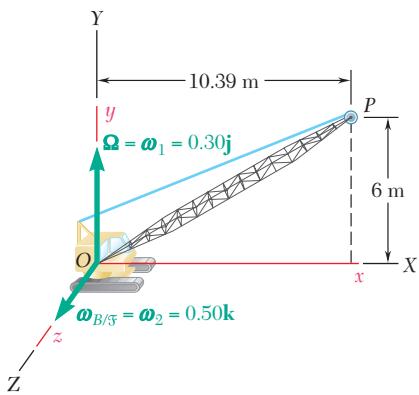
$$\mathbf{a}_D = -(1300 \text{ in./s}^2)\mathbf{i} + (520 \text{ in./s}^2)\mathbf{j} + (1800 \text{ in./s}^2)\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 15.14

La grúa que se muestra gira con una velocidad angular constante ω_1 de 0.30 rad/s. De manera simultánea, la pluma se levanta con una velocidad angular constante ω_2 de 0.50 rad/s relativa a la cabina. Si se sabe que la longitud de la pluma OP es $l = 12$ m, determine *a)* la velocidad de la punta de la pluma, *b)* la aceleración de la punta de la pluma.

SOLUCIÓN



Sistemas de referencia. El sistema de referencia $OXYZ$ está fijo. Se coloca el sistema de referencia en rotación $Oxyz$ en la cabina. Su velocidad angular con respecto al sistema de referencia $OXYZ$ es entonces $\Omega = \omega_1 = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j}$. La velocidad angular de la pluma relativa a la cabina y el sistema de referencia en rotación $Oxyz$ (o \mathcal{F} , abreviado) es $\omega_{B/\mathcal{F}} = \omega_2 = (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.

a) Velocidad \mathbf{v}_P . De la ecuación (15.46) se escribe

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P'/\mathcal{F}} \quad (1)$$

donde $\mathbf{v}_{P'}$ es la velocidad del punto P' del sistema de referencia en rotación que coincide con P :

$$\mathbf{v}_{P'} = \Omega \times \mathbf{r} = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(10.39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}] = -(3.12 \text{ m/s})\mathbf{k}$$

y donde $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ es la velocidad de P relativa al sistema de referencia en rotación $Oxyz$. Pero se encontró que la velocidad angular de la pluma relativa a $Oxyz$ es $\omega_{B/\mathcal{F}} = (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$. La velocidad de su punta P relativa a $OXYZ$ es entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} &= \omega_{B/\mathcal{F}} \times \mathbf{r} = (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times [(10.39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}] \\ &= -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j} \end{aligned}$$

Al sustituir los valores que se obtuvieron para $\mathbf{v}_{P'}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ en (1), se encuentra

$$\mathbf{v}_P = -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j} - (3.12 \text{ m/s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

b) Aceleración \mathbf{a}_P . De la ecuación (15.48) se escribe

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \quad (2)$$

Puesto que Ω y $\omega_{B/\mathcal{F}}$ son ambas constantes, se tiene

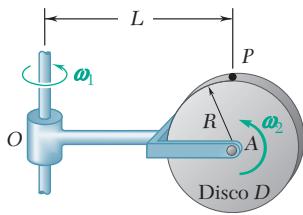
$$\mathbf{a}_{P'} = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = (0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (-3.12 \text{ m/s})\mathbf{k} = -(0.94 \text{ m/s}^2)\mathbf{i}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} &= \omega_{B/\mathcal{F}} \times (\omega_{B/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}) \\ &= (0.50 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times [-(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j}] \\ &= -(1.50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (2.60 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_c &= 2\Omega \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \\ &= 2(0.30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [-(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5.20 \text{ m/s})\mathbf{j}] = (1.80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Al sustituir $\mathbf{a}_{P'}$, $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ y \mathbf{a}_c en (2), se encontró

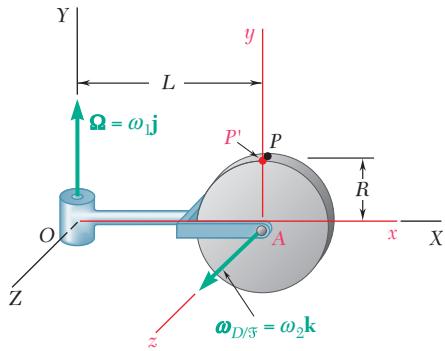
$$\mathbf{a}_P = -(3.54 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (1.50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (1.80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 15.15

El disco D , de radio R , se monta por medio de un pasador al extremo A del brazo OA de longitud L ubicado en el plano del disco. El brazo gira alrededor de O en un eje vertical a la velocidad constante ω_1 , y el disco gira alrededor de A a la velocidad constante ω_2 . Determine *a)* la velocidad del punto P localizado directamente arriba de A , *b)* la aceleración de P , *c)* la velocidad y la aceleración angulares del disco.

SOLUCIÓN



Sistemas de referencia. El sistema de referencia $OXYZ$ está fijo. Se coloca el sistema de referencia en movimiento $Axyz$ al brazo OA . Por consiguiente, su velocidad angular con respecto al sistema de referencia $OXYZ$ es $\Omega = \omega_1 \mathbf{j}$. La velocidad angular del disco D relativa al sistema de referencia en movimiento $Axyz$ (o \mathcal{F} , abreviado) es $\omega_{D/\mathcal{F}} = \omega_2 \mathbf{k}$. El vector de posición de P relativo a O es $\mathbf{r} = L\mathbf{i} + R\mathbf{j}$, y su vector de posición relativo a A es $\mathbf{r}_{P/A} = R\mathbf{j}$.

a) Velocidad \mathbf{v}_P . Denotando por P' el punto del sistema de referencia en movimiento que coincide con P , escribimos de la ecuación (15.46)

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \quad (1)$$

$$\text{donde } \mathbf{v}_{P'} = \Omega \times \mathbf{r} = \omega_1 \mathbf{j} \times (L\mathbf{i} + R\mathbf{j}) = -\omega_1 L\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \omega_{D/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}_{P/A} = \omega_2 \mathbf{k} \times R\mathbf{j} = -\omega_2 R\mathbf{i}$$

Al sustituir los valores que se obtuvieron para $\mathbf{v}_{P'}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ en (1), se encuentra

$$\mathbf{v}_P = -\omega_2 R\mathbf{i} - \omega_1 L\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

b) Aceleración \mathbf{a}_P . De la ecuación (15.48) se escribe

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \quad (2)$$

Puesto que Ω y $\omega_{D/\mathcal{F}}$ son ambas constantes, se tiene

$$\mathbf{a}_{P'} = \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = \omega_1 \mathbf{j} \times (-\omega_1 L\mathbf{k}) = -\omega_1^2 L\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} = \omega_{D/\mathcal{F}} \times (\omega_{D/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}_{P/A}) = \omega_2 \mathbf{k} \times (-\omega_2 R\mathbf{i}) = -\omega_2^2 R\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_c = 2\Omega \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = 2\omega_1 \mathbf{j} \times (-\omega_2 R\mathbf{i}) = 2\omega_1 \omega_2 R\mathbf{k}$$

Si se sustituyen los valores obtenidos en (2), se obtiene

$$\mathbf{a}_P = -\omega_1^2 L\mathbf{i} - \omega_2^2 R\mathbf{j} + 2\omega_1 \omega_2 R\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

c) Velocidad y aceleración angulares del disco.

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{j} + \omega_2 \mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Utilizando la ecuación (15.31) con $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega}$, se escribe

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{OXYZ} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{Axyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} \\ &= 0 + \omega_1 \mathbf{j} \times (\omega_1 \mathbf{j} + \omega_2 \mathbf{k}) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \omega_1 \omega_2 \mathbf{i} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se concluye el estudio de la cinemática de cuerpos rígidos al aprender cómo se usa un sistema de referencia auxiliar \mathcal{F} para analizar el movimiento en tres dimensiones de un cuerpo rígido. Este sistema de referencia auxiliar puede ser un *sistema de referencia rotatorio* con un origen fijo O , o un *sistema de referencia en movimiento general*.

A. Empleo de un sistema de referencia en rotación. Cuando en el planteamiento del problema se incluye el uso de un sistema de referencia en rotación \mathcal{F} deben seguirse estos pasos:

1. Elegir el sistema de referencia en rotación \mathcal{F} que se deseé utilizar y dibujar los ejes coordenados correspondientes x , y y z a partir del punto fijo O .

2. Determinar la velocidad angular Ω del sistema de referencia \mathcal{F} con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ. En la mayoría de los casos, se habrá elegido un sistema de referencia que se monta a algún elemento rotatorio del sistema; Ω será entonces la velocidad angular de ese elemento.

3. Designar como P' el punto del sistema en referencia \mathcal{F} que coincida con el punto P de interés en el instante que se esté considerando. Determine la velocidad $\mathbf{v}_{P'}$ y la aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ del punto P' . Puesto que P' es parte de \mathcal{F} y tiene el mismo vector de posición \mathbf{r} que P , se encontrará que

$$\mathbf{v}_{P'} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_{P'} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es la aceleración angular de \mathcal{F} . Sin embargo, en muchos de los problemas que se encontrarán, la velocidad angular de \mathcal{F} es constante tanto en magnitud como en dirección, y $\boldsymbol{\alpha} = 0$.

4. Determinar la velocidad y la aceleración del punto P con respecto al sistema de referencia \mathcal{F} . Al tratar de determinar $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ y $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ se encontrará útil visualizar el movimiento de P en el sistema de referencia \mathcal{F} cuando éste no se encuentre en rotación. Si P es un punto de un cuerpo rígido \mathcal{B} que tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}}$ relativa a \mathcal{F} [problema resuelto 15.14], se encontrará que

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r})$$

En muchos de los problemas que se encontrarán, la velocidad angular del cuerpo \mathcal{B} relativa al sistema de referencia \mathcal{F} es constante tanto en magnitud como en dirección, y $\boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}} = 0$.

5. Determinar la aceleración de Coriolis. Considerando la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia \mathcal{F} y la velocidad $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ del punto P relativa al sistema de referencia, que se calculó en el paso anterior, se escribe

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$$

6. La velocidad y la aceleración de P con respecto al sistema de referencia fijo OXYZ puede obtenerse ahora sumando las expresiones que se han determinado:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \quad (15.46)$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \quad (15.48)$$

B. Empleo de un sistema de referencia en movimiento general. Los pasos que se seguirán difieren sólo un poco de los que se indicaron en la parte A. Consisten en lo siguiente:

1. Seleccionar el sistema de referencia \mathcal{F} que se deseé utilizar y un punto de referencia A en ese sistema de referencia, a partir del cual se dibujarán los ejes de coordenadas x , y y z que definen al sistema de referencia. Se considerará el movimiento del sistema de referencia como la suma de una *traslación con A* y *una rotación alrededor de A*.

2. Determinar la velocidad \mathbf{v}_A del punto A y la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia. En muchos casos se seleccionará un sistema de referencia que se monta sobre algún elemento del sistema; $\boldsymbol{\Omega}$ será entonces la velocidad angular de ese elemento.

3. Designar como P' el punto del sistema de referencia \mathcal{F} que coincida con el punto P de interés en el instante considerado, y determinar la velocidad $\mathbf{v}_{P'}$ y la aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ de ese punto. En algunos casos, esto puede efectuarse visualizando el movimiento de P si se evitara que ese punto se moviera con respecto a \mathcal{F} [problema resuelto 15.15]. Un planteamiento más general consiste en recordar que el movimiento de P' es la suma de una traslación con el punto de referencia A y una rotación alrededor de A. Por consiguiente, la velocidad $\mathbf{v}_{P'}$ y la aceleración $\mathbf{a}_{P'}$ de P' pueden obtenerse sumando \mathbf{v}_A y \mathbf{a}_A , respectivamente, a las expresiones que se encontraron en el párrafo A3 y sustituyendo el vector de posición \mathbf{r} por el vector $\mathbf{r}_{P/A}$ dibujado de A a P :

$$\mathbf{v}_{P'} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A} \quad \mathbf{a}_{P'} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A})$$

Los pasos 4, 5 y 6 son iguales que en la parte A, salvo por el hecho de que el vector \mathbf{r} debe sustituirse de nuevo en vez de $\mathbf{r}_{P/A}$. De tal manera, es posible seguir utilizando las ecuaciones (15.46) y (15.48) para obtener la velocidad y la aceleración de P con respecto al sistema de referencia fijo OXYZ.

Problemas

15.220 La varilla AB se suelda a la placa de 12 in. de radio que gira a razón constante $\omega_1 = 6 \text{ rad/s}$. Si se sabe que el collarín D se mueve hacia el extremo B de la varilla a una rapidez constante $u = 78 \text{ in./s}$, determine, para la posición mostrada *a)* la velocidad de D , *b)* la aceleración de D .

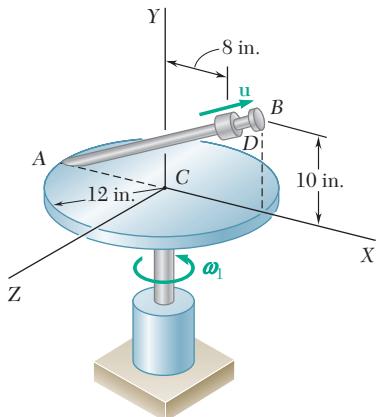


Figura P15.220

15.221 La barra dobrada que se muestra gira a una razón constante $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$. Si se sabe que el collarín C se mueve hacia el punto D a una rapidez relativa constante $u = 34 \text{ in./s}$, determine para la posición mostrada la velocidad y la aceleración de C si *a)* $x = 5 \text{ in.}$, *b)* $x = 15 \text{ in.}$

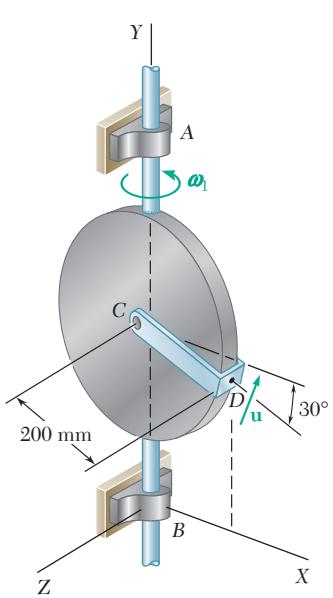


Figura P15.222

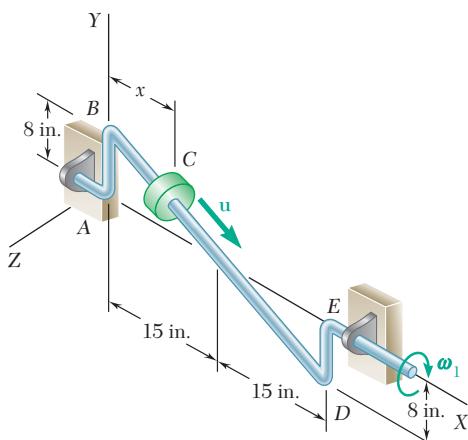


Figura P15.221

15.222 La placa circular que se muestra en la figura gira alrededor de su diámetro vertical a razón constante $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$. Si se sabe que en la posición mostrada el disco yace en el plano XY y que el punto D del elemento CD se mueve hacia arriba a una rapidez relativa constante $u = 1.5 \text{ m/s}$, determine *a)* la velocidad de D , *b)* la aceleración de D .

15.223 Retome el problema 15.222, y ahora suponga que en el instante que se muestra la velocidad angular ω_1 de la placa es de 10 rad/s y decrece a razón de 25 rad/s², en tanto que la rapidez relativa u del punto D de la abrazadera CD es de 1.5 m/s y disminuye a razón de 3 m/s².

15.224 Una placa cuadrada de 18 in. de lado se articula en los puntos A y B de una horquilla. La placa gira a la velocidad constante $\omega_2 = 4$ rad/s con respecto a la horquilla, la cual gira a su vez a la razón constante $\omega_1 = 3$ rad/s alrededor del eje Y . Para la posición que se muestra, determine *a)* la velocidad del punto C y *b)* la aceleración del punto C .

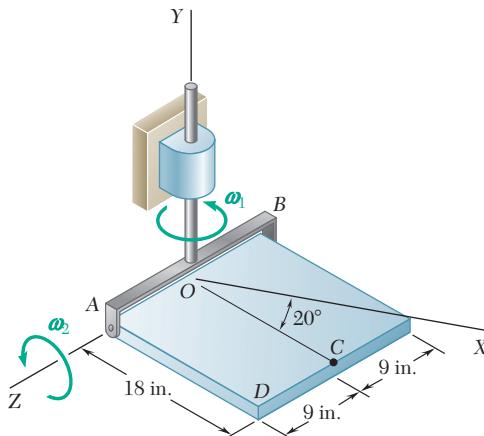


Figura P15.224 y P15.225

15.225 Una placa cuadrada de 18 in. de lado se articula en los puntos A y B de una horquilla. La placa gira a la velocidad constante $\omega_2 = 4$ rad/s con respecto a la horquilla, la cual gira a su vez a la razón constante $\omega_1 = 3$ rad/s alrededor del eje Y . Para la posición que se muestra, determine *a)* la velocidad de la esquina D y *b)* la aceleración de la esquina D .

15.226 a 15.228 La placa rectangular que se muestra gira a la velocidad constante $\omega_2 = 12$ rad/s con respecto al brazo AE , el cual gira a su vez a la razón constante $\omega_1 = 9$ rad/s alrededor del eje Z . Para la posición que se muestra, determine la velocidad y la aceleración del punto de la placa que se indica a continuación.

15.226 Esquina B .

15.227 Punto D .

15.228 Esquina C .

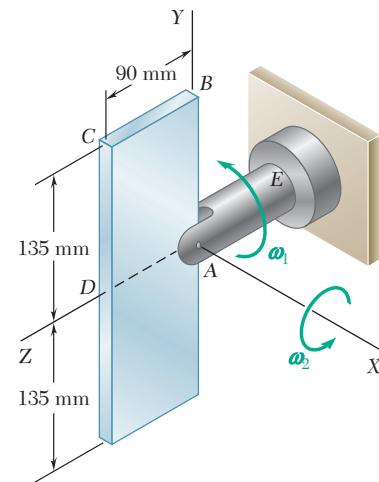


Figura P15.226, P15.227 y P15.228

15.229 Retome el problema 15.228, y ahora suponga que en el instante mostrado la velocidad angular ω_2 de la placa respecto al brazo AE es de 12 rad/s y que disminuye a razón de 60 rad/s², en tanto que la velocidad angular ω_1 del brazo alrededor del eje Z es de 9 rad/s y disminuye a razón de 45 rad/s².

15.230 Retome el problema 15.221, y ahora suponga que en el instante que se indica la velocidad angular ω_1 de la barra es de 3 rad/s y aumenta a razón de 12 rad/s², en tanto que la rapidez relativa u del collarín es de 34 in./s y disminuye a razón de 85 in./s².

15.231 Con el método de la sección 15.14, retome el problema 15.191.

15.232 Con el método de la sección 15.14, retome el problema 15.195.

15.233 Con el método de la sección 15.14, retome el problema 15.192.

15.234 El cuerpo *AB* y la barra *BC* del componente robótico que se muestra en la figura, giran a la razón constante $\omega_1 = 0.60 \text{ rad/s}$ alrededor del eje *Y*. De manera simultánea un control de alambre y polea ocasiona que el brazo *CD* gire alrededor de *C* a razón constante $\omega = d\beta/dt = 0.45 \text{ rad/s}$. Si $\beta = 120^\circ$, determine *a)* la aceleración angular del brazo *CD*, *b)* la velocidad de *D*, *c)* la aceleración de *D*.

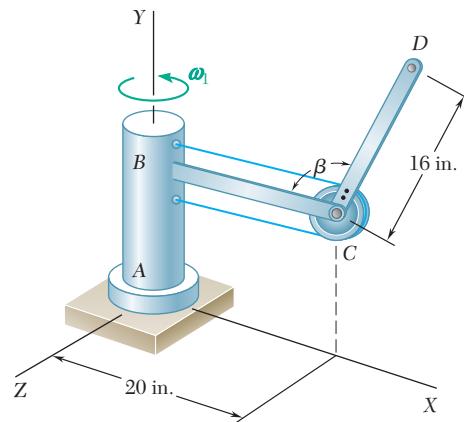


Figura P15.234

15.235 Un disco de 120 mm de radio gira a la razón constante $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$ con respecto al brazo *AB*, el cual gira a su vez a la razón constante $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$. Para la posición que se muestra, determine la velocidad y la aceleración del punto *C*.

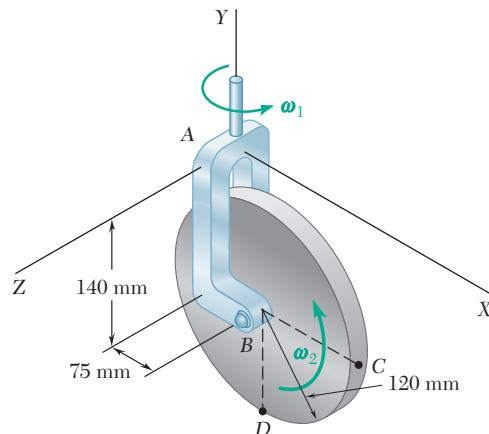


Figura P15.235 y P15.236

15.236 Un disco de 120 mm de radio gira a la razón constante $\omega_2 = 5 \text{ rad/s}$ con respecto al brazo *AB*, que a su vez gira a la razón constante $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$. Para la posición que se muestra, determine la velocidad y la aceleración del punto *D*.

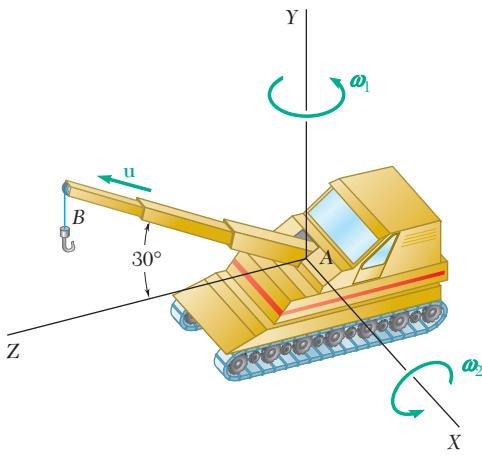


Figura P15.237

15.237 La grúa que se muestra gira a la razón constante $\omega_1 = 0.25 \text{ rad/s}$; simultáneamente, la pluma telescopica desciende a una razón constante $\omega_2 = 0.40 \text{ rad/s}$. Si se sabe que en el instante mostrado la longitud de la pluma es de 20 ft y que aumenta a la razón constante $u = 1.5 \text{ ft/s}$, determine la velocidad y la aceleración del punto *B*.

15.238 El brazo AB de 5 m de largo se usa para proporcionar una plataforma elevada a trabajadores de la construcción. En la posición que se muestra, el brazo AB se está elevando a una razón constante $d\theta/dt = 0.25$ rad/s; en forma simultánea, la unidad se está girando en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje Y a una velocidad constante $\omega_1 = 0.15$ rad/s. Si se sabe que $\theta = 20^\circ$, determine la velocidad y la aceleración del punto B .

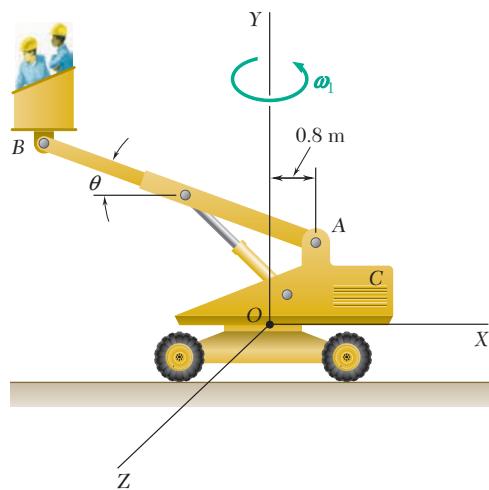


Figura P15.238

15.239 Retome el problema 15.238, y ahora suponga que $\theta = 40^\circ$.

15.240 Un disco de 180 mm de radio gira a la razón constante $\omega_2 = 12$ rad/s, respecto al brazo CD , que a su vez gira a la razón constante $\omega_1 = 8$ rad/s alrededor del eje Y . Determine en el instante mostrado la velocidad y aceleración del punto A sobre el borde del disco.

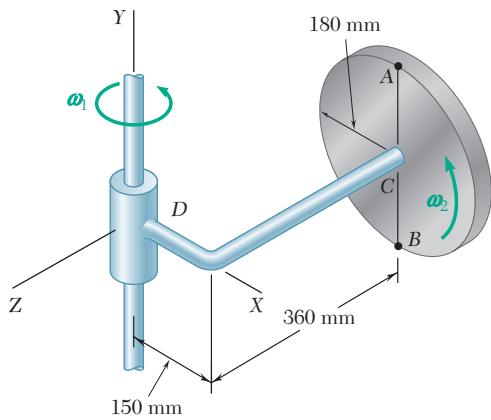


Figura P15.240 y P15.241

15.241 Un disco de 180 mm de radio gira a la razón constante $\omega_2 = 12$ rad/s con respecto al brazo CD , que a su vez gira a la razón constante $\omega_1 = 8$ rad/s alrededor del eje Y . Determine en el instante mostrado la velocidad y la aceleración del punto B sobre el borde del disco.

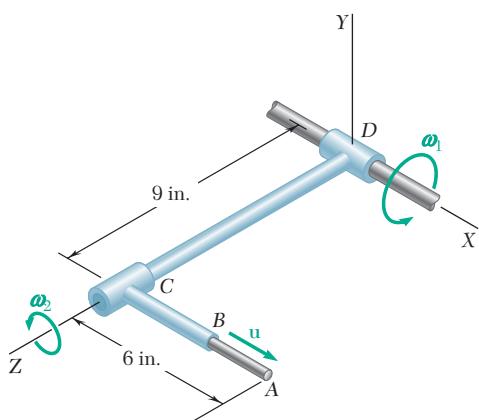


Figura P15.242

15.242 y 15.243 En la posición que se muestra la barra delgada se mueve a una rapidez constante $u = 3 \text{ in./s}$ hacia fuera del tubo BC . Al mismo tiempo el tubo BC gira a la velocidad constante $\omega_2 = 1.5 \text{ rad/s}$ con respecto al brazo CD . Si se sabe que el ensamblaje completo gira en torno al eje X a la razón constante $\omega_1 = 1.2 \text{ rad/s}$, determine la velocidad y la aceleración del extremo A de la barra.

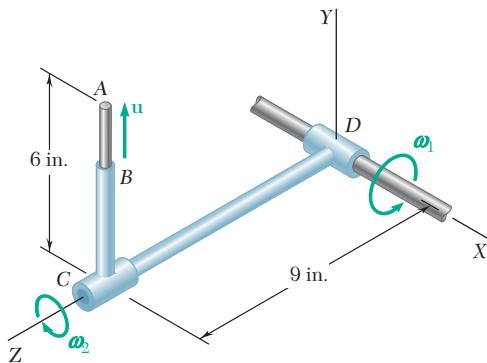


Figura P15.243

15.244 Dos discos, cada uno de 130 mm de radio, están soldados a la barra CD de 500 mm. La unidad de barra y discos gira a la razón constante $\omega_2 = 3 \text{ rad/s}$ con respecto al brazo AB . Si se sabe que en el instante mostrado $\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$, determine la velocidad y la aceleración de *a)* el punto E , *b)* el punto F .

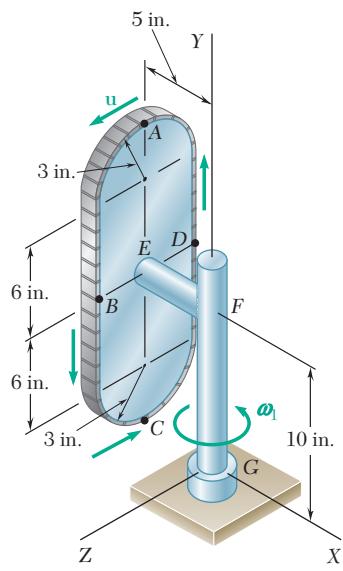


Figura P15.246 y P15.247

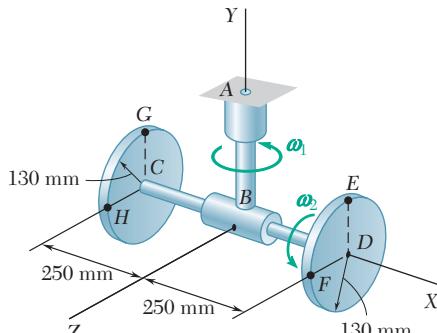


Figura P15.244

15.245 En el problema 15.244, determine la velocidad y la aceleración de *a)* el punto G , *b)* el punto H .

15.246 La placa vertical que se muestra está soldada al brazo EFG y la unidad completa gira a la velocidad constante $\omega_1 = 1.6 \text{ rad/s}$ alrededor del eje Y . Al mismo tiempo, una banda continua eslabonada se mueve alrededor del perímetro de la placa a una rapidez constante $u = 4.5 \text{ in./s}$. Para la posición que se muestra, determine la aceleración del eslabón de la banda ubicado *a)* en el punto A y *b)* en el punto B .

15.247 La placa vertical que se muestra está soldada al brazo EFG , y la unidad completa gira a la velocidad constante $\omega_1 = 1.6 \text{ rad/s}$ alrededor del eje Y . Al mismo tiempo, una banda continua eslabonada se mueve alrededor del perímetro de la placa a una rapidez constante $u = 4.5 \text{ in./s}$. Para la posición que se muestra, determine la aceleración del eslabón de la banda ubicado *a)* en el punto C y *b)* en el punto D .

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 15

Este capítulo se dedicó al estudio de la cinemática de cuerpos rígidos.

Primero se consideró la *traslación* de un cuerpo rígido [sección 15.2] y se observó que en un movimiento de este tipo, *todos los puntos del cuerpo tienen la misma velocidad y la misma aceleración en cualquier instante dado*.

Después se consideró la *rotación* de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo [sección 15.3]. La posición del cuerpo se definió mediante el ángulo θ que la línea BP dibujaba desde el eje de rotación hasta el punto P del cuerpo, formado con un plano fijo (figura 15.39). Se encontró que la magnitud de la velocidad de P es

$$v = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta} \sin \phi \quad (15.4)$$

donde $\dot{\theta}$ es la derivada respecto al tiempo de θ . Luego se expresó la velocidad de P como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (15.5)$$

donde el vector

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k} = \dot{\theta} \mathbf{k} \quad (15.6)$$

se dirige a lo largo del eje de rotación fijo y representa la *velocidad angular* del cuerpo.

Si se denota por $\boldsymbol{\alpha}$ la derivada $d\boldsymbol{\omega}/dt$ de la velocidad angular, la aceleración de P se expresa como

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (15.8)$$

Al diferenciar (15.6) y recordar que \mathbf{k} es una constante en magnitud y dirección, se encuentra que

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{k} = \dot{\omega} \mathbf{k} = \ddot{\theta} \mathbf{k} \quad (15.9)$$

El vector $\boldsymbol{\alpha}$ representa la *aceleración angular* del cuerpo y está dirigida a lo largo del eje de rotación fijo.

Cuerpo rígido en translación

Cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo

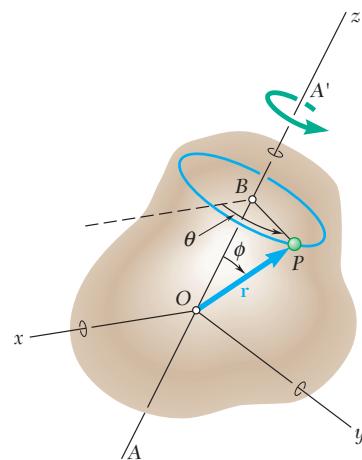


Figura 15.39

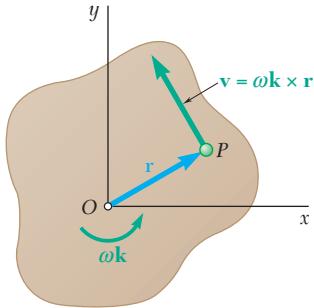


Figura 15.40

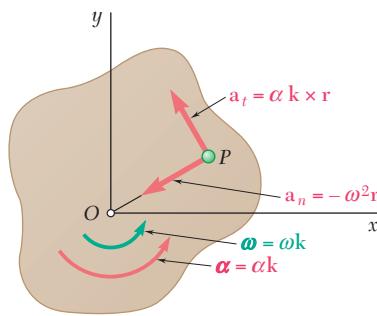


Figura 15.41

Rotación de una placa representativa

Componentes tangencial y normal

Velocidad angular y aceleración angular de la placa en rotación

Después se consideró el movimiento de una placa representativa ubicada en un plano perpendicular al eje de rotación del cuerpo (figura 15.40). Puesto que la velocidad angular es perpendicular a la placa, la velocidad de un punto P de la placa se expresó como

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{r} \quad (15.10)$$

donde \mathbf{v} está contenida en el plano de la placa. Al sustituir $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{k}$ en (15.8), se encontró que la aceleración de P podía descomponerse en las componentes tangencial y normal (figura 15.41) iguales respectivamente a

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \boldsymbol{\alpha} \mathbf{k} \times \mathbf{r} & a_t &= r\boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{a}_n &= -\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r} & a_n &= r\boldsymbol{\omega}^2 \end{aligned} \quad (15.11')$$

Al recordar las ecuaciones (15.6) y (15.9), se obtuvieron las siguientes expresiones para la *velocidad angular* y la *aceleración angular* de la placa [sección 15.4]:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \quad (15.12)$$

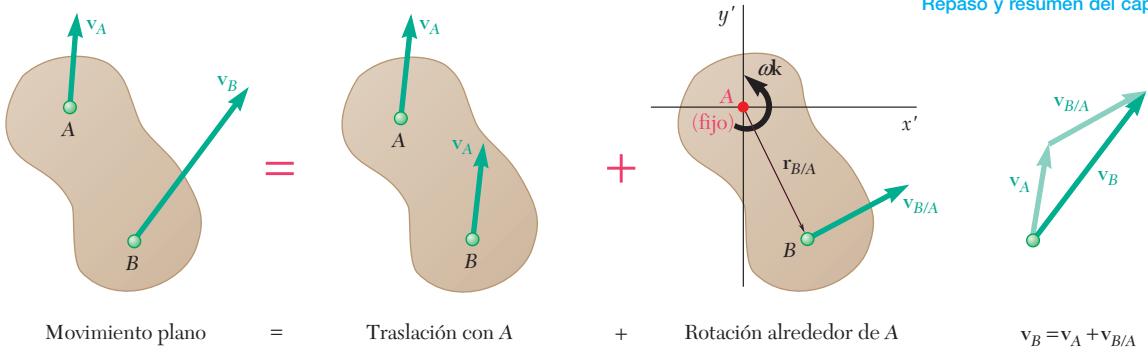
$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (15.13)$$

o

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\omega} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{d\theta} \quad (15.14)$$

Estas expresiones son similares a las que se obtuvieron en el capítulo 11 para el movimiento rectilíneo de una partícula.

Dos casos particulares de rotación se encontraron con frecuencia: *rotación uniforme* y *rotación uniformemente acelerada*. Los problemas en los que interviene cualquiera de estos movimientos se pueden resolver utilizando ecuaciones similares a las que se emplearon en las secciones 11.4 y 11.5 para el movimiento rectilíneo uniforme y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de una partícula, pero donde x , v y a se sustituyen por θ , $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, respectivamente [problema resuelto 15.1].

**Figura 15.42**

El *movimiento plano más general* de una placa rígida puede considerarse como la *suma de una traslación y una rotación* [sección 15.5]. Por ejemplo, es posible suponer que la placa que se muestra en la figura 15.42 se traslada con el punto A, mientras gira de manera simultánea alrededor de A. Se concluye [sección 15.6] que la velocidad de cualquier punto B de la placa puede expresarse como

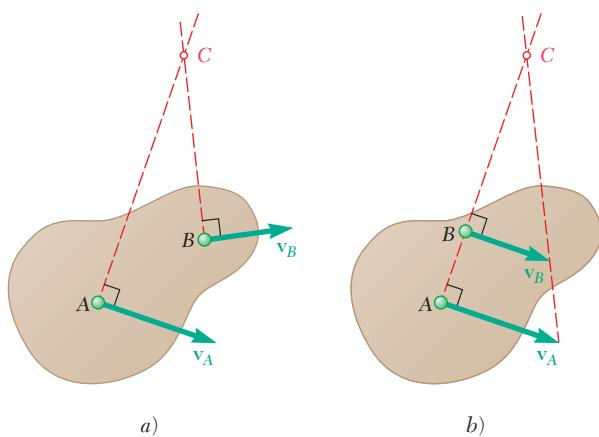
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (15.17)$$

donde \mathbf{v}_A es la velocidad de A y $\mathbf{v}_{B/A}$ la velocidad relativa de B con respecto a A o, de manera más precisa, con respecto a los ejes $x'y'$ que se trasladan con A. Denotando mediante $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A, se encontró que

$$\mathbf{v}_{B/A} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad v_{B/A} = r\omega \quad (15.18)$$

La ecuación fundamental (15.17) que relaciona las velocidades absolutas de los puntos A y B y la velocidad relativa de B con respecto a A se expresó en la forma de un diagrama vectorial y se utilizó para resolver problemas que implican el movimiento de diversos tipos de mecanismos [problemas resueltos 15.2 y 15.3].

Otro planteamiento para la solución de problemas en los que intervienen las velocidades de los puntos de una placa rígida en un movimiento plano se presentó en la sección 15.7 y se usó en los problemas resueltos 15.4 y 15.5. Está basado en la determinación del *centro instantáneo de rotación C* de la placa (figura 15.43).

Velocidades en movimiento plano**Centro instantáneo de rotación****Figura 15.43**

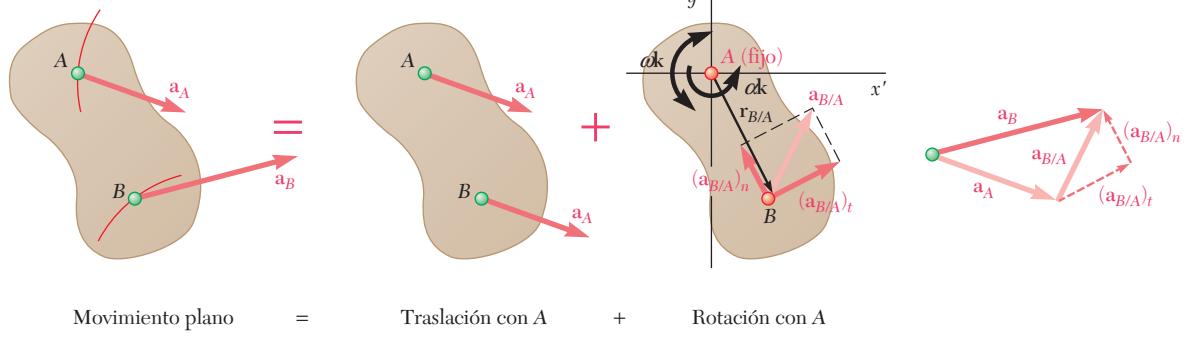


Figura 15.44

Aceleraciones en movimiento plano

Movimiento plano = Traslación con A + Rotación con A

El hecho de que sea posible considerar a cualquier movimiento plano de una placa rígida como la suma de una traslación de la placa con un punto de referencia A y una rotación alrededor de A se utilizó en la sección 15.8 para relacionar las aceleraciones absolutas de cualesquiera dos puntos A y B de la placa y la aceleración relativa de B con respecto a A. Se tuvo

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \quad (15.21)$$

donde $\mathbf{a}_{B/A}$ consistió en una *componente normal* ($\mathbf{a}_{B/A}_n$) de magnitud $r\omega^2$ dirigida hacia A, y una *componente tangencial* ($\mathbf{a}_{B/A}_t$) de magnitud $r\alpha$ perpendicular a la línea AB [figura 15.44]. La relación fundamental (15.21) se expresó en términos de diagramas vectoriales o ecuaciones vectoriales y se empleó para determinar las aceleraciones de puntos determinados de diversos mecanismos [problemas resueltos 15.6 a 15.8]. Debe señalarse que el centro de rotación instantáneo C que se consideró en la sección 15.7 no puede utilizarse para determinar aceleraciones, puesto que el punto C, en general, *no* tiene aceleración cero.

En el caso de ciertos mecanismos, es posible expresar las coordenadas x y y de todos los puntos importantes del mecanismo por medio de expresiones analíticas simples que contienen un *solo parámetro*. Las componentes de la velocidad absoluta y la aceleración de un punto dado se obtienen entonces al diferenciar dos veces con respecto al tiempo t las coordenadas x y y de ese punto [sección 15.9].

Si bien la razón de cambio de un vector es la misma con respecto a un sistema de referencia fijo y a un sistema en traslación, la razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia en rotación es diferente. Por lo tanto, para estudiar el movimiento de una partícula relativo al sistema de referencia en rotación primero tuvimos que comparar las razones de cambio del vector general \mathbf{Q} con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ y a un sistema de referencia Oxyz en rotación con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ [sección 15.10] (figura 15.45). Se obtuvo la relación fundamental

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \quad (15.31)$$

se concluyó que la razón de cambio del vector \mathbf{Q} con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ consta de dos partes: la primera parte representa la razón de cambio \mathbf{Q} con respecto al sistema de referencia rotatorio Oxyz; la segunda parte, $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}$, se induce por la rotación del sistema de referencia Oxyz.

Coordenadas expresadas en términos de un parámetro

Razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia en rotación

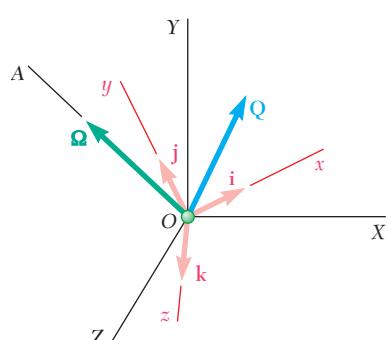


Figura 15.45

La siguiente parte del capítulo [sección 15.11] se dedicó al estudio cinemático en dos dimensiones de una partícula P moviéndose con respecto a un sistema de referencia \mathcal{F} en rotación con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ alrededor de un eje fijo (figura 15.46). Se encontró que la velocidad absoluta de P podría expresarse como

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \quad (15.33)$$

donde \mathbf{v}_P = velocidad absoluta de la partícula P

$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P' del sistema de referencia en movimiento \mathcal{F} que coincide con P

$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidad de P relativa al sistema de referencia en movimiento \mathcal{F}

Observe que la misma expresión para \mathbf{v}_P se obtiene si el sistema de referencia está en traslación en vez de en rotación. Sin embargo, cuando el sistema de referencia está en rotación, se encuentra que la expresión para la aceleración de P contiene un término adicional \mathbf{a}_c denominado *aceleración complementaria* o *aceleración de Coriolis*. Se escribió

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \quad (15.36)$$

donde \mathbf{a}_P = aceleración absoluta de la partícula P

$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema de referencia en movimiento \mathcal{F} que coincide con P

$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleración de P relativa al sistema de referencia en movimiento \mathcal{F}

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_c &= 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \\ &= \text{aceleración complementaria o de Coriolis} \end{aligned}$$

Puesto que $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ son perpendiculares entre sí en el caso de movimiento plano, se encontró que la aceleración de Coriolis tiene una magnitud $a_c = 2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$ y que apunta en la dirección obtenida al girar el vector $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ 90° en el sentido de rotación del sistema de referencia en movimiento. Es posible utilizar las fórmulas (15.33) y (15.36) para analizar el movimiento de mecanismos que contienen partes que se deslizan unas sobre otras [problemas resueltos 15.9 y 15.10].

La última parte del capítulo se dedicó al estudio de la cinemática de cuerpos rígidos en tres dimensiones. Se trató primero el movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo [sección 15.12]. Después de demostrar que el desplazamiento más general del cuerpo rígido con un punto fijo O es equivalente a una rotación del cuerpo alrededor de cualquier eje que pase por O , fue posible definir la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el *eje de rotación instantáneo* del cuerpo en un instante determinado. La velocidad de un punto P del cuerpo (figura 15.47) se puede expresar nuevamente como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (15.37)$$

Al diferenciar esta expresión, también se escribió

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (15.38)$$

Sin embargo, puesto que la dirección de $\boldsymbol{\omega}$ cambia de un instante a otro, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$, en general, no está dirigida a lo largo del eje de rotación instantáneo [problema resuelto 15.11].

Movimiento plano de una partícula relativo a un sistema de referencia en rotación

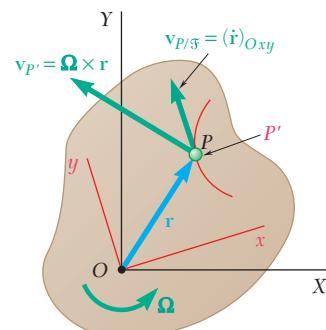


Figura 15.46

Movimiento de un cuerpo rígido con un punto fijo

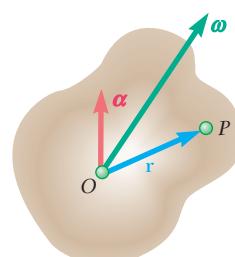


Figura 15.47

Movimiento general en el espacio

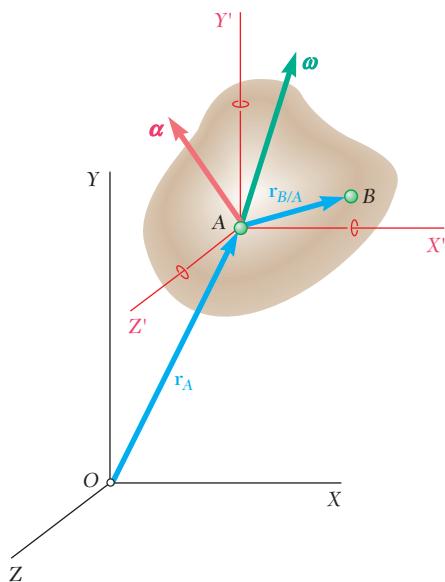


Figura 15.48

Movimiento tridimensional de una partícula relativa a un sistema de referencia en rotación

En la sección 15.13 se demostró que *el movimiento más general de un cuerpo rígido en el espacio es equivalente, en cualquier instante dado, a la suma de una traslación y una rotación*. Al considerar dos partículas A y B del cuerpo, se encontró que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (15.42)$$

donde $\mathbf{v}_{B/A}$ es la velocidad de B relativa al sistema de referencia AX'Y'Z' montado en A y de orientación fija (figura 15.48). Al denotar por $\mathbf{r}_{B/A}$ el vector de posición de B relativo a A, se escribió

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad (15.43)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado [problema resuelto 15.12]. La aceleración de B se obtuvo mediante un razonamiento similar. Primero se escribió

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

y, al recordar la ecuación (15.38),

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \quad (15.44)$$

En las dos secciones finales del capítulo se consideró el movimiento en tres dimensiones de una partícula P relativa a un sistema de referencia Oxyz en rotación con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ con respecto a un sistema de referencia fijo OXYZ (figura 15.49). En la sección 15.14 se expresó la velocidad absoluta \mathbf{v}_P de P como

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \quad (15.46)$$

donde \mathbf{v}_P = velocidad absoluta de una partícula P

$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidad del punto P' de un sistema de referencia en movimiento \mathcal{F} que coincide con P

$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidad de P relativa al sistema de referencia en movimiento \mathcal{F}

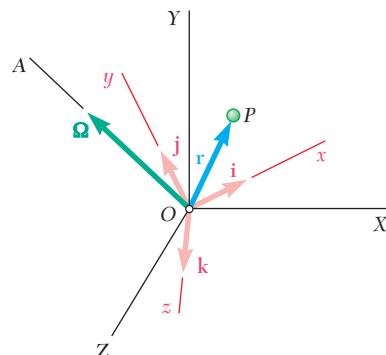


Figura 15.49

La aceleración absoluta \mathbf{a}_P de P se expresó entonces como

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \quad (15.48)$$

donde \mathbf{a}_P = aceleración absoluta de la partícula P

$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleración del punto P' del sistema de referencia en movimiento \mathcal{F} que coincide con P

$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleración de P relativa al sistema de referencia en movimiento \mathcal{F}

$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$
= aceleración complementaria, o de Coriolis

Se observó que la magnitud a_c de la aceleración de Coriolis no es igual a $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$ [problema resuelto 15.131 salvo en el caso especial en el que $\boldsymbol{\Omega}$ y $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ son perpendiculares entre sí].

También se observó [sección 15.15] que las ecuaciones (15.46) y (15.48) siguen siendo válidas cuando el sistema de referencia $Axyz$ se mueve de una manera conocida, aunque arbitraria, con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ (figura 15.50). Siempre que el movimiento de A se incluya en los términos $\mathbf{v}_{P'}$ y $\mathbf{a}_{P'}$ que representan la velocidad y la aceleración absolutas del punto coincidente P' .

Sistema de referencia en movimiento general

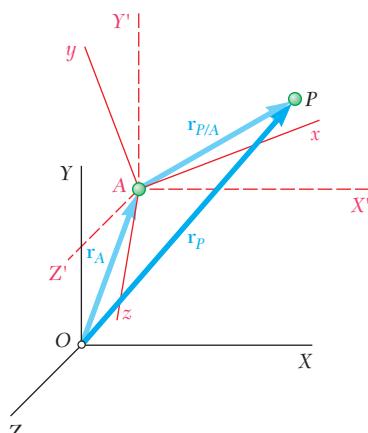


Figura 15.50

Los sistemas de referencia en rotación son en particular útiles en el estudio del movimiento tridimensional de cuerpos rígidos. De hecho, hay muchos casos en los que la elección apropiada del sistema de referencia en rotación conducirá a un análisis más simple del movimiento del cuerpo rígido que el que sería posible con ejes de orientación fija [problemas resueltos 15.14 y 15.15].

Problemas de repaso

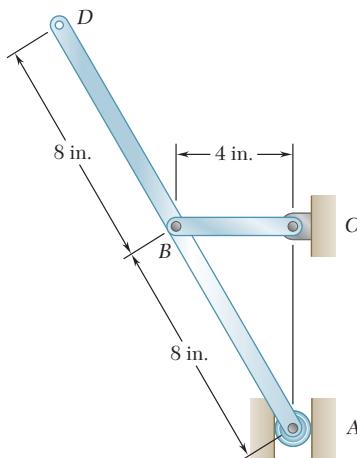


Figura P15.248

15.248 Si en el instante mostrado la manivela BC tiene una velocidad angular constante de 45 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración *a)* del punto A , *b)* del punto D .

15.249 El rotor de un motor eléctrico tiene una velocidad de 1 800 rpm cuando se corta el suministro de energía. Se observa que el rotor se detiene después de ejecutar 1 550 revoluciones. Suponiendo movimiento uniformemente acelerado, determine *a)* la aceleración angular del rotor, *b)* el tiempo requerido para que el rotor se detenga.

15.250 Un disco de 0.15 m de radio gira a la razón constante ω_2 con respecto a la placa BC , que a su vez gira a razón constante ω_1 alrededor del eje y . Si se sabe que $\omega_1 = \omega_2 = 3$ rad/s, determine para la posición mostrada, la velocidad y la aceleración *a)* del punto D , *b)* del punto F .

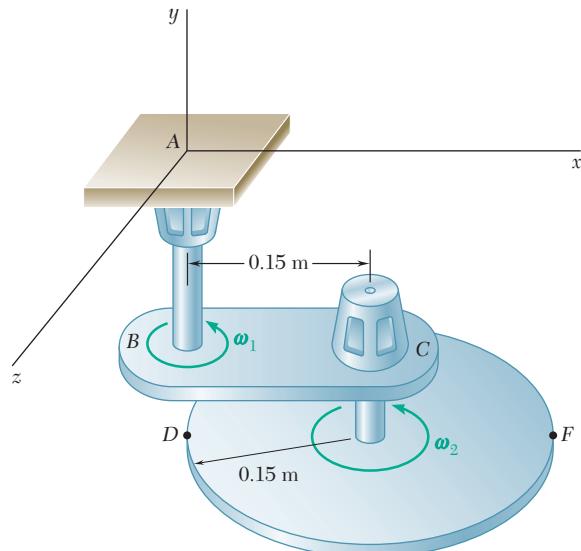


Figura P15.250

15.251 El ventilador de un motor de automóvil gira alrededor de un eje horizontal paralelo a la dirección del movimiento del automóvil. Cuando se ve desde la parte trasera del automóvil, se observa que el ventilador gira en el sentido de las manecillas del reloj a razón de 2 500 rpm. Si se sabe que el automóvil está girando a la derecha a lo largo de una trayectoria con radio de 12 m a una rapidez constante de 12 km/h, determine la aceleración angular del ventilador en el instante en que el automóvil se mueve hacia al norte.

15.252 Un tambor de 4.5 in. de radio está montado sobre un cilindro de 7.5 in. de radio. Una cuerda se enrolla alrededor del tambor y su extremo *E* se jala hacia la derecha con una velocidad constante de 15 in./s, lo que causa que el cilindro ruede sin deslizarse sobre la placa *F*. Si se sabe que la placa *F* está fija, determine *a)* la velocidad del centro del cilindro, *b)* la aceleración del punto *D* del cilindro.

15.253 Retome el problema 15.252, y ahora suponga que la placa *F* se mueve hacia la derecha con una velocidad constante de 9 in./s.

15.254 A través de un tubo curvo *AB* fluye agua, el tubo gira con una velocidad angular constante de 90 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Si la velocidad del agua en relación con el tubo es de 8 m/s, determine la aceleración total de una partícula de agua en el punto *P*.

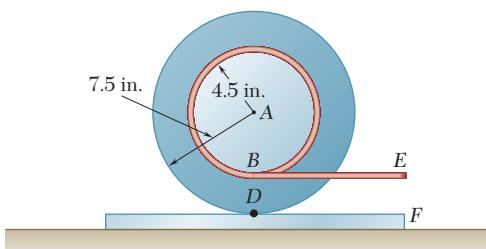


Figura P15.252

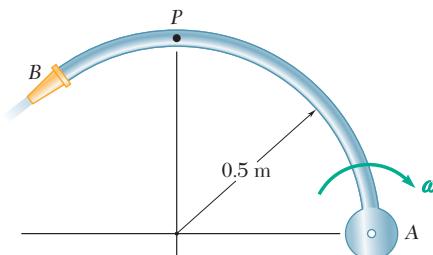


Figura P15.254

15.255 La barra *BC* de 24 in. de longitud se conecta mediante uniones de rótula al brazo giratorio *AB* y al collarín *C* que se desliza sobre la barra fija *DE*. Si se sabe que la longitud del brazo *AB* es de 4 in. y que gira a la razón constante $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$, determine la velocidad del collarín *C* cuando $\theta = 0$.

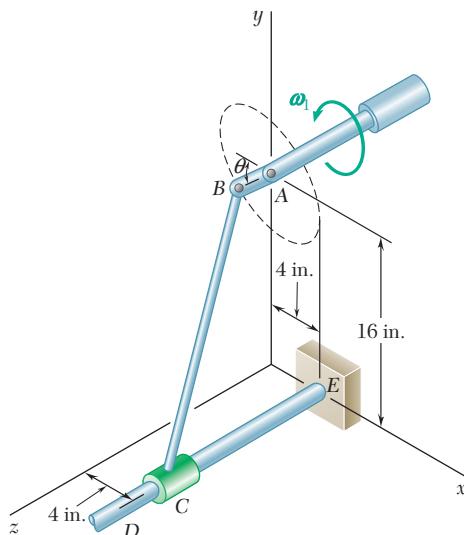


Figura P15.255

15.256 Retome el problema 15.255, y ahora suponga que $\theta = 90^\circ$.

15.257 La manivela AB tiene una velocidad angular constante de 1.5 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Para la posición mostrada, determine *a*) la velocidad angular de la varilla BD , *b*) la velocidad del collarín D .

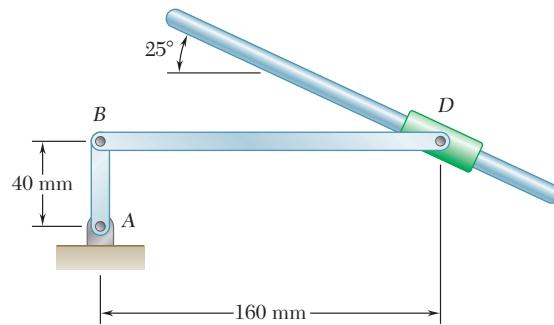


Figura P15.257 y P15.258

15.258 La manivela AB tiene una velocidad angular constante de 1.5 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Para la posición mostrada, determine *a*) la aceleración angular de la varilla BD , *c*) la aceleración del collarín D .

15.259 La varilla AB con 125 mm longitud se une a una barra vertical que gira alrededor del eje y y a la velocidad constante $\omega_1 = 5$ rad/s. Si el ángulo formado por la varilla AB y la vertical aumenta a la velocidad constante $d\beta/dt = 3$ rad/s, determine la velocidad y la aceleración del extremo B de la varilla cuando $\beta = 30^\circ$.

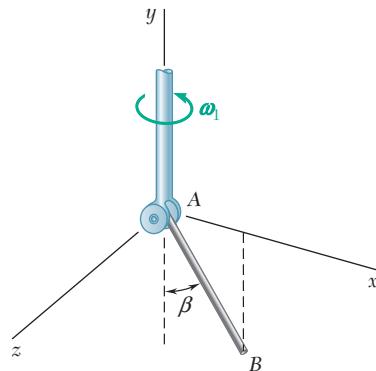


Figura P15.259

Problemas de computadora

15.C1 El disco que se muestra tiene una velocidad angular constante de 500 rpm en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Si la barra BD mide 250 mm de largo, utilice software para determinar y graficar, para valores de θ de 0 a 360° con incrementos de 30° , la velocidad del collarín D y la velocidad angular de la barra BD . Determine los dos valores de θ para los cuales la velocidad del collarín D es cero.

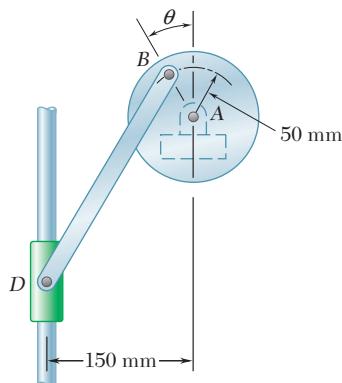


Figura P15.C1

15.C2 Dos barras giratorias se conectan mediante un bloque corredizo P en la forma que se indica. Si la barra BP gira con velocidad angular constante de 6 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, utilice software para determinar y graficar, para valores de θ de 0 a 180° , la velocidad angular y la aceleración angular de la barra AE . Determine el valor de θ para el cual la aceleración angular α_{AE} de la barra AE es máxima y el valor correspondiente de α_{AE} .

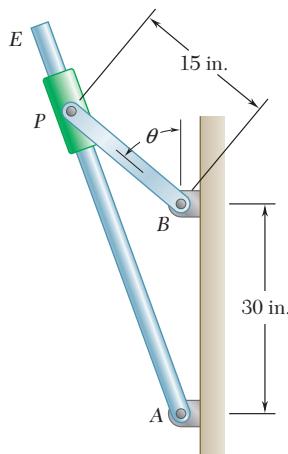


Figura P15.C2

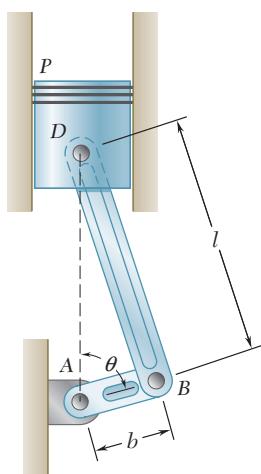


Figura P15.C3

15.C3 En el sistema motriz que se muestra, $l = 160$ mm y $b = 60$ mm. Si la manivela AB gira con una velocidad angular constante de 1 000 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, utilice software para determinar y graficar, para valores de θ de 0 a 180° con incrementos de 10° , a) la velocidad y la aceleración angulares de la barra BD , b) la velocidad y la aceleración del pistón P .

15.C4 La barra AB se mueve sobre una pequeña rueda en C mientras que el extremo A se desplaza hacia la derecha con una velocidad constante de 180 mm/s. Use software para determinar y graficar, respecto a valores de θ de 20° a 90° con incrementos de 5° , la velocidad del punto B y la aceleración angular de la barra. Determine el valor de θ para el cual la aceleración angular α de la barra es máxima y el valor correspondiente de α .

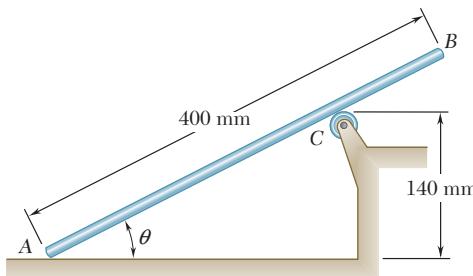


Figura P15.C4

15.C5 La barra BC de 24 in. de longitud se conecta mediante uniones de rótula al brazo giratorio AB y al collarín C que se desliza sobre la barra fija DE . El brazo AB de 4 in. de longitud gira en el plano XY con una velocidad angular constante de 10 rad/s. Use software para determinar y graficar, para valores de θ de 0 a 360° , la velocidad del collarín C . Determine los dos valores de θ para los cuales la velocidad del collarín C es cero.

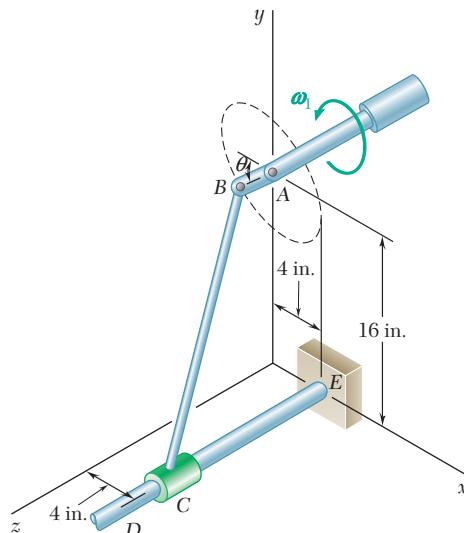


Figura P15.C5

15.C6 La barra AB de 25 in. de longitud se conecta mediante unión de rótula a los collarines A y B , los cuales se deslizan a lo largo de las dos barras en la forma que se indica. El collarín B se mueve hacia el soporte E a una rapidez constante de 20 in./s. Si se denota con d la distancia desde el punto C hasta el collarín B , utilice software para determinar y graficar la velocidad del collarín A respecto a valores de d entre 0 y 15 in.

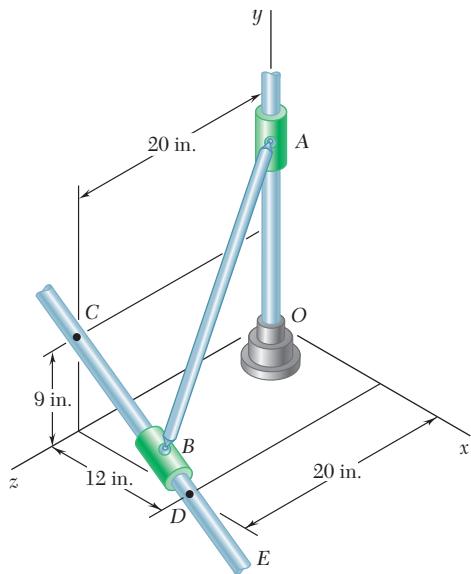


Figura P15.C6

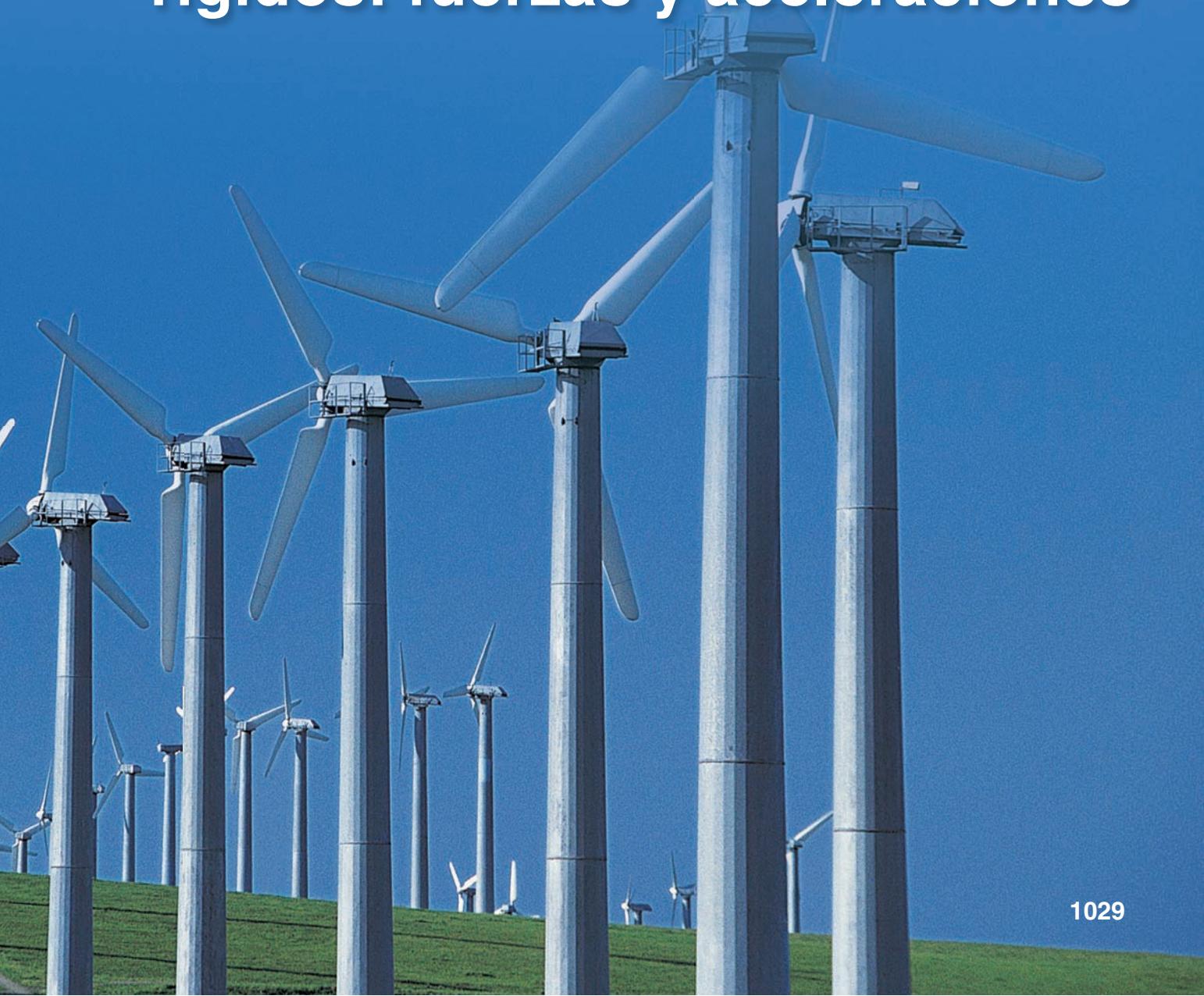
En la actualidad, el diseño más común para las turbinas de viento es similar al de las turbinas de tres aspas que se muestran en la fotografía de una granja de viento. En este capítulo aprenderá a analizar el movimiento de un cuerpo rígido al considerar el movimiento de su centro de masa, el movimiento relativo a su centro de masa y las fuerzas externas que actúan sobre él.



CAPÍTULO

16

Movimiento plano de cuerpos rígidos: fuerzas y aceleraciones



CAPÍTULO 16 MOVIMIENTO PLANO DE CUERPOS RÍGIDOS: FUERZAS Y ACELERACIONES

- 16.1 Introducción
- 16.2 Ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido
- 16.3 Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en movimiento plano
- 16.4 Movimiento plano de un cuerpo rígido. Principio de d'Alembert
- 16.5 Observación acerca de los axiomas de la mecánica de cuerpos rígidos
- 16.6 Solución de problemas que implican el movimiento de un cuerpo rígido
- 16.7 Sistemas de cuerpos rígidos
- 16.8 Movimiento plano restringido o vinculado

16.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo y en los capítulos 17 y 18 se estudiará la *cinética de cuerpos rígidos*, esto es, las relaciones existentes entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, la forma y la masa del cuerpo, y el movimiento que se produce. En los capítulos 12 y 13 se abordaron relaciones similares, suponiendo en ese caso que el cuerpo puede considerarse como una partícula, esto es, que su masa podría concentrarse en un punto y que todas las fuerzas actúan en él. La forma del cuerpo, así como la ubicación exacta de los puntos de aplicación de las fuerzas, no serán tomados en cuenta. Se estudiará no sólo el movimiento del cuerpo como un todo, sino también el movimiento del cuerpo en torno a su centro de masa.

El planteamiento será considerar a los cuerpos rígidos conformados por un gran número de partículas y utilizar los resultados que se obtuvieron en el capítulo 14 para el movimiento de sistemas de partículas. De manera específica, se emplearán dos ecuaciones del capítulo 14: la ecuación (14.16), $\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$, la cual relaciona la resultante de las fuerzas externas y la aceleración del centro de masa G del sistema de partículas, y la ecuación (14.23), $\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$, que relaciona el momento resultante de las fuerzas externas y la cantidad de movimiento angular del sistema de partículas alrededor de G .

Excepto por la sección 16.2, la cual se aplica al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido, los resultados que se obtendrán en este capítulo se limitarán en dos formas: 1) se restringirán al *movimiento plano* de cuerpos rígidos, esto es, al movimiento en el que cada partícula del cuerpo permanece a una distancia constante de un plano de referencia fijo. 2) Los cuerpos rígidos considerados constarán únicamente de placas planas y de cuerpos que son simétricos con respecto al plano de referencia.[†] El estudio del movimiento plano de cuerpos tridimensionales no simétricos y, más en lo general, el movimiento de cuerpos rígidos en el espacio tridimensional se pospondrá para el capítulo 18.

En la sección 16.3 se definirá la cantidad del movimiento angular de un cuerpo rígido en movimiento plano y se mostrará que la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular $\dot{\mathbf{H}}_G$ alrededor del centro de masa es igual al producto $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ del momento de inercia de masa centroidal \bar{I} y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo. El principio de d'Alembert, que se presentará en la sección 16.4, se usa para demostrar que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son equivalentes a un vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en el centro de masa y a un par de momento $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$.

En la sección 16.5 se obtendrá el principio de transmisibilidad utilizando sólo la ley del paralelogramo y las leyes de movimiento de Newton, lo cual permite quitar este principio de la lista de axiomas (sección 1.2) requeridos para el estudio de la estática y dinámica de cuerpos rígidos.

En la sección 16.6 se presentan las ecuaciones de diagramas de cuerpo libre que se utilizarán en la solución de todos los problemas que implican el movimiento plano de cuerpos rígidos.

Luego de considerar el movimiento plano de cuerpos rígidos conectados en la sección 16.7, el lector estará preparado para resolver una diversidad de problemas que implican la traslación, la rotación centroidal y el movimiento sin restricciones de cuerpos rígidos. En la sección 16.8 y en la parte restante del capítulo se tratará la solución de problemas que implican rotación no centroidal, movimiento de rodamiento y otros movimientos planos parcialmente restringidos de cuerpos rígidos.

[†]O, más generalmente, cuerpos que tienen un eje de inercia centroidal principal perpendicular al plano de referencia.

16.2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO

Considere un cuerpo rígido sobre el que actúan varias fuerzas externas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ (figura 16.1). Se puede suponer que el cuerpo está integrado de un gran número n de partículas de masa Δm_i ($i = 1, 2, \dots, n$) y aplicar los resultados obtenidos en el capítulo 14 para un sistema de partículas (figura 16.2). Considerando primero el movimiento del centro de masa G del cuerpo con respecto al sistema de referencia newtoniano $Oxyz$, se retoma la ecuación (14.6) y se escribe

$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (16.1)$$

donde m es la masa del cuerpo y $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración del centro de masa G . Volviendo ahora al movimiento del cuerpo relativo al sistema de referencia centroidal $Gx'y'z'$ se retoma la ecuación (14.23) y se escribe

$$\sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (16.2)$$

donde $\dot{\mathbf{H}}_G$ representa la razón de cambio de \mathbf{H}_G , la cantidad de movimiento angular alrededor de G del sistema de partículas que forma el cuerpo rígido. En lo subsecuente, \mathbf{H}_G hará referencia simplemente a la *cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido en torno a su centro de masa G*. Junto con las ecuaciones (16.1) y (16.2) expresa que *el sistema de fuerzas externas es equipolente al sistema consistente en el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en G y al par de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$* (figura 16.3).[†]

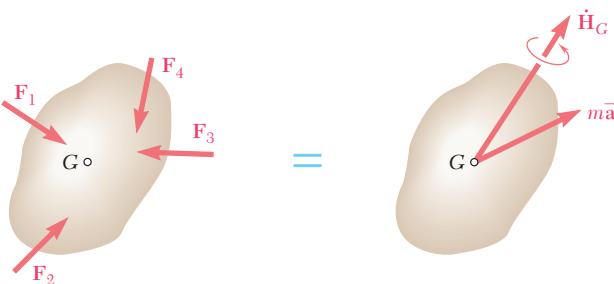


Figura 16.3

Las ecuaciones (16.1) y (16.2) se aplican al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido. Sin embargo, en el resto de este capítulo el análisis se limitará al *movimiento plano* de cuerpos rígidos, esto es, a un movimiento en el que cada partícula permanece a una distancia constante de un plano de referencia fijo, y se supondrá que los cuerpos rígidos estarán compuestos sólo por las placas planas y los cuerpos que son simétricos con respecto al plano de referencia. Un estudio adicional del movimiento plano de cuerpos tridimensionales no simétricos y del movimiento de cuerpos rígidos en el espacio tridimensional se pospondrá hasta el capítulo 18.

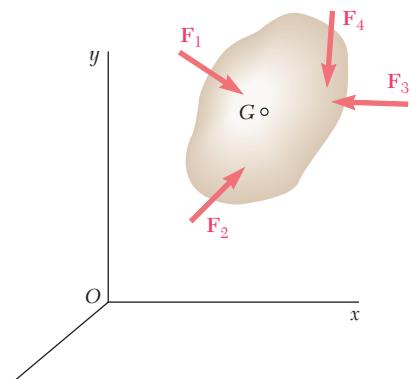


Figura 16.1

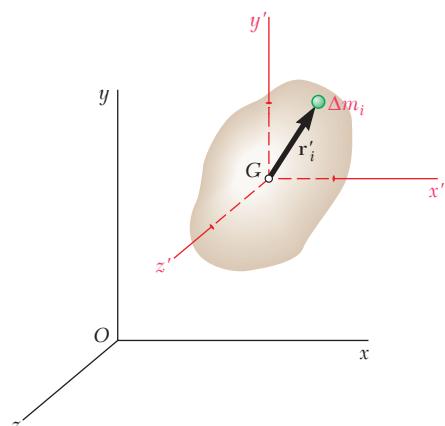


Figura 16.2



Fotografía 16.1 El sistema de fuerzas externas que actúan sobre el hombre y el esquí incluye los pesos, la tensión y la cuerda de remolque, y las fuerzas ejercidas por el agua y el aire.

[†]Puesto que los sistemas implicados actúan sobre un cuerpo rígido se podría concluir en este punto, en las referencias a la sección 3.19, que los dos sistemas son *equivalentes*, así como equipolentes y usan signo de igual rojo en lugar de azul (véase figura 16.3). Sin embargo, posponiendo esta conclusión, se puede llegar a ella de manera independiente (secciones 16.4 y 18.5), eliminando de esa manera la necesidad de incluir el principio de transmisibilidad entre los axiomas de la mecánica (sección 16.5).

16.3. CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

Considere una placa rígida en movimiento plano. Suponiendo que la placa está integrada por un gran número n de partículas P_i de masa Δm_i y retomando la ecuación (14.24) de la sección 14.5, se advierte que la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G de la placa alrededor de su centro de masa G puede calcularse considerando los momentos alrededor de G de las cantidades de movimiento de las partículas de la placa en su movimiento con respecto al sistema de referencia Oxy o $Gx'y'$ (figura 16.4). Si se elige este último, se escribe

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \Delta m_i) \quad (16.3)$$

donde \mathbf{r}'_i y $\mathbf{v}'_i \Delta m_i$ denotan, respectivamente, el vector de posición y la cantidad de movimiento lineal de la partícula P_i relativa al sistema de referencia centroidal $Gx'y'$. Sin embargo, en vista de que la partícula pertenece a la placa, se tiene que $\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la placa en el instante considerado. Se escribe

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \Delta m_i]$$

Con referencia a la figura 16.4, se verifica con facilidad que la expresión que se obtuvo representa un vector de la misma dirección que $\boldsymbol{\omega}$ (esto es, perpendicular a la placa) y de magnitud igual a $\omega \sum r'^2_i \Delta m_i$. Recordando que la suma $\sum r'^2_i \Delta m_i$ representa el momento de inercia \bar{I} de la placa alrededor del eje centroidal perpendicular a la misma, se concluye que la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G de la placa en torno a su centro de masa es

$$\mathbf{H}_G = \bar{I} \boldsymbol{\omega} \quad (16.4)$$

Al diferenciar ambos miembros de la ecuación (16.4) se obtiene

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I} \boldsymbol{\alpha} \quad (16.5)$$

En consecuencia, la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular de la placa se representa mediante un vector de la misma dirección que $\boldsymbol{\alpha}$ (esto es, perpendicular a la placa) y de magnitud $\bar{I}\alpha$.

Hay que tener presente que los resultados que se obtuvieron en esta sección se han derivado para una placa rígida en movimiento plano. Como se verá en el capítulo 18, siguen siendo válidos en el caso de movimiento plano de cuerpos rígidos que son simétricos con respecto al plano de referencia.[†] Sin embargo, no se aplican en el caso de cuerpos no simétricos o en el caso de movimiento tridimensional.



Fotografía 16.2 El disco duro y los brazos de sujeción de una unidad de disco de computadora realizan rotación centroidal.

[†]O, más generalmente, cuerpos que tienen un eje de inercia centroidal principal perpendicular al plano de referencia.

16.4. MOVIMIENTO PLANO DE UN CUERPO RÍGIDO.

PRINCIPIO DE D'ALEMBERT

Considere una placa rígida de masa m que se mueve bajo la acción de varias fuerzas externas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$, contenidas en el plano de la placa (figura 16.5). Al sustituir \mathbf{H}_G de la ecuación (16.5) en la ecuación (16.2) y escribir las ecuaciones de movimiento fundamentales (16.1) y (16.2) en forma escalar, se tiene

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \quad (16.6)$$

Las ecuaciones (16.6) muestran que la aceleración del centro de masa G de la placa y su aceleración angular α se obtienen fácilmente una vez que se ha determinado la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la placa y su momento resultante alrededor de G . Al dar condiciones iniciales apropiadas, es posible obtener por integración en cualquier instante t las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centro de masa y la coordenada angular θ . De tal modo, *el movimiento de la placa está completamente definido por la resultante y el momento resultante alrededor de G de las fuerzas externas que actúan sobre ella*.

Esta propiedad, que se ampliará en el capítulo 18 al caso de movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, es característica del movimiento de un cuerpo rígido. De hecho, como se vio en el capítulo 14, el movimiento de un sistema de partículas que no están rígidamente conectadas dependerá en general de las fuerzas externas específicas que actúan sobre diferentes partículas, así como de las fuerzas internas.

Puesto que el movimiento de un cuerpo rígido depende sólo de la resultante y del momento resultante de las fuerzas externas que actúan sobre él, se concluye que dos *sistemas de fuerzas que son equipolentes*, esto es, que tienen la misma resultante y el mismo momento resultante, *también son equivalentes*; esto es, tienen exactamente el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado.[†]

Considere en particular el sistema de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido (figura 16.6a) y el sistema de fuerzas efectivas asociadas con las partículas que forman dicho cuerpo (figura 16.6b). En la sección 14.2 se mostró que dos sistemas definidos de tal modo son equipolentes. Sin embargo, puesto que las partículas consideradas ahora constituyen un cuerpo rígido, se concluye de la discusión anterior que los dos sistemas son también equivalentes. En consecuencia, es posible establecer que *las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son equivalentes a las fuerzas efectivas de las diferentes partículas que lo constituyen*. Este enunciado se conoce como *principio de d'Alembert*, en honor al matemático Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), aunque el enunciado original de d'Alembert se escribió de manera un poco diferente.

El hecho de que el sistema de fuerzas externas sea *equivalente* al sistema de las fuerzas efectivas se ha subrayado mediante el uso de signos de igualdad rojos en las figuras 16.6 y 16.7, donde al usar los resultados que se obtuvieron antes en esta sección, se sustituyeron las fuerzas efectivas por un vector $\bar{m}\bar{a}$ fijo en el centro de masa G de la placa y por un par de momento $\bar{I}\alpha$.

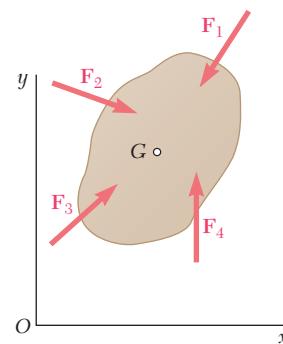


Figura 16.5

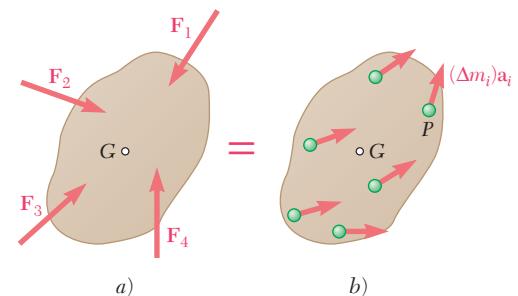


Figura 16.6

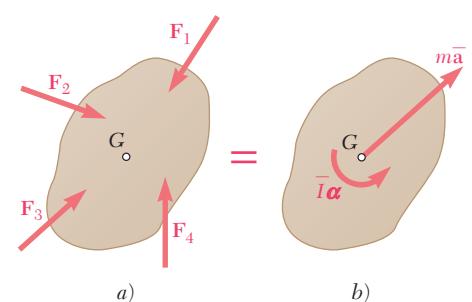


Figura 16.7

[†]Este resultado ya se había obtenido en la sección 3.19 del principio de transmisibilidad (sección 3.3). Sin embargo, la deducción presente es independiente de ese principio y permitirá eliminarlo de los axiomas de la mecánica (sección 16.5).

1034 Movimiento plano de cuerpos rígidos:
fuerzas y aceleraciones

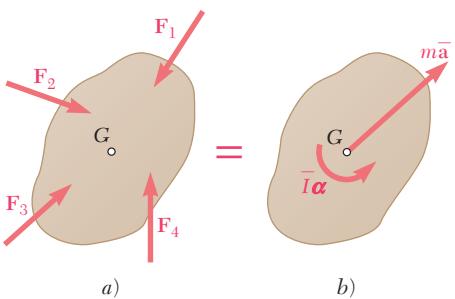


Figura 16.7 (repetida)

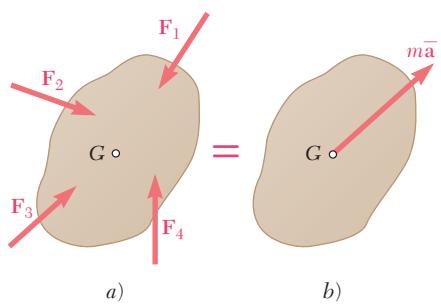


Figura 16.8 Traslación.

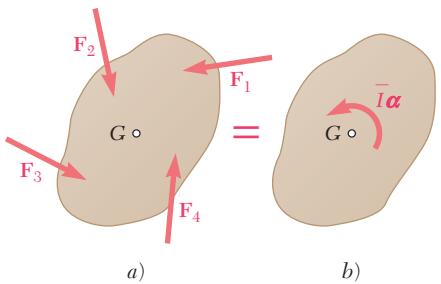


Figura 16.9 Rotación centroidal.

Traslación. En el caso de un cuerpo en traslación, la aceleración angular del mismo es idénticamente igual a cero y sus fuerzas efectivas se reducen al vector $m\bar{a}$ fijo en G (figura 16.8). De tal modo, la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido en traslación pasa por el centro de masa del cuerpo y es igual a $m\bar{a}$.

Rotación centroidal. Cuando una placa o, más generalmente, un cuerpo simétrico con respecto al plano de referencia, gira alrededor de un eje fijo perpendicular al plano de referencia y pasa por su centro de masa G , se afirma que el cuerpo está en *rotación centroidal*. Puesto que la aceleración \bar{a} es idénticamente igual a cero, las fuerzas efectivas del cuerpo se reducen al par $I\alpha$ (figura 16.9). De tal manera, las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en una rotación centroidal son equivalentes a un par de momento $I\alpha$.

Movimiento plano general. Al comparar la figura 16.7 con las figuras 16.8 y 16.9, se observa que desde el punto de vista de la *cinética*, el movimiento plano más general de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia puede reemplazarse por la suma de una traslación y una rotación centroidales. Hay que advertir que este enunciado es más restrictivo que el enunciado similar que se hizo antes desde el punto de vista de la *cinemática* (sección 15.5), ya que se requiere ahora que el centro de masa del cuerpo se elija como el punto de referencia.

En las ecuaciones (16.6) se observa que las primeras dos ecuaciones son idénticas a las ecuaciones de movimiento de una partícula de masa m sujeta a las fuerzas dadas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$. De ese modo se verifica que *el centro de masa G de un cuerpo rígido en movimiento plano se mueve como si la masa total del cuerpo estuviera concentrada en ese punto, y como si todas las fuerzas externas actuaran sobre él*. Recuérdese que este resultado ya se había obtenido en la sección 14.4 en el caso general de un sistema de partículas, donde éstas no necesariamente estaban conectadas en forma rígida. Se señaló también, como se hizo en la sección 14.4, que el sistema de las fuerzas externas no se reduce, en general, a un solo vector $m\bar{a}$ fijo en G . Por lo tanto, en el caso general del movimiento plano de un cuerpo rígido, *la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo no pasa por el centro de masa de este mismo*.

Por último, debe observarse que la última de las ecuaciones (16.6) seguiría siendo válida si el cuerpo rígido, aunque sujeto a las mismas fuerzas aplicadas, se hubiera restringido al girar alrededor de un eje fijo que pasara por G . De tal manera, *un cuerpo rígido en movimiento plano gira alrededor de su centro de masa como si este punto estuviera fijo*.

*16.5. OBSERVACIÓN ACERCA DE LOS AXIOMAS DE LA MECÁNICA DE CUERPOS RÍGIDOS

El hecho de que dos sistemas equipolentes de fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son también equivalentes, esto es, tienen el mismo efecto sobre ese cuerpo rígido, ya se había establecido en la sección 3.19. Sin embargo, en ese caso se dedujó del *principio de transmisibilidad*, uno de los axiomas que se usan en nuestro estudio de la estática de cuerpos rígidos. Hay que observar que este axioma no se ha utilizado en el capítulo presente debido a que la segunda y tercera leyes de Newton hacen su uso innecesario en el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos.

De hecho, el principio de transmisibilidad ahora se puede *deducir* de los otros axiomas empleados en el estudio de la mecánica. Este principio establecía, sin demostración (sección 3.3), que las condiciones de

equilibrio o movimiento de un cuerpo rígido permanecen inalteradas si una fuerza \mathbf{F} que actúa en un punto dado del cuerpo rígido se sustituye por una fuerza \mathbf{F}' de la misma magnitud y la misma dirección, pero actuando en un punto diferente, siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción. Sin embargo, ya que \mathbf{F} y \mathbf{F}' tienen el mismo momento alrededor de cualquier punto dado, es claro que forman dos sistemas equipolentes de fuerzas externas. De tal modo, ahora se puede demostrar, como resultado de lo que se estableció en la sección anterior, que \mathbf{F} y \mathbf{F}' tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido (figura 3.3).

En consecuencia, el principio de transmisibilidad puede eliminarse de la lista de axiomas que se requieren para el estudio de la mecánica de cuerpos rígidos. Estos axiomas se reducen a la ley del paralelogramo para la suma de vectores y a las leyes de movimiento de Newton.

16.6. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE IMPLICAN EL MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO

Se vio en la sección 16.4 que cuando un cuerpo rígido está en movimiento plano, existe una relación fundamental entre las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$, que actúan sobre el cuerpo, la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ de su centro de masa y la aceleración angular α del cuerpo. Esta relación, que se representa en la figura 16.7 en la forma de una *ecuación de diagrama del cuerpo libre*, se emplea para determinar la aceleración $\bar{\mathbf{a}}$ y la aceleración angular α producida por el sistema de fuerzas dado que actúa sobre un cuerpo rígido o, de manera inversa, para determinar las fuerzas que producen un movimiento determinado del cuerpo rígido.

Las tres ecuaciones algebraicas (16.6) se utilizan para resolver problemas de movimiento plano.[†] Sin embargo, la experiencia en estática sugiere que la solución de muchos problemas en los que intervienen cuerpos rígidos podría simplificarse mediante una elección apropiada del punto alrededor del cual se calculan los momentos de las fuerzas. En consecuencia, resulta preferible recordar la relación existente entre las fuerzas y las aceleraciones en la forma gráfica que se presenta en la figura 16.7 y deducir de esta relación fundamental las ecuaciones de componentes o momentos que mejor se adapten a la solución del problema considerado.

La relación fundamental que se muestra en la figura 16.7 se presenta en forma alternativa si se agrega a las fuerzas externas un vector de inercia $-m\bar{\mathbf{a}}$ de sentido opuesto al de $\bar{\mathbf{a}}$, fijo en G , y un par inercial $-I\alpha$ de momento igual en magnitud a $I\alpha$ y de sentido opuesto al de α (figura 16.10). El sistema que se obtiene es equivalente a cero, y se dice que el cuerpo rígido está en *equilibrio dinámico*.

Si el principio de equivalencia de fuerzas externas y efectivas se aplica de manera directa, como en la figura 16.7, o si se introduce el concepto de equilibrio dinámico, como en la figura 16.10, el uso de las ecuaciones de diagrama de cuerpo libre que muestran la relación vectorial que existe entre las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo rígido y las resultantes aceleraciones lineal y angular ofrecen ventajas considerables respecto a la aplicación a ciegas de las fórmulas (16.6). Las ventajas pueden resumirse de la manera siguiente:

1. El uso de una representación gráfica ofrece una comprensión mucho más clara del efecto de las fuerzas sobre el movimiento del cuerpo.

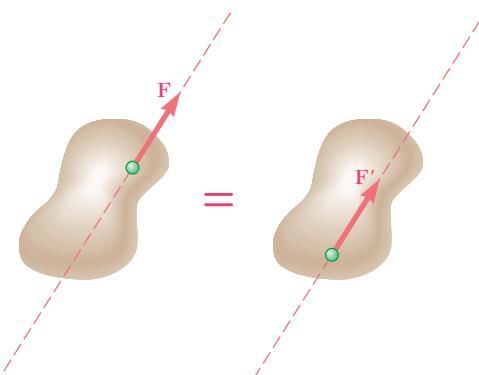


Figura 16.3 (repetida)

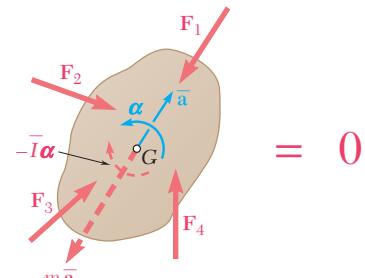


Figura 16.10

[†]Recuérdese que la última de las ecuaciones (16.6) sólo es válida en el caso de movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia. En todos los demás casos, deben usarse los métodos del capítulo 18.

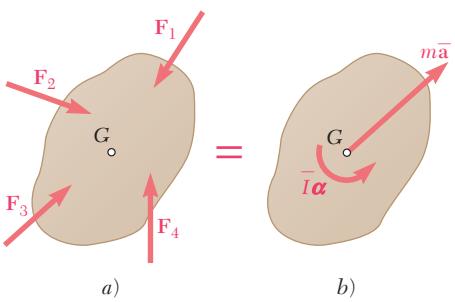


Figura 16.7 (repetida)

2. Este planteamiento posibilita dividir la solución de un problema dinámico en dos partes: en la primera, el análisis de las características cinemáticas y cinéticas del problema conduce a los diagramas de cuerpo libre de la figura 16.7 o 16.10; en la segunda, el diagrama obtenido se usa para analizar las diferentes fuerzas y vectores implicados mediante los métodos del capítulo 3.
3. Para el análisis del movimiento plano de un cuerpo rígido se proporciona un planteamiento unificado, independientemente del tipo particular de movimiento implicado. Si bien la cinemática de los diversos movimientos considerados varía de un caso a otro, el planteamiento de la cinética del movimiento es consistentemente el mismo. En cada caso se dibujará un diagrama que demuestre las fuerzas externas, los vectores $m\ddot{a}$ asociados con el movimiento de G y el par $I\ddot{\alpha}$ asociado con la rotación del cuerpo alrededor de G .
4. La resolución del movimiento plano de un cuerpo rígido en una traslación y una rotación centroidal, utilizado aquí, es un concepto básico que es posible aplicar de manera efectiva en todo el estudio de la mecánica. Se volverá a utilizar en el capítulo 17 con el método del trabajo y la energía y el método del impulso y la cantidad de movimiento.
5. Como se verá en el capítulo 18, es posible ampliar este planteamiento al estudio del movimiento general en tres dimensiones de un cuerpo rígido. El movimiento del cuerpo se volverá a descomponer en una traslación y en una rotación alrededor del centro de masa, y se utilizarán las ecuaciones de diagrama de cuerpo libre para indicar la relación que existe entre las fuerzas externas y las razones de cambio de las cantidades de movimiento lineal y angular del cuerpo.

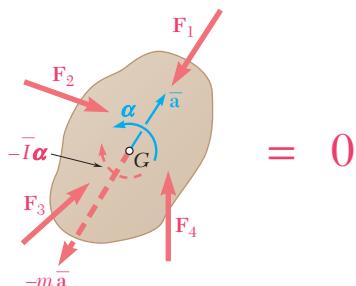


Figura 16.10 (repetida)



Fotografía 16.3 El montacargas y la carga en movimiento pueden analizarse como un sistema de dos cuerpos rígidos conectados en movimiento plano.

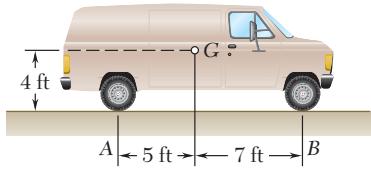
16.7. SISTEMAS DE CUERPOS RÍGIDOS

El método que se describe en la sección anterior también puede emplearse en problemas que implican el movimiento plano de varios cuerpos rígidos conectados. Para cada parte del sistema, es posible dibujar un diagrama similar al de la figura 16.7 o 16.10. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de estos diagramas se resuelven de manera simultánea.

En algunos casos, como en el problema resuelto 16.3, basta con dibujar un solo diagrama para todo el sistema. Este diagrama incluirá todas las fuerzas externas, así como los vectores $m\ddot{a}$ y los pares $I\ddot{\alpha}$ asociados con las diversas partes del sistema. Sin embargo, fuerzas externas como las ejercidas por cables de conexión, pueden omitirse, ya que ocurren en pares de fuerzas iguales y opuestas y, por ello, son equipolentes a cero. Las ecuaciones obtenidas al expresar que el sistema de las fuerzas externas es equipolente al sistema de las fuerzas efectivas se resuelve para las incógnitas restantes.[†]

No es posible utilizar este segundo planteamiento en problemas que implican más de tres incógnitas, ya que sólo se dispone de tres ecuaciones de movimiento cuando se usa un solo diagrama. No es necesario comentar más acerca de este punto, ya que el análisis correspondiente sería completamente similar al que se da en la sección 6.11 en el caso del equilibrio de un sistema de cuerpos rígidos.

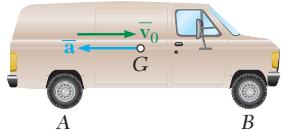
[†]Observe que no es posible hablar de sistemas *equivalentes*, ya que no se está tratando con un solo cuerpo rígido.



PROBLEMA RESUELTO 16.1

Cuando la velocidad hacia adelante de la camioneta que se muestra era de 30 ft/s, se aplicaron repentinamente los frenos, lo que provocó que las cuatro ruedas dejaran de girar. Se pudo observar que la camioneta patinó 20 ft antes de detenerse. Determine la magnitud de la reacción normal y de la fuerza de fricción en cada rueda cuando la camioneta patinó.

SOLUCIÓN



Cinemática de movimiento. Eligiendo el sentido positivo hacia la derecha y utilizando las ecuaciones de movimiento uniformemente acelerado, se escribe

$$\bar{v}_0 = +30 \text{ ft/s} \quad \bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}\bar{x} \quad 0 = (30)^2 + 2\bar{a}(20) \\ \bar{a} = -22.5 \text{ ft/s}^2 \quad \bar{a} = 22.5 \text{ ft/s}^2 \leftarrow$$

Ecuaciones de movimiento. Las fuerzas externas consisten en el peso **W** de la camioneta y en las reacciones normales y fuerzas de fricción en las ruedas. (Los vectores **N_A** y **F_A** representan la suma de las reacciones en las ruedas posteriores, en tanto que **N_B** y **F_B** la suma de las reacciones en las ruedas frontales.) Puesto que la camioneta está en traslación, las fuerzas efectivas se reducen al vector **mā** fijo en **G**. Al expresar que el sistema de fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas se obtienen tres ecuaciones de movimiento.

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma (F_y)_{\text{ef}}: \quad N_A + N_B - W = 0$$

Puesto que $F_A = \mu_k N_A$ y $F_B = \mu_k N_B$, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética, se encuentra que

$$F_A + F_B = \mu_k (N_A + N_B) = \mu_k W$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = \Sigma (F_x)_{\text{ef}}: \quad -(F_A + F_B) = -m\bar{a}$$

$$-\mu_k W = -\frac{W}{32.2 \text{ ft/s}^2} (22.5 \text{ ft/s}^2)$$

$$\mu_k = 0.699$$

$$+\uparrow \Sigma M_A = \Sigma (M_A)_{\text{ef}}: \quad -W(5 \text{ ft}) + N_B(12 \text{ ft}) = m\bar{a}(4 \text{ ft})$$

$$-W(5 \text{ ft}) + N_B(12 \text{ ft}) = \frac{W}{32.2 \text{ ft/s}^2} (22.5 \text{ ft/s}^2)(4 \text{ ft})$$

$$N_B = 0.650W$$

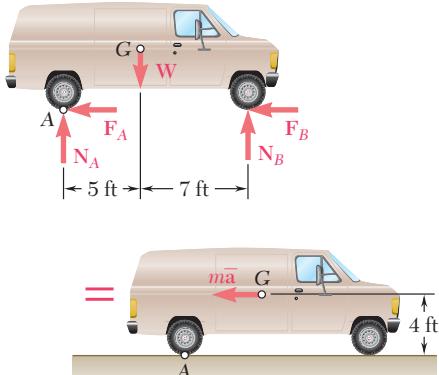
$$F_B = \mu_k N_B = (0.699)(0.650W) \quad F_B = 0.454W$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma (F_y)_{\text{ef}}: \quad N_A + N_B - W = 0$$

$$N_A + 0.650W - W = 0$$

$$N_A = 0.350W$$

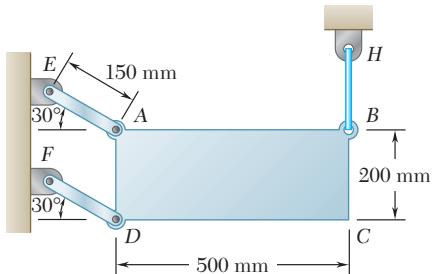
$$F_A = \mu_k N_A = (0.699)(0.350W) \quad F_A = 0.245W$$



Reacciones en cada rueda. Hay que recordar que los valores calculados representan la suma de las reacciones de las dos ruedas frontales o las dos ruedas traseras, por lo que se obtiene la magnitud de las reacciones en cada rueda al escribir

$$N_{\text{frontal}} = \frac{1}{2} N_B = 0.325W \quad N_{\text{trasera}} = \frac{1}{2} N_A = 0.175W \quad \blacktriangleleft$$

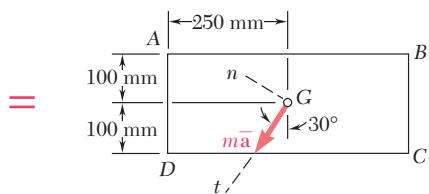
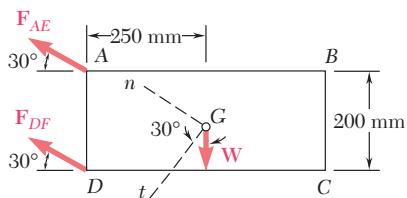
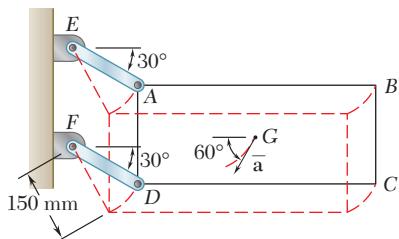
$$F_{\text{frontal}} = \frac{1}{2} F_B = 0.227W \quad F_{\text{trasera}} = \frac{1}{2} F_A = 0.122W \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.2

La placa delgada ABCD de 8 kg de masa se mantiene en la posición indicada mediante el alambre BH y dos eslabones AE y DF. Ignorando la masa de los eslabones determine a) la aceleración de la placa, b) la fuerza de cada eslabón inmediatamente después de que se corta el alambre BH.

SOLUCIÓN



Cinemática de movimiento. Despues de que se ha cortado el alambre BH se observa que las esquinas A y D se mueven a lo largo de círculos paralelos de 150 mm de radio centrados, respectivamente, en E y F, por lo que el movimiento de la placa es una traslación curvilínea. Las partículas que la forman se mueven a lo largo de círculos paralelos de 150 mm de radio.

En el instante que se corta el alambre BH, la velocidad de la placa es cero. Así, la aceleración \bar{a} del centro de masa G de la placa es tangente a la trayectoria circular que se describirá mediante G.

Ecuación de movimiento. Las fuerzas externas consisten en el peso W y las fuerzas \mathbf{F}_{AE} y \mathbf{F}_{DF} ejercidas por los eslabones. Puesto que la placa está en traslación, las fuerzas efectivas se reducen al vector $m\bar{a}$ fijo en G y dirigido a lo largo del eje t. Se dibuja una ecuación de diagrama de cuerpo libre para mostrar que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas.

a) Aceleración de la placa.

$$+\sum F_t = \Sigma(F_t)_{\text{ef}}:$$

$$W \cos 30^\circ = m\bar{a}$$

$$mg \cos 30^\circ = m\bar{a}$$

$$\bar{a} = g \cos 30^\circ = (9.81 \text{ m/s}^2) \cos 30^\circ \quad (1)$$

$$\bar{a} = 8.50 \text{ m/s}^2 \angle 60^\circ \quad \blacktriangleleft$$

b) Fuerzas en los eslabones AE y DF.

$$+\sum F_n = \Sigma(F_n)_{\text{ef}}: \quad F_{AE} + F_{DF} - W \sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$+\sum M_G = \Sigma(M_G)_{\text{ef}}:$$

$$(F_{AE} \sin 30^\circ)(250 \text{ mm}) - (F_{AE} \cos 30^\circ)(100 \text{ mm}) + (F_{DF} \sin 30^\circ)(250 \text{ mm}) + (F_{DF} \cos 30^\circ)(100 \text{ mm}) = 0$$

$$38.4F_{AE} + 211.6F_{DF} = 0$$

$$F_{DF} = -0.1815F_{AE} \quad (3)$$

Al sustituir F_{DF} de (3) en (2) se escribe

$$F_{AE} - 0.1815F_{AE} - W \sin 30^\circ = 0$$

$$F_{AE} = 0.6109W$$

$$F_{DF} = -0.1815(0.6109W) = -0.1109W$$

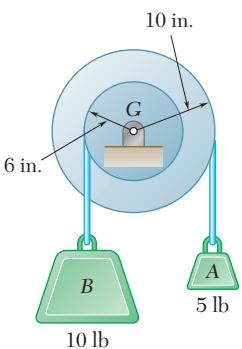
Al notar que $W = mg = (8 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 78.48 \text{ N}$, se tiene

$$F_{AE} = 0.6109(78.48 \text{ N})$$

$$F_{AE} = 47.9 \text{ N T} \quad \blacktriangleleft$$

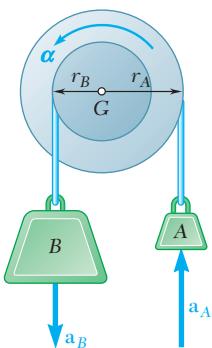
$$F_{DF} = -0.1109(78.48 \text{ N})$$

$$F_{DF} = 8.70 \text{ N C} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.3

Una polea de 12 lb y de 8 in. de radio de giro se conecta a dos bloques en la forma indicada. Suponiendo que no hay fricción en el eje, determine la aceleración angular de la polea y la aceleración de cada bloque.



SOLUCIÓN

Sentido del movimiento. Aunque puede suponerse un sentido arbitrario del movimiento (ya que no intervienen fuerzas de fricción) y después verificarlo mediante el signo de la respuesta, es preferible determinar primero el sentido de rotación real de la polea. Se determina primero el peso del bloque B que se requiere para mantener el equilibrio de la polea cuando éste actúa sobre el bloque A de 5 lb. Se escribe

$$+\uparrow \sum M_G = 0: \quad W_B(6 \text{ in.}) - (5 \text{ lb})(10 \text{ in.}) = 0 \quad W_B = 8.33 \text{ lb}$$

Puesto que el bloque B realmente pesa 10 lb, la polea girará en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Cinemática del movimiento. Suponiendo α en el sentido contrario al de las manecillas del reloj y advirtiendo que $a_A = r_A\alpha$ y $a_B = r_B\alpha$, se obtiene

$$\mathbf{a}_A = (\frac{10}{12} \text{ ft})\alpha \uparrow \quad \mathbf{a}_B = (\frac{6}{12} \text{ ft})\alpha \downarrow$$

Ecuaciones de movimiento. Se considera un sistema simple compuesto de la polea y los dos bloques. Las fuerzas externas a este sistema consisten en los pesos de las poleas y de los dos bloques y en la reacción en G. (Las fuerzas que ejercen los cables sobre las poleas y sobre los bloques son internas al sistema considerado y se cancelan.) Puesto que el movimiento de la polea es una rotación centroidal y el movimiento de cada bloque es una traslación, las fuerzas efectivas se reducen al par $\bar{I}\alpha$ y los dos vectores $m\mathbf{a}_A$ y $m\mathbf{a}_B$. El momento centroidal de inercia de la polea es

$$\bar{I} = m\bar{k}^2 = \frac{W}{g}\bar{k}^2 = \frac{12 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(\frac{8}{12} \text{ ft})^2 = 0.1656 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Puesto que el sistema de fuerzas externas es equipolente al sistema de fuerzas efectivas se escribe

$$+\uparrow \sum M_G = \Sigma(M_G)_{\text{ef}}:$$

$$(10 \text{ lb})(\frac{6}{12} \text{ ft}) - (5 \text{ lb})(\frac{10}{12} \text{ ft}) = +\bar{I}\alpha + m_B a_B(\frac{6}{12} \text{ ft}) + m_A a_A(\frac{10}{12} \text{ ft})$$

$$(10)(\frac{6}{12}) - (5)(\frac{10}{12}) = 0.1656\alpha + \frac{10}{32.2}(\frac{6}{12}\alpha)(\frac{6}{12}) + \frac{5}{32.2}(\frac{10}{12}\alpha)(\frac{10}{12})$$

$$\alpha = +2.374 \text{ rad/s}^2$$

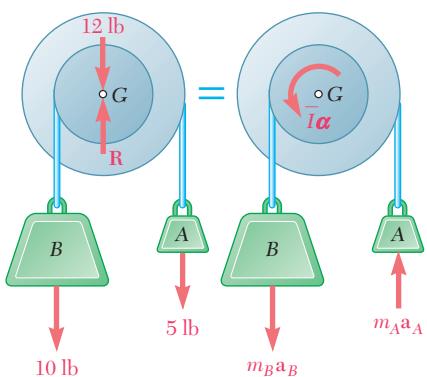
$$a_A = r_A\alpha = (\frac{10}{12} \text{ ft})(2.374 \text{ rad/s}^2)$$

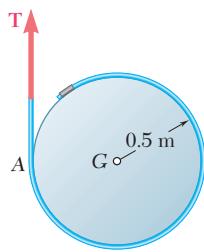
$$a_B = r_B\alpha = (\frac{6}{12} \text{ ft})(2.374 \text{ rad/s}^2)$$

$$\alpha = 2.37 \text{ rad/s}^2 \uparrow$$

$$a_A = 1.978 \text{ ft/s}^2 \uparrow$$

$$a_B = 1.187 \text{ ft/s}^2 \downarrow$$

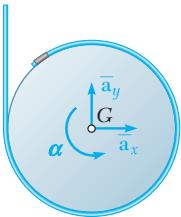




PROBLEMA RESUELTO 16.4

Se enrolla una cuerda alrededor de un disco homogéneo de radio $r = 0.5 \text{ m}$ y masa $m = 15 \text{ kg}$. Si la cuerda se jala hacia arriba con una fuerza \mathbf{T} de 180 N de magnitud, determine a) la aceleración del centro del disco, b) la aceleración angular del disco, c) la aceleración de la cuerda.

SOLUCIÓN

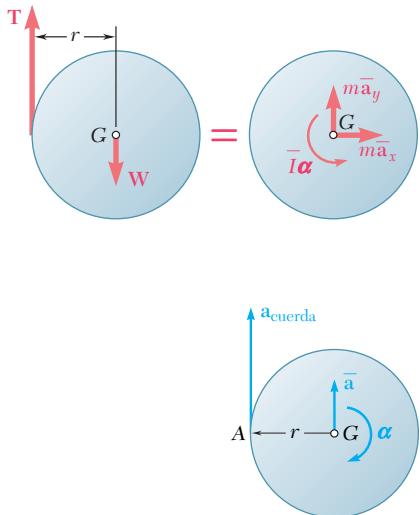


Ecuaciones de movimiento. Se supone que las componentes $\bar{\mathbf{a}}_x$ y $\bar{\mathbf{a}}_y$ de la aceleración del centro están dirigidas, respectivamente, hacia la derecha y hacia arriba, y que la aceleración angular del disco es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Las fuerzas externas que actúan sobre el disco consisten en el peso \mathbf{W} y la fuerza \mathbf{T} que ejerce la cuerda. Este sistema es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas, las cuales consisten en un vector de componentes $m\bar{\mathbf{a}}_x$ y $m\bar{\mathbf{a}}_y$ fijo en G y un par $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. Se escribe

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= \sum (F_x)_{\text{ef}}: & 0 &= m\bar{a}_x & \bar{a}_x &= 0 \\ +\uparrow \sum F_y &= \sum (F_y)_{\text{ef}}: & T - W &= m\bar{a}_y & \\ && \bar{a}_y &= \frac{T - W}{m} & \end{aligned}$$

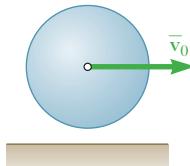
Puesto que $T = 180 \text{ N}$, $m = 15 \text{ kg}$ y $W = (15 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 147.1 \text{ N}$, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{a}_y &= \frac{180 \text{ N} - 147.1 \text{ N}}{15 \text{ kg}} = +2.19 \text{ m/s}^2 & \bar{a}_y &= 2.19 \text{ m/s}^2 \uparrow \\ +\uparrow \sum M_G &= \sum (M_G)_{\text{ef}}: & -Tr &= \bar{I}\boldsymbol{\alpha} & \\ && -Tr &= (\frac{1}{2}mr^2)\boldsymbol{\alpha} & \\ \boldsymbol{\alpha} &= -\frac{2T}{mr} = -\frac{2(180 \text{ N})}{(15 \text{ kg})(0.5 \text{ m})} = -48.0 \text{ rad/s}^2 & & & \\ \boldsymbol{\alpha} &= 48.0 \text{ rad/s}^2 \downarrow & & & \end{aligned}$$



Aceleración de la cuerda. Puesto que la aceleración de la cuerda es igual a la componente tangencial de la aceleración del punto A sobre el disco se escribe

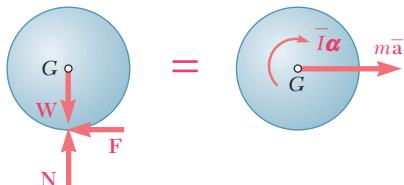
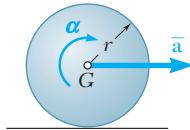
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{cuerda}} &= (\mathbf{a}_A)_t = \bar{\mathbf{a}} + (\mathbf{a}_{A/G})_t \\ &= [2.19 \text{ m/s}^2 \uparrow] + [(0.5 \text{ m})(48 \text{ rad/s}^2) \uparrow] \\ \mathbf{a}_{\text{cuerda}} &= 26.2 \text{ m/s}^2 \uparrow \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 16.5

Una esfera uniforme de masa m y radio r se lanza a lo largo de una superficie horizontal rugosa con una velocidad lineal \bar{v}_0 y sin velocidad angular. Al denotar por μ_k el coeficiente de fricción cinética entre la esfera y el piso, determine a) el tiempo t_1 en el cual la esfera empezará a rodar sin deslizar, b) la velocidad lineal y la velocidad angular de la esfera en el tiempo t_1 .

SOLUCIÓN



Ecuaciones de movimiento. El sentido positivo se elige hacia la derecha para \bar{a} y el sentido de las manecillas del reloj para α . Las fuerzas externas que actúan sobre la esfera consisten en el peso \mathbf{W} , la reacción normal \mathbf{N} y la fuerza de fricción \mathbf{F} . Puesto que el punto de la esfera en contacto con la superficie se está deslizando hacia la derecha, la fuerza de fricción \mathbf{F} apunta hacia la izquierda. Mientras la esfera se desliza, la magnitud de la fuerza de fricción es $F = \mu_k N$. Las fuerzas efectivas consisten en el vector $m\bar{a}$ fijo en G y el par $I\alpha$. Expresando que el sistema de fuerzas externas es equivalente al sistema de fuerzas efectivas se escribe

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_y &= \sum (F_y)_{\text{ef}}: & N - W &= 0 \\ && N = W = mg & F = \mu_k N = \mu_k mg \\ \rightarrow \sum F_x &= \sum (F_x)_{\text{ef}}: & -F &= m\bar{a} & -\mu_k mg &= m\bar{a} & \bar{a} = -\mu_k g \\ +\not\downarrow \sum M_G &= \sum (M_G)_{\text{ef}}: & Fr &= I\alpha \end{aligned}$$

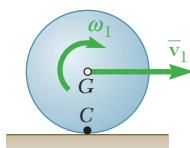
Al notar que $I = \frac{2}{5}mr^2$ y sustituir el valor obtenido para F , se expresa

$$(\mu_k mg)r = \frac{2}{5}mr^2\alpha \quad \alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}$$

Cinemática de movimiento. Conforme la esfera gira y se desliza, sus movimientos lineal y angular son uniformemente acelerados.

$$t = 0, \bar{v} = \bar{v}_0 \quad \bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}t = \bar{v}_0 - \mu_k gt \quad (1)$$

$$t = 0, \omega_0 = 0 \quad \omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \left(\frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} \right) t \quad (2)$$



La esfera empezará rodando sin deslizarse cuando la velocidad v_C del punto de contacto C sea cero. En el tiempo, $t = t_1$, el punto C se vuelve el centro instantáneo de rotación, y se tiene

$$\bar{v}_1 = r\omega_1 \quad (3)$$

Al sustituir en (3) los valores obtenidos para \bar{v}_1 y ω_1 al hacer $t = t_1$ en (1) y (2), respectivamente, se escribe

$$\bar{v}_0 - \mu_k gt_1 = r \left(\frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} t_1 \right) \quad t_1 = \frac{2}{7} \frac{\bar{v}_0}{\mu_k g} \quad \blacktriangleleft$$

Al sustituir t_1 en (2) se encuentra

$$\omega_1 = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} t_1 = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} \left(\frac{2}{7} \frac{\bar{v}_0}{\mu_k g} \right) \quad \omega_1 = \frac{5}{7} \frac{\bar{v}_0}{r} \quad \omega_1 = \frac{5}{7} \frac{\bar{v}_0}{r} \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{v}_1 = r\omega_1 = r \left(\frac{5}{7} \frac{\bar{v}_0}{r} \right) \quad \bar{v}_1 = \frac{5}{7} \bar{v}_0 \quad \bar{v}_1 = \frac{5}{7} \bar{v}_0 \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En este capítulo se estudia el *movimiento plano* de cuerpos rígidos, y en esta primera lección se consideran cuerpos rígidos que tienen la libertad de moverse bajo la acción de fuerzas aplicadas.

1. Fuerzas efectivas. Hay que recordar primero que un cuerpo rígido consiste en un gran número de partículas. Se encontró que las fuerzas efectivas de las partículas que forman el cuerpo son equivalentes a un vector $m\bar{a}$ fijo en el centro de masa G del cuerpo y a un par de momento $I\alpha$ [figura 16.7]. Al percatarnos de que las fuerzas aplicadas son equivalentes a las fuerzas efectivas, se escribe

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad \Sigma M_G = I\alpha \quad (16.5)$$

donde \bar{a}_x y \bar{a}_y son las componentes x y y de la aceleración del centro de masa G del cuerpo y α es la aceleración angular de este mismo. Es importante advertir que cuando se usan estas ecuaciones, los *momentos de las fuerzas aplicadas deben calcularse con respecto al centro de masa del cuerpo*. Sin embargo, usted aprenderá un método más eficiente de solución basado en el uso de la ecuación de diagramas de cuerpo libre.

2. Ecuación de diagramas de cuerpo libre. El primer paso en la solución de un problema debe ser dibujar *una ecuación de diagramas de cuerpo libre*.

a) *Una ecuación de diagramas de cuerpo libre consiste* en dos diagramas que representan dos sistemas equivalentes de vectores. *En el primer diagrama* deben mostrarse *las fuerzas que se ejercen sobre el cuerpo*, incluyendo las fuerzas aplicadas, las reacciones en los soportes y el peso del cuerpo. *En el segundo diagrama* es necesario indicar el vector $m\bar{a}$ y el par $I\alpha$ que representa *las fuerzas efectivas*.

b) *El uso de una ecuación de diagramas de cuerpo libre* permite *sumar componentes en cualquier dirección y sumar momentos alrededor de cualquier punto*. Al escribir las tres ecuaciones de movimiento necesarias para resolver un problema determinado, es posible seleccionar una o más ecuaciones que incluyen una sola incógnita. Al resolver primero estas ecuaciones y sustituir los valores obtenidos para las incógnitas en las ecuaciones restantes se obtendrá una solución más simple.

3. Movimiento plano de un cuerpo rígido. Los problemas que tendrán que resolverse entrarán dentro de una de las siguientes categorías.

a) *Cuerpo rígido en traslación.* Para un cuerpo en traslación, la aceleración angular es cero. Las fuerzas efectivas se reducen *al vector $m\bar{a}$ aplicado en el centro de masa* [problemas resueltos 16.1 y 16.2].

b) *Cuerpo rígido en rotación centroidal.* Para un cuerpo en rotación centroidal, la aceleración del centro de masa es cero. Las fuerzas efectivas se reducen *al par $I\alpha$* [problema resuelto 16.3].

c) Cuerpo rígido en movimiento plano general. Es posible considerar el movimiento plano general de un cuerpo rígido como la suma de una traslación y una rotación centroidal. Las fuerzas efectivas son equivalentes al vector $\bar{m}\ddot{a}$ y al par $\bar{I}\ddot{\alpha}$ [problemas resueltos 16.4 y 16.5].

4. Movimiento plano de un sistema de cuerpos rígidos. Es necesario dibujar primero una ecuación de diagramas de cuerpo libre que incluya todos los cuerpos rígidos del sistema. Un vector $\bar{m}\ddot{a}$ y un par $\bar{I}\ddot{\alpha}$ se aplican a cada uno de los cuerpos. Sin embargo, las fuerzas que ejercen entre sí los diferentes cuerpos del sistema pueden omitirse, puesto que ocurren en pares de fuerzas iguales y opuestas.

a) **Si no intervienen más de tres incógnitas** es posible emplear esta ecuación de diagramas de cuerpo libre y sumar las componentes en cualquier dirección, así como los momentos alrededor de cualquier punto para obtener ecuaciones que pueden resolverse respecto a las incógnitas deseadas [problema resuelto 16.3].

b) **Si intervienen más de tres incógnitas** será necesario dibujar una ecuación de diagramas de cuerpo libre independiente para cada uno de los cuerpos rígidos del sistema. Se tienen que incluir tanto las fuerzas internas como las externas en cada una de las ecuaciones de diagramas de cuerpo libre, y es necesario tener cuidado para representar con vectores iguales y opuestos las fuerzas que dos cuerpos ejercen entre sí.

Problemas

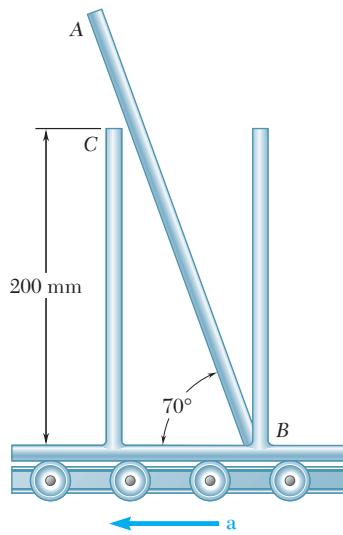


Figura P16.1 y P16.2

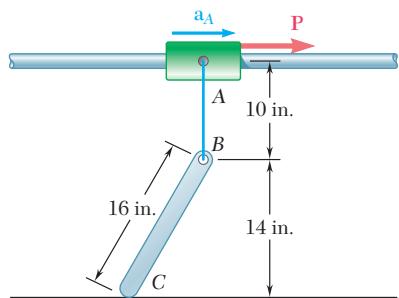


Figura P16.4

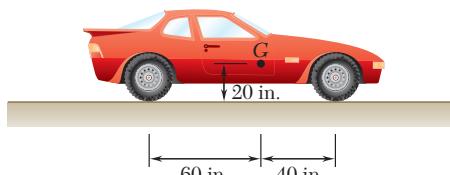


Figura P16.5

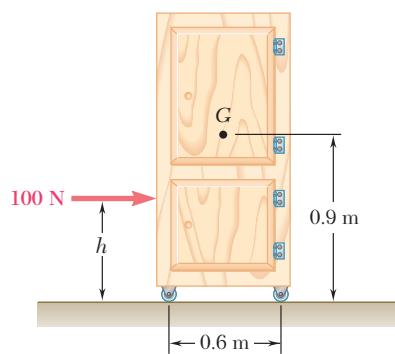


Figura P16.7

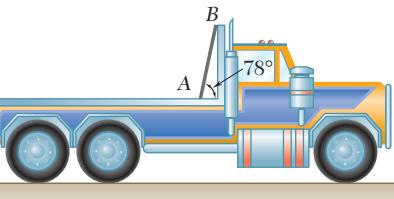


Figura P16.3

16.1 Un sistema transportador está equipado con paneles verticales y una barra AB de 300 mm con masa de 2.5 kg se coloca entre dos paneles, como se muestra en la figura. Si la aceleración del sistema es de 1.5 m/s^2 hacia la izquierda, determine *a)* la fuerza ejercida sobre la barra en C , *b)* la reacción en B .

16.2 Un sistema transportador está equipado con paneles verticales y una barra AB de 300 mm con masa de 2.5 kg se coloca entre dos paneles, como se muestra en la figura. Si la barra debe permanecer en la posición mostrada, determine la aceleración máxima permisible del sistema.

16.3 Un tablero de 6 pies se coloca en un camión con un extremo re cargado contra un bloque asegurado al piso y el otro extremo descansa sobre una partición vertical. Si el tablero debe permanecer en la posición mostrada, determine la máxima aceleración permisible del camión.

16.4 Una varilla uniforme BC que pesa 8 lb está conectada a un collarín A mediante una cuerda AB de 10 pulgadas. Si se desprecian las masas del collarín y la cuerda, determine *a)* la aceleración constante \mathbf{a}_A mínima para la cual la cuerda y la varilla estarán en línea recta, *b)* la tensión correspondiente en la cuerda.

16.5 Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y el camino es 0.80 para el automóvil que se muestra, determine la máxima aceleración posible sobre un camino plano, si se supone *a)* transmisión en las cuatro ruedas, *b)* transmisión en las ruedas traseras, *c)* transmisión en las ruedas delanteras.

16.6 Para la camioneta del problema resuelto 16.1, determine la distancia que se deslizará la camioneta si *a)* fallan los frenos de las ruedas traseras y *b)* fallan los frenos de las ruedas delanteras.

16.7 Un gabinete de 20 kg está montado sobre ruedas que le permiten moverse con libertad ($\mu = 0$) sobre el piso. Si se aplica una fuerza de 100 N en la forma indicada, determine *a)* la aceleración del gabinete y *b)* el intervalo de valores de h para el cual no se volcará el gabinete.

16.8 Retome el problema 16.7, y ahora suponga que las ruedas están bloqueadas y se deslizan sobre el suelo rugoso ($\mu_k = 0.25$).

- 16.9** El camión montacargas que se muestra en la figura pesa 2 250 lb y se usa para levantar una caja de peso $W = 2\,500$ lb. Si se sabe que el camión está en reposo, determine *a)* la aceleración de la caja hacia arriba para la cual las reacciones en las ruedas traseras *B* son cero, *b)* la reacción correspondiente en cada una de las ruedas delanteras *A*.

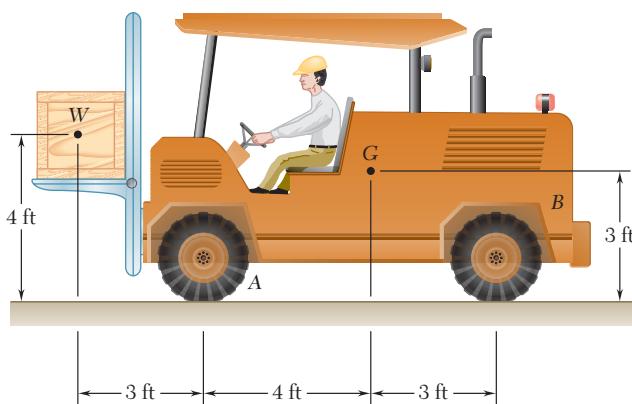


Figura P16.9 y P16.10

- 16.10** El camión montacargas que se muestra en la figura pesa 2 250 lb y se usa para levantar una caja de peso $W = 2\,500$ lb. El camión se mueve hacia la izquierda a una velocidad de 10 pies/s cuando se aplican los frenos en las cuatro ruedas. Si el coeficiente de fricción estática entre la caja y el montacargas es de 0.30, determine la distancia mínima en la que el camión puede llevarse al reposo si la caja no debe deslizarse y si el camión no debe patinar.

- 16.11** La ménsula de soporte mostrada se utiliza para transportar una lata cilíndrica de una elevación a otra. Si $\mu_s = 0.25$ entre la lata y la ménsula, determine *a)* la magnitud de la aceleración ascendente \mathbf{a} para la cual la lata se deslizará sobre la ménsula y *b)* el cociente más pequeño h/d para el cual la lata se volcará antes de deslizarse.

- 16.12** Retome el problema 16.11, y ahora suponga que la aceleración \mathbf{a} de la ménsula se dirige hacia abajo.

- 16.13** Un barril completamente lleno y su contenido tienen un peso combinado de 200 lb. Un cilindro *C* está conectado al barril a una altura $h = 22$ in. como se muestra en la figura. Si $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.35$, determine el peso máximo de *C* para que el barril no se vuelque.

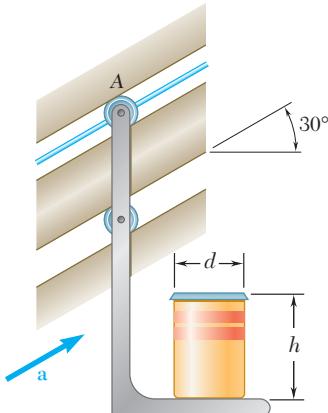


Figura P16.11

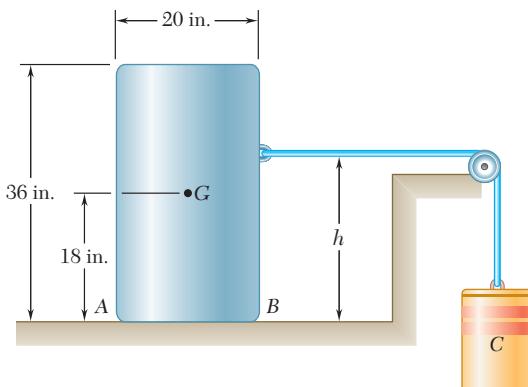


Figura P16.13

16.14 Una placa rectangular uniforme tiene una masa de 5 kg y se mantiene en posición mediante tres cuerdas, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\theta = 30^\circ$, determine, inmediatamente después de cortar la cuerda CF , *a)* la aceleración de la placa, *b)* la tensión en las cuerdas AD y BE .

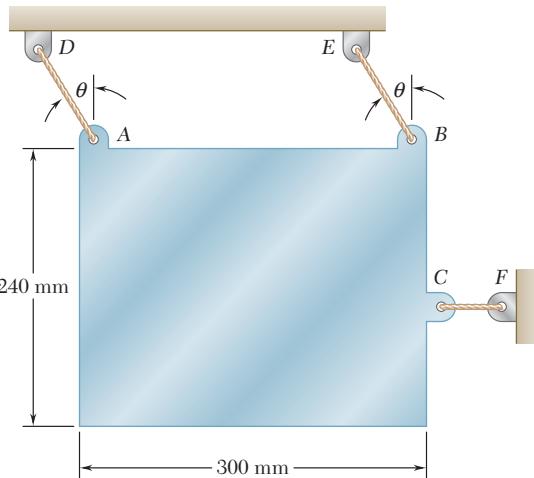


Figura P16.14 y P16.15

16.15 Una placa rectangular uniforme tiene una masa de 5 kg y se mantiene en posición mediante tres cuerdas, como se muestra en la figura. Determine el máximo valor de θ para el cual las cuerdas AD y BE permanecen tensas inmediatamente después de cortar la cuerda CF .

16.16 Una placa circular uniforme de 3 kg de masa se une a dos eslabones AC y BD de la misma longitud. Si la placa se suelta desde el reposo en la posición indicada, determine *a)* la aceleración de la placa, *b)* la tensión en cada eslabón.

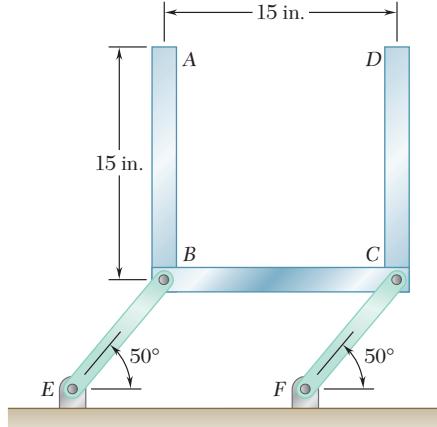


Figura P16.16

16.17 Tres barras, cada una con un peso de 8 lb, están soldadas entre sí y se encuentran conectadas mediante pasadores a los dos eslabones BE y CF . Si se desprecia el peso de los eslabones, determine la fuerza en cada eslabón inmediatamente después de que el sistema se suelta desde el reposo.

16.18 En el instante mostrado, la velocidad angular de los eslabones BE y CF es de 6 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj y disminuye a razón de 12 rad/s². Si la longitud de cada eslabón es de 300 mm y se desprecia el peso de los eslabones, determine *a)* la fuerza P y *b)* la fuerza correspondiente en cada eslabón. El peso de la varilla AD es de 6 kg.

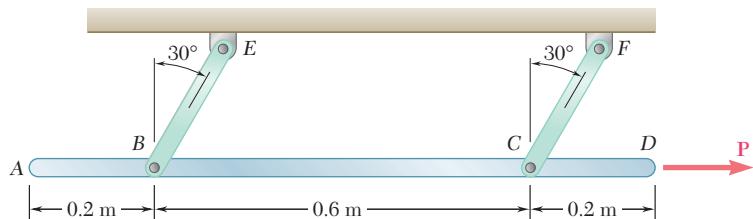


Figura P16.18

16.19 La barra BC de 15 lb conecta un disco centrado en A con la manivela CD . Si se sabe que el disco fue hecho para rotar a una velocidad constante de 180 rpm, determine, para la posición que se muestra, las componentes verticales de las fuerzas que ejercen los pasadores en B y en C sobre la barra BC .

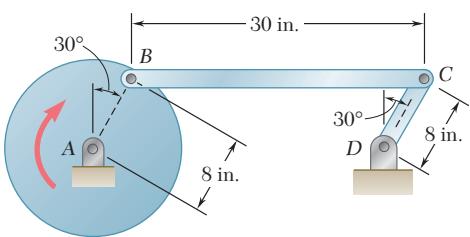


Figura P16.19

- 16.20** El ensamblaje triangular soldado *ABC* se guía mediante dos pasadores que se deslizan libremente en ranuras curvas paralelas con radio de 6 in. El ensamblaje soldado pesa 16 lb y su centro de masa está localizado en el punto *G*. Si en el instante mostrado la velocidad de cada pasador es de 30 in./s hacia abajo y a lo largo de las ranuras, determine *a*) la aceleración del ensamblaje, *b*) las reacciones en *A* y *B*.

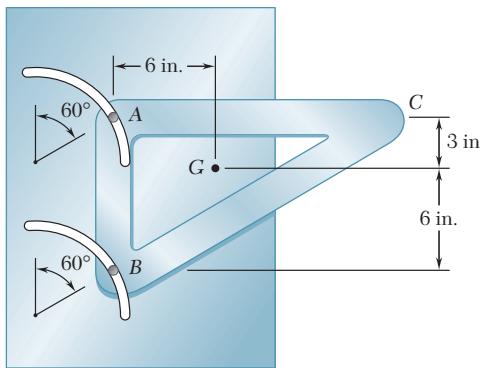


Figura P16.20

***16.21** Trace los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para las barras verticales *AB* del problema 16.17.

***16.22** Trace los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la biela *BC* del problema 16.19.

16.23 Para una placa rígida en translación, demuestre que el sistema de las fuerzas efectivas consiste en vectores $(\Delta m_i)\bar{\mathbf{a}}$ fijos a las diversas partículas de la placa, donde $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración del centro de masa *G* de la placa. Además, que al calcular su suma y la suma de sus momentos alrededor de *G*, las fuerzas efectivas se reducen a un solo vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en *G*.

16.24 Para una placa rígida en rotación centroidal, demuestre que el sistema de las fuerzas efectivas consiste en los vectores $-(\Delta m_i)\omega^2\mathbf{r}'_i$ y $(\Delta m_i)(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'_i)$ asociados a las diversas partículas P_i de la placa, donde $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular de la placa, y \mathbf{r}'_i denota la posición de la partícula P_i relativa al centro de masa *G* de la placa. Demuestre también, al calcular su suma y la suma de sus momentos alrededor de *G*, que las fuerzas efectivas se reducen a un par $I\boldsymbol{\alpha}$.

16.25 Un volante de 6 000 lb tarda 10 minutos en detenerse a partir de una velocidad angular de 300 rpm. Si el radio de giro del volante es igual a 36 in., determine la magnitud promedio del par debido a la fricción cinética en los cojinetes.

16.26 El rotor de un motor eléctrico tiene una velocidad angular de 3 600 rpm cuando se interrumpen la carga y la energía eléctrica. El rotor de 50 kg, que tiene un radio de giro centroidal de 180 mm, se detiene posteriormente. Si la fricción cinética produce un par de 3.5 N · m de magnitud que se ejerce sobre el rotor, determine el número de revoluciones que el rotor realiza antes de detenerse.

16.27 El disco de 180 mm de radio está en reposo cuando se pone en contacto con una banda que se mueve a velocidad constante. Si se desprecia el peso del eslabón *AB* y se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda es de 0.40, determine la aceleración angular del disco mientras ocurre deslizamiento.

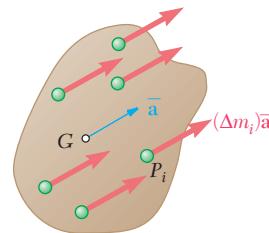


Figura P16.23

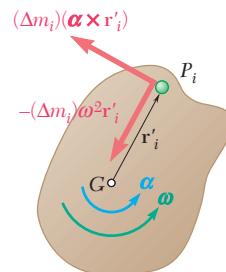


Figura P16.24

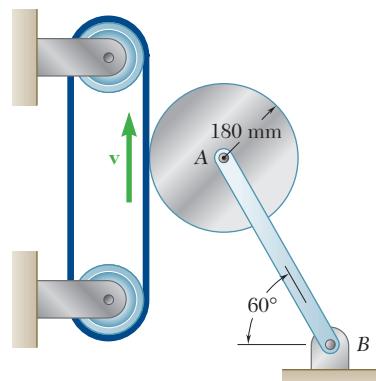


Figura P16.27

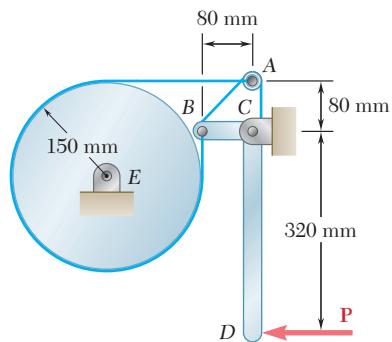


Figura P16.29

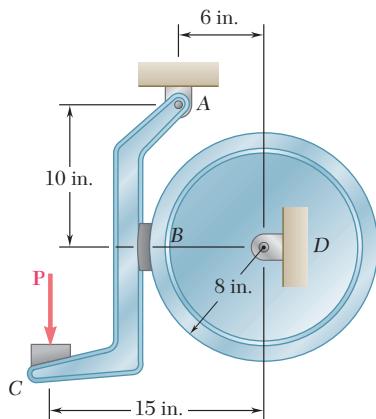


Figura P16.30

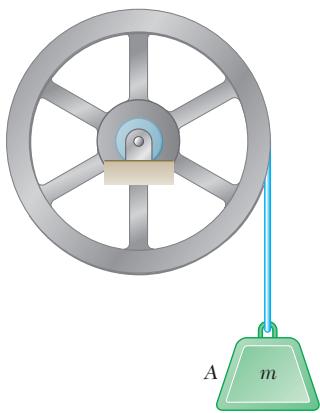


Figura P16.32 y P16.33

16.28 Retome el problema 16.27, y ahora suponga que la dirección del movimiento se invierte.

16.29 El tambor de freno, de 150 mm de radio, está unido a un volante más grande que no se muestra. El momento de inercia de la masa total del tambor y del volante es de $75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Se usa un freno de banda para controlar el movimiento del sistema y el coeficiente de fricción cinética entre la banda y el tambor es de 0.25. Si la fuerza **P** de 100 N se aplica cuando la velocidad angular inicial del sistema es de 240 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine el tiempo requerido para que el sistema se detenga. Demuestre que se obtiene el mismo resultado si la velocidad angular inicial del sistema es de 240 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

16.30 El tambor de freno, de 8 in. de radio, está unido a un volante más grande que no se muestra. El momento de inercia de la masa total del tambor y del volante es de $14 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$ y el coeficiente de fricción cinética entre el tambor y la zapata del freno es de 0.35. Si la velocidad angular del volante es de 360 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se aplica una fuerza **P** de 75 lb de magnitud al pedal **C**, determine el numero de revoluciones realizadas por el volante antes de detenerse.

16.31 Retome el problema 16.30, y ahora suponga que la velocidad angular inicial del volante es de 360 rpm en el sentido de las manecillas del reloj.

16.32 El volante que se muestra tiene un radio de 500 mm, una masa de 120 kg y un radio de giro de 375 mm. Un bloque **A** de 15 kg se une a un alambre que está enrollado alrededor del volante, y el sistema se suelta desde el reposo. Si se desprecia el efecto de la fricción, determine *a)* la aceleración del bloque **A** y *b)* la velocidad del bloque **A** después de que éste se ha movido 1.5 m.

16.33 Para determinar el momento de inercia de la masa de un volante de 600 mm de radio, se une un bloque de 12 kg a un alambre que está enrollado alrededor del volante. Se suelta el bloque y se observa que desciende 3 m en 4.6 s. Para eliminar el cálculo de la fricción de rodamiento se usa un segundo bloque de 24 kg y se observa que desciende 3 m en 3.1 s. Si se supone que el momento del par debido a la fricción permanece constante, determine el momento de inercia de la masa del volante.

16.34 Cada una de las poleas dobles que se muestran tiene un momento de inercia de masa de $15 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$ y está inicialmente en reposo. El radio exterior es de 18 in. y el interior de 9 in. Determine *a)* la aceleración angular de cada polea y *b)* la velocidad angular de cada polea después de que el punto **A** en la cuerda se ha movido 10 ft.

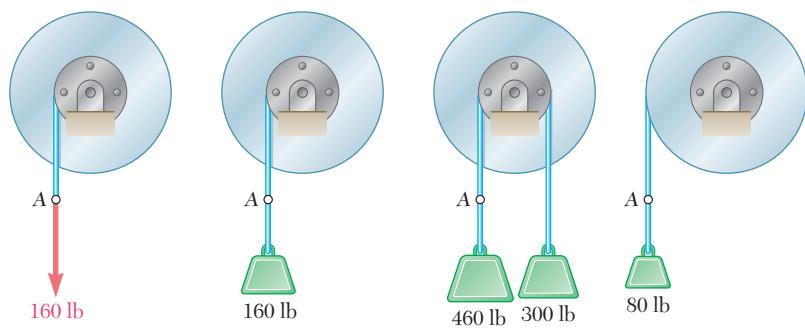


Figura P16.34

- 16.35** Cada uno de los engranes A y B pesa 20 lb y tiene un radio de giro de 7.5 in.; el engrane C pesa 5 lb y tiene un radio de giro de 3 in. Si un par \mathbf{M} de magnitud constante 50 lb · in. se aplica al engrane C, determine *a)* la aceleración angular del engrane A, *b)* la fuerza tangencial que ejerce el engrane C sobre el engrane A.

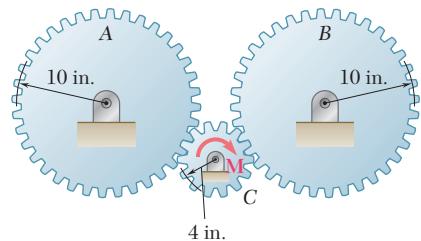


Figura P16.35

- 16.36** Retome el problema 16.35, y ahora suponga que el par \mathbf{M} se aplica al disco A.

- 16.37 y 16.38** Dos discos uniformes y dos cilindros están ensamblados como se indica. El disco A pesa 20 lb y el disco B pesa 12 lb. Si el sistema se suelta desde el reposo, determine la aceleración *a)* del cilindro C, *b)* del cilindro D.

16.37 Los discos A y B están empernados entre sí y los cilindros están unidos a cuerdas separadas que están enrolladas sobre los discos.

16.38 Los cilindros están unidos a una sola cuerda que pasa sobre los discos. Suponga que no ocurre deslizamiento entre la cuerda y los discos.

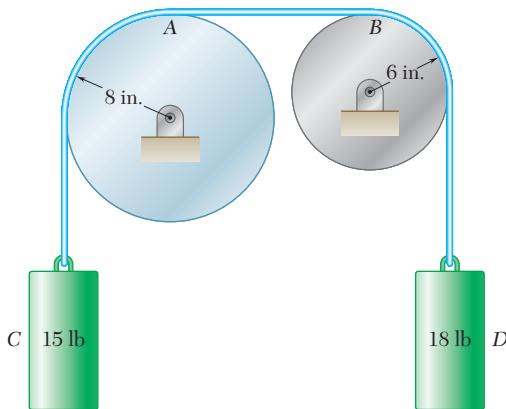


Figura P16.38

- 16.39** El disco A tiene una masa de 6 kg y una velocidad angular inicial de 360 rpm en el sentido de las manecillas del reloj; el disco B tiene una masa de 3 kg que inicialmente está en reposo. Los discos se ponen en contacto aplicando una fuerza horizontal de 20 N de magnitud al eje del disco A. Si $\mu_k = 0.15$ entre los discos y se ignora la fricción de rodamiento, determine *a)* la aceleración angular de cada disco y *b)* la velocidad final angular de cada disco.

- 16.40** Retome el problema 16.39, y ahora suponga que inicialmente el disco A está en reposo y que el disco B tiene una velocidad angular de 360 rpm en el sentido de las manecillas del reloj.

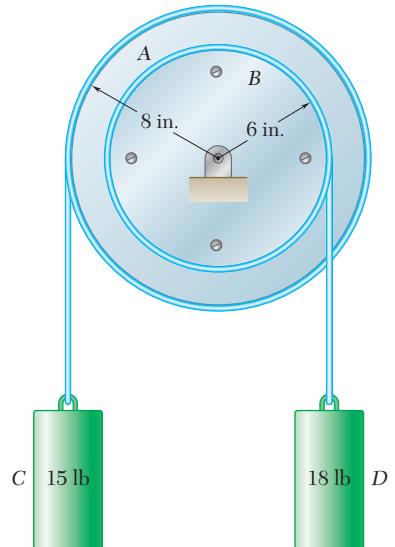


Figura P16.39

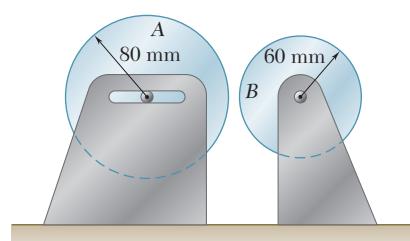


Figura P16.40

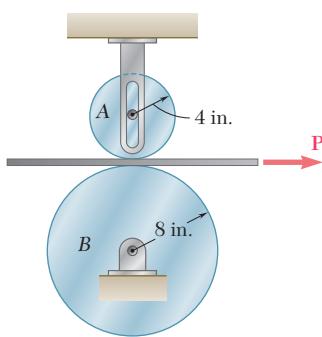


Figura P16.41

16.41 Una banda de masa despreciable pasa entre los cilindros *A* y *B* y se jala hacia la derecha con una fuerza **P**. Los cilindros *A* y *B* pesan, respectivamente, 5 y 20 lb. El eje del cilindro *A* puede deslizarse libremente en una ranura vertical y los coeficientes de fricción entre la banda y cada uno de los cilindros son $\mu_s = 0.50$ y $\mu_k = 0.40$. Para $P = 3.6$ lb, determine *a)* si ocurre deslizamiento entre la banda y algún cilindro, *b)* la aceleración angular de cada cilindro.

16.42 Retome el problema 16.41, ahora con $P = 2.00$ lb.

16.43 El disco *A* de 6 lb tiene un radio $r_A = 3$ in. y una velocidad angular inicial $\omega_0 = 375$ rpm en el sentido de las manecillas del reloj. El disco *B* de 30 lb tiene un radio $r_B = 5$ in. y está en reposo. Una fuerza **P** de 2.5 lb de magnitud se aplica después para poner en contacto los discos. Si $\mu_k = 0.25$ entre los discos y se desprecia la fricción de rodamiento, determine *a)* la aceleración angular de cada disco y *b)* la velocidad angular final de cada disco.

16.44 Retome el problema 16.43, y ahora suponga que el disco *A* está inicialmente en reposo y que el disco *B* tiene una velocidad angular de 375 rpm en el sentido de las manecillas del reloj.

16.45 El disco *B* tiene una velocidad angular ω_0 cuando se pone en contacto con el disco *A*, que está en reposo. Demuestre que *a)* las velocidades angulares finales de los discos son independientes de los coeficientes de fricción μ_k entre los discos siempre que $\mu_k \neq 0$, *b)* que la velocidad angular final del disco *B* depende sólo de ω_0 y del cociente de las masas m_A y m_B de los dos discos.

16.46 Muestre que el sistema de las fuerzas efectivas de una placa rígida en movimiento plano se reduce a un solo vector, y exprese la distancia desde el centro de masa *G* de la placa a la línea de acción de este vector en términos del radio de giro centroidal \bar{k} de la placa, la magnitud \bar{a} de la aceleración *G*, y la aceleración angular α .

16.47 Para una placa rígida en movimiento plano, demuestre que el sistema de las fuerzas efectivas que consiste en los vectores $(\Delta m_i)\bar{a}$, $-(\Delta m_i)\omega^2\mathbf{r}'_i$, y $(\Delta m_i)(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'_i)$ asociados a las diferentes partículas P_i de la placa, donde \bar{a} es la aceleración del centro de masa *G* de la placa, $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular de la placa, $\boldsymbol{\alpha}$ es su aceleración angular y \mathbf{r}'_i denota el vector de posición de la partícula P_i , relativa a *G*. Muestre además, por medio de su suma y la suma de sus momentos alrededor de *G*, que las fuerzas efectivas se reducen a un vector $m\bar{a}$ fijo en *G* y a un par $I\boldsymbol{\alpha}$.

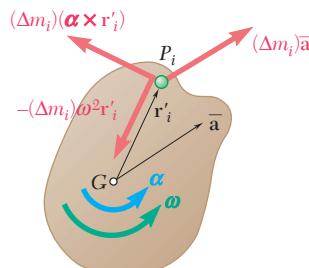


Figura P16.47

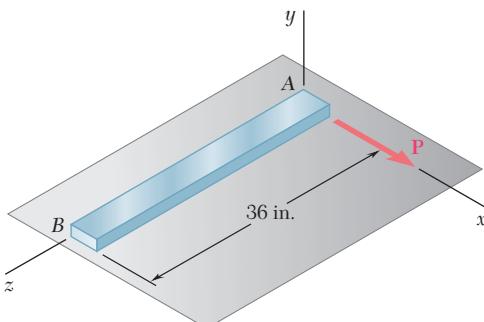


Figura P16.48

16.48 Una barra ligera y uniforme *AB* descansa sobre una superficie horizontal sin fricción y una fuerza **P** de 0.25 lb de magnitud se aplica en *A* en una dirección perpendicular a la barra. Si ésta tiene una masa de 1.75 lb, determine la aceleración de *a)* el punto *A* y *b)* el punto *B*.

16.49 a) En el problema 16.48, determine el punto de la barra AB en el cual debe aplicarse la fuerza \mathbf{P} si la aceleración del punto B debe ser igual a cero. b) Si $P = 0.25$ lb, determine la aceleración correspondiente del punto A.

16.50 y 16.51 Una fuerza \mathbf{P} de 3 N de magnitud se aplica a la cinta enrollada alrededor del cuerpo indicado. Si el cuerpo descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, determine la aceleración de a) el punto A y b) el punto B.

16.50 Un aro delgado con 2.4 kg de masa.

16.51 Un disco uniforme con 2.4 kg de masa.

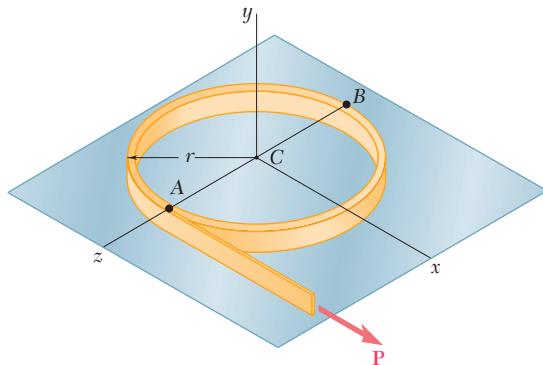


Figura P16.50

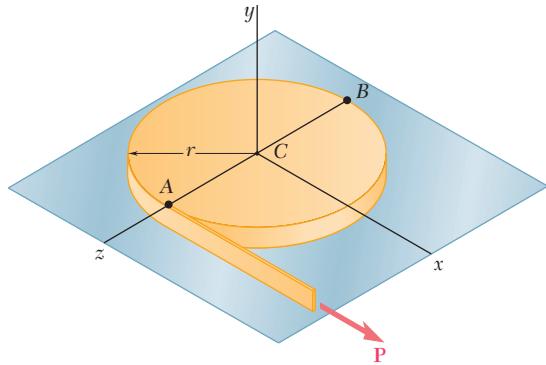


Figura P16.51 y P16.52

16.52 Una fuerza \mathbf{P} se aplica a una cinta enrollada alrededor de un disco uniforme que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. Demuestre que para cada rotación de 360° del disco, el centro del mismo se moverá a una distancia πr .

16.53 Un satélite de 120 kg tiene un radio de giro de 600 mm alrededor del eje y y es simétrico respecto al plano zx . Su orientación se cambia al lanzar cuatro pequeños cohetes A, B, C y D, cada uno de los cuales produce una fuerza de empuje \mathbf{T} de 16.20 N dirigida como se muestra en la figura. Determine la aceleración angular del satélite y la aceleración de su centro de masa G cuando a) se lanzan los cuatro cohetes, b) se lanzan todos los cohetes excepto el D.

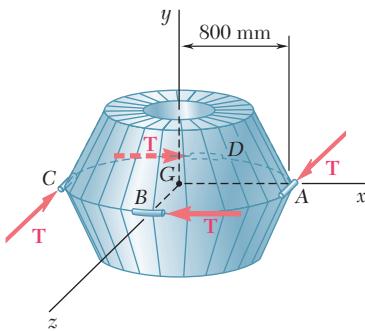


Figura P16.53

16.54 Una placa rectangular uniforme de 5 kg de masa se suspende de cuatro alambres verticales, y se aplica una fuerza \mathbf{P} de 6 N de magnitud en la esquina C, como se muestra en la figura. Inmediatamente después de aplicar \mathbf{P} , determine la aceleración de a) el punto medio del borde BC, b) la esquina B.

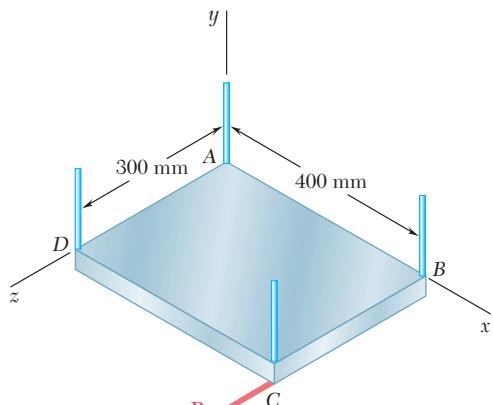


Figura P16.54

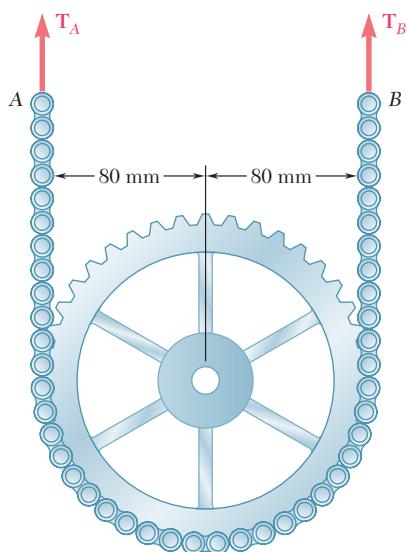


Figura P16.55

16.55 Una rueda dentada de 3 kg tiene un radio de giro centroidal de 70 mm y se encuentra suspendida de una cadena, como se muestra en la figura. Determine la aceleración de los puntos A y B de la cadena, si se sabe que $T_A = 14 \text{ N}$ y $T_B = 18 \text{ N}$.

16.56 Retome el problema 16.55, y ahora suponga que $T_A = 14 \text{ N}$ y que $T_B = 12 \text{ N}$.

16.57 y 16.58 Una viga de 15 ft y 500 lb de peso se baja por medio de dos cables que se desenrollan de grúas elevadas. Cuando la viga se acerca al suelo, los operadores de la grúa aplican los frenos para recargar el movimiento de desenrollado. Si la desaceleración del cable A es de 20 ft/s^2 y la del cable B es de 2 ft/s^2 , determine la tensión en cada cable.

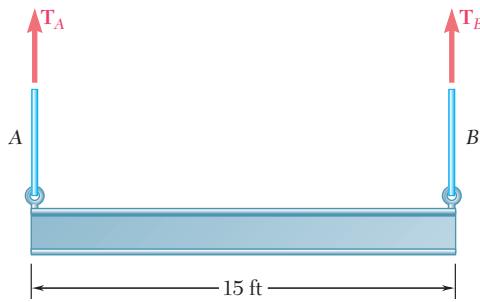


Figura P16.57

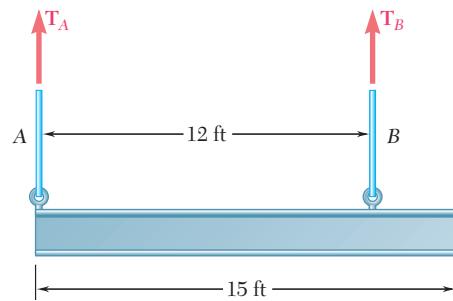


Figura P16.58

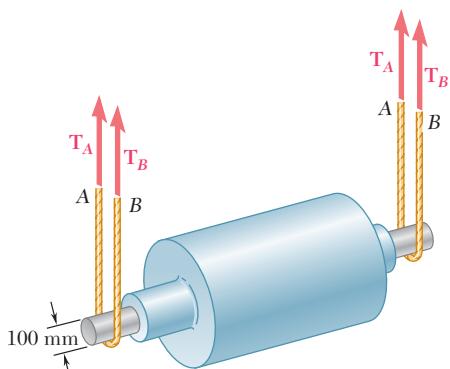


Figura P16.59 y P16.60

16.59 El rollo de acero que se muestra en la figura tiene una masa de 1 200 kg, un radio centroidal de giro de 150 mm y se eleva por medio de dos cables que pasan alrededor de su eje. Si se sabe que para cada cable $T_A = 3\,100 \text{ N}$ y $T_B = 3\,300 \text{ N}$, determine a) la aceleración angular del rollo y b) la aceleración de su centro de masa.

16.60 El rollo de acero que se muestra en la figura tiene una masa de 1 200 kg, un radio centroidal de giro de 150 mm y se eleva por medio de dos cables que pasan alrededor de su eje. Si se sabe que en el instante que se muestra la aceleración del rollo es de 150 mm/s^2 hacia abajo y que para cada cable $T_A = 3\,000 \text{ N}$, determine a) el valor correspondiente de la tensión T_B y b) la aceleración angular del rollo.

16.61 Al jalar lanzar la cuerda de un yo-yo, una persona hace que éste gire, mientras permanece a la misma altura sobre el piso. Si se denota la masa del yo-yo con m , el radio del tambor interior sobre el cual se enrolla la cuerda con r y el radio centroidal de giro del yo-yo con \bar{k} , determine la aceleración angular del yo-yo.

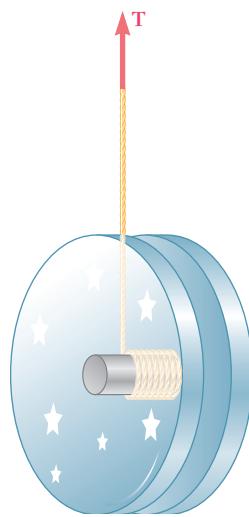


Figura P16.61 y P16.62

16.62 El yo-yo de 3 oz que se muestra en la figura tiene un radio centroidal de giro de 1.25 in. El radio del tambor interior sobre el cual se enrolla la cuerda es de 0.25 in. Si en el instante mostrado la aceleración del centro del yo-yo es de 3 ft/s^2 hacia arriba, determine *a)* la tensión T requerida en la cuerda, *b)* la correspondiente aceleración angular del yo-yo.

16.63 a 16.65 Una viga AB de masa m y sección transversal uniforme se suspende de dos resortes en la forma indicada. Si el resorte 2 se rompe, determine en ese instante *a)* la aceleración angular de la viga, *b)* la aceleración del punto A y *c)* la aceleración del punto B.

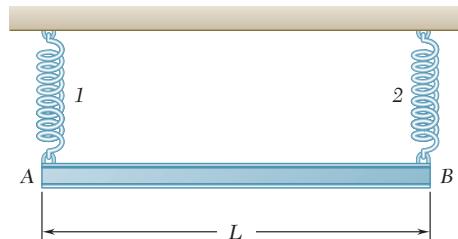


Figura P16.63

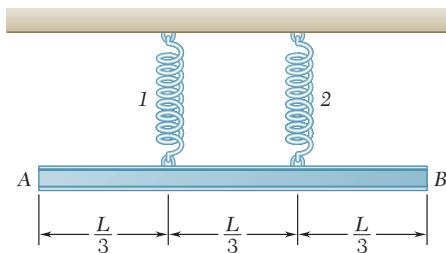


Figura P16.64

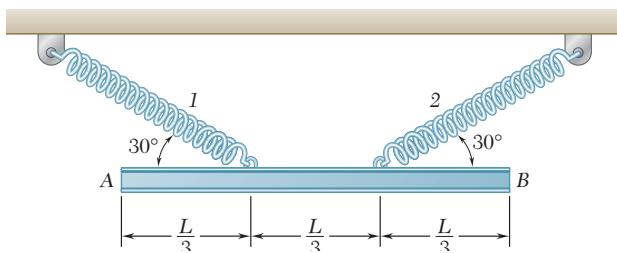


Figura P16.65

16.66 a 16.68 Una placa delgada con la forma indicada y masa m se suspende de dos resortes del modo que se muestra. Si el resorte 2 se rompe, determine la aceleración en ese instante *a)* del punto A y *b)* del punto B.

16.66 Una placa circular de diámetro b .

16.67 Un aro delgado de diámetro b .

16.68 Una placa cuadrada de lado b .

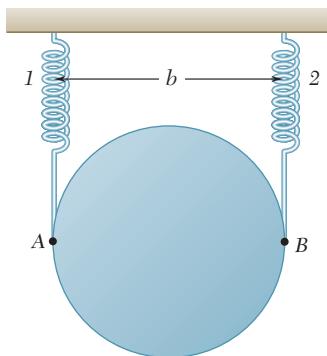


Figura P16.66

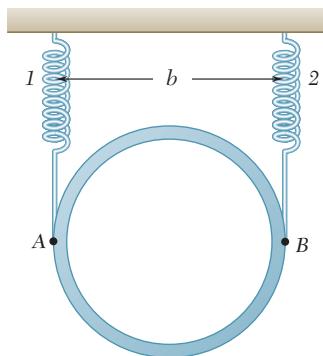


Figura P16.67

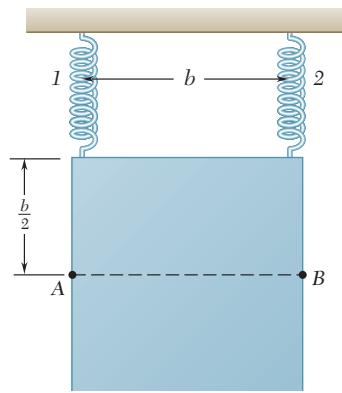


Figura P16.68

16.69 Un jugador de boliche lanza hacia los pinos una bola de 8 in. de diámetro y 12 lb de masa con una velocidad hacia adelante \bar{v}_0 de 15 ft/s y un contragiro ω_0 de 9 rad/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre la bola y el carril es de 0.10, determine *a)* el tiempo t_1 en el cual la bola empezará a rodar sin deslizarse, *b)* la velocidad de la bola en el tiempo t_1 y *c)* la distancia que la bola ha recorrido en el tiempo t_1 .



Figura P16.69

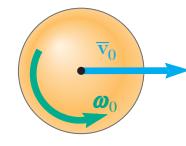


Figura P16.71

16.70 Retome el problema 16.69, y ahora suponga que el jugador de boliche lanza la bola con la misma velocidad hacia adelante pero con un contragiro de 18 rad/s.

16.71 Se lanza una esfera de radio r y masa m a lo largo de una superficie horizontal rugosa con las velocidades iniciales indicadas. Si la velocidad final de la esfera debe ser cero, exprese, en términos de v_0 , r y μ_k , *a)* la magnitud requerida de ω_0 , *b)* el tiempo t_1 requerido para que la esfera se detenga y *c)* la distancia que se moverá la esfera antes de quedar en reposo.

16.72 Retome el problema 16.71, y ahora suponga que la esfera se reemplaza por un aro delgado de radio r y masa m .

16.73 Una esfera uniforme de radio r y masa m se coloca sin velocidad inicial sobre una banda que se mueve hacia la derecha con velocidad constante \bar{v}_1 . Denotando por μ_k el coeficiente de fricción cinética entre la esfera y la banda, determine *a)* el tiempo t_1 en el cual la esfera empezará a rodar sin deslizar, *b)* las velocidades lineal y angular de la esfera en el tiempo t_1 .

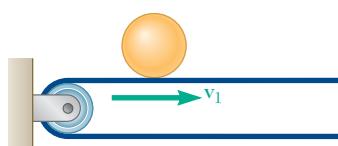


Figura P16.73

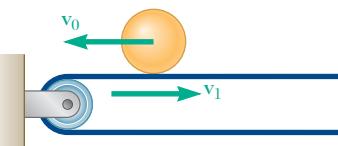


Figura P16.74

16.74 Una esfera de radio r y masa m tiene una velocidad lineal \bar{v}_0 dirigida hacia la izquierda y ninguna velocidad angular cuando se coloca sobre una banda que se mueve hacia la derecha con una velocidad constante \bar{v}_1 . Si después del primer deslizamiento sobre la banda la esfera no tendrá velocidad lineal relativa al suelo cuando empiece a rodar sobre la banda sin deslizar, establezca en términos de v_1 y del coeficiente de fricción cinética μ_k entre la esfera y la banda *a)* el valor requerido de v_0 , *b)* el tiempo t_1 al cual la esfera empezará a rodar sobre la banda y *c)* la distancia que la esfera habrá recorrido con relación al suelo en el tiempo t_1 .

La mayoría de las aplicaciones de ingeniería tienen que ver con cuerpos rígidos que se mueven bajo restricciones determinadas. Por ejemplo, las manivelas deben girar alrededor de un eje fijo, las ruedas deben rodar sin patinar, y las bielas describir ciertos movimientos prescritos. En tales casos, existen relaciones definidas entre las componentes de la aceleración \bar{a} del centro de masa G del cuerpo considerado y su aceleración angular α ; se dice que el movimiento correspondiente es un *movimiento restringido*.

La solución de un problema que implica un movimiento plano restringido requiere un *análisis cinemático* preliminar del problema. Consideré, por ejemplo, una varilla ligera AB de longitud l y masa m cuyos extremos están conectados a bloques de masa despreciable que se deslizan a lo largo de correderas horizontales y verticales sin fricción. Se tira de la varilla mediante una fuerza P aplicada en A (figura 16.11). Se sabe de la sección 15.8 que la aceleración \bar{a} del centro de masa G de la varilla puede determinarse en cualquier instante dado a partir de la posición de la varilla, su velocidad angular y su aceleración angular en ese instante. Suponga, por ejemplo, que se conocen los valores de θ , ω y α en un instante dado, y que se desea determinar el valor correspondiente de la fuerza P , así como las reacciones en A y B. Primero se debe *determinar las componentes \bar{a}_x y \bar{a}_y de la aceleración del centro de masa G mediante el método de la sección 15.8*. Despues se aplica el principio de d'Alembert (figura 16.12), utilizando las expresiones que se obtuvieron para \bar{a}_x y \bar{a}_y . Las fuerzas desconocidas P , N_A y N_B se determinan después al escribir y resolver las ecuaciones apropiadas.

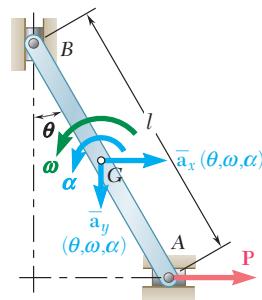


Figura 16.11

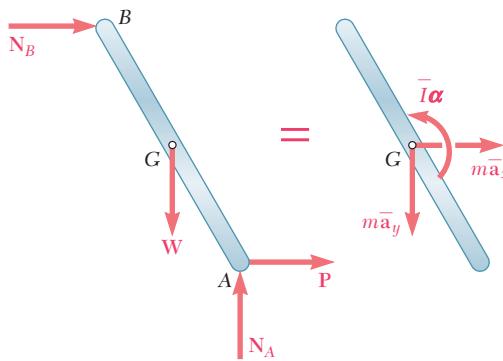


Figura 16.12

Supóngase ahora que se conoce la fuerza aplicada P , el ángulo θ y la velocidad angular ω de la varilla en un instante dado, y que se desea encontrar la aceleración angular α de la varilla y las componentes \bar{a}_x y \bar{a}_y de la aceleración de su centro de masa en ese instante, así como las reacciones en A y B. El estudio cinemático preliminar del problema tendrá como objetivo *expresar las componentes \bar{a}_x y \bar{a}_y de la aceleración de G en términos de la aceleración angular α de la varilla*. Esto se hará expresando primero la aceleración de un punto de referencia adecuado tal como A en términos de la aceleración angular α . Las componentes \bar{a}_x y \bar{a}_y de la aceleración de G pueden determinarse entonces en términos de α , y las expresiones obtenidas incorporarse en la figura 16.12. Se obtienen tres ecuaciones en términos de α , N_A y N_B y se resuelven para tres incógnitas (véase el problema resuelto 16.10). Advierta que también es posible utilizar el método de equilibrio diná-

1056 Movimiento plano de cuerpos rígidos:
fuerzas y aceleraciones

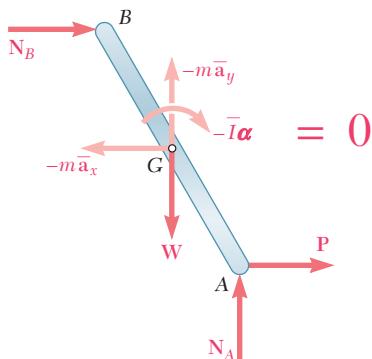


Figura 16.13

mico para obtener la solución de los dos tipos de problemas considerados (figura 16.13).

Cuando un mecanismo consta de *varias partes móviles*, el método descrito se puede utilizar con cada parte del mecanismo. El procedimiento requerido para determinar las diferentes incógnitas es en ese caso similar al procedimiento que se sigue en la situación del equilibrio de un sistema de cuerpos rígidos conectados (sección 6.11).

Antes se analizaron dos casos particulares de movimiento plano restringido: la traslación de un cuerpo rígido, en la cual la aceleración angular del cuerpo se restringe a cero, y la rotación centroidal, en la que la aceleración \bar{a} del centro de masa del cuerpo se restringe a cero. Los otros casos particulares de movimiento plano restringido son de interés especial: la *rotación no centroidal* de un cuerpo rígido y el *movimiento de rodamiento* de un disco o rueda. Es posible analizar estos dos casos mediante uno de los métodos generales descritos antes. Sin embargo, en vista del rango de sus aplicaciones, éstos merecen unos cuantos comentarios especiales.

Rotación no centroidal. El movimiento de un cuerpo rígido que está restringido a girar alrededor de un eje fijo que no pasa por su centro de masa se denomina *rotación no centroidal*. El centro de masa G del cuerpo se mueve a lo largo de un círculo de radio \bar{r} centrado en el punto O , donde el eje de rotación interseca al plano de referencia (figura 16.14). Al denotar, respectivamente, por ω y α la velocidad angular y la aceleración angular de la línea OG , se obtienen las siguientes expresiones para las componentes tangencial y normal de la aceleración de G :

$$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha \quad \bar{a}_n = \bar{r}\omega^2 \quad (16.7)$$

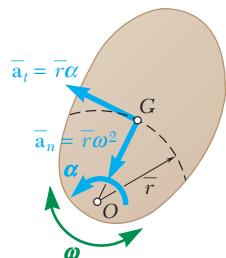


Figura 16.14

Puesto que la línea OG pertenece al cuerpo, su velocidad angular ω y su aceleración angular α también representan la velocidad angular y la aceleración angular del cuerpo en su movimiento relativo a G . Las ecuaciones (16.7) definen la relación cinemática que existe entre el movimiento del centro de masa G y el movimiento del cuerpo en torno a G . Éstas deben usarse para eliminar \bar{a}_t y \bar{a}_n de las ecuaciones que se obtienen al aplicar el principio de d'Alembert (figura 16.15) o el método del equilibrio dinámico (figura 16.16).

Se obtiene una relación interesante al igualar los momentos alrededor del punto fijo O de las fuerzas y los vectores mostrados, respectivamente, en las partes *a*) y *b*) de la figura 16.15. Se escribe

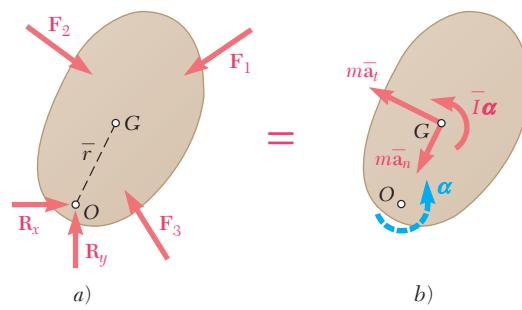


Figura 16.15

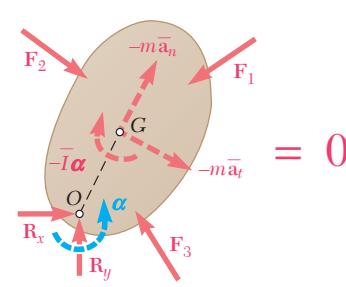


Figura 16.16

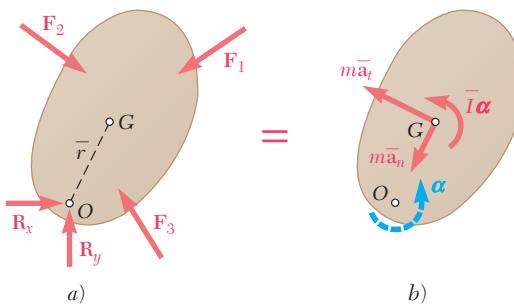


Figura P16.15 (repetida)

$$+\gamma \sum M_O = \bar{I}\alpha + (m\bar{r}\alpha)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\alpha$$

Sin embargo, de acuerdo con el teorema de ejes paralelos, se tiene $\bar{I} + m\bar{r}^2 = I_O$, donde I_O denota el momento de inercia del cuerpo rígido alrededor del eje fijo. Por lo tanto, se escribe

$$\sum M_O = I_O\alpha \quad (16.8)$$

Aunque la fórmula (16.8) expresa una relación importante entre la suma de los momentos de las fuerzas externas alrededor del punto fijo O y el producto $I_O\alpha$, es necesario comprender con toda claridad que esta fórmula no significa que el sistema de fuerzas externas es equivalente a un par de momento $I_O\alpha$. El sistema de las fuerzas efectivas y, por lo tanto, el sistema de las fuerzas externas, se reduce a un par sólo cuando O coincide con G —esto es, sólo cuando la rotación es centroidal (sección 16.4)—. En el caso más general de rotación no centroidal, el sistema de fuerzas externas no se reduce a un par.

Un caso particular de rotación no centroidal es de interés especial —caso de rotación uniforme, en el cual la velocidad angular ω es constante—. Puesto que α es cero, el par de inercia en la figura 16.16 se anula y el vector de inercia se reduce a su componente normal. Esta componente (denominada también fuerza centrífuga) representa la tendencia de cuerpo rígido a apartarse del eje de rotación.

Movimiento de rodamiento. Otro caso importante de movimiento plano es el movimiento de un disco o rueda que gira sobre una superficie plana. Si el disco está restringido a rodar sin deslizarse, la aceleración \bar{a} de su centro de masa G y su aceleración angular α no son independientes. Suponiendo que el disco esté equilibrado, de manera que su centro de masa y su centro geométrico coincidan, se escribe primero que la distancia \bar{x} recorrida por G durante una rotación θ del disco es $\bar{x} = r\theta$, donde r es el radio del disco. Al diferenciar dos veces esta relación se escribe

$$\bar{a} = r\alpha \quad (16.9)$$

Si se recuerda que el sistema de las fuerzas efectivas en movimiento plano se reduce a un vector $m\bar{a}$ y un par $\bar{I}\alpha$, se encuentra que en el caso particular de movimiento de rodamiento de un disco equilibrado, las fuerzas efectivas se reducen a un vector de magnitud $mr\alpha$ fijo en G y a un par de magnitud $\bar{I}\alpha$. Así, se puede expresar que las fuerzas externas son equivalentes al vector y al par que se muestran en la figura 16.17.

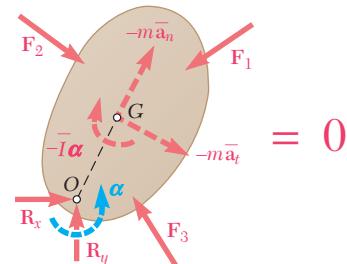


Figura P16.16 (repetida)

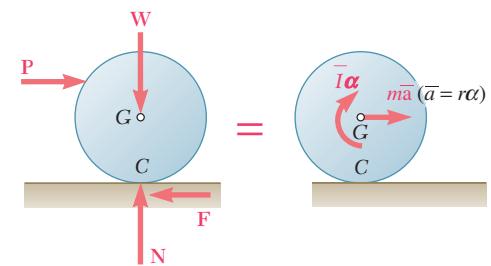


Figura 16.17

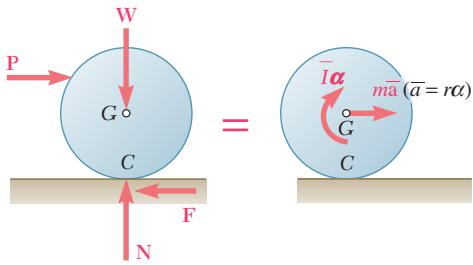
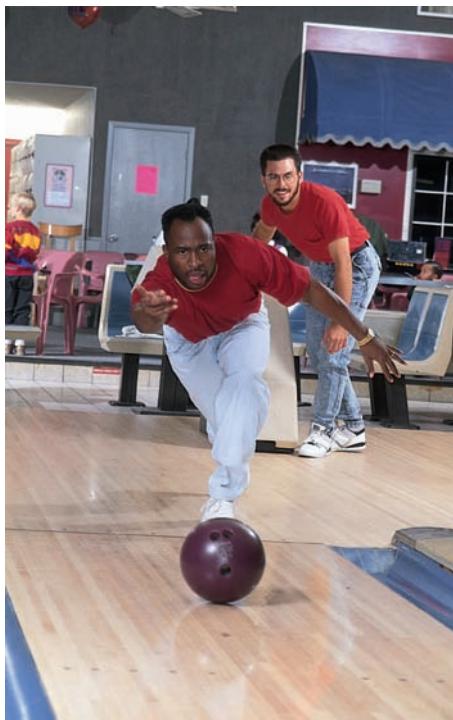


Figura 16.17 (repetida)



Fotografía 16.4 Cuando una bola cae en el callejón de boleo, primero gira y desliza, y luego rueda sin patinar.

Cuando un disco *rueda sin deslizarse*, no hay movimiento relativo entre el punto del disco en contacto con el suelo y el suelo mismo. En consecuencia, respecto a lo que concierne al cálculo de la fuerza de fricción \mathbf{F} , un disco que rueda puede compararse con un bloque en reposo sobre una superficie. La magnitud F de la fuerza de fricción puede de tener cualquier valor, siempre y cuando este valor no exceda el valor máximo $F_m = \mu_s N$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estática y N es la magnitud de la fuerza normal. En el caso de un disco que rueda, la magnitud F de la fuerza de fricción debe, por lo tanto, determinarse de manera independiente de N al resolver la ecuación que se obtuvo de la figura 16.17.

Cuando el *deslizamiento es inminente*, la fuerza de fricción alcanza su valor máximo $F_m = \mu_s N$ y puede obtenerse de N .

Cuando el disco *gira y se desliza* al mismo tiempo, existe un movimiento relativo entre el punto del disco que está en contacto con el suelo y el suelo mismo, y la fuerza de fricción tiene la magnitud $F_k = \mu_k N$, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética. En este caso, sin embargo, el movimiento del centro de masa G del disco y la rotación del disco en torno a G son independientes, y \bar{a} no es igual a $r\alpha$.

Estos tres casos diferentes pueden resumirse como sigue:

Rodamiento, sin deslizamiento: $F \leq \mu_s N \quad \bar{a} = r\alpha$

Rodamiento, deslizamiento inminente: $F = \mu_s N \quad \bar{a} = r\alpha$

Rodamiento y deslizamiento: $F = \mu_k N \quad \bar{a}$ y α independiente

Cuando no se sabe si el disco se desliza o no, primero debe suponerse que rueda sin deslizarse. Si se encuentra que F es más pequeña o igual que $\mu_s N$ se demuestra que la suposición es correcta. Si se determina que F es mayor que $\mu_s N$ la suposición es incorrecta y el problema debe iniciarse de nuevo, suponiendo rodamiento y deslizamiento.

Cuando un disco está *desequilibrado*, esto es, cuando su centro de masa G no coincide con su centro geométrico O , la relación (16.9) no se cumple entre \bar{a} y α . Sin embargo, se cumple una relación similar entre la magnitud a_O de la aceleración del centro geométrico y la aceleración angular α de un disco desequilibrado que rueda sin deslizarse. Se tiene

$$a_O = r\alpha \quad (16.10)$$

Para determinar \bar{a} en términos de la aceleración angular α y de la velocidad angular ω del disco, es posible utilizar la fórmula de la aceleración relativa

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} &= \bar{\mathbf{a}}_G = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{G/O} \\ &= \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{G/O})_t + (\mathbf{a}_{G/O})_n \end{aligned} \quad (16.11)$$

donde las tres aceleraciones componentes obtenidas tienen las direcciones indicadas en la figura 16.18 y las magnitudes $a_O = r\alpha$, $(a_{G/O})_t = (OG)\alpha$ y $(a_{G/O})_n = (OG)\omega^2$.

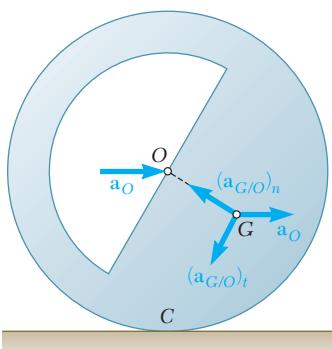
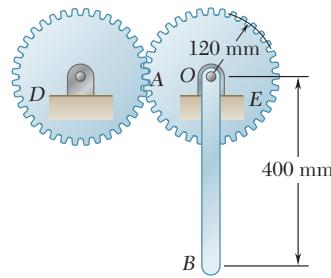


Figura 16.18

PROBLEMA RESUELTO 16.6

La parte AOB de un mecanismo se compone de una barra de acero OB de 400 mm soldada a un engrane E de 120 mm de radio, que puede girar alrededor de una flecha horizontal O . La impulsa un engrane D y, en el instante que se muestra, tiene una velocidad angular en el sentido de las manecillas del reloj de 8 rad/s y una aceleración angular en el sentido contrario de las manecillas del reloj de 40 rad/s². Si la barra OB tiene una masa de 3 kg y el engrane E una masa de 4 kg y un radio de giro de 85 mm, determine a) la fuerza tangencial ejercida por el engrane D sobre el engrane E , b) las componentes de la reacción en la flecha O .



SOLUCIÓN

En la determinación de las fuerzas efectivas del cuerpo rígido AOB , el engrane E y la barra OB se consideran por separado. Por lo tanto, las componentes de la aceleración del centro de masa G_{OB} de la barra se determinarán primero:

$$\begin{aligned} (\bar{a}_{OB})_t &= \bar{r}\alpha = (0.200 \text{ m})(40 \text{ rad/s}^2) = 8 \text{ m/s}^2 \\ (\bar{a}_{OB})_n &= \bar{r}\omega^2 = (0.200 \text{ m})(8 \text{ rad/s})^2 = 12.8 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Ecuaciones de movimiento. Se han dibujado dos bosquejos de cuerpo rígido AOB . El primero muestra las fuerzas externas consistentes en el peso \mathbf{W}_E del engrane E , el peso \mathbf{W}_{OB} de la barra OB , la fuerza F ejercida por el engrane D , y las componentes \mathbf{R}_x y \mathbf{R}_y de la reacción en O . Las magnitudes de los pesos son, respectivamente,

$$\begin{aligned} W_E &= m_E g = (4 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 39.2 \text{ N} \\ W_{OB} &= m_{OB} g = (3 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 29.4 \text{ N} \end{aligned}$$

El segundo bosquejo muestra las fuerzas efectivas, que consisten en el par $\bar{I}_E\alpha$ (puesto que el engrane E está en rotación centroidal) y en un par y dos componentes vectoriales en el centro de masa de OB . Puesto que se conocen las aceleraciones, se calculan las magnitudes de estas componentes y pares:

$$\begin{aligned} \bar{I}_E\alpha &= m_E \bar{k}_E^2 \alpha = (4 \text{ kg})(0.085 \text{ m})^2(40 \text{ rad/s}^2) = 1.156 \text{ N} \cdot \text{m} \\ m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t &= (3 \text{ kg})(8 \text{ m/s}^2) = 24.0 \text{ N} \\ m_{OB}(\bar{a}_{OB})_n &= (3 \text{ kg})(12.8 \text{ m/s}^2) = 38.4 \text{ N} \\ \bar{I}_{OB}\alpha &= (\frac{1}{12}m_{OB}L^2)\alpha = \frac{1}{12}(3 \text{ kg})(0.400 \text{ m})^2(40 \text{ rad/s}^2) = 1.600 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Al expresar que este sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas, se escriben las siguientes ecuaciones:

$$+\uparrow\sum M_O = \Sigma(M_O)_{\text{ef}}:$$

$$\begin{aligned} F(0.120 \text{ m}) &= \bar{I}_E\alpha + m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t(0.200 \text{ m}) + \bar{I}_{OB}\alpha \\ F(0.120 \text{ m}) &= 1.156 \text{ N} \cdot \text{m} + (24.0 \text{ N})(0.200 \text{ m}) + 1.600 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$F = 63.0 \text{ N} \quad \mathbf{F} = 63.0 \text{ N} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

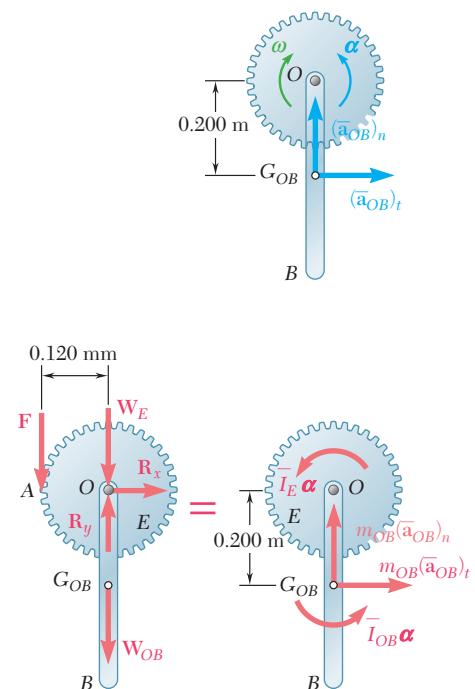
$$\rightarrow\sum F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}:$$

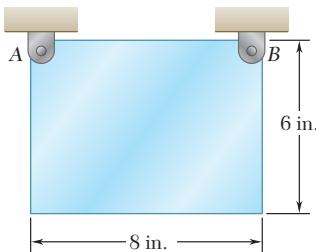
$$R_x = m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t$$

$$R_x = 24.0 \text{ N} \quad \mathbf{R}_x = 24.0 \text{ N} \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow\sum F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}: \quad R_y - F - W_E - W_{OB} = m_{OB}(\bar{a}_{OB})_n \\ R_y - 63.0 \text{ N} - 39.2 \text{ N} - 29.4 \text{ N} = 38.4 \text{ N}$$

$$R_y = 170.0 \text{ N} \quad \mathbf{R}_y = 170.0 \text{ N} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

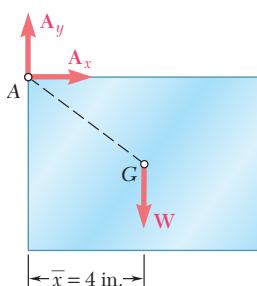
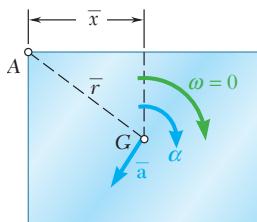




PROBLEMA RESUELTO 16.7

Una placa rectangular de 6×8 in. que pesa 60 lb está suspendida de dos pasadores A y B. Si repentinamente se quita el pasador B, determine a) la aceleración angular de la placa, b) las componentes de la reacción en el pasador A, inmediatamente después de quitar el pasador B.

SOLUCIÓN



a) **Aceleración angular.** Se observa que cuando la placa gira alrededor del punto A, su centro de masa G describe un radio circular \bar{r} con centro en A.

Puesto que la placa se suelta desde el reposo ($\omega = 0$), la componente normal de la aceleración de G es cero. La magnitud de la aceleración \bar{a} del centro de masa G es, en consecuencia, $\bar{a} = \bar{r}\alpha$. Se dibuja el diagrama mostrado para expresar que las fuerzas externas son equivalentes a las fuerzas efectivas:

$$+\downarrow \sum M_A = \Sigma (M_A)_{\text{ef}}: \quad W\bar{x} = (m\bar{a})\bar{r} + \bar{I}\alpha$$

Puesto que $\bar{a} = \bar{r}\alpha$, se tiene

$$W\bar{x} = m(\bar{r}\alpha)\bar{r} + \bar{I}\alpha \quad \alpha = \frac{W\bar{x}}{\frac{W}{g}\bar{r}^2 + \bar{I}} \quad (1)$$

El momento centroidal de inercia de la placa es

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = \frac{60 \text{ lb}}{12(32.2 \text{ ft/s}^2)}[(\frac{8}{12} \text{ ft})^2 + (\frac{6}{12} \text{ ft})^2] \\ &= 0.1078 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \end{aligned}$$

Al sustituir este valor de \bar{I} junto con $W = 60$ lb, $\bar{r} = \frac{5}{12}$ ft, y $\bar{x} = \frac{4}{12}$ ft en la ecuación (1), se obtiene

$$\alpha = +46.4 \text{ rad/s}^2 \quad \alpha = 46.4 \text{ rad/s}^2 \quad \blacktriangleleft$$

b) **Reacción en A.** Utilizando el valor calculado de α , se determina la magnitud del vector $m\bar{a}$ fijo en G.

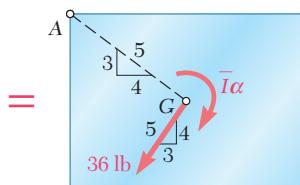
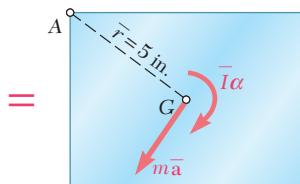
$$m\bar{a} = m\bar{r}\alpha = \frac{60 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2}(\frac{5}{12} \text{ ft})(46.4 \text{ rad/s}^2) = 36.0 \text{ lb}$$

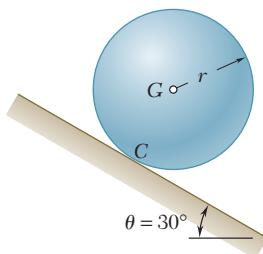
Al mostrar este resultado del diagrama, se escriben las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= \Sigma (F_x)_{\text{ef}}: \quad A_x = -\frac{3}{5}(36 \text{ lb}) \\ &= -21.6 \text{ lb} \quad A_x = 21.6 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_y &= \Sigma (F_y)_{\text{ef}}: \quad A_y - 60 \text{ lb} = -\frac{4}{5}(36 \text{ lb}) \\ &A_y = +31.2 \text{ lb} \quad A_y = 31.2 \text{ lb} \quad \uparrow \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

El par $\bar{I}\alpha$ no participa en las últimas dos ecuaciones; a pesar de eso debe indicarse sobre el diagrama.

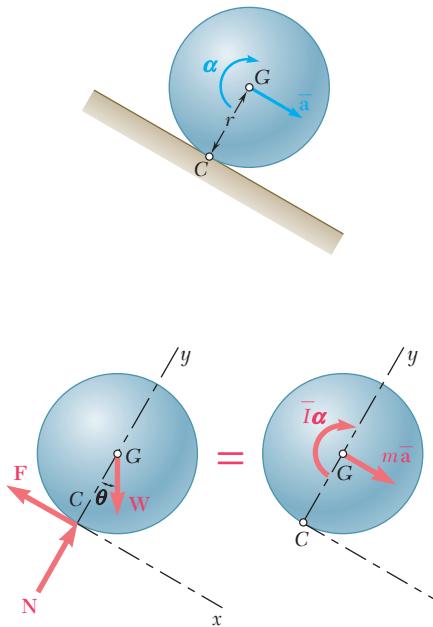




PROBLEMA RESUELTO 16.8

Una esfera, de radio r y peso W , se suelta sin velocidad inicial sobre una pendiente y rueda sin deslizarse. Determine *a)* el valor mínimo del coeficiente de fricción estática compatible con el movimiento de rodamiento, *b)* la velocidad del centro G de la esfera después de que ésta ha rodado 10 ft, *c)* la velocidad de G si la esfera desciende 10 ft sobre una pendiente de 30° sin fricción.

SOLUCIÓN



a) μ_s mínimo para el movimiento de rodamiento. Las fuerzas externas W , N y F forman un sistema equivalente al sistema de fuerzas efectivo representado por el vector $m\bar{a}$ y el par $\bar{I}\alpha$. Puesto que la esfera rueda sin deslizarse, se tiene $\bar{a} = r\alpha$.

$$+\downarrow \sum M_C = \sum (M_C)_{\text{ef}}: \quad (W \sin \theta)r = (m\bar{a})r + \bar{I}\alpha \\ (W \sin \theta)r = (mr\alpha)r + \bar{I}\alpha$$

Al notar que $m = W/g$ e $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$, se escribe

$$(W \sin \theta)r = \left(\frac{W}{g}r\alpha\right)r + \frac{2W}{5g}r^2\alpha \quad \alpha = +\frac{5g \sin \theta}{7r} \\ \bar{a} = r\alpha = \frac{5g \sin \theta}{7} = \frac{5(32.2 \text{ ft/s}^2) \sin 30^\circ}{7} = 11.50 \text{ ft/s}^2$$

$$+\downarrow \sum F_x = \sum (F_x)_{\text{ef}}: \quad W \sin \theta - F = m\bar{a} \\ W \sin \theta - F = \frac{W}{g} \frac{5g \sin \theta}{7} \\ F = +\frac{2}{7}W \sin \theta = \frac{2}{7}W \sin 30^\circ = 0.143W \Delta 30^\circ$$

$$+\nearrow \sum F_y = \sum (F_y)_{\text{ef}}: \quad N - W \cos \theta = 0 \\ N = W \cos \theta = 0.866W \quad N = 0.866W \Delta 60^\circ$$

$$\mu_s = \frac{F}{N} = \frac{0.143W}{0.866W} \quad \mu_s = 0.165 \quad \blacktriangleleft$$

b) Velocidad de la esfera rodante. Se tiene movimiento uniformemente acelerado:

$$\bar{v}_0 = 0 \quad \bar{a} = 11.50 \text{ ft/s}^2 \quad \bar{x} = 10 \text{ ft} \quad \bar{x}_0 = 0 \\ \bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad \bar{v}^2 = 0 + 2(11.50 \text{ ft/s}^2)(10 \text{ ft}) \\ \bar{v} = 15.17 \text{ ft/s} \quad \bar{v} = 15.17 \text{ ft/s} \Delta 30^\circ \quad \blacktriangleleft$$

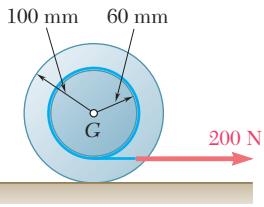
c) Velocidad de la esfera deslizante. Suponiendo que no hay fricción en este caso, se tiene $F = 0$ y se obtiene

$$+\downarrow \sum M_G = \sum (M_G)_{\text{ef}}: \quad 0 = \bar{I}\alpha \quad \alpha = 0$$

$$+\downarrow \sum F_x = \sum (F_x)_{\text{ef}}: \quad W \sin 30^\circ = m\bar{a} \quad 0.50W = \frac{W}{g}\bar{a} \\ \bar{a} = +16.1 \text{ ft/s}^2 \quad \bar{a} = 16.1 \text{ ft/s}^2 \Delta 30^\circ$$

Al sustituir $\bar{a} = 16.1 \text{ ft/s}^2$ en las ecuaciones para movimiento uniformemente acelerado, se obtiene

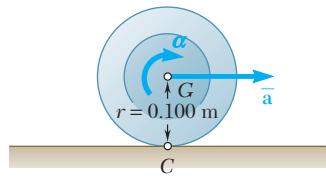
$$\bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad \bar{v}^2 = 0 + 2(16.1 \text{ ft/s}^2)(10 \text{ ft}) \\ \bar{v} = 17.94 \text{ ft/s} \quad \bar{v} = 17.94 \text{ ft/s} \Delta 30^\circ \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.9

Una cuerda se enrolla alrededor del tambor interno de una rueda y se jala horizontalmente con una fuerza de 200 N. La rueda tiene una masa de 50 kg y un radio de giro de 70 mm. Si se sabe que $\mu_s = 0.20$ y $\mu_k = 0.15$, determine la aceleración de G y la aceleración angular de la rueda.

SOLUCIÓN



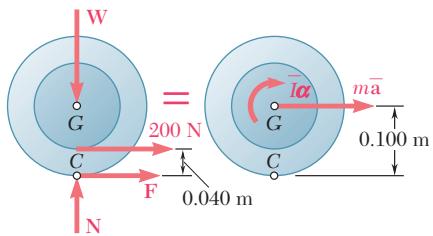
a) Suposición de rodamiento sin deslizamiento. En este caso se tiene

$$\bar{a} = r\alpha = (0.100 \text{ m})\alpha$$

Se puede determinar si esta suposición se justifica al comparar la fuerza de fricción que se obtiene con la fuerza de fricción máxima disponible. El momento de inercia de la rueda es

$$\bar{I} = m\bar{k}^2 = (50 \text{ kg})(0.070 \text{ m})^2 = 0.245 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Ecuaciones de movimiento



$$+\downarrow \sum M_C = \Sigma(M_C)_{\text{ef}}: \quad (200 \text{ N})(0.040 \text{ m}) = m\bar{a}(0.100 \text{ m}) + \bar{I}\alpha$$

$$8.00 \text{ N} \cdot \text{m} = (50 \text{ kg})(0.100 \text{ m})\alpha(0.100 \text{ m}) + (0.245 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\alpha$$

$$\alpha = +10.74 \text{ rad/s}^2$$

$$\bar{a} = r\alpha = (0.100 \text{ m})(10.74 \text{ rad/s}^2) = 1.074 \text{ m/s}^2$$

$$\rightarrow \sum F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}: \quad F + 200 \text{ N} = m\bar{a}$$

$$F + 200 \text{ N} = (50 \text{ kg})(1.074 \text{ m/s}^2)$$

$$F = -146.3 \text{ N} \quad \mathbf{F} = 146.3 \text{ N} \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}: \quad N - W = 0 \quad N = W = mg = (50 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 490.5 \text{ N}$$

$$\mathbf{N} = 490.5 \text{ N} \uparrow$$

Fuerza de fricción máxima disponible

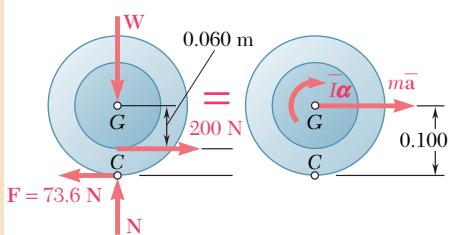
$$F_{\text{máx}} = \mu_s N = 0.20(490.5 \text{ N}) = 98.1 \text{ N}$$

Puesto que $F > F_{\text{máx}}$, el movimiento supuesto es imposible.

b) Rotación y deslizamiento. Puesto que la rueda debe girar y deslizar al mismo tiempo, se dibuja un nuevo diagrama, donde \bar{a} y α son independientes y donde

$$F = F_k = \mu_k N = 0.15(490.5 \text{ N}) = 73.6 \text{ N}$$

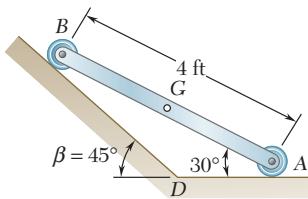
Del cálculo de la parte a, parece ser que \mathbf{F} debe dirigirse hacia la izquierda. Se escriben las siguientes ecuaciones de movimiento:



$$\rightarrow \sum F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}: \quad 200 \text{ N} - 73.6 \text{ N} = (50 \text{ kg})\bar{a} \quad \bar{a} = +2.53 \text{ m/s}^2 \quad \mathbf{\bar{a} = 2.53 m/s^2 \rightarrow} \blacktriangleleft$$

$$+\downarrow \sum M_G = \Sigma(M_G)_{\text{ef}}: \quad (73.6 \text{ N})(0.100 \text{ m}) - (200 \text{ N})(0.060 \text{ m}) = (0.245 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\alpha$$

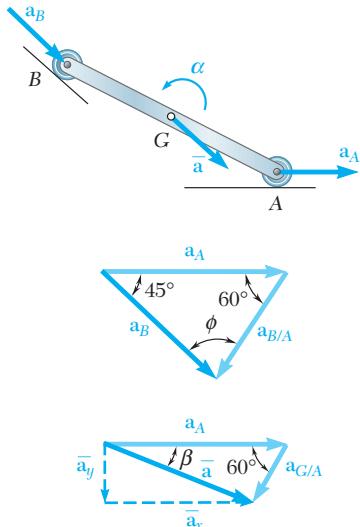
$$\alpha = -18.94 \text{ rad/s}^2 \quad \mathbf{\alpha = 18.94 rad/s^2 \uparrow} \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 16.10

Los extremos de una barra de 4 ft y 50 lb pueden moverse libremente y sin fricción a lo largo de dos correderas rectas en la forma que se indica. Si la barra se suelta sin velocidad desde la posición indicada, determine *a)* la aceleración angular de la barra, *b)* las reacciones en A y B.

SOLUCIÓN



Cinemática del movimiento. Puesto que el movimiento está restringido, la aceleración de G debe relacionarse con la aceleración angular α . Para obtener esta relación se determina primero la magnitud de la aceleración \mathbf{a}_A del punto A en términos de α . Suponiendo que α está dirigida en la dirección contraria de las manecillas del reloj y advirtiendo que $a_{B/A} = 4\alpha$, se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \\ [a_B \swarrow 45^\circ] &= [a_A \rightarrow] + [4\alpha \nearrow 60^\circ]\end{aligned}$$

Al notar que $\phi = 75^\circ$ y utilizar la ley de los senos, se obtiene

$$a_A = 5.46\alpha \quad a_B = 4.90\alpha$$

La aceleración de G se obtiene ahora al escribir

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{G/A} \\ \bar{\mathbf{a}} &= [5.46\alpha \rightarrow] + [2\alpha \nearrow 60^\circ]\end{aligned}$$

Al descomponer $\bar{\mathbf{a}}$ en las componentes x y y se obtiene

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= 5.46\alpha - 2\alpha \cos 60^\circ = 4.46\alpha & \bar{a}_x &= 4.46\alpha \rightarrow \\ \bar{a}_y &= -2\alpha \sin 60^\circ = -1.732\alpha & \bar{a}_y &= 1.732\alpha \downarrow\end{aligned}$$

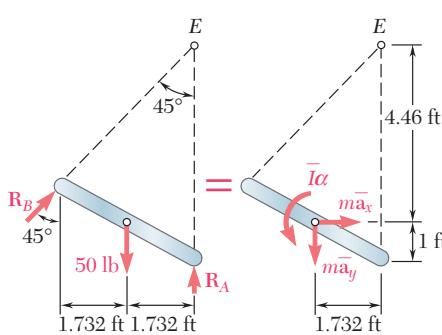
Cinética del movimiento. Se dibujan unos diagramas de cuerpo libre de la ecuación que expresen que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas representadas por el vector de componentes $m\bar{a}_x$ y $m\bar{a}_y$ fijo en G y el par $I\alpha$. Se calculan las siguientes magnitudes:

$$\bar{I} = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12} \frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} (4 \text{ ft})^2 = 2.07 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \quad \bar{I}\alpha = 2.07\alpha$$

$$m\bar{a}_x = \frac{50}{32.2} (4.46\alpha) = 6.93\alpha \quad m\bar{a}_y = -\frac{50}{32.2} (1.732\alpha) = -2.69\alpha$$

Ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}+\uparrow\sum M_E &= \sum(M_E)_{\text{ef}}: \\ (50)(1.732) &= (6.93\alpha)(4.46) + (2.69\alpha)(1.732) + 2.07\alpha \\ \alpha &= +2.30 \text{ rad/s}^2 \quad \alpha = 2.30 \text{ rad/s}^2 \uparrow \\ \rightarrow\sum F_x &= \sum(F_x)_{\text{ef}}: \quad R_B \sin 45^\circ = (6.93)(2.30) = 15.94 \\ R_B &= 22.5 \text{ lb} \quad \mathbf{R}_B = 22.5 \text{ lb} \angle 45^\circ \quad \blacktriangleleft \\ +\uparrow\sum F_y &= \sum(F_y)_{\text{ef}}: \quad R_A + R_B \cos 45^\circ - 50 = -(2.69)(2.30) \\ R_A &= -6.19 - 15.94 + 50 = 27.9 \text{ lb} \quad \mathbf{R}_A = 27.9 \text{ lb} \uparrow \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se consideró el *movimiento plano de cuerpos rígidos bajo restricciones*. Se encontró que los tipos de restricciones implicadas en problemas de ingeniería varían de manera amplia. Por ejemplo, un cuerpo rígido quizás esté restringido a girar alrededor de un eje fijo o a rodar sobre una superficie dada, o tal vez esté conectado mediante pasadores a collarines u otros cuerpos.

1. La solución de un problema que implique el movimiento restringido de un cuerpo rígido constará, en general, de dos pasos. Primero, se considerará la *cinemática de movimiento* y luego se resolverá la *parte cinética del problema*.

2. El análisis cinemático del movimiento se realiza utilizando los métodos estudiados en el capítulo 15. Debido a las restricciones, se relacionarán las aceleraciones lineales y angulares. (Éstas *no* serán independientes, como lo fueron en la última sección.) Es necesario establecer *relaciones entre las aceleraciones* (tanto angular como lineal), y la meta debe ser expresar todas las aceleraciones en términos de una *sola aceleración desconocida*. Éste es el primer paso que se sigue en cada uno de los problemas resueltos de esta lección.

a) Para un cuerpo en rotación no centroidal, las componentes de la aceleración del centro de masa son $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$ y $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$, donde ω por lo general se conoce [problemas resueltos 16.6 y 16.7].

b) Para un disco o rueda rodante, la aceleración del centro de masa es $\bar{a} = r\alpha$ [problema resuelto 16.8].

c) Para un cuerpo en movimiento plano general, el mejor procedimiento, si ni \bar{a} ni α se conocen o es posible obtenerlas con facilidad, es expresar \bar{a} en términos de α [problema resuelto 16.10].

3. El análisis cinético del movimiento se efectúa del modo siguiente:

a) Se inicia dibujando un diagrama de cuerpo libre de la ecuación. Esto se lleva a cabo en todos los problemas resueltos de cada sección. En cada caso el diagrama del lado izquierdo muestra las fuerzas externas, incluyendo las fuerzas aplicadas, las reacciones y el peso del cuerpo. Los diagramas del lado derecho muestran los vectores $m\bar{a}$ y el par $I\alpha$.

b) Después, se reduce el número de incógnitas en la ecuación de diagramas de cuerpo libre utilizando las relaciones entre las aceleraciones que se encontraron en el análisis cinemático. Así, se está listo para considerar ecuaciones que pueden escribirse al sumar componentes o momentos. Se elige primero una ecuación que implique una sola incógnita. Luego de resolver con respecto a esta última se sustituye el valor obtenido en las otras ecuaciones, las cuales se resolverán para las incógnitas restantes.

(continúa)

4. Cuando se resuelven problemas en los que intervienen discos o ruedas rodantes, téngase presente lo siguiente:

a) **Si el deslizamiento es inminente,** la fuerza de fricción que se ejerce sobre el cuerpo rodante ha alcanzado su valor máximo, $F_m = \mu_s N$, donde N es la fuerza normal ejercida sobre el cuerpo y μ_s es el coeficiente de *fricción estática* entre las superficies de contacto.

b) **Si el deslizamiento no es inminente,** la fuerza de fricción F puede tener *cualquier valor* más pequeño que F_m y, por tanto, debe considerarse como una incógnita independiente. Después que se ha determinado F es necesario verificar que ésta es más pequeña que F_m ; si no es así, *el cuerpo no gira*, sino que rueda y se desliza como se describe en el siguiente párrafo.

c) **Si el cuerpo gira y se desliza al mismo tiempo,** entonces no está *rodando* y la aceleración \bar{a} del centro de masa es *independiente* de la aceleración angular α del cuerpo: $\bar{a} \neq r\alpha$. Por otro lado, la fuerza de fricción tiene un valor bien definido, $F = \mu_k N$, donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética entre las superficies de contacto.

d) **En el caso de un disco o rueda rodantes desbalanceados,** la relación $\bar{a} = r\alpha$ entre la aceleración \bar{a} del centro de masa G y la aceleración angular α del disco o rueda *ya no existe*. Sin embargo, se cumple una relación similar entre la aceleración a_O del *centro geométrico* O y la aceleración angular α del disco o rueda: $a_O = r\alpha$. Esta relación se puede utilizar para expresar \bar{a} en términos de α y ω (figura 16.18).

5. En el caso de un sistema de cuerpos rígidos conectados, el objetivo del *análisis cinemático* debe ser determinar todas las aceleraciones a partir de los datos proporcionados o expresarlas en términos de una sola incógnita. (En sistemas con varios grados de libertad, será necesario utilizar tantas incógnitas como grados de libertad.)

El *análisis cinético* por lo general se efectuará dibujando una ecuación de diagramas de cuerpo libre para el sistema completo, así como para uno o varios de los cuerpos rígidos implicados. En el último caso deben incluirse las fuerzas tanto internas como externas, y es necesario tener cuidado para representar con vectores iguales y opuestos las fuerzas que dos cuerpos ejercen entre sí.

Problemas

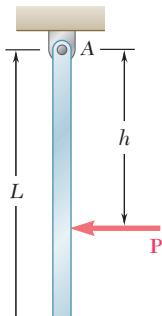


Figura P16.76

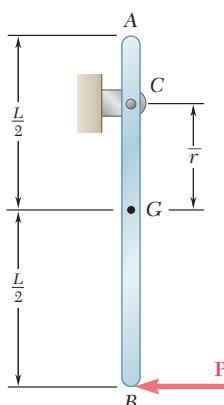


Figura P16.78

16.75 Demuestre que el par $\bar{I}\alpha$ de la figura 16.15 se elimina al asociar los vectores $m\bar{a}_t$ y $m\bar{a}_n$ en el punto P , llamado el *centro de percusión*, localizado en la línea OG a una distancia $GP = \bar{k}^2/\bar{r}$ del centro de masa del cuerpo.

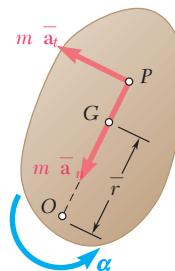


Figura P16.75

16.76 Una barra ligera y uniforme de longitud $L = 36$ in. y peso $W = 4$ lb cuelga libremente de una articulación en A . Una fuerza horizontal \mathbf{P} de 1.5 lb de magnitud se aplica en B hacia la izquierda ($h = L$), determine *a)* la aceleración angular de la barra y *b)* las componentes de la reacción en A .

16.77 En el problema 16.76, determine *a)* la distancia h para la cual la componente horizontal de la reacción en A es cero y *b)* la aceleración angular correspondiente de la barra.

16.78 Una barra ligera y uniforme de longitud $L = 900$ mm y masa $m = 4$ kg cuelga libremente de una articulación en C . Una fuerza horizontal \mathbf{P} de 75 N de magnitud se aplica en el extremo B . Si $\bar{r} = 225$ mm, determine *a)* la aceleración angular de la barra y *b)* las componentes de la reacción en C .

16.79 En el problema 16.78, determine *a)* la distancia \bar{r} para la cual la componente horizontal de la reacción en C es cero y *b)* la correspondiente aceleración angular de la barra.

16.80 Una barra delgada uniforme de longitud l y masa m gira alrededor de un eje vertical AA' con una velocidad angular constante ω . Determine la tensión en la barra a una distancia x del eje de rotación.

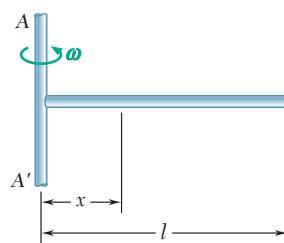


Figura P16.80

16.81 Un gran volante está montado sobre una flecha horizontal y gira a una razón constante de 1 200 rpm. Los datos experimentales indican que la fuerza total que ejerce el volante sobre la flecha varía de 55 kN hacia arriba a 85 kN hacia abajo. Determine *a*) la masa del volante, *b*) la distancia desde el centro del eje hasta el centro de masa del volante.

16.82 Un disco de turbina con masa de 26 kg gira a razón constante de 9 600 rpm. Si el centro de masa del disco coincide con el centro de rotación *O*, determine la reacción en *O* inmediatamente después de que una sola aspa en *A* con masa de 45 g, se afloja y se desprende.

16.83 El obturador que se muestra se formó al quitar un cuarto a un disco de 0.75 in. de radio y se usa para interrumpir un haz luminoso que se emite desde una lente en *C*. Si se sabe que el obturador tiene un peso de 0.125 lb y gira a una razón constante de 24 ciclos por segundo, determine la magnitud de la fuerza ejercida por el obturador sobre la flecha en *A*.

16.84 y 16.85 Una barra uniforme de longitud *L* y masa *m* se sostiene en la forma indicada. Si el cable unido en *B* se rompe de manera repentina, determine *a*) la aceleración del extremo *B* y *b*) la reacción en el soporte articulado.

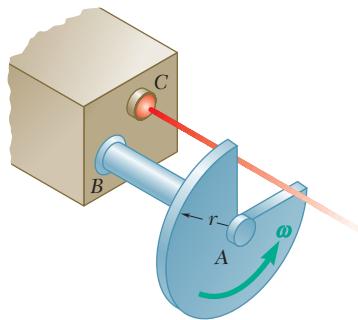


Figura P16.83

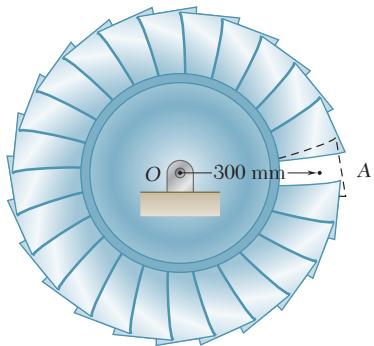


Figura P16.82

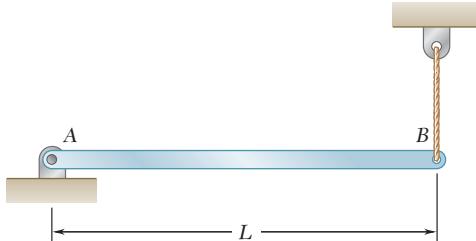


Figura P16.84

16.86 Un cono uniforme delgado de masa *m* puede girar libremente alrededor de la barra horizontal *AB*. Si el cono se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine *a*) la aceleración de la punta *D*, *b*) la reacción en *C*.

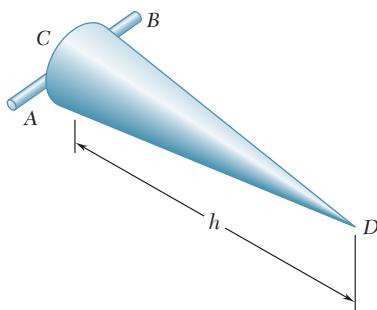


Figura P16.86

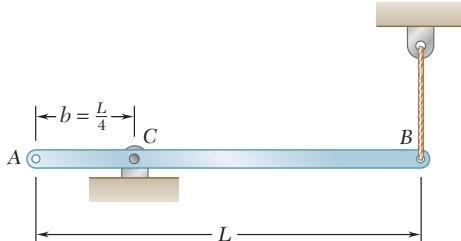


Figura P16.85

16.87 El objeto *ABC* consiste en dos barras delgadas soldadas entre sí en el punto *B*. La barra *AB* tiene una masa de 1 kg y la barra *BC* tiene una masa de 2 kg. Si la magnitud de la velocidad angular de *ABC* es de 10 rad/s cuando $\theta = 0$, determine las componentes de la reacción en el punto *C* cuando $\theta = 0$.

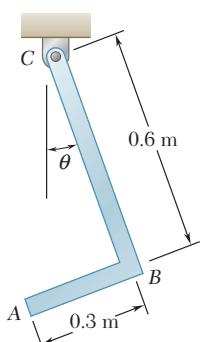


Figura P16.87

16.88 Una varilla delgada AB de 8 lb y una varilla delgada BC de 5 lb están conectadas mediante un pasador en B y por medio de la cuerda AC . El ensamble puede girar en un plano vertical bajo el efecto combinado de la gravedad y un par \mathbf{M} aplicado a la varilla BC . Si en la posición mostrada la velocidad angular del ensamble es cero y la tensión en la cuerda AC es igual a 6 lb, determine *a)* la aceleración angular del ensamble, *b)* la magnitud del par \mathbf{M} .

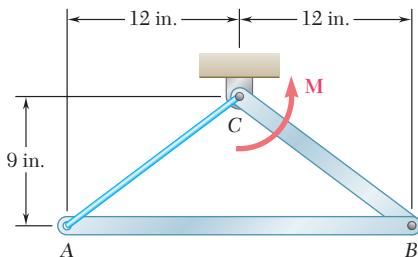


Figura P16.88

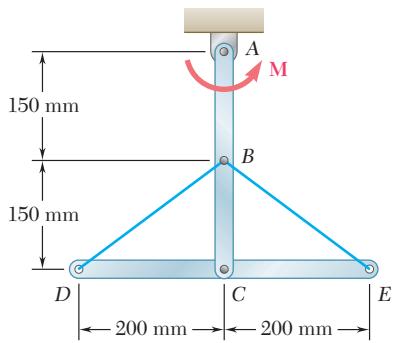


Figura P16.89

16.89 Dos barras uniformes, ABC con masa de 3 kg y DCE con masa de 4 kg, están conectadas mediante un pasador en C y por medio de dos cuerdas BD y BE . El ensamble en forma de T gira en un plano vertical bajo el efecto combinado de la gravedad y de un par \mathbf{M} que se aplica a la barra ABC . Si en el instante mostrado la tensión en la cuerda BD es de 8 N, determine *a)* la aceleración angular del ensamble, *b)* el par \mathbf{M} .

16.90 Una barra ligera de 1.5 kg está soldada a un disco uniforme de 5 kg en la forma que se muestra. El ensamble oscila libremente alrededor de C en un plano vertical. Si en la posición indicada el ensamble tiene una velocidad angular de 10 rad/s en dirección de las manecillas del reloj, determine *a)* la aceleración angular del ensamble, *b)* las componentes de la reacción en C .

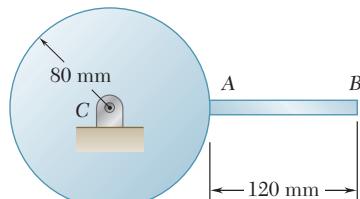


Figura P16.90

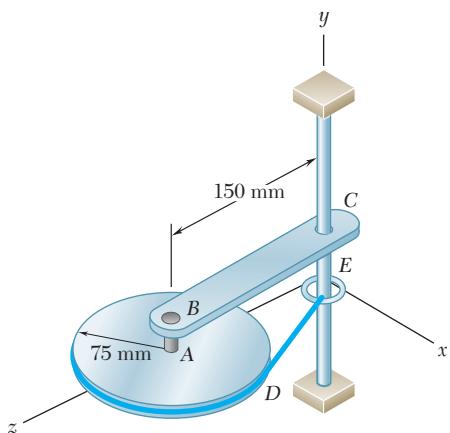


Figura P16.91

16.91 Un disco uniforme de 5 kg está unido a una barra uniforme BC de 3 kg mediante un pasador sin fricción AB . Una cuerda elástica se enrolla alrededor del borde del disco y se une a un anillo en E . Tanto E como la barra BC pueden girar con libertad alrededor del eje vertical. Si el sistema se suelta desde el reposo cuando la tensión en la cuerda elástica es de 15 N, determine *a)* la aceleración angular del disco, *b)* la aceleración del centro del disco.

16.92 Obtenga la ecuación $\sum M_C = I_C \alpha$ para el disco rodante de la figura 16.17, donde $\sum M_C$ representa la suma de los momentos de las fuerzas externas alrededor del centro instantáneo C e I_C es el momento de inercia del disco alrededor de C .

16.93 Demuestre que en el caso de un disco desequilibrado, la ecuación que se obtuvo en el problema 16.92 sólo es válida cuando el centro de masa G , el centro geométrico O y el centro instantáneo C se encuentran en una línea recta.

16.94 Un neumático de radio r y radio de giro centroidal \bar{k} se suelta desde el reposo sobre una pendiente y rueda sin deslizarse. Obtenga una expresión para la aceleración del centro del neumático en términos de r , \bar{k} , β y g .

16.95 Un volante está rígidamente unido a una flecha de 1.5 in. de radio que puede rodar a lo largo de rieles paralelos en la forma que se indica. Cuando se suelta desde el reposo, el sistema rueda 16 ft en 40 s. Determine el radio de giro centroidal del sistema.

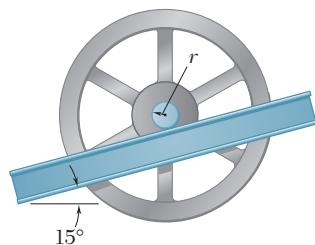


Figura P16.95 y P16.96

16.96 Un volante de radio de giro centroidal \bar{k} está rígidamente unido a un eje que puede rodar a lo largo de rieles paralelos. Si se denota con μ_s el coeficiente de fricción estática entre el eje y los rieles, deduzca una expresión para el máximo ángulo de inclinación β para el cual no ocurrirá deslizamiento.

16.97 Una esfera homogénea S , un cilindro uniforme C y un tubo delgado P están en contacto cuando se sueltan desde el reposo sobre la pendiente que se muestra. Si los tres objetos ruedan sin deslizarse, determine después de 4 s de movimiento, la distancia libre entre *a*) el tubo y el cilindro y *b*) el cilindro y la esfera.

16.98 a 16.101 Un tambor de 4 in. de radio está unido a un disco de 8 in. de radio. El disco y el tambor tienen una masa combinada de 10 lb y un radio de giro combinado de 6 in. Se une una cuerda en la forma indicada y se jala con una fuerza \mathbf{P} de 5 lb de magnitud. Si los coeficientes de fricción estática y cinética son, respectivamente, $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine *a*) si el disco se desliza o no y *b*) la aceleración angular del disco y la aceleración de G .

16.102 a 16.105 Un tambor de 60 mm de radio se une a un disco de 120 mm de radio. El disco y el tambor tienen una masa total de 6 kg y un radio de giro combinado de 90 mm. Se ata una cuerda en la forma mostrada y se jala con una fuerza \mathbf{P} de 20 N de magnitud. Si el disco rueda sin deslizarse, determine *a*) la aceleración angular del mismo y la aceleración de G y *b*) el valor mínimo del coeficiente de fricción estática compatible con este movimiento.

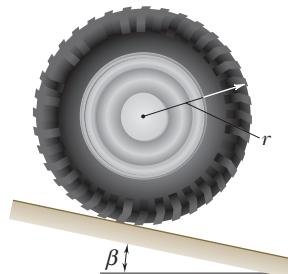


Figura P16.94

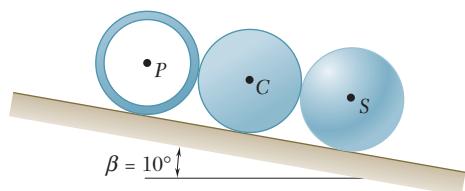


Figura P16.97

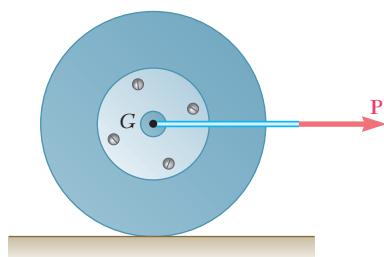


Figura P16.98 y P16.102

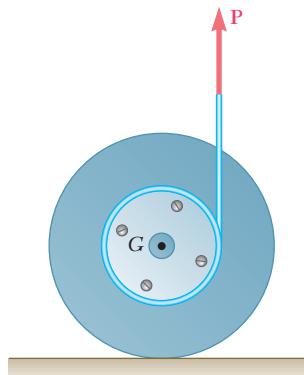


Figura P16.101 y P16.105

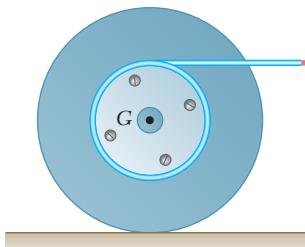


Figura P16.99 y P16.103

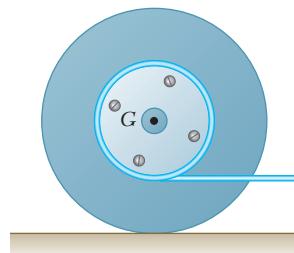


Figura P16.100 y P16.104

16.106 a 16.108 Una barra de masa m se mantiene en la forma mostrada entre cuatro discos, cada uno con masa m' y radio $r = 75 \text{ mm}$. Determine la aceleración de la barra inmediatamente después de haber sido liberada desde el reposo, si las fuerzas normales sobre los discos son suficientes para evitar cualquier deslizamiento y se supone que *a)* $m = 5 \text{ kg}$ y $m' = 2 \text{ kg}$, *b)* la masa m' de los discos es despreciable, *c)* la masa m de la barra es despreciable.

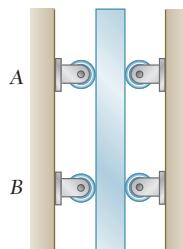


Figura P16.106

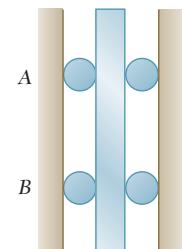


Figura P16.107

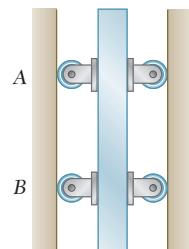


Figura P16.108

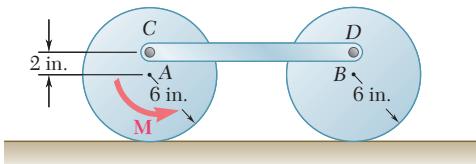


Figura P16.109

16.109 Dos discos uniformes A y B , cada uno con un peso de 4 lb, se conectan mediante una barra CD de 3 lb como se muestra en la figura. Un par \mathbf{M} en sentido contrario al de las manecillas del reloj, con momento de 1.5 lb · ft, se aplica al disco A . Si se sabe que los discos ruedan sin deslizarse, determine *a)* la aceleración del centro de cada disco, *b)* la componente horizontal de la fuerza ejercida sobre el disco B por el pasador D .

16.110 El engrane C tiene un peso de 10 lb y un radio de giro centroidal de 3 in. La barra uniforme AB tiene un peso de 6 lb y el engrane D es estacionario. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición que se muestra, determine *a)* la aceleración angular del engrane C y *b)* la aceleración del punto B .

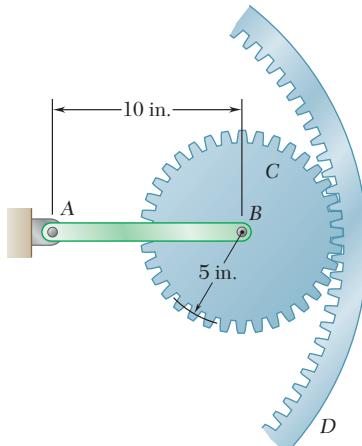


Figura P16.110

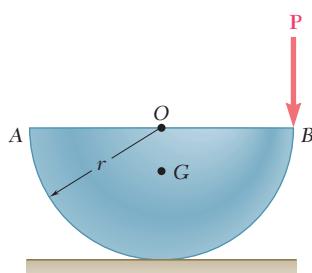


Figura P16.111

16.111 La mitad de un cilindro uniforme de masa m está en reposo cuando se aplica una fuerza \mathbf{P} en la forma mostrada. Si se supone que la sección rueda sin deslizarse, determine *a)* su aceleración angular, *b)* el valor mínimo de μ_s que sea compatible con el movimiento.

16.112 Retome el problema 16.111, y ahora suponga que la fuerza \mathbf{P} aplicada en el punto B está dirigida horizontalmente hacia la derecha.

- 16.113** Una pequeña abrazadera de masa m_B se une en B al aro de masa m_h . El sistema se suelta desde el reposo cuando $\theta = 90^\circ$ y rueda sin deslizarse. Si $m_h = 3m_B$, determine *a)* la aceleración angular del aro y *b)* las componentes horizontal y vertical de la aceleración de B .

- 16.114** Una pequeña abrazadera de masa m_B se une a B en un aro de masa m_h . Si el sistema se suelta desde el reposo y rueda sin deslizarse, obtenga una expresión para la aceleración angular del aro en términos de m_B , m_h , r y θ .

- 16.115** El centro de gravedad G de una rueda de tracción desequilibrada de 1.5 kg se ubica a una distancia $r = 18$ mm de su centro geométrico B . El radio de la rueda es $R = 60$ mm y su radio de giro centroidal es de 44 mm. En el instante que se muestra, el centro B de la rueda tiene una velocidad de 0.35 m/s y una aceleración de 1.2 m/s², ambas dirigidas hacia la izquierda. Si se sabe que la rueda gira sin deslizarse y si se desprecia la masa del yugo de tracción AB , determine la fuerza \mathbf{P} horizontal aplicada al yugo.

- 16.116** Una barra de 2 kg está unida a un cilindro uniforme de 5 kg mediante un pasador cuadrado P , como se muestra en la figura. Si $r = 0.4$ m, $h = 0.2$ m, $\theta = 20^\circ$, $L = 0.5$ m y $\omega = 2$ rad/s en el instante mostrado, determine las reacciones en P en este instante, suponiendo que el cilindro rueda sin deslizarse hacia abajo sobre el plano inclinado.

- 16.117** Los extremos de una varilla uniforme AB de 10 kg están unidos a collarines de masa despreciable que se deslizan sin fricción a lo largo de barras fijas. Si la varilla se suelta desde el reposo cuando $\theta = 25^\circ$, determine inmediatamente después de la liberación *a)* la aceleración angular de la varilla, *b)* la reacción en A , *c)* la reacción en B .

- 16.118** Los extremos de una varilla uniforme AB de 10 kg están unidos a collarines de masa despreciable que se deslizan sin fricción a lo largo de barras fijas. Se aplica una fuerza vertical \mathbf{P} al collarín B cuando $\theta = 25^\circ$, lo que ocasiona que el collarín parta desde el reposo con una aceleración hacia arriba de 12 m/s². Determine *a)* la fuerza \mathbf{P} , *b)* la reacción en A .

- 16.119** El movimiento de la barra uniforme AB de 8 lb se guía mediante ruedas pequeñas de peso despreciable que ruedan sin fricción a lo largo de las ranuras mostradas. Si la barra se suelta desde el reposo en la posición indicada, determine inmediatamente después de la liberación *a)* la aceleración angular de la barra, *b)* la reacción en B .

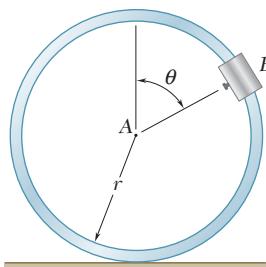


Figura P16.113 y P16.114

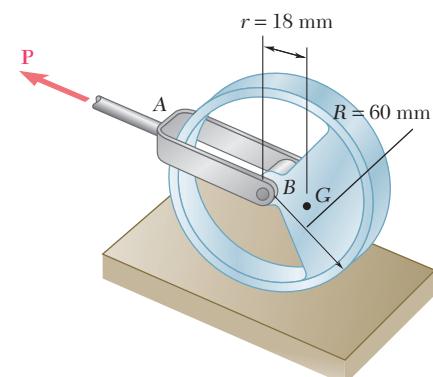


Figura P16.115

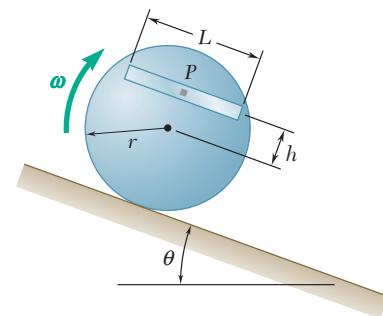


Figura P16.116

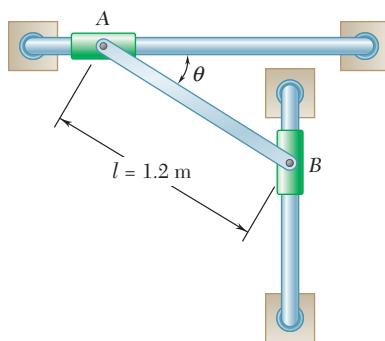


Figura P16.117 y P16.118

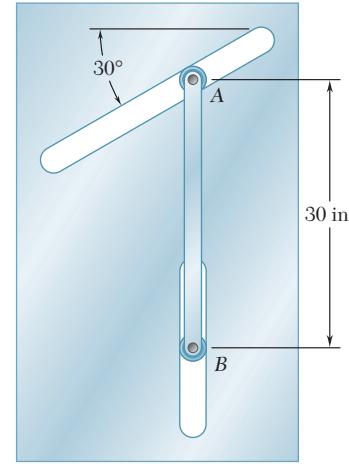


Figura P16.119

16.120 La varilla uniforme AB de 4 lb está unida a collarines de masa despreciable que pueden deslizarse sin fricción a lo largo de las barras fijas mostradas. La varilla AB se encuentra en reposo en la posición $\theta = 25^\circ$, cuando se aplica una fuerza horizontal \mathbf{P} al collarín A , lo que ocasiona que éste inicie su movimiento hacia la izquierda con una aceleración de 12 ft/s^2 . Determine *a)* la fuerza \mathbf{P} , *b)* la reacción en B .

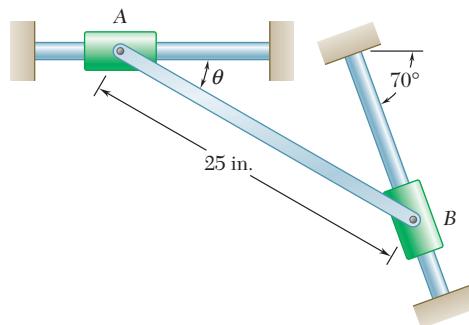


Figura P16.120 y P16.121

16.121 La varilla uniforme AB de 4 lb está unida a collarines de masa despreciable que pueden deslizarse sin fricción a lo largo de las barras fijas mostradas. Si la varilla AB se suelta desde el reposo en la posición $\theta = 25^\circ$, determine inmediatamente después de la liberación *a)* la aceleración angular de la varilla, *b)* la reacción en B .

16.122 El movimiento de una barra uniforme AB de 5 kg de masa y longitud $L = 750 \text{ mm}$ se guía por medio de dos ruedas pequeñas de masa despreciable que ruedan sobre la superficie mostrada. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 20^\circ$, determine inmediatamente después de la liberación *a)* la aceleración angular de la barra y *b)* la reacción en A .

16.123 El extremo A de la varilla uniforme AB de 8 kg está unido a un collarín que puede deslizarse sin fricción sobre una barra vertical. El extremo B de la varilla está unido a un cable vertical BC . Si la varilla se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine inmediatamente después de la liberación *a)* la aceleración angular de la varilla, *b)* la reacción en A .

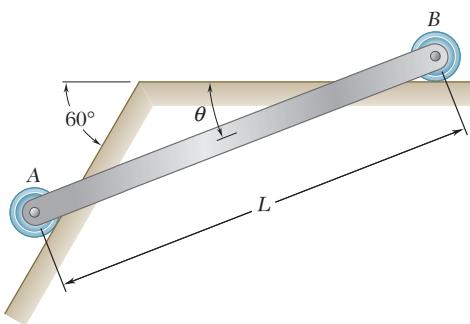


Figura P16.122

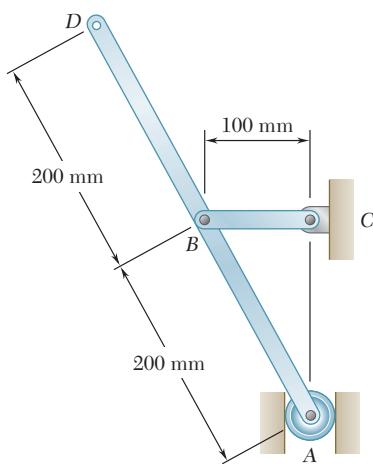


Figura P16.124

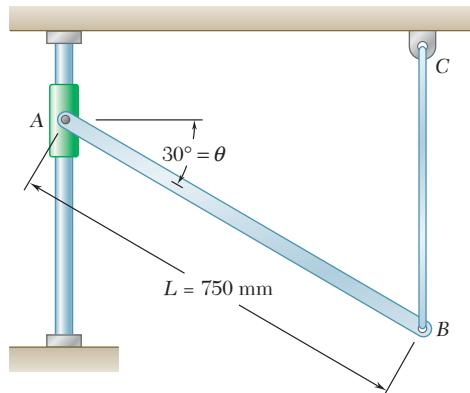


Figura P16.123

16.124 La barra uniforme ABD de 4 kg está conectada a una manivela BC y dispone de una pequeña rueda que puede rodar sin fricción a lo largo de una ranura vertical. Si en el instante que se muestra la manivela BC gira con una velocidad angular de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y con una aceleración angular de 15 rad/s^2 en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la reacción en A .

16.125 La barra uniforme BD de 250 mm y 5 kg de masa está conectada como se muestra al disco A y a un collarín de masa despreciable, el cual puede deslizarse libremente a lo largo de una barra vertical. Si se sabe que el disco A gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a la velocidad constante de 500 rpm, determine las reacciones en D cuando $\theta = 0$.

16.126 Retome el problema 16.125 cuando $\theta = 90^\circ$.

16.127 La barra uniforme BD de 15 in. pesa 8 lb y está conectada como se muestra a la manivela AB y al collarín D de masa despreciable, el cual puede deslizarse libremente a lo largo de una barra horizontal. Si se sabe que la manivela AB gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a razón constante de 300 rpm, determine la reacción en D cuando $\theta = 0$.

16.128 Retome el problema 16.127 cuando $\theta = 90^\circ$.

16.129 La barra uniforme AB de 3 kg de masa está conectada a la manivela BD y a un collarín de peso despreciable, el cual puede deslizarse libremente a lo largo de la barra EF . Si se sabe que en la posición mostrada la manivela BD gira con una velocidad angular de 15 rad/s y una aceleración angular de 60 rad/s², ambas en el sentido de las manecillas del reloj, determine la reacción en A .

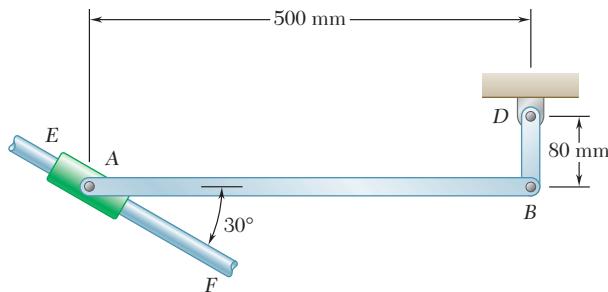


Figura P16.129

16.130 En el problema 16.129, determine la reacción en A si se sabe que en la posición mostrada la manivela BD gira con una velocidad angular de 15 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y una aceleración angular de 60 rad/s² en el sentido contrario.

16.131 Un conductor arranca su automóvil con la puerta del lado del conductor abierta ($\theta = 0$). La puerta de 80 lb tiene un radio de giro centroidal $k = 12.5$ in., y su centro de masa se localiza a una distancia $r = 22$ in. de su eje de rotación vertical. Si se sabe que el conductor mantiene una aceleración constante de 6 ft/s², determine la velocidad angular de la puerta cuando se cierra de golpe ($\theta = 90^\circ$).

16.132 Para el automóvil del problema 16.131, determine la aceleración constante mínima que el conductor puede mantener si la puerta ha de cerrarse perfectamente, si se sabe que, cuando la puerta golpee el marco, su velocidad angular debe ser al menos de 2 rad/s para que opere el mecanismo de la cerradura.

16.133 Dos barras uniformes de 8 lb se conectan para formar el varillaje mostrado. Si se desprecia el efecto de la fricción, determine la reacción en D inmediatamente después de soltar el varillaje desde el reposo en la posición mostrada.

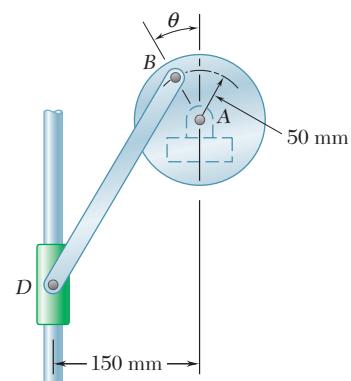


Figura P16.125

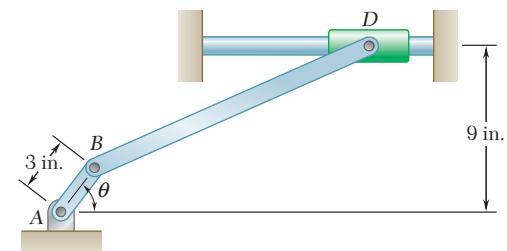


Figura P16.127

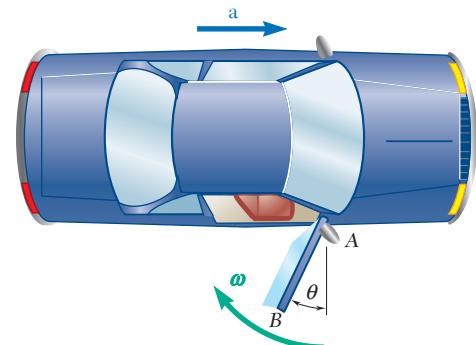


Figura P16.131

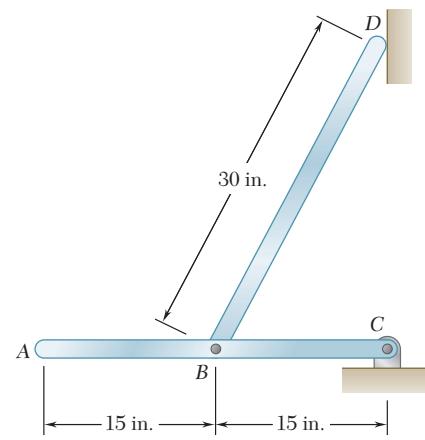


Figura P16.133

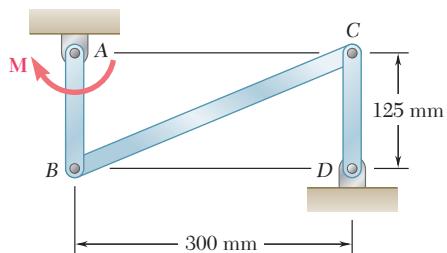


Figura P16.134

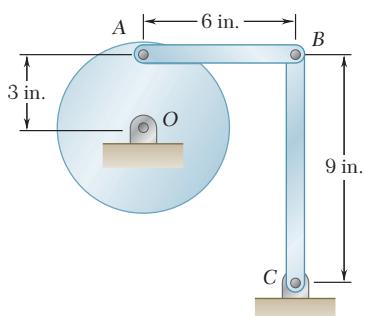


Figura P16.136 y P16.137

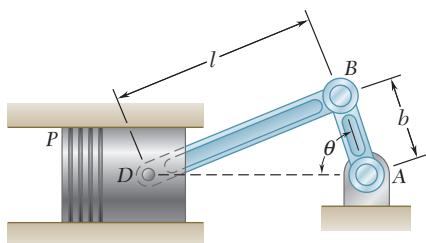


Figura P16.138

16.134 El varillaje ABCD se forma conectando la barra BC de 3 kg a las barras AB y CD de 1.5 kg. El movimiento del varillaje se controla mediante el par **M** aplicado a la barra AB. Si en el instante mostrado la velocidad angular de la barra AB es de 24 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y no hay aceleración angular, determine *a)* el par **M**, *b)* las componentes de la fuerza ejercida en B sobre la barra BC.

16.135 Retome el problema 16.134, y ahora suponga que en el instante indicado la barra AB tiene una velocidad angular de 24 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj y una aceleración angular de 160 rad/s^2 en el sentido contrario.

16.136 La barra AB de 4 lb y la barra BC de 6 lb están conectadas como se muestra a un disco que se pone a girar en un plano vertical a una velocidad angular constante de 6 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Para la posición indicada, determine las fuerzas ejercidas en A y B sobre la barra AB.

16.137 La barra AB de 4 lb y la barra BC de 6 lb están conectadas como se indica a un disco que se pone a girar en un plano vertical. Si en el instante indicado el disco tiene una aceleración angular de 18 rad/s^2 en el sentido de las manecillas del reloj y no tiene velocidad angular, determine las componentes de las fuerzas ejercidas en A y B sobre la barra AB.

16.138 En el sistema motriz mostrado, $l = 250 \text{ mm}$ y $b = 100 \text{ mm}$. Se supone que la biela BD es una barra uniforme y ligera de 1.2 kg que está unida al pistón P de 1.8 kg. Durante una prueba del sistema, la manivela AB se pone a girar con una velocidad angular constante de 600 rpm en el sentido de las manecillas del reloj sin ninguna fuerza aplicada a la cara del pistón. Determine las fuerzas ejercidas sobre los puntos B y D de la biela cuando $\theta = 180^\circ$. (Desprecie el efecto del peso de la biela.)

16.139 Retome el problema 16.138 cuando $\theta = 90^\circ$.

16.140 Dos barras idénticas AC y CE, cada una de peso W, se unen para formar el varillaje mostrado. Si se sabe que en el instante indicado la fuerza **P** ocasiona que el rodillo conectado en D se mueva hacia la izquierda con una velocidad constante v_D , determine la magnitud de la fuerza **P** en términos de L , W , v_D y θ .

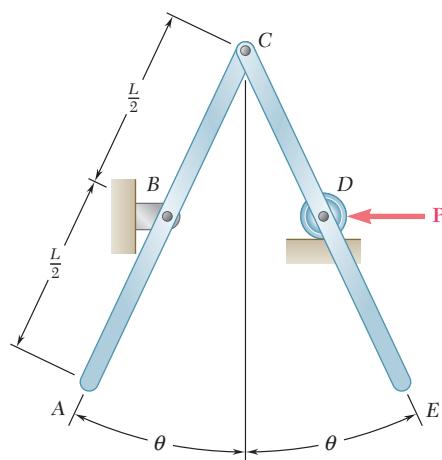


Figura P16.140

16.141 El poste uniforme ABC de 50 kg y 6 m de largo tiene, en el instante mostrado, una velocidad angular de 1 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj y el punto C se desliza hacia la derecha. Una fuerza horizontal \mathbf{P} de 500 N actúa en B . Si el coeficiente de fricción cinética entre el poste y el suelo es de 0.3 , determine en este instante *a)* la aceleración del centro de gravedad, *b)* la fuerza normal entre el poste y el suelo.

***16.142** Un disco uniforme de masa $m = 4 \text{ kg}$ y radio $r = 150 \text{ mm}$ está soportado por una banda $ABCD$ que se encuentra empernada al disco en B y en C . Si la banda se rompe de manera súbita en un punto localizado entre A y B , determine *a)* la aceleración del centro del disco, *b)* la tensión en la parte CD de la banda.

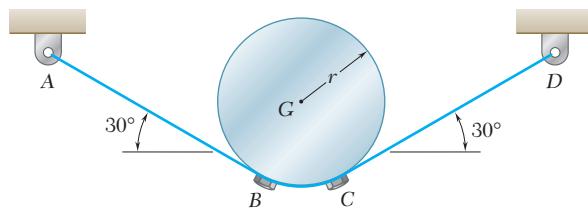


Figura P16.142

***16.143** Dos discos, cada uno con masa m y radio r , se conectan de la forma mostrada por medio de una cadena continua de masa despreciable. Si de manera repentina se quita un pasador en el punto C de la cadena, determine *a)* la aceleración angular de cada disco, *b)* la tensión en la parte izquierda de la cadena y *c)* la aceleración del centro del disco B .

***16.144** Una barra uniforme AB , con peso de 30 lb y longitud de 3 ft , se une al carrito C de 40 lb . Si se desprecia la fricción, determine inmediatamente después de que el sistema se libera desde el reposo, *a)* la aceleración del carrito, *b)* la aceleración angular de la barra.

***16.145** Una barra ligera y uniforme AB de masa m se suspende como se muestra de un disco uniforme que tiene la misma masa m . Determine las aceleraciones de los puntos A y B inmediatamente después de que se ha aplicado una fuerza horizontal \mathbf{P} en B .

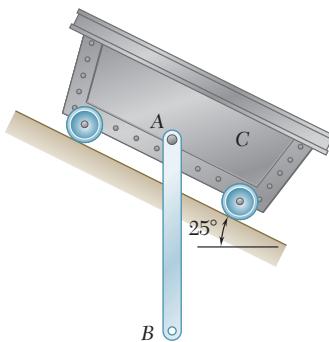


Figura P16.144

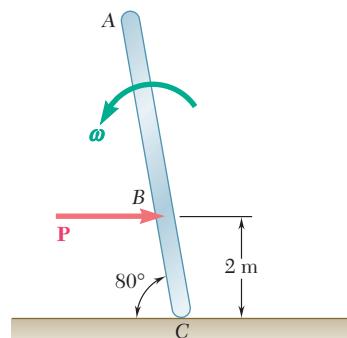


Figura P16.141

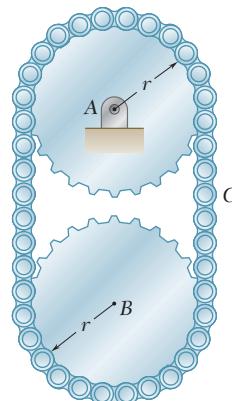


Figura P16.143

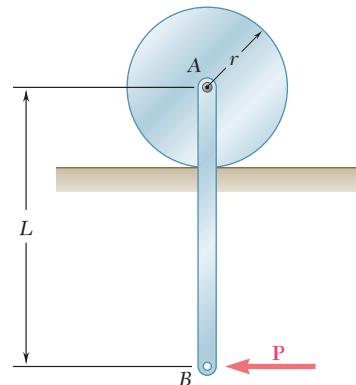


Figura P16.145

***16.146** La varilla delgada AB de 5 kg está conectada mediante un pasador a un disco uniforme de 8 kg, como se muestra en la figura. Inmediatamente después de que el sistema se suelta desde el reposo, determine la aceleración de *a)* el punto A , *b)* el punto B .

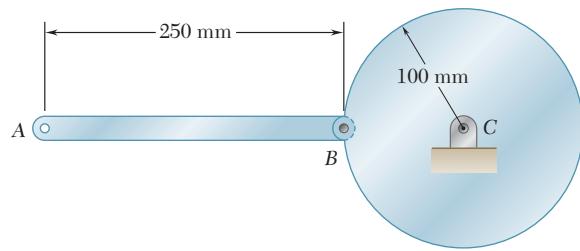


Figura P16.146

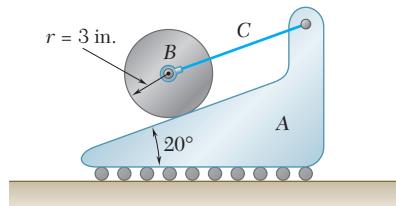


Figura P16.147

***16.147 y *16.148** El cilindro B de 6 lb y la cuña A de 4 lb se mantienen en reposo en la posición indicada con ayuda de la cuerda C . Si se supone que el cilindro rueda sin deslizarse sobre la cuña y se desprecia la fricción entre la cuña y el suelo, determine, inmediatamente después de que se corta la cuerda C , *a)* la aceleración de la cuña, *b)* la aceleración angular del cilindro.

***16.149** Cada una de las barras AB y BC de 3 kg tiene una longitud de $L = 500$ mm. Se aplica una fuerza horizontal \mathbf{P} de 20 N a la barra BC como se muestra en la figura. Si $b = L$ (\mathbf{P} se aplica en C), determine la aceleración angular de cada barra.

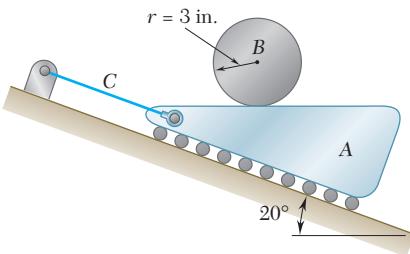


Figura P16.148

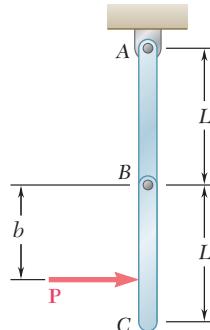


Figura P16.149 y P16.150

***16.150** Cada una de las barras AB y BC de 3 kg tiene una longitud $L = 500$ mm. Se aplica una fuerza horizontal \mathbf{P} de 20 N a la barra BC . Para la posición indicada, determine *a)* la distancia b para la cual la barra se mueve como si formara un cuerpo rígido, *b)* la aceleración angular correspondiente de las barras.

***16.151** *a)* Determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo en la barra del problema 16.76. *b)* Muestre que la respuesta del inciso *a*) es independiente del peso de la barra.

***16.152** Dibuje los diagramas de cortante y momento flector para la barra del problema 16.84 inmediatamente después de que se rompe el cable en B .

REPASO Y RESUMEN

DEL CAPÍTULO 16

En este capítulo se estudió la *cinética de cuerpos rígidos*, esto es, las relaciones que existen entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, la forma y la masa del cuerpo y el movimiento que se produce. Salvo por las primeras dos secciones, las cuales se aplicaron al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido, el análisis se restringió al *movimiento plano de placas rígidas* y cuerpos rígidos simétricos con respecto al plano de referencia. El estudio del movimiento plano de cuerpos rígidos no simétricos y del movimiento de cuerpos rígidos en el espacio tridimensional se considerará en el capítulo 18.

Se recordaron primero [sección 16.2] las dos ecuaciones fundamentales que se dedujeron en el capítulo 14 para el movimiento de un sistema de partículas y se observó que se aplican al caso más general del movimiento de un cuerpo rígido. La primera ecuación define el movimiento del centro de masa G del cuerpo; se tiene

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (16.1)$$

donde m es la masa del cuerpo y $\bar{\mathbf{a}}$ es la aceleración de G . La segunda se relaciona con el movimiento del cuerpo relativo al sistema de referencia centroidal; se escribe

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (16.2)$$

donde $\dot{\mathbf{H}}_G$ es la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del cuerpo alrededor de su centro de masa G . Juntas, las ecuaciones (16.1) y (16.2) expresan que *el sistema de fuerzas externas es equipolente al sistema compuesto por el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ en G y el par de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$* (figura 16.19).

Restringiendo el análisis en este punto y para el resto del capítulo al movimiento plano de placas rígidas y cuerpos rígidos simétricos con respecto al plano de referencia, se demostró [sección 16.3] que la cantidad de movimiento angular del cuerpo podría expresarse como

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega} \quad (16.4)$$

donde \bar{I} es el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje centroidal perpendicular al plano de referencia y $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo. Al diferenciar ambos miembros de la ecuación (16.4) se obtuvo

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I}\boldsymbol{\alpha} \quad (16.5)$$

que muestra que en el caso restringido que se consideró aquí, la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular del cuerpo rígido

Ecuaciones fundamentales de movimiento de un cuerpo rígido

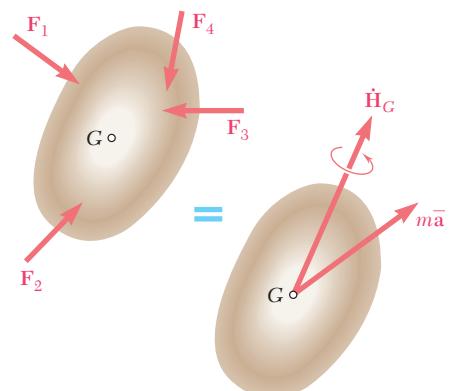


Figura 16.19

Cantidad de movimiento angular en movimiento plano

Ecuaciones para el movimiento plano de un cuerpo rígido

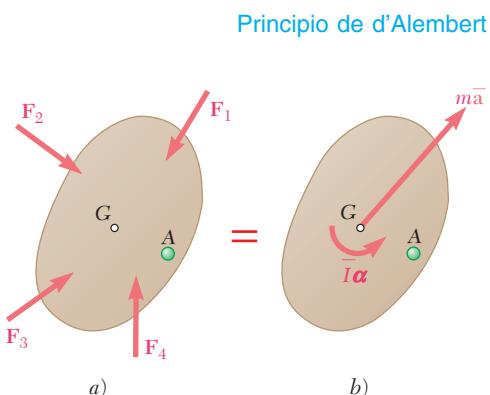


Figura 16.20

Ecuación de cuerpo libre de diagramas

Cuerpos rígidos conectados

Movimiento plano restringido

puede representarse mediante un vector de la misma dirección que α (esto es, perpendicular al plano de referencia) y con magnitud $I\alpha$.

Se concluye de lo anterior [sección 16.4] que el movimiento plano de una placa rígida o de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia se define mediante las tres ecuaciones escalares

$$\sum F_x = m\bar{a}_x \quad \sum F_y = m\bar{a}_y \quad \sum M_G = \bar{I}\alpha \quad (16.6)$$

Se concluye además que *las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido son realmente equivalentes a las fuerzas efectivas de las diversas partículas que forman el cuerpo*. Este enunciado, conocido como *principio de d'Alembert*, puede expresarse en la forma del diagrama vectorial que se muestra en la figura 16.20, donde las fuerzas efectivas se han representado mediante un vector $m\bar{a}$ fijo en G y un par $I\alpha$. En el caso particular de una placa en *traslación*, las fuerzas efectivas que se muestran en la parte b) de esta figura se reducen a un solo vector $m\bar{a}$ en tanto que en el caso particular de una placa en *rotación centroidal*, se reducen a un solo par $I\alpha_z$; en otro caso de movimiento plano, tanto el vector $m\bar{a}$ como el par $I\alpha$ deben incluirse.

Cualquier problema en el que intervenga el movimiento plano de una placa rígida se resuelve dibujando una *ecuación de diagramas de cuerpo libre* similar al de la figura 16.20 [sección 16.6]. Es posible obtener tres ecuaciones de movimiento al igualar las componentes x , las componentes y y los momentos alrededor de un punto arbitrario A , de las fuerzas y vectores que participan [problemas resueltos 16.1, 16.2, 16.4 y 16.5]. Una solución alternativa se obtiene al agregar a las fuerzas externas un *vector de inercia* $-m\bar{a}$ de sentido opuesto al de \bar{a} , fijo en G , y un *par de inercia* $-I\alpha$ de sentido opuesto al de α . El sistema que se obtiene de este modo es equivalente a cero y se dice que la placa está en *equilibrio dinámico*.

El método que acaba de describirse se emplea también para resolver problemas que implican el movimiento plano de varios cuerpos rígidos conectados [sección 16.7]. Se dibuja una ecuación de diagramas de cuerpo libre para cada parte del sistema, y las ecuaciones de movimiento obtenidas se resuelven de manera simultánea. Sin embargo, en algunos casos es posible dibujar un solo diagrama para todo el sistema, en el que se incluyan todas las fuerzas externas, así como los vectores $m\bar{a}$ y los pares $I\alpha$ asociados con las diversas partes del sistema [problema resuelto 16.3].

En la segunda parte del capítulo se estudian cuerpos rígidos que se mueven bajo restricciones determinadas [sección 16.8]. Si bien el análisis cinético del movimiento plano restringido de una placa rígida es el mismo que antes, debe complementarse con un *análisis cinemático* que persigue expresar las componentes \bar{a}_x y \bar{a}_y de la aceleración del centro de masa G de la placa en términos de su aceleración angular α . Los problemas que se resuelven de este modo incluyen la *rotación no centroidal* de barras y placas [problemas resueltos 16.6 y 16.7], el *movimiento de rodamiento* de esferas y ruedas [problemas resueltos 16.8 y 16.9], y el movimiento plano de *diversos tipos de varillajes* [problema resuelto 16.10].

Problemas de repaso

16.153 El eje de un disco de 5 in. de radio se encaja dentro de una ranura que forma un ángulo de 30° con la vertical. El disco se encuentra en reposo cuando se pone en contacto con una banda transportadora que se mueve a velocidad constante. Si se sabe que el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda es de 0.20 y se desprecia la fricción de rodamiento, determine la aceleración angular del disco mientras ocurre el deslizamiento.

16.154 Retome el problema 16.153, y ahora suponga que se invierte la dirección del movimiento de la banda transportadora.

16.155 Unos cilindros idénticos de masa m y radio r se empujan mediante una serie de brazos móviles. Si se supone que el coeficiente de fricción entre todas las superficies es $\mu < 1$ y se denota con a la magnitud de la aceleración de los brazos, obtenga una expresión para *a*) el valor máximo permisible de a si cada cilindro debe rodar sin deslizarse, *b*) el valor mínimo permisible de a si cada cilindro debe moverse hacia la derecha y sin girar.

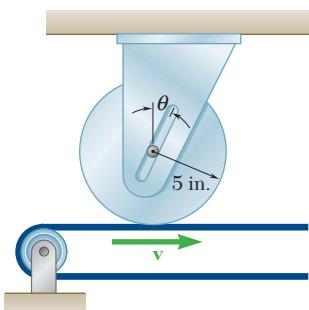


Figura P16.153

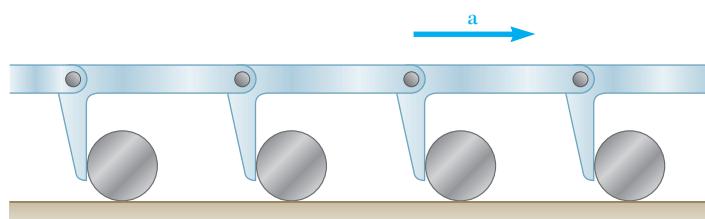


Figura P16.155

16.156 Un ciclista avanza a una velocidad de 20 mph sobre un camino horizontal. La distancia entre los ejes de la bicicleta es de 42 in., y el centro de masa del ciclista y la bicicleta se ubica a 26 in. debajo del eje delantero y 40 in. arriba del suelo. Si el ciclista aplica los frenos sólo sobre la rueda delantera, determine la distancia más corta en la que puede detenerse sin ser lanzado sobre la rueda delantera.

16.157 La varilla uniforme *AB* de peso *W* se suelta desde el reposo cuando $\beta = 70^\circ$. Si se supone que la fuerza de fricción entre el extremo *A* y la superficie es suficientemente grande para evitar el deslizamiento, determine inmediatamente después de la liberación *a*) la aceleración angular de la varilla, *b*) la reacción normal en *A*, *c*) la fuerza de fricción en *A*.

16.158 La varilla uniforme *AB* de peso *W* se suelta desde el reposo cuando $\beta = 70^\circ$. Si se supone que la fuerza de fricción entre el extremo *A* y la superficie es cero, determine inmediatamente después de la liberación *a*) la aceleración angular de la varilla, *b*) la aceleración del centro de masa de la varilla, *c*) la reacción en *A*.

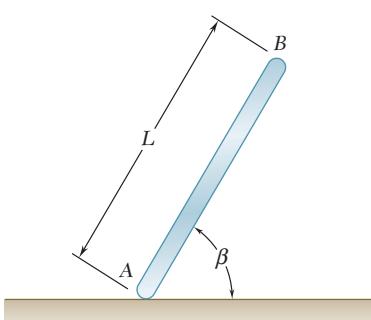


Figura P16.157 y P16.158

16.159 Una placa uniforme de masa m se cuelga en cada una de las formas mostradas. Para cada caso determine, inmediatamente después de que la conexión B se ha liberado, *a)* la aceleración angular de la placa, *b)* la aceleración de su centro de masa.

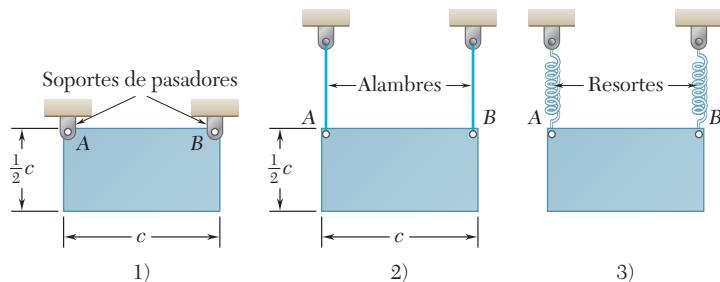


Figura P16.159

16.160 La barra delgada AB de peso W se mantiene en equilibrio mediante dos contrapesos, cada uno con un peso de $\frac{1}{2}W$. Si el alambre B se corta, determine la aceleración en ese instante *a)* del punto A , *b)* del punto B .

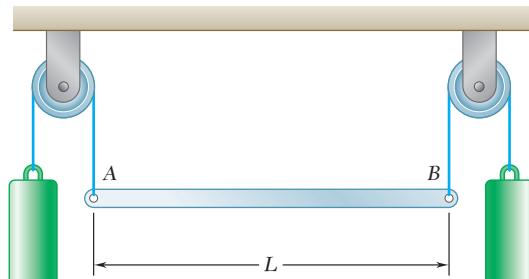


Figura P16.160

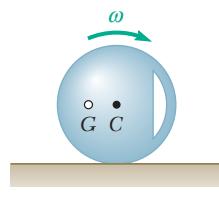


Figura P16.161

16.161 El centro de masa G de una rueda de 5 kg con radio $R = 300$ mm se localiza a una distancia $r = 100$ mm de su centro geométrico C . El radio de giro centroidal es $\bar{k} = 150$ mm. Cuando la rueda gira sin deslizarse, su velocidad angular varía y se observa que $\omega = 8$ rad/s en la posición mostrada. Determine la aceleración angular correspondiente de la rueda.

16.162 Dos barras delgadas, cada una de longitud l y masa m , se sueltan desde el reposo en la posición mostrada. Si un pequeño botón, ubicado en el extremo B de la varilla AB se apoya sobre la barra CD , determine, inmediatamente después de la liberación *a)* la aceleración del extremo C de la barra CD , *b)* la fuerza ejercida sobre el botón.

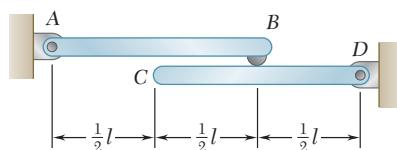


Figura P16.162

16.163 El movimiento de una placa cuadrada con lados de 150 mm y masa de 2.5 kg, está guiado mediante pasadores en las esquinas A y B que se deslizan por ranuras cortadas en una pared vertical. Inmediatamente después de que la placa se libera desde el reposo en la posición mostrada, determine *a*) la aceleración angular de la placa, *b*) la reacción en la esquina A.

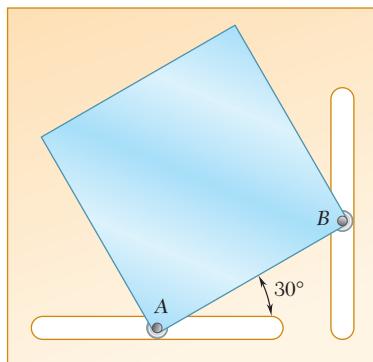


Figura P16.163

16.164 Retome el problema 16.163, y ahora suponga que la placa se conecta con un solo pasador en la esquina A.

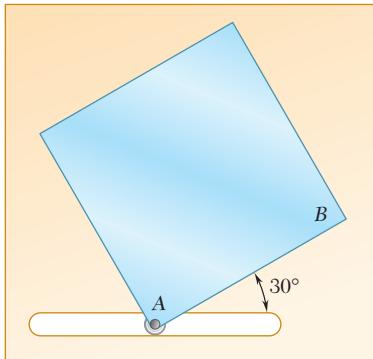


Figura P16.164

Problemas de computadora

16.C1 La barra AB de 5 lb se suelta desde el reposo en la posición mostrada. *a)* Si se supone que la fuerza de fricción entre el extremo A y la superficie es suficientemente grande para evitar el deslizamiento, use software para calcular la reacción normal y la fuerza de fricción en A inmediatamente después de la liberación para valores de β desde 0 hasta 85° . *b)* Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la barra y el piso es en realidad igual a 0.50, determine el rango de valores de β para los cuales la barra se deslizará inmediatamente después de haber sido liberada desde el reposo.

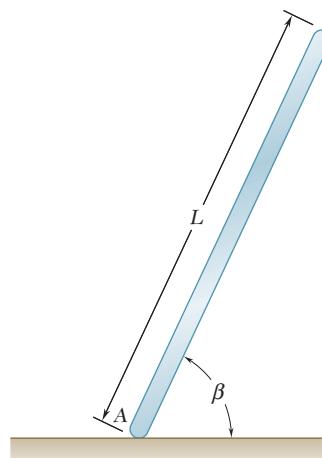


Figura P16.C1

16.C2 El extremo A de una barra AB de 5 kg se mueve hacia la izquierda a una velocidad constante $v_A = 15 \text{ m/s}$. Con software calcule y grifique las reacciones normales en los extremos A y B de la barra para valores de θ desde 0 hasta 50° . Determine el valor de θ con el cual el extremo B de la barra pierde contacto con la pared.

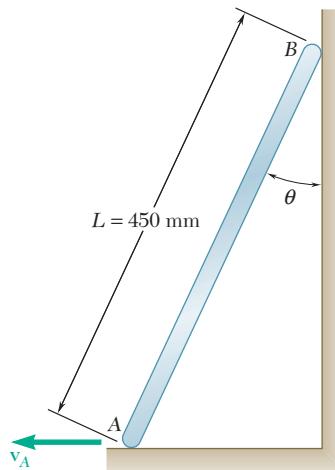


Figura P16.C2

16.C3 Un cilindro de 30 lb, diámetro $b = 8$ in. y altura $h = 6$ in. se coloca sobre una plataforma CD de 10 lb, la cual se mantiene en la posición indicada por medio de tres cables. Se desea determinar el valor mínimo de μ_s entre el cilindro y la plataforma para la cual el cilindro no se desliza sobre la plataforma, inmediatamente después de que se corta el cable AB . Con software calcule y grafique el valor mínimo permisible de μ_s para valores de θ desde 0 hasta 30° . Si se sabe que el valor real de μ_s es 0.60, determine el valor de θ en el cual el deslizamiento es inminente.

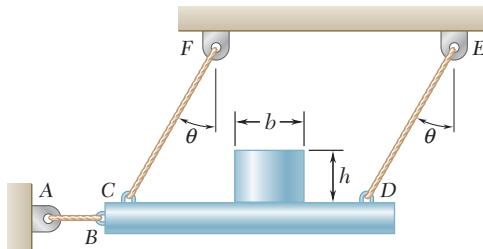


Figura P16.C3

16.C4 Para el sistema motriz del problema 15.C3 del capítulo 15, las masas del pistón P y la biela BD son 2.5 y 3 kg, respectivamente. Si durante una prueba del sistema no se aplica ninguna fuerza a la cara del pistón, use software para calcular y graficar las componentes horizontal y vertical de las reacciones dinámicas ejercidas sobre la biela en B y D para valores de θ desde 0 hasta 180° .

16.C5 Una barra uniforme y ligera AB de masa m se suspende de los resortes AC y BD en la forma que se muestra. Con software, calcule y grafique las aceleraciones de los extremos A y B , inmediatamente después de que el resorte AC se rompe, para valores de θ desde 0 hasta 90° .

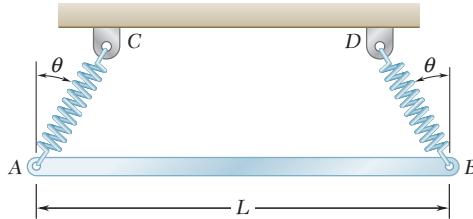


Figura P16.C5

A soft-focus photograph of a gymnast in mid-air, performing a routine on rings. The gymnast's body is blurred, suggesting motion. The background is a bright, overexposed sky.

En este capítulo se agregarán los métodos de la energía y la cantidad de movimiento a las herramientas disponibles para el estudio del movimiento de cuerpos rígidos. Por ejemplo, las fuerzas ejercidas sobre las manos de este gimnasta mientras oscila de un anillo a otro pueden determinarse mediante el uso del principio de la conservación de la energía y la aplicación directa de la segunda ley de Newton.

Movimiento plano de cuerpos rígidos: métodos de la energía y la cantidad de movimiento



CAPÍTULO 17 MOVIMIENTO PLANO DE CUERPOS RÍGIDOS: MÉTODOS DE LA ENERGÍA Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

- 17.1** Introducción
- 17.2** Principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido
- 17.3** Trabajo de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido
- 17.4** Energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano
- 17.5** Sistemas de cuerpos rígidos
- 17.6** Conservación de la energía
- 17.7** Potencia
- 17.8** Principio del impulso y la cantidad de movimiento para el movimiento plano de un cuerpo rígido
- 17.9** Sistemas de cuerpos rígidos
- 17.10** Conservación de la cantidad de movimiento angular
- 17.11** Movimiento impulsivo
- 17.12** Impacto excéntrico



Fotografía 17.1 El trabajo realizado por la fricción reduce la energía cinética del neumático.

17.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se usa el método del trabajo y la energía y el del impulso y la cantidad de movimiento para analizar el movimiento plano de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos.

Primero se considera el método del trabajo y la energía. En las secciones 17.2 a 17.5 se definen el trabajo de una fuerza y de un par, y se obtendrá una expresión para la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano. El principio del trabajo y la energía se utiliza después para resolver problemas en los que participan desplazamientos y velocidades. En la sección 17.6 se aplica al principio de la conservación de la energía a la solución de una diversidad de problemas de ingeniería.

En la segunda parte del capítulo, el principio del impulso y la cantidad de movimiento se aplica en la solución de problemas que implican velocidades y tiempo (secciones 17.8 y 17.9) y se presentará y estudiará el concepto de la conservación de la cantidad de movimiento angular (sección 17.10).

En la última parte del capítulo (secciones 17.11 y 17.12) se consideran problemas que incluyen el impacto excéntrico de cuerpos rígidos. Como se hizo en el capítulo 13, donde se analiza el impacto de partículas, se usará el coeficiente de restitución entre cuerpos que chocan aunado al principio del impulso y la cantidad de movimiento en la solución de problemas de impacto. También se demuestra que el método utilizado se aplica no sólo cuando los cuerpos que chocan se mueven con libertad después del impacto, sino también cuando los cuerpos están sujetos a restricciones parciales en su movimiento.

17.2. PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA PARA UN CUERPO RÍGIDO

El principio del trabajo y la energía se utilizará ahora para analizar el movimiento plano de cuerpos rígidos. Como se señaló en el capítulo 13, este método en particular se adapta bien a la solución de problemas en los que intervienen velocidades y desplazamientos. Su ventaja principal radica en el hecho de que el trabajo de fuerzas y la energía cinética de partículas son cantidades escalares.

Para aplicar el principio del trabajo y la energía en el análisis del movimiento de un cuerpo rígido, se supondrá otra vez que el cuerpo rígido está compuesto por un gran número n de partículas de masa Δm_i . Si se recuerda la ecuación (14.30) de la sección 14.8, se escribe

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (17.1)$$

donde T_1 , T_2 = valores inicial y final de la energía cinética total de las partículas que forman al cuerpo rígido

$U_{1 \rightarrow 2}$ = trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las diversas partículas del cuerpo

La energía cinética total

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i^2 \quad (17.2)$$

se obtiene al sumar cantidades escalares positivas, y ella misma es una cantidad escalar positiva. Después se verá cómo puede determinarse T para diversos tipos de movimiento de un cuerpo rígido.

La expresión $U_{1 \rightarrow 2}$ en (17.1) representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre las distintas partículas del cuerpo, ya sea que estas fuerzas sean internas o externas. Sin embargo, como se verá, el trabajo total de las fuerzas internas que mantienen unidas las partículas de un cuerpo rígido es cero. Considere dos partículas A y B de un cuerpo rígido y las dos fuerzas iguales y opuestas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que se ejercen entre sí (figura 17.1). Mientras que, en general, los pequeños desplazamientos $d\mathbf{r}$ y $d\mathbf{r}'$ de las dos partículas son diferentes, las componentes de estos desplazamientos a lo largo de AB deben ser iguales; de otra forma, las partículas no permanecerían a la misma distancia una de otra y el cuerpo no sería rígido. Por lo tanto, el trabajo de \mathbf{F} es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-\mathbf{F}$, y su suma es cero. Así, el trabajo total de las fuerzas internas que actúan sobre las partículas de un cuerpo rígido es cero, y la expresión $U_{1 \rightarrow 2}$ en la ecuación (17.1) se reduce al trabajo de las fuerzas externas y éstas actúan sobre el cuerpo durante el desplazamiento considerado.

17.3. TRABAJO DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE UN CUERPO RÍGIDO

En la sección 13.2 se vio que el trabajo de una fuerza \mathbf{F} durante un desplazamiento de su punto de aplicación desde A_1 hasta A_2 es

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (17.3)$$

o

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds \quad (17.3')$$

donde F es la magnitud de la fuerza, α es el ángulo que forma con la dirección de movimiento de su punto de aplicación A y s es la variable de integración que mide la distancia recorrida por A a lo largo de su trayectoria.

Al calcular el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido, es a menudo conveniente determinar el trabajo de un par sin considerar por separado el trabajo de cada una de las fuerzas que lo forman. Considere las dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que forman un par de momento \mathbf{M} y que actúan sobre un cuerpo rígido (figura 17.2). Cualquier desplazamiento pequeño del cuerpo rígido que lleve a A y B , respectivamente, hacia A' y B'' puede dividirse en dos partes: en una parte los puntos A y B experimentan iguales desplazamientos $d\mathbf{r}_1$; en la otra, A' permanece fija mientras que B' se mueve hacia B'' a lo largo de un desplazamiento $d\mathbf{r}_2$ de magnitud $ds_2 = r d\theta$. En la primera parte del movimiento, el trabajo de \mathbf{F} es igual en magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-\mathbf{F}$ y su suma es cero. En la segunda parte del movimiento sólo trabaja la fuerza \mathbf{F} , y su trabajo es $dU = F ds_2 = Fr d\theta$. Pero el producto Fr es igual a la magnitud M del momento del par. De tal modo, el trabajo de un par de momento \mathbf{M} que actúa sobre un cuerpo rígido es

$$dU = M d\theta \quad (17.4)$$

donde $d\theta$ es el pequeño ángulo, expresado en radianes, que el cuerpo gira. Adviértase de nuevo que el trabajo debe expresarse en unidades obtenidas al multiplicar unidades de fuerza por unidades de longitud. El trabajo del par durante una rotación finita del cuerpo rígido se ob-

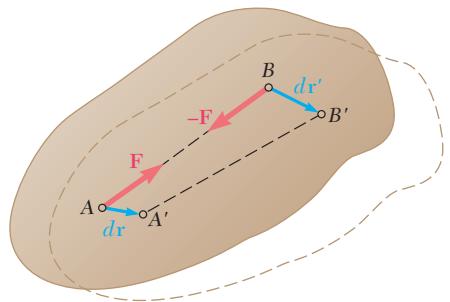


Figura 17.1

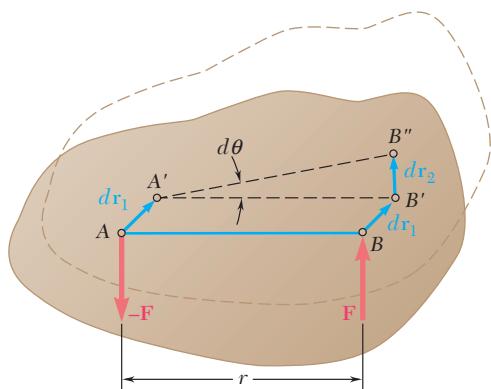


Figura 17.2

tiene integrando ambos miembros de (17.4) desde el valor inicial θ_1 del ángulo θ hasta su valor final θ_2 . Se escribe

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (17.5)$$

Cuando el momento \mathbf{M} del par es constante, la fórmula (17.5) se reduce a

$$U_{1 \rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1) \quad (17.6)$$

En la sección 13.2 se señaló que varias fuerzas que se encuentran en los problemas de cinética *no realizan trabajo*. Son fuerzas aplicadas en puntos fijos o que actúan en una dirección perpendicular al desplazamiento de su punto de aplicación. Entre las fuerzas que no trabajan se han listado las siguientes: la reacción en un pasador sin fricción cuando el cuerpo soportado gira alrededor del pasador; la reacción en una superficie sin fricción cuando el cuerpo en contacto se mueve a lo largo de la superficie, y el peso del cuerpo cuando su centro de gravedad se mueve horizontalmente. Además es posible agregar ahora que *cuando un cuerpo rígido rueda sin deslizarse sobre una superficie fija, la fuerza de fricción \mathbf{F} en el punto de contacto C no realiza trabajo*. La velocidad \mathbf{v}_C del punto de contacto C es cero, y el trabajo de la fuerza de fricción \mathbf{F} durante un desplazamiento pequeño del cuerpo rígido es

$$dU = F ds_C = F(v_C dt) = 0$$

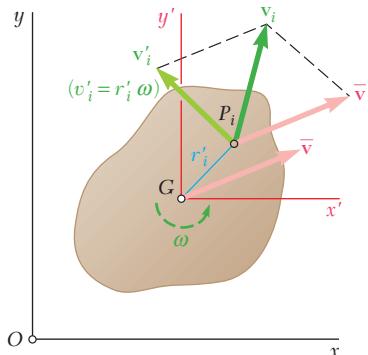


Figura 17.3

17.4. ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN MOVIMIENTO PLANO

Considere un cuerpo rígido de masa m en movimiento planificado. Recuerde de la sección 14.7 que, si la velocidad absoluta \mathbf{v}_i de cada partícula P_i del cuerpo se expresa como la suma de la velocidad \bar{v} del centro de masa G del cuerpo y de la velocidad \mathbf{v}'_i de la partícula relativa al sistema de referencia $Gx'y'$ fijo en G y de orientación fija (figura 17.3), la energía cinética del sistema de partículas que forman al cuerpo rígido puede escribirse en la forma

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v'^2_i \quad (17.7)$$

Pero la magnitud v'_i de la velocidad relativa de P_i es igual al producto $r'_i\omega$ de la distancia r'_i de P_i desde el eje que pasa por G perpendicular al plano de movimiento y de la magnitud ω de la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado. Al sustituir en (17.7), se tiene

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n r'^2_i \Delta m_i \right) \omega^2 \quad (17.8)$$

o, puesto que la suma representa el momento de inercia \bar{I} del cuerpo alrededor del eje que pasa por G ,

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \quad (17.9)$$

Hay que observar que en el caso particular de un cuerpo en traslación ($\omega = 0$), la expresión que se obtiene se reduce a $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$, en tanto que en el caso de una rotación centroidal ($\bar{v} = 0$), se reduce a $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$. Se concluye que la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano puede descomponerse en dos partes: 1) la energía cinética $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ asociada con el movimiento del centro de masa G del cuerpo, y 2) la energía cinética $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$ asociada con la rotación del cuerpo alrededor de G .

Rotación no centroidal. La relación (17.9) es válida para cualquier tipo de movimiento plano y, en consecuencia, se usa para expresar la energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una velocidad angular ω alrededor de un eje fijo que pasa por O (figura 17.4). Sin embargo, en ese caso la energía cinética del cuerpo puede expresarse de manera más directa al notar que la velocidad v_i de la partícula P_i es igual al producto $r_i\omega$ de la distancia r_i de P_i desde el eje fijo y la magnitud ω de la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado. Al sustituir en (17.2), se escribe

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta m_i \right) \omega^2$$

o, ya que la última suma representa el momento de inercia I_O del cuerpo alrededor del eje fijo que pasa por O ,

$$T = \frac{1}{2} I_O \omega^2 \quad (17.10)$$

Observe que los resultados obtenidos no están limitados al movimiento de placas planas o al de cuerpos que son simétricos con respecto al plano de referencia, y es posible aplicarlos al estudio del movimiento plano de cualquier cuerpo rígido, sin que importe su forma. Sin embargo, puesto que la ecuación (17.9) se aplica a cualquier movimiento plano mientras que la ecuación (17.10) sólo se aplica en casos que implican rotación no centroidal, la ecuación (17.9) se utilizará en la solución de todos los problemas resueltos.

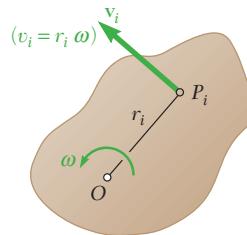


Figura 17.4

17.5. SISTEMAS DE CUERPOS RÍGIDOS

Cuando un problema implica varios cuerpos rígidos, cada cuerpo rígido puede considerarse por separado y el principio del trabajo y la energía aplicarse a cada cuerpo. Al sumar las energías cinéticas de todas las partículas y al considerar el trabajo de todas las fuerzas que participan, es posible escribir también la ecuación del trabajo y la energía para el sistema completo. Así, se tiene

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (17.11)$$

donde T representa la suma aritmética de las energías cinéticas de los cuerpos rígidos que forman al sistema (todos los términos son positivos) y $U_{1 \rightarrow 2}$ representa el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre los distintos cuerpos, ya sea que estas fuerzas sean *internas* o *externas* consideradas desde el punto de vista de un todo.

El método del trabajo y la energía es particularmente útil al resolver problemas que implican miembros conectados por medio de pasadores, bloques y poleas que se conectan mediante cuerdas inextensibles, y engranes dentados. En todos estos casos, las fuerzas internas se presentan por pares de fuerzas iguales y opuestas, y los puntos de aplicación de las fuerzas en cada par *se mueven distancias iguales* durante un pequeño desplazamiento del sistema. Como resultado, el trabajo de las fuerzas internas es cero, y $U_{1 \rightarrow 2}$ se reduce al trabajo de las *fuerzas externas al sistema*.

17.6. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

En la sección 13.6 se analizó que el trabajo de fuerzas conservativas, como el peso de un cuerpo o la fuerza que ejerce un resorte, pueden expresarse como el cambio en la energía potencial. Cuando un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, se mueve bajo la acción de las fuerzas conservativas, el principio del trabajo y la energía enunciado en la sección 17.2 se expresa en una forma modificada. Al sustituir $U_{1 \rightarrow 2}$ de (13.19') en (17.1), se escribe

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (17.12)$$

La fórmula (17.12) indica que cuando un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, *la suma de la energía cinética y de la energía potencial del sistema permanece constante*. Hay que observar que en el caso del movimiento plano de un cuerpo rígido, la energía cinética del cuerpo debe incluir tanto el término *traslacional* $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ y el término *rotacional* $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$.

Como ejemplo de la aplicación del principio de la conservación de la energía, se considerará una barra esbelta *AB*, de longitud l y masa m , cuyas extremidades se conectan a bloques de masa insignificante con deslizamiento a lo largo de sendas correderas horizontal y vertical. Se supone que la barra se suelta sin ninguna velocidad inicial desde la posición horizontal (figura 17.5a) y se desea determinar su velocidad angular después de que ha girado un ángulo θ (figura 17.5b).

Puesto que la velocidad inicial es cero, se tiene que $T_1 = 0$. Al medir la energía potencial desde el nivel de la corredera horizontal se escribe $V_1 = 0$. Después de que la barra ha girado el ángulo θ , el centro

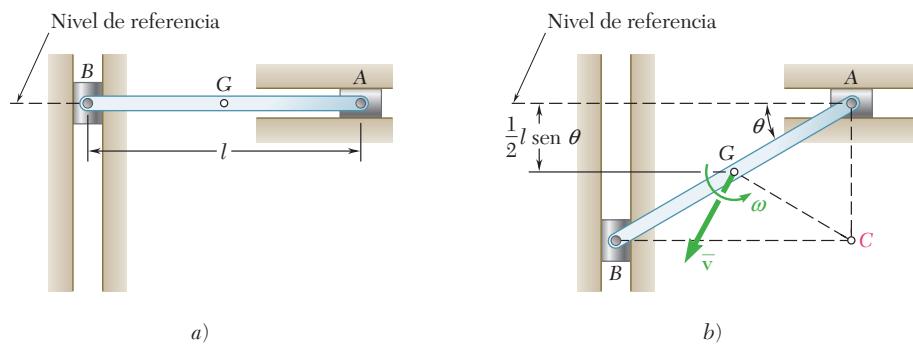


Figura 17.5

de gravedad G de la barra se encuentra a la distancia $\frac{1}{2}l \sin \theta$ por debajo del nivel de referencia y se tiene

$$V_2 = -\frac{1}{2}Wl \sin \theta = -\frac{1}{2}mgl \sin \theta$$

Al observar que en esta posición el centro instantáneo de la barra se ubica en C y que $CG = \frac{1}{2}l$, se escribe $\bar{v}_2 = \frac{1}{2}l\omega$ y se obtiene

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \frac{1}{2}m(\frac{1}{2}l\omega)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}ml^2)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{ml^2}{3} \omega^2 \end{aligned}$$

Al aplicar el principio de conservación de la energía, se escribe

$$\begin{aligned} T_1 + V_1 &= T_2 + V_2 \\ 0 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{ml^2}{3} \omega^2 - \frac{1}{2}mgl \sin \theta \\ \omega &= \left(\frac{3g}{l} \sin \theta \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Las ventajas del método del trabajo y la energía, así como sus desventajas, se indicaron en la sección 13.4. Aquí es preciso agregar que el método del trabajo y la energía debe complementarse con la aplicación del principio de d'Alembert cuando se van a determinar reacciones en ejes fijos, rodillos o bloques corredizos. Por ejemplo, para calcular las reacciones en los extremos A y B de la barra mostrada en la figura 17.5b, se debe trazar un diagrama para expresar que el sistema de fuerzas externas aplicado a la barra es equivalente al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y al par $I\boldsymbol{\alpha}$. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la barra, sin embargo, se determina mediante el método del trabajo y la energía antes de resolver las ecuaciones de movimiento para las reacciones. El análisis completo del movimiento de la barra y de las fuerzas que se ejercen sobre ésta requiere, por lo tanto, del uso combinado del método del trabajo y la energía y del principio de equivalencia de las fuerzas externas y efectivas.

17.7. POTENCIA

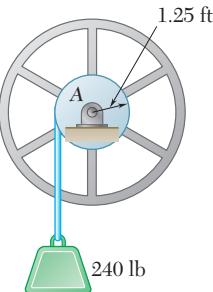
En la sección 13.5, la *potencia* fue definida como la rapidez con la cual se realiza el trabajo. En el caso de un cuerpo sobre el que actúa la fuerza \mathbf{F} , y que se mueve a velocidad \mathbf{v} , la potencia se expresó del modo siguiente:

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (13.13)$$

Para el caso de un cuerpo rígido que gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y se somete a la acción de un par de momento \mathbf{M} paralelo al eje de rotación, se tiene, de acuerdo con la ecuación (17.4),

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{M d\theta}{dt} = M\omega \quad (17.13)$$

Las distintas unidades que se utilizan para medir la potencia, como el watt y el caballo de fuerza, se definieron en la sección 13.5.



PROBLEMA RESUELTO 17.1

Un bloque de 240 lb se suspende de un cable inextensible que está enrollado alrededor de un tambor de 1.25 ft de radio unido rígidamente a un volante. El tambor y el volante tienen un momento de inercia centroidal combinado $\bar{I} = 10.5 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$. En el instante mostrado, la velocidad del bloque es de 6 ft/s dirigida hacia abajo. Si el cojinete en A está mal lubricado y la fricción en el mismo es equivalente a un par \mathbf{M} de 60 lb · ft de magnitud, determine la velocidad del bloque después de que éste se ha movido 4 ft hacia abajo.

SOLUCIÓN

Se considera el sistema formado por el volante y el bloque. Puesto que el cable es inextensible, se cancela el trabajo realizado por las fuerzas internas ejercidas por el cable. Se muestran las posiciones inicial y final del sistema y las fuerzas externas que actúan sobre el mismo.

Energía cinética. Posición 1.

$$\text{Bloque: } \bar{v}_1 = 6 \text{ ft/s}$$

$$\text{Volante: } \omega_1 = \frac{\bar{v}_1}{r} = \frac{6 \text{ ft/s}}{1.25 \text{ ft}} = 4.80 \text{ rad/s}$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}m\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{240 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} (6 \text{ ft/s})^2 + \frac{1}{2}(10.5 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2)(4.80 \text{ rad/s})^2 \\ &= 255 \text{ ft} \cdot \text{lb} \end{aligned}$$

Posición 2. Al notar que $\omega_2 = \bar{v}_2/1.25$, se escribe

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{240 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} (\bar{v}_2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)(10.5) \left(\frac{\bar{v}_2}{1.25}\right)^2 = 7.09\bar{v}_2^2 \end{aligned}$$

Trabajo. Durante el movimiento, sólo el peso \mathbf{W} del bloque y el par de fricción \mathbf{M} efectúan trabajo. Al advertir que \mathbf{W} realiza trabajo positivo y que la fuerza de fricción \mathbf{M} lleva a cabo trabajo negativo, se escribe

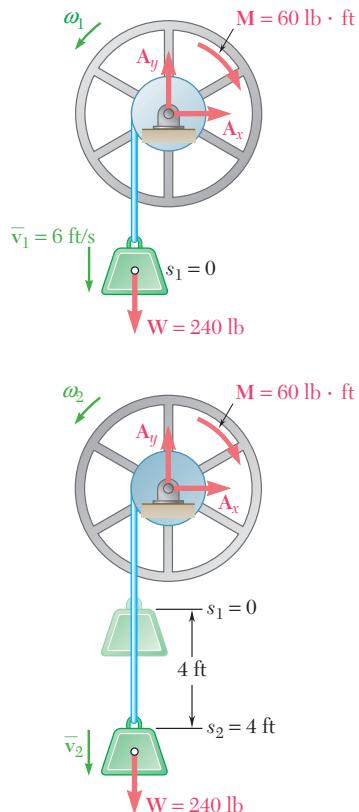
$$s_1 = 0 \quad s_2 = 4 \text{ ft}$$

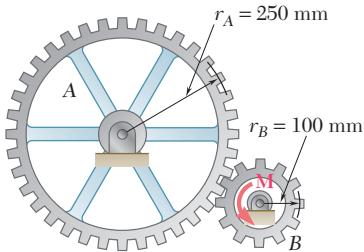
$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = \frac{s_2}{r} = \frac{4 \text{ ft}}{1.25 \text{ ft}} = 3.20 \text{ rad}$$

$$\begin{aligned} U_{1 \rightarrow 2} &= W(s_2 - s_1) - M(\theta_2 - \theta_1) \\ &= (240 \text{ lb})(4 \text{ ft}) - (60 \text{ lb} \cdot \text{ft})(3.20 \text{ rad}) \\ &= 768 \text{ ft} \cdot \text{lb} \end{aligned}$$

Principio del trabajo y la energía

$$\begin{aligned} T_1 + U_{1 \rightarrow 2} &= T_2 \\ 255 \text{ ft} \cdot \text{lb} + 768 \text{ ft} \cdot \text{lb} &= 7.09\bar{v}_2^2 \\ \bar{v}_2 &= 12.01 \text{ ft/s} \quad \bar{v}_2 = 12.01 \text{ ft/s} \downarrow \end{aligned}$$

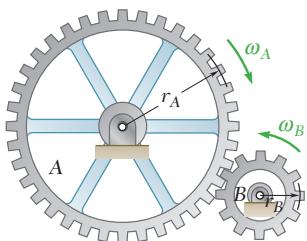




PROBLEMA RESUELTO 17.2

El engrane A tiene una masa de 10 kg y un radio de giro de 200 mm; el engrane B tiene una masa de 3 kg y un radio de giro de 80 mm. El sistema está en reposo cuando un par \mathbf{M} de 6 N · m de magnitud se aplica al engrane B. Si se ignora la fricción determine a) el número de revoluciones ejecutadas por el engrane B antes de que su velocidad angular llegue a 600 rpm, b) la fuerza tangencial que el engrane B ejerce sobre el engrane A.

SOLUCIÓN



Movimiento del sistema completo. Al observar que las velocidades periféricas de los engranes son iguales se escribe

$$r_A \omega_A = r_B \omega_B \quad \omega_A = \omega_B \frac{r_B}{r_A} = \omega_B \frac{100 \text{ mm}}{250 \text{ mm}} = 0.40\omega_B$$

Para $\omega_B = 600$ rpm se tiene

$$\begin{aligned} \omega_B &= 62.8 \text{ rad/s} & \omega_A &= 0.40\omega_B = 25.1 \text{ rad/s} \\ \bar{I}_A &= m_A \bar{k}_A^2 = (10 \text{ kg})/(0.200 \text{ m})^2 = 0.400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ \bar{I}_B &= m_B \bar{k}_B^2 = (3 \text{ kg})/(0.080 \text{ m})^2 = 0.0192 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

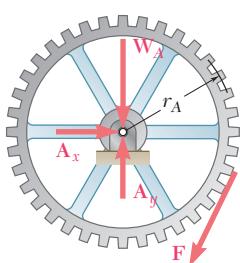
Energía cinética. Puesto que el sistema se encuentra inicialmente en reposo, $T_1 = 0$. Al sumar las energías cinéticas de los dos engranes cuando $\omega_B = 600$ rpm, se obtiene

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}\bar{I}_A \omega_A^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_B \omega_B^2 \\ &= \frac{1}{2}(0.400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(25.1 \text{ rad/s})^2 + \frac{1}{2}(0.0192 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(62.8 \text{ rad/s})^2 \\ &= 163.9 \text{ J} \end{aligned}$$

Trabajo. Al denotar por θ_B el desplazamiento angular del engrane B, se tiene

$$U_{1 \rightarrow 2} = M\theta_B = (6 \text{ N} \cdot \text{m})(\theta_B \text{ rad}) = (6\theta_B) \text{ J}$$

Principio del trabajo y la energía



$$\begin{aligned} T_1 + U_{1 \rightarrow 2} &= T_2 \\ 0 + (6\theta_B) \text{ J} &= 163.9 \text{ J} \\ \theta_B &= 27.32 \text{ rad} \quad \theta_B = 4.35 \text{ rev} \end{aligned}$$

Movimiento del engrane A. Energía cinética. Inicialmente, el engrane A está en reposo, por lo que $T_1 = 0$. Cuando $\omega_B = 600$ rpm, la energía cinética del engrane A es

$$T_2 = \frac{1}{2}\bar{I}_A \omega_A^2 = \frac{1}{2}(0.400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(25.1 \text{ rad/s})^2 = 126.0 \text{ J}$$

Trabajo. Se muestran las fuerzas que actúan sobre el engrane A. La fuerza tangencial \mathbf{F} realiza un trabajo igual al producto de su magnitud y de la longitud $\theta_A r_A$, del arco descrito por el punto de contacto. En vista de que $\theta_A r_A = \theta_B r_B$, se tiene

$$U_{1 \rightarrow 2} = F(\theta_B r_B) = F(27.3 \text{ rad})(0.100 \text{ m}) = F(2.73 \text{ m})$$

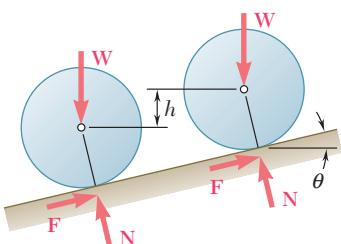
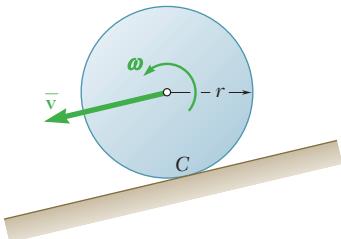
Principio del trabajo y la energía

$$\begin{aligned} T_1 + U_{1 \rightarrow 2} &= T_2 \\ 0 + F(2.73 \text{ m}) &= 126.0 \text{ J} \\ F &= +46.2 \text{ N} \quad \mathbf{F} = 46.2 \text{ N} \end{aligned}$$

PROBLEMA RESUELTO 17.3

Una esfera, un cilindro y un aro, que tienen la misma masa y el mismo radio, se sueltan desde el reposo en una rampa. Determine la velocidad de cada cuerpo después de que éste rueda una distancia correspondiente a un cambio en la altura h .

SOLUCIÓN



El problema se resolverá primero en términos generales y después se encontrarán los resultados para cada cuerpo. Se denota la masa por m , el momento centroidal de inercia por \bar{I} , el peso por W y el radio por r .

Cinemática. Puesto que cada cuerpo rueda, el centro instantáneo de rotación se localiza en C y se escribe

$$\omega = \frac{\bar{v}}{r}$$

Energía cinética

$$\begin{aligned} T_1 &= 0 \\ T_2 &= \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\left(\frac{\bar{v}}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\bar{I}}{r^2}\right)\bar{v}^2 \end{aligned}$$

Trabajo. Puesto que la fuerza de fricción F en el movimiento de rodamiento no realiza trabajo,

$$U_{1 \rightarrow 2} = Wh$$

Principio del trabajo y la energía

$$\begin{aligned} T_1 + U_{1 \rightarrow 2} &= T_2 \\ 0 + Wh &= \frac{1}{2}\left(m + \frac{\bar{I}}{r^2}\right)\bar{v}^2 \quad \bar{v}^2 = \frac{2Wh}{m + \bar{I}/r^2} \end{aligned}$$

Al advertir que $W = mg$, se escribe de nuevo el resultado y se obtiene

$$\bar{v}^2 = \frac{2gh}{1 + \bar{I}/mr^2}$$

Velocidades de la esfera, el cilindro y el aro. Al introducir de manera sucesiva la expresión particular para \bar{I} , se obtiene

Esfera: $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{v} = 0.845\sqrt{2gh}$ ◀

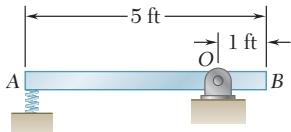
Cilindro: $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{v} = 0.816\sqrt{2gh}$ ◀

Aro: $\bar{I} = mr^2$ $\bar{v} = 0.707\sqrt{2gh}$ ◀

Observación. Se comparan los resultados con la velocidad que alcanza un bloque que desliza sin fricción a lo largo de la misma distancia. La solución es idéntica a la anterior salvo que $\omega = 0$; se encuentra $\bar{v} = \sqrt{2gh}$.

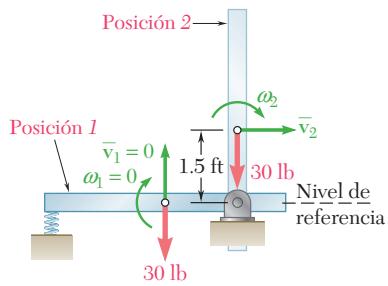
Al comparar los resultados, se observa que la velocidad del cuerpo es independiente tanto de su masa como del radio. Sin embargo, la velocidad depende del cociente $\bar{I}/mr^2 = \bar{k}^2/r^2$, que mide el cociente entre la energía cinética rotacional y la energía cinética traslacional. Así, el aro, el cual tiene la \bar{k} más grande para un radio dado r , alcanza la velocidad más pequeña, en tanto que el bloque deslizante, que no gira, alcanza la mayor velocidad.

PROBLEMA RESUELTO 17.4



Una barra esbelta AB de 30 lb y 5 ft de longitud se articula alrededor de un punto O que se encuentra a 1 ft del extremo B . El otro extremo se presiona contra un resorte de constante $k = 1800 \text{ lb/in.}$ hasta que el resorte se comprime 1 in. La barra se encuentra en ese caso en una posición horizontal. Si se suelta desde esta posición, determine la velocidad angular y la reacción del pivote O cuando la barra pasa por una posición vertical.

SOLUCIÓN



Posición 1. Energía potencial. Puesto que el resorte se comprime 1 in., se tiene $x_1 = 1 \text{ in.}$

$$V_e = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}(1800 \text{ lb/in.})(1 \text{ in.})^2 = 900 \text{ in.} \cdot \text{lb}$$

Al elegir el nivel de referencia como se muestra, se tiene que $V_g = 0$; por lo tanto,

$$V_1 = V_e + V_g = 900 \text{ in.} \cdot \text{lb} = 75 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Energía cinética. Puesto que la velocidad en la posición 1 es cero, se tiene $T_1 = 0$.

Posición 2. Energía potencial. La elongación del resorte es cero y se tiene $V_e = 0$. Puesto que el centro de gravedad de la barra se encuentra ahora a 1.5 ft sobre el nivel de referencia,

$$V_g = (30 \text{ lb})(+1.5 \text{ ft}) = 45 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

$$V_2 = V_e + V_g = 45 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

Energía cinética. Si se denota por ω_2 la velocidad angular de la barra en la posición 2, se advierte que ésta gira alrededor de O y se escribe $\bar{v}_2 = \bar{r}\omega_2 = 1.5\omega_2$.

$$\bar{I} = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12} \frac{30 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} (5 \text{ ft})^2 = 1.941 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

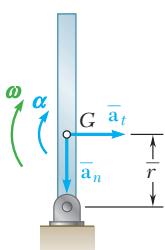
$$T_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{30}{32.2} (1.5\omega_2)^2 + \frac{1}{2}(1.941)\omega_2^2 = 2.019\omega_2^2$$

Conservación de la energía

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 75 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 2.019\omega_2^2 + 45 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

$$\omega_2 = 3.86 \text{ rad/s} \quad \blacktriangleleft$$

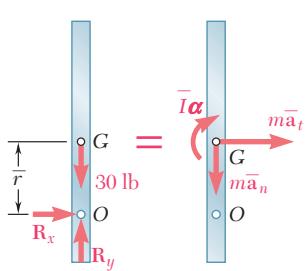


Reacción en la posición 2. Puesto que $\omega_2 = 3.86 \text{ rad/s}$, las componentes de la aceleración de G cuando la barra pasa por la posición 2 son

$$\bar{a}_n = \bar{r}\omega_2^2 = (1.5 \text{ ft})(3.86 \text{ rad/s})^2 = 22.3 \text{ ft/s}^2 \quad \bar{a}_n = 22.3 \text{ ft/s}^2 \downarrow$$

$$a_t = \bar{r}\alpha \rightarrow$$

Se expresa que el sistema de fuerzas externas es equivalente al sistema de fuerzas efectivas representado por el vector de componentes $m\bar{a}_t$ y $m\bar{a}_n$ con su origen en G y el par $I\alpha$.



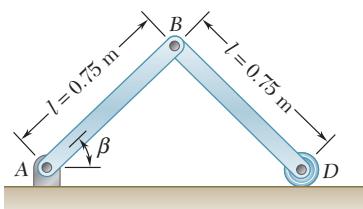
$$+\downarrow \sum M_O = \Sigma(M_O)_{\text{ef}}: \quad 0 = \bar{I}\alpha + m(\bar{r}\alpha)r \quad \alpha = 0$$

$$\pm \rightarrow \sum F_x = \Sigma(F_x)_{\text{ef}}: \quad R_x = m(\bar{r}\alpha) \quad R_x = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = \Sigma(F_y)_{\text{ef}}: \quad R_y - 30 \text{ lb} = -m\bar{a}_n$$

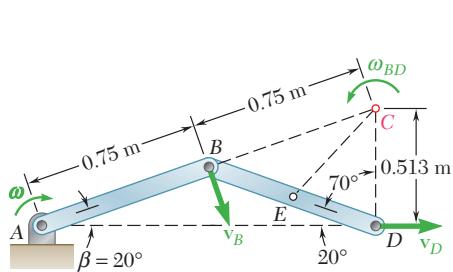
$$R_y - 30 \text{ lb} = -\frac{30 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} (22.3 \text{ ft/s}^2)$$

$$R_y = +9.22 \text{ lb} \quad \mathbf{R} = 9.22 \text{ lb} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 17.5

Cada una de las dos barras delgadas que se muestran tiene una longitud de 0.75 m y una masa de 6 kg. Si el sistema se suelta desde el reposo con $\beta = 60^\circ$, determine a) la velocidad angular de la barra AB cuando $\beta = 20^\circ$ b) la velocidad del punto D en el mismo instante.



SOLUCIÓN

Cinemática de movimiento cuando $\beta = 20^\circ$. Puesto que v_B es perpendicular a la barra AB y v_D es horizontal, el centro instantáneo de rotación de la barra BD se localiza en C. Al considerar la geometría de la figura, se obtiene

$$BC = 0.75 \text{ m} \quad CD = 2(0.75 \text{ m}) \operatorname{sen} 20^\circ = 0.513 \text{ m}$$

Al aplicar la ley de los cosenos al triángulo CDE, donde E se localiza en el centro de masa de la barra BD, se encuentra $EC = 0.522 \text{ m}$. Al denotar mediante ω la velocidad angular de la barra AB, se tiene

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AB} &= (0.375 \text{ m})\omega & \bar{v}_{AB} &= 0.375\omega \downarrow \\ v_B &= (0.75 \text{ m})\omega & \bar{v}_B &= 0.75\omega \downarrow \end{aligned}$$

Puesto que la barra BD parece girar alrededor del punto C, se escribe

$$\begin{aligned} v_B &= (BC)\omega_{BD} & (0.75 \text{ m})\omega &= (0.75 \text{ m})\omega_{BD} & \omega_{BD} &= \omega \uparrow \\ \bar{v}_{BD} &= (EC)\omega_{BD} & (0.522 \text{ m})\omega &= \bar{v}_{BD} & \bar{v}_{BD} &= 0.522\omega \downarrow \end{aligned}$$

Posición 1. Energía potencial. Al elegir el nivel de referencia como se indica, y observar que $W = (6 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 58.86 \text{ N}$, se tiene

$$V_1 = 2W\bar{y}_1 = 2(58.86 \text{ N})(0.325 \text{ m}) = 38.26 \text{ J}$$

Energía cinética. Puesto que el sistema está en reposo, $T_1 = 0$.

Posición 2. Energía potencial

$$V_2 = 2W\bar{y}_2 = 2(58.86 \text{ N})(0.1283 \text{ m}) = 15.10 \text{ J}$$

Energía cinética

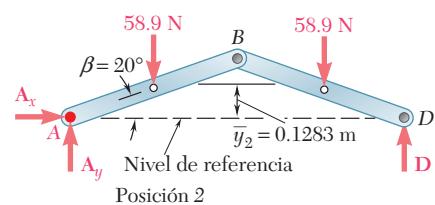
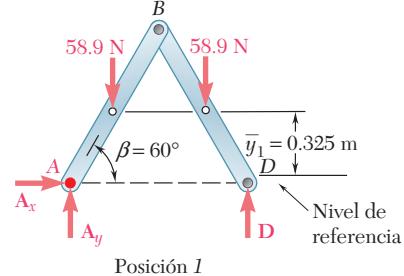
$$\begin{aligned} I_{AB} &= \bar{I}_{BD} = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}(6 \text{ kg})(0.75 \text{ m})^2 = 0.281 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ T_2 &= \frac{1}{2}m\bar{v}_{AB}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_{AB}\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}m\bar{v}_{BD}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_{BD}\omega_{BD}^2 \\ &= \frac{1}{2}(6)(0.375\omega)^2 + \frac{1}{2}(0.281)\omega^2 + \frac{1}{2}(6)(0.522\omega)^2 + \frac{1}{2}(0.281)\omega^2 \\ &= 1.520\omega^2 \end{aligned}$$

Conservación de la energía

$$\begin{aligned} T_1 + V_1 &= T_2 + V_2 \\ 0 + 38.26 \text{ J} &= 1.520\omega^2 + 15.10 \text{ J} \\ \omega &= 3.90 \text{ rad/s} \quad \omega_{AB} = 3.90 \text{ rad/s} \downarrow \end{aligned}$$

Velocidad del punto D

$$\begin{aligned} v_D &= (CD)\omega = (0.513 \text{ m})(3.90 \text{ rad/s}) = 2.00 \text{ m/s} \\ v_D &= 2.00 \text{ m/s} \rightarrow \end{aligned}$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se presentaron los métodos de la energía para determinar la velocidad de cuerpos rígidos en varias posiciones durante su movimiento. Como se vio en el capítulo 13, los métodos de la energía deben considerarse en problemas que implican desplazamientos y velocidades.

1. El método del trabajo y la energía, cuando se aplica a todas las partículas que constituyen un cuerpo rígido, produce la ecuación

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (17.1)$$

donde T_1 y T_2 son, respectivamente, los valores inicial y final de la energía cinética total de las partículas que forman el cuerpo y $U_{1 \rightarrow 2}$ es el *trabajo realizado por las fuerzas externas* ejercido sobre el cuerpo rígido.

a) Trabajo de fuerzas y pares. A la expresión para el trabajo de una fuerza (capítulo 13) se agregó la expresión para el trabajo de un par y se escribió

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (17.3, 17.5)$$

Cuando el momento de un par es constante, el trabajo del par es

$$U_{1 \rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1) \quad (17.6)$$

donde θ_1 y θ_2 se expresan en radianes [problemas resueltos 17.1 y 17.2].

b) La energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano se determinó al considerar el movimiento del cuerpo como la suma de una traslación con su centro de masa y una rotación alrededor del centro de masa.

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \quad (17.9)$$

donde \bar{v} es la velocidad del centro de masa y ω es la velocidad angular del cuerpo [problemas resueltos 17.3 y 17.4].

2. Para un sistema de cuerpos rígidos otra vez se utilizó la ecuación

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (17.1)$$

donde T es la suma de las energías cinéticas de los cuerpos que forman el sistema y U es el trabajo que realizan *todas las fuerzas que actúan sobre los cuerpos*, internas y externas. Los cálculos se simplificarán si se tiene en cuenta lo siguiente:

a) Las fuerzas ejercidas entre sí por miembros conectados con pasador o por engranes dentados son iguales y opuestas y, como tienen el mismo punto de aplicación, experimentan desplazamientos pequeños e iguales. Por lo tanto, su *trabajo total es cero* y es posible omitirlo de los cálculos [problema resuelto 17.2].

(continúa)

b) Las fuerzas ejercidas por una cuerda inextensible sobre los dos cuerpos que conecta tiene la misma magnitud y sus puntos de aplicación se mueven en distancias iguales, aunque el trabajo de una fuerza es positivo y el de la otra es negativo. Por lo tanto, *su trabajo total es cero* y también es posible omitirlo de nuevo en los cálculos [problema resuelto 17.1].

c) Las fuerzas ejercidas por un resorte sobre los dos cuerpos que conectan también tienen la misma magnitud, aunque sus puntos de aplicación por lo general se moverán diferentes distancias. Por lo tanto, *su trabajo total no suele ser de cero* y debe tomarse en cuenta en los cálculos.

3. El principio de la conservación de la energía puede expresarse como

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (17.12)$$

donde V representa la energía potencial del sistema. Es posible utilizar este principio cuando sobre un cuerpo o sistema de cuerpos actúan fuerzas conservativas, tales como la que ejerce un resorte o la fuerza de la gravedad [problemas resueltos 17.4 y 17.5].

4. La última sección de esta lección se dedicó a la potencia, que es la rapidez a la cual se realiza el trabajo. Para un cuerpo sobre el que actúa un par de momento \mathbf{M} es posible expresar la potencia como

$$\text{Potencia} = M\omega \quad (17.13)$$

donde ω es la velocidad angular del cuerpo expresada en rad/s. Como se hizo en el capítulo 13, debe expresar la potencia ya sea en watts o en caballos de fuerza ($1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$).

Problemas

17.1 Se requieren 1 500 revoluciones para que un volante de 6 000 lb gire hasta detenerse a partir de una velocidad angular de 300 rpm. Si el radio de giro del volante es de 36 in., determine la magnitud promedio del par debido a la fricción cinética en los cojinetes.

17.2 El rotor de un motor eléctrico tiene una velocidad angular de 3 600 rpm cuando se interrumpen la carga y la energía eléctrica. El rotor de 50 kg, que tiene un radio de giro centroidal de 180 mm, gira hasta detenerse. Si la fricción cinética del rotor produce un par de magnitud igual a $3.5 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine el número de revoluciones que ejecuta el rotor antes de quedar en reposo.

17.3 Dos discos uniformes del mismo material se unen a una flecha en la forma indicada. El disco A tiene un radio r y un grosor b , mientras que el disco B tiene un radio nr y un grosor $3b$. Se aplica un par \mathbf{M} de magnitud constante cuando el sistema está en reposo y se retira después de que el sistema ha realizado 2 revoluciones. Determine el valor de n que produce la máxima velocidad final para un punto sobre el borde del disco B.

17.4 Dos discos uniformes del mismo material se fijan a una flecha en la forma indicada. El disco A tiene una masa de 15 kg y un radio $r = 125$ mm. El disco B es tres veces más grueso que el disco A. Si se aplica un par \mathbf{M} de $20 \text{ N} \cdot \text{m}$ de magnitud al disco A cuando el sistema está en reposo, determine el radio nr del disco B si la velocidad angular del sistema debe ser de 600 rpm después de 4 revoluciones.

17.5 El volante de una máquina perforadora tiene una masa de 300 kg y un radio de giro de 600 mm. Cada operación de perforación requiere 2 500 j de trabajo. *a)* Si la velocidad del volante es de 300 rpm justo antes de una perforación, determine la velocidad inmediatamente después de la perforación. *b)* Si se aplica un par constante de $25 \text{ N} \cdot \text{m}$ al eje del volante, determine el número de revoluciones ejecutadas antes de que la velocidad sea otra vez de 300 rpm.

17.6 El volante de una pequeña máquina de perforación gira a 360 rpm. Cada operación de perforación requiere $1 500 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ de trabajo y se desea que la velocidad del volante después de cada perforación no sea menor de 95 por ciento que la velocidad original. *a)* Determine el momento de inercia requerido del volante. *b)* Si se aplica un par constante de $18 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ a la flecha del volante, determine el número de revoluciones que debe ocurrir entre dos perforaciones sucesivas, si se sabe que la velocidad inicial debe ser de 360 rpm al inicio de cada perforación.

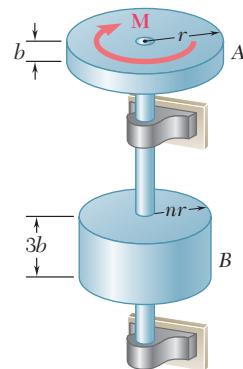


Figura P17.3 y P17.4

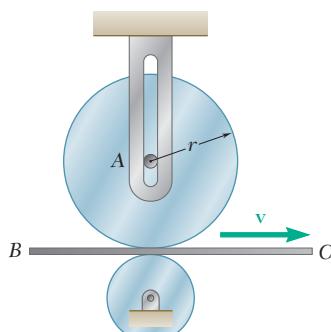


Figura P17.7 y P17.8

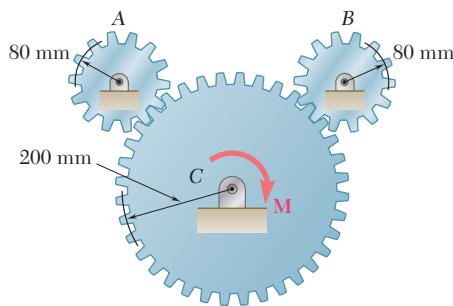


Figura P17.9

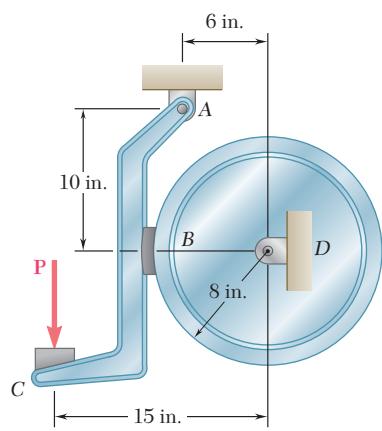


Figura P17.12

17.7 El disco A tiene un grosor constante y se encuentra en reposo cuando está en contacto con la banda BC, la cual se mueve con una velocidad constante v . Si se denota con μ_k el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda, obtenga una expresión para el número de revoluciones ejecutadas por el disco antes de alcanzar una velocidad angular constante.

17.8 El disco A con peso de 10 lb y radio $r = 6$ in., se encuentra en reposo cuando está en contacto con la banda BC, la cual se mueve hacia la derecha con una velocidad constante $v = 40$ ft/s. Si $\mu_k = 0.20$ entre el disco y la banda, determine el número de revoluciones ejecutadas por el disco antes de alcanzar una velocidad angular constante.

17.9 Cada uno de los engranes A y B tiene una masa de 2.4 kg y un radio de giro de 60 mm, mientras que el engrane C tiene una masa de 12 kg y un radio de giro de 150 mm. Se aplica un par M con magnitud constante de 10 N · m al engrane C. Determine a) el número de revoluciones del engrane C que se requieren para que su velocidad angular aumente de 100 a 450 rpm, b) la correspondiente fuerza tangencial que actúa sobre el engrane A.

17.10 Retome el problema 17.9, y ahora suponga que se aplica un par de 10 N · m al engrane B.

17.11 La doble polea que se muestra tiene un peso de 30 lb y un radio de giro centroidal de 6.5 in. El cilindro A y el bloque B están unidos a cuerdas que se enrollan sobre las poleas en la forma que se indica. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque B y la superficie es 0.25. Si se sabe que el sistema se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine a) la velocidad del cilindro A cuando éste golpea el suelo, b) la distancia total que se mueve el bloque B antes de quedar en reposo.

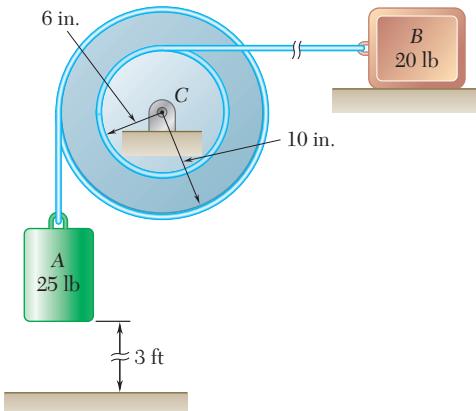


Figura P17.11

17.12 El tambor de freno de 8 in. de radio se fija a un volante más grande que no está mostrado en la figura. El momento de inercia de la masa total del volante y el tambor es igual a $14 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$ y el coeficiente de fricción cinética entre el tambor y la zapata del freno es de 0.35. Si la velocidad angular inicial del volante es de 360 rpm en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la fuerza vertical P que debe aplicarse al pedal C si el sistema debe detenerse en 100 revoluciones.

17.13 Retome el problema 17.12, y ahora suponga que la velocidad angular inicial del volante es de 360 rpm en el sentido de las manecillas del reloj.

17.14 El tren de engranes mostrado consta de cuatro engranes con el mismo grosor y del mismo material; dos engranes son de radio r , y los otros dos son de radio nr . El sistema se encuentra en reposo cuando se aplica el par \mathbf{M}_0 a la flecha C . Si se denota con I_0 el momento de inercia de un engrane de radio r , determine la velocidad angular de la flecha A si el par \mathbf{M}_0 se aplica durante una revolución de la flecha C .

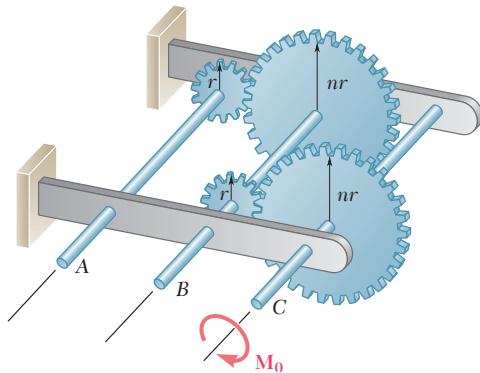


Figura P17.14

17.15 Los tres discos de fricción que se muestran en la figura están hechos del mismo material y tienen el mismo grosor. Se sabe que el disco A pesa 12 lb y que los radios de los discos son $r_A = 8$ in., $r_B = 6$ in. y $r_C = 4$ in. El sistema se encuentra en reposo cuando se aplica un par \mathbf{M}_0 con magnitud constante de 60 lb · in. al disco A . Si se supone que no ocurre deslizamiento entre los discos, determine el número de revoluciones requerido para que el disco A alcance una velocidad angular de 150 rpm.

17.16 y 17.17 Una barra esbelta de 4 kg puede girar en un plano vertical en torno a un pivote en B . Se fija un resorte de constante $k = 400$ N/m y una longitud no deformada de 150 mm a la barra en la forma indicada. Si la barra se suelta desde el reposo en la posición que se muestra, determine su velocidad angular después de que haya girado 90° .

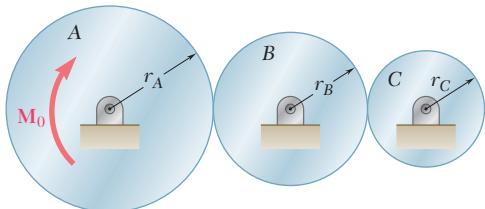


Figura P17.15

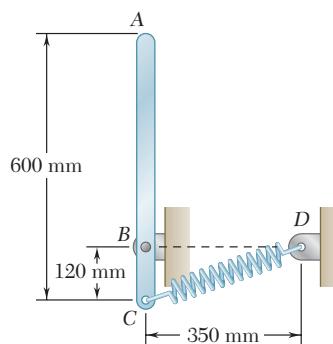


Figura P17.16

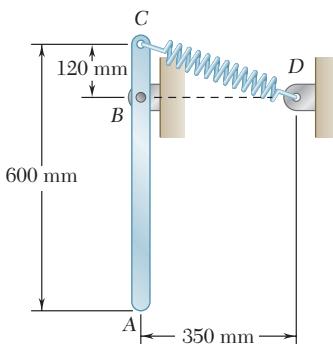


Figura P17.17

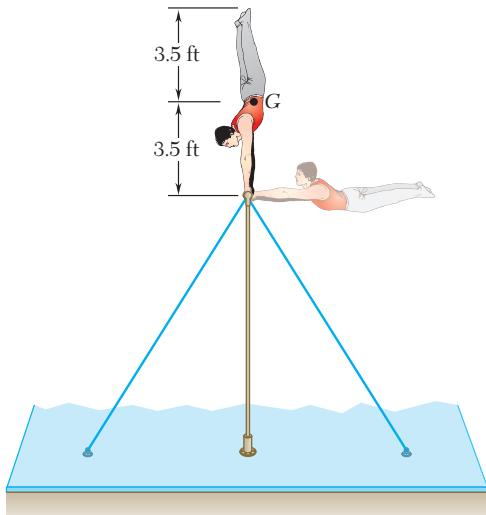
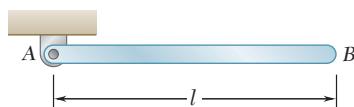
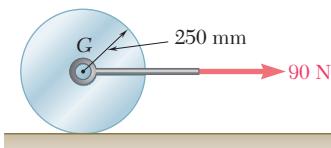
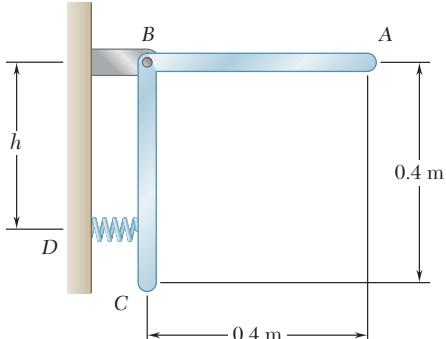
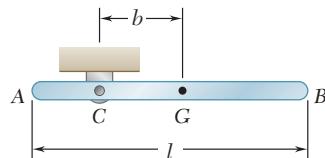


Figura P17.20



17.18 Una barra delgada de longitud l y peso W se articula en uno de sus extremos como se muestra en la figura. Se suelta desde el reposo en una posición horizontal y oscila libremente. *a)* Determine la velocidad angular de la barra cuando pasa por una posición vertical y determine la reacción correspondiente en el pivote. *b)* Resuelva el inciso *a*) para $W = 1.8 \text{ lb}$ y $l = 3 \text{ ft}$.

17.19 Una barra delgada de longitud l se articula alrededor del punto C ubicado a una distancia b de su centro G . Se suelta desde el reposo en una posición horizontal y oscila libremente. Determine *a)* la distancia b para la cual la velocidad angular de la barra, cuando ésta pasa por una posición vertical, es máxima, *b)* los valores correspondientes de su velocidad angular y de la reacción en C .



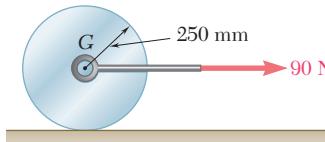
17.20 Un gimnasta de 160 lb ejecuta una serie de oscilaciones completas sobre la barra horizontal. En la posición que se muestra, el atleta tiene una velocidad angular muy pequeña, y despreciable, en el sentido de las manecillas del reloj y mantendrá su cuerpo recto y rígido al oscilar hacia abajo. Si se supone que durante la oscilación el radio de giro centroidal de su cuerpo es de 1.5 ft, determine su velocidad angular y la fuerza ejercida sobre sus manos después de que ha girado *a)* 90°, *b)* 180°.

17.21 Dos barras ligeras idénticas AB y BC se sueldan entre sí para formar un mecanismo en forma de L, el cual se presiona contra un resorte en D y se suelta desde la posición indicada. Si se sabe que el ángulo máximo de rotación del mecanismo en su movimiento subsecuente es de 90° en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la magnitud de la velocidad angular del mecanismo cuando pasa por la posición en la que la barra AB forma un ángulo de 30° con la horizontal.

17.22 Un collarín con una masa de 1 kg está unido rígidamente a una distancia $d = 300 \text{ mm}$ del extremo de una barra delgada uniforme AB . La barra tiene una masa de 3 kg y una longitud $L = 600 \text{ mm}$. Si la barra se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine la velocidad angular de la barra después de que haya girado 90°.

17.23 Un collarín con una masa de 1 kg está unido rígidamente a una barra delgada y uniforme, AB , con una masa de 3 kg y una longitud $L = 600 \text{ mm}$. La barra se suelta desde el reposo en la posición mostrada. Determine la distancia d para la que la velocidad angular de la barra es máxima después de que haya girado 90°.

17.24 Un rodillo cilíndrico uniforme de 20 kg, inicialmente en reposo, se somete a la acción de una fuerza de 90 N en la forma que se indica. Si el cuerpo rueda sin deslizarse, determine *a)* la velocidad de su centro G después de que se ha movido 1.5 m, *b)* la fuerza de fricción que se requiere para evitar el deslizamiento.



17.25 Una cuerda se enrolla alrededor de un cilindro de radio r y masa m en la forma indicada. Si el cilindro se suelta desde el reposo determine la velocidad del centro del mismo después de que ha descendido una distancia s .

17.26 Retome el problema 17.25, y ahora suponga que el cilindro se reemplaza por un tubo de pared delgada con radio r y masa m .

17.27 El centro de masa G de una rueda de 3 kg con radio $R = 180$ mm se ubica a una distancia $r = 60$ mm desde su centro geométrico C . El radio de giro centroidal de la rueda es $\bar{k} = 90$ mm. Mientras la rueda gira sin deslizarse, se observa que su velocidad angular varía. Si $\omega = 8$ rad/s en la posición mostrada, determine *a)* la velocidad angular de la rueda cuando el centro de masa G está directamente arriba del centro geométrico C , *b)* la reacción en la superficie horizontal en el mismo instante.

17.28 Un collarín B , de masa m y dimensiones insignificantes, está fijo al borde de un aro de la misma masa m y de radio r que rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal. Determine la velocidad angular ω_1 del aro en términos de g y r cuando B está directamente arriba del centro A , considerando que la velocidad angular es $3\omega_1$ cuando B está directamente debajo de A .

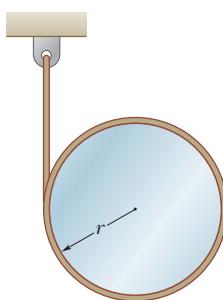


Figura P17.25

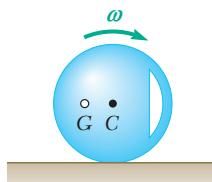


Figura P17.27

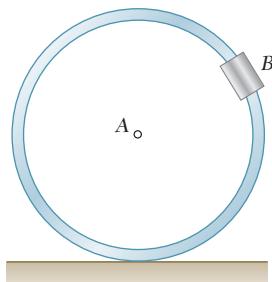


Figura P17.28

17.29 La mitad de una sección de tubo con masa m y radio r se suelta desde el reposo en la posición indicada. Si el medio tubo rueda sin deslizarse, determine *a)* su velocidad angular después de que ha girado 90° , *b)* la reacción en la superficie horizontal en el mismo instante. [Sugerencia: Note que $GO = 2r/\pi$ y que, mediante el teorema de ejes paralelos, $\bar{I} = mr^2 - m(GO)^2$.]

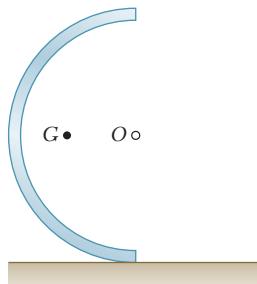


Figura P17.29

17.30 Dos cilindros uniformes, cada uno con peso $W = 14$ lb y radio $r = 5$ in., están conectados mediante una banda como se muestra en la figura. Si la velocidad angular del cilindro B es de 30 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine *a)* la distancia que se elevará el cilindro A antes de que la velocidad angular del cilindro B se reduzca a 5 rad/s, *b)* la tensión en la porción de la banda que conecta los dos cilindros.

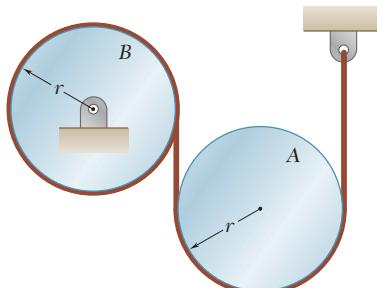


Figura P17.30 y P17.31

17.31 Dos cilindros uniformes, cada uno con peso $W = 14$ lb y radio $r = 5$ in., están conectados mediante una banda como se muestra en la figura. Si el sistema se suelta desde el reposo, determine *a)* la velocidad del centro del cilindro A después de que se haya desplazado 3 ft, *b)* la tensión en la porción de la banda que conecta los dos cilindros.

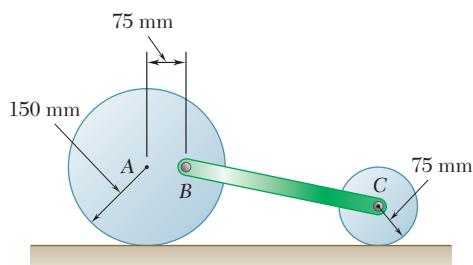


Figura P17.32

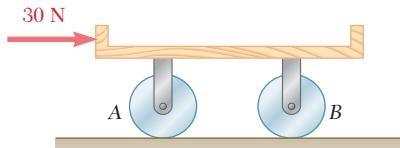


Figura P17.33

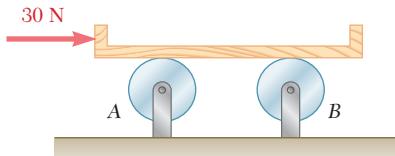


Figura P17.34

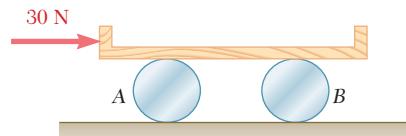


Figura P17.35

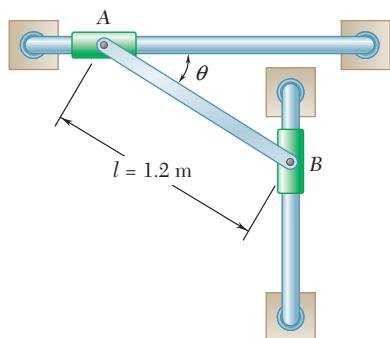


Figura P17.36 y P17.37

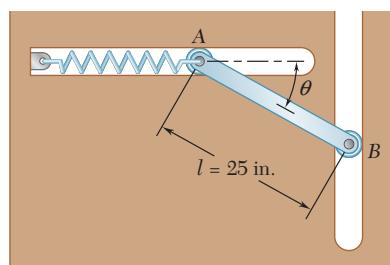


Figura P17.38 y P17.39

17.32 La barra BC de 5 kg está unida mediante pasadores a dos discos uniformes como se muestra en la figura. El disco con radio de 150 mm tiene una masa de 6 kg y el disco con radio de 75 mm tiene una masa de 1.5 kg. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición mostrada, determine la velocidad de la barra después de que el disco haya girado 90° .

17.33 a 17.35 La plataforma de 9 kg está soportada, como se muestra, por dos discos uniformes que ruedan sin deslizarse en todas las superficies de contacto. La masa de cada disco es de $m = 6$ kg y el radio $r = 80$ mm. Si se sabe que el sistema está inicialmente en reposo, determine la velocidad de la plataforma después de que ésta se haya desplazado 250 mm.

17.36 El movimiento de la barra ligera AB de 10 kg se guía mediante collarines de masa despreciable, los cuales se deslizan libremente sobre las barras horizontal y vertical. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 30^\circ$, determine la velocidad de los collarines A y B cuando $\theta = 60^\circ$.

17.37 El movimiento de la barra ligera AB de 10 kg se guía mediante collarines de masa despreciable, los cuales se deslizan libremente sobre las barras horizontal y vertical. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 20^\circ$, determine la velocidad de los collarines A y B cuando $\theta = 90^\circ$.

17.38 Los extremos de una barra AB de 9 lb están restringidos a moverse a lo largo de ranuras cortadas en una placa vertical en la forma que se indica. Un resorte de constante $k = 3$ lb/in. se fija al extremo A de manera tal que su tensión es cero cuando $\theta = 0$. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 0$, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad del extremo B cuando $\theta = 30^\circ$.

17.39 Los extremos de una barra AB de 9 lb están restringidos a moverse a lo largo de ranuras cortadas en una placa vertical en la forma que se indica. Un resorte de constante $k = 3$ lb/in. se fija al extremo A de manera tal que su tensión es cero cuando $\theta = 0$. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 50^\circ$, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad del extremo B cuando $\theta = 0$.

17.40 El movimiento de la barra uniforme AB se guía mediante ruedas pequeñas de masa despreciable que ruedan sobre la superficie que se muestra en la figura. Si la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 0$, determine las velocidades de A y B cuando $\theta = 30^\circ$.

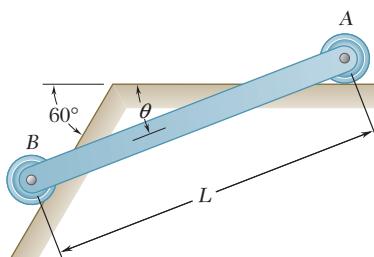


Figura P17.40

17.41 El movimiento de una barra delgada de longitud R se guía mediante pasadores en A y B , los cuales se deslizan libremente en ranuras cortadas en una placa vertical, como se muestra en la figura. Si el extremo B se mueve un poco a la izquierda y después se suelta, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad de su centro de masa *a)* en el instante que la velocidad del extremo B es cero, *b)* cuando el extremo B pasa por el punto D .

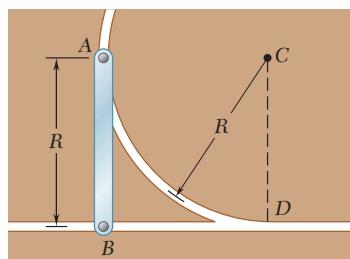


Figura P17.41

17.42 Dos barras uniformes, cada una de masa m y longitud L , se conectan para formar el mecanismo mostrado. El extremo D de la barra BD puede deslizarse con libertad en la ranura horizontal, mientras que el extremo A de la barra AB se sostiene mediante un pasador y una ménsula. Si el extremo D se mueve ligeramente hacia la izquierda y luego se suelta, determine su velocidad *a)* cuando está directamente abajo de A , *b)* cuando la barra AB está en posición vertical.

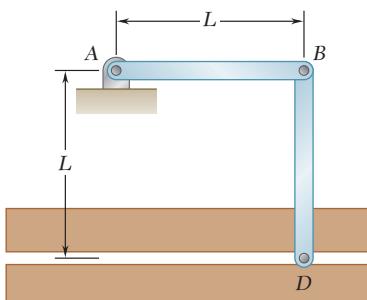


Figura P17.42

17.43 Los pesos respectivos de las barras uniformes AB y BC son 2.4 lb y 4 lb, y la pequeña rueda C tiene un peso insignificante. Si la rueda se mueve ligeramente hacia la derecha y luego se suelta, determine la velocidad del pasador B después de que la barra AB haya girado 90° .

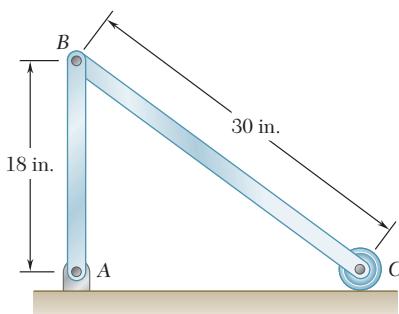


Figura P17.43 y P17.44

17.44 Los pesos respectivos de las barras uniformes AB y BC son 2.4 lb y 4 lb, y la pequeña rueda C tiene un peso insignificante. Si en la posición que se muestra la velocidad de la rueda C es de 6 ft/s hacia la derecha, determine la velocidad del pasador B después de que la barra AB haya girado 90° .

17.45 La barra AB de 4 kg se fija a un collarín de masa despreciable en A y a un volante en B . El volante tiene un peso de 16 kg y un radio de giro de 180 mm. Si en la posición mostrada la velocidad angular del volante es de 60 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine la velocidad del volante cuando el punto B está directamente abajo de C .

17.46 Si en el problema 17.45 la velocidad angular del volante debe ser la misma en la posición mostrada y cuando el punto B está directamente arriba de C , determine el valor requerido de su velocidad angular en la posición que se indica.

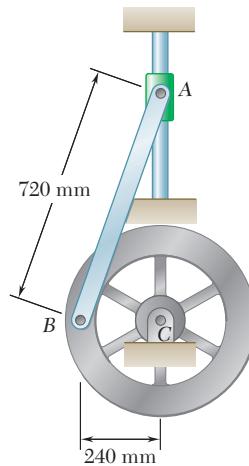


Figura P17.45 y P17.46

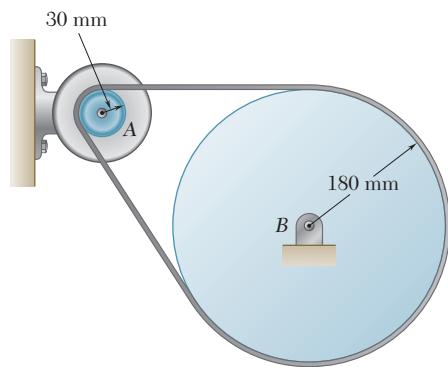


Figura P17.48

17.47 El engrane de 80 mm de radio tiene una masa de 5 kg y un radio de giro centroidal de 60 mm. La barra *AB* de 4 kg está unida al centro del engrane y a un pasador en *B* que se desliza libremente en una ranura vertical. Si el sistema mostrado se suelta desde el reposo cuando $\theta = 60^\circ$, determine la velocidad del centro del engrane cuando $\theta = 20^\circ$.

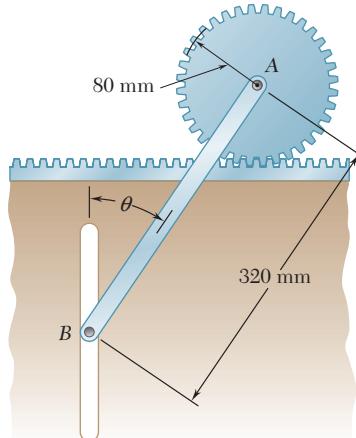


Figura P17.47

17.48 El motor mostrado gira a una frecuencia de 22.5 Hz y opera una máquina unida a la flecha en *B*. Si el motor desarrolla 3 kW, determine la magnitud del par ejercido *a*) por el motor sobre la flecha *A*, *b*) por la flecha sobre la polea *B*.

17.49 Si el máximo par permisible que puede aplicarse a la flecha es de 15.5 kips · in., determine la potencia máxima que puede transmitir la flecha a *a*) 180 rpm, *b*) 480 rpm.

17.50 Tres flechas y cuatro engranes se usan para formar un tren de engranes que transmitirá 7.5 kW del motor *A* a una máquina herramienta ubicada en *F*. (Los cojinetes para las flechas se omiten del bosquejo.) Si la frecuencia del motor es de 30 Hz, determine la magnitud del par que se aplica al eje *a*) *AB*, *b*) *CD*, *c*) *EF*.

17.51 El arreglo de flecha, disco y banda que se muestra se utiliza para transmitir 2.4 kW desde el punto *A* hasta el punto *D*. Si se sabe que los máximos pares permisibles que es posible aplicar a los ejes *AB* y *CD* son, respectivamente, 25 N · m y 80 N · m, determine la velocidad mínima requerida de la flecha *AB*.

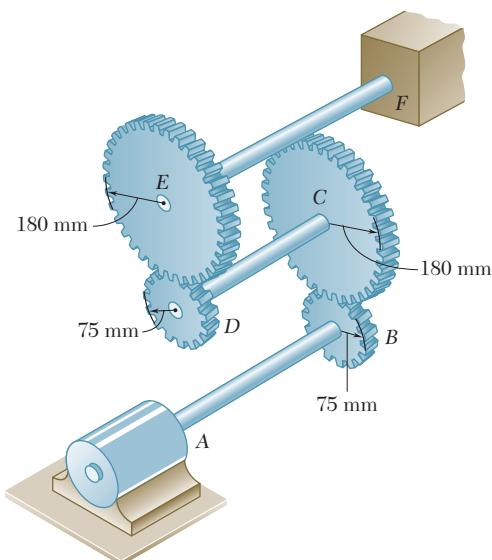


Figura P17.50

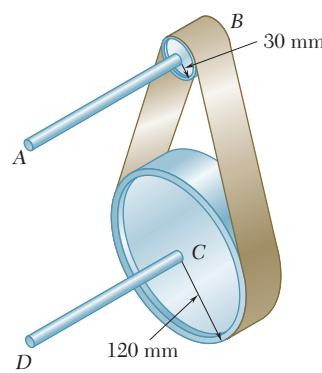


Figura P17.51

17.8. PRINCIPIO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO PARA EL MOVIMIENTO PLANO DE UN CUERPO RÍGIDO

El principio del impulso en la cantidad de movimiento se aplicará ahora al análisis del movimiento plano de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos. Como se apuntó en el capítulo 13, el método del impulso y la cantidad de movimiento se adapta particularmente bien a la solución de problemas que incluyen el tiempo y las velocidades. Además, el principio del impulso y la cantidad de movimiento proporciona el único método práctico para la solución de problemas en los que intervienen el movimiento o impacto impulsivo (secciones 17.11 y 17.12).

Considerando de nuevo un cuerpo rígido conformado por un gran número de partículas P_i , hay que recordar de la sección 14.9 que el sistema formado por las cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo t_1 y el sistema de los impulsos de las fuerzas externas aplicadas desde t_1 hasta t_2 son en conjunto equipolentes al sistema formado por las cantidades de movimiento de las partículas en el tiempo t_2 . Puesto que los vectores asociados con un cuerpo rígido pueden considerarse como vectores deslizantes, se concluye (sección 3.19) que el sistema

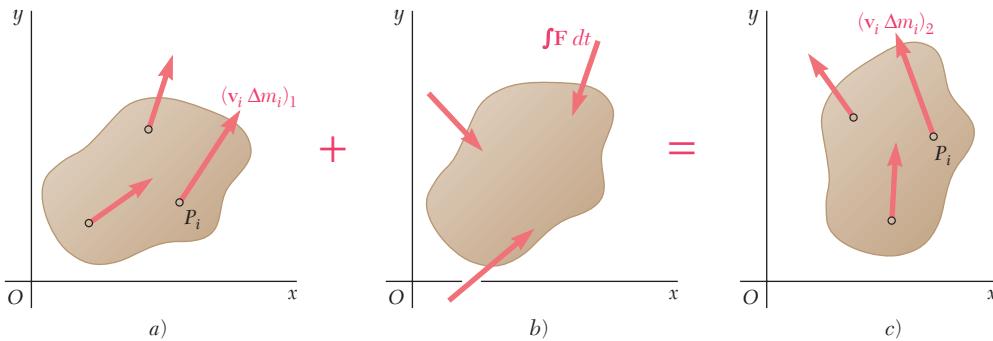


Figura 17.6

de vectores que se muestra en la figura 17.6 no sólo son equipolentes, sino verdaderamente *equivalentes* en el sentido de que los vectores en el lado izquierdo del signo de igualdad pueden transformarse en los vectores del lado derecho mediante el uso de las operaciones fundamentales expuestas en la sección 3.13. Por lo tanto, se escribe

$$\text{Sist. Cant. Mov.}_1 + \text{Sist. Imp. Ext.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Sist. Cant. Mov.}_2 \quad (17.14)$$

Pero las cantidades de movimiento $v_i \Delta m_i$ de las partículas se reducen a un vector fijo en G , igual a su suma

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i \Delta m_i$$

y un par de momento igual a la suma de sus momentos alrededor de G

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i \Delta m_i$$

Hay que recordar de la sección 14.3 que \mathbf{L} y \mathbf{H}_G definen, respectivamente, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular alrededor de G del sistema de partículas que forman al cuer-



Fotografía 17.2 Una prueba de impacto Charpy se usa para determinar la cantidad de energía absorbida por un material durante el impacto, al restar la energía potencial gravitatoria final del brazo a su energía potencial gravitatoria inicial.

po rígido. Se observa también de la ecuación (14.14) que $\mathbf{L} = m\bar{\mathbf{v}}$. Por otro lado, restringiendo el presente análisis al movimiento plano de una placa rígida o de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, se recuerda de la ecuación (16.4) que $\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega}$. Por lo tanto, concluimos que el sistema de las cantidades de movimiento $\mathbf{v}_i \Delta m_i$ es equivalente al *vector de cantidad de movimiento lineal* $m\bar{\mathbf{v}}$ fijo en G y al *par de momento angular* $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ (figura 17.7). Al observar que el sis-

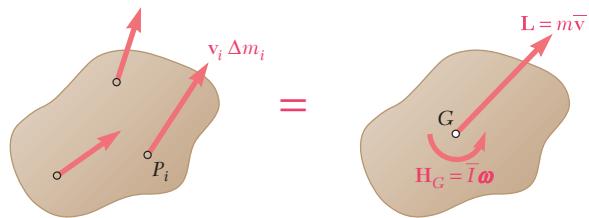


Figura 17.7

tema de cantidades de movimiento se reduce al vector $m\bar{\mathbf{v}}$ en el caso particular de una traslación ($\boldsymbol{\omega} = 0$) y al par $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ en el caso particular de una rotación centroidal ($\bar{\mathbf{v}} = 0$), verificamos una vez más que el movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia puede descomponerse en una traslación o en el centro de masa G y una rotación alrededor de G .

Al sustituir el sistema de cantidades de movimiento en los incisos *a)* y *c)* de la figura 17.6 por el vector de cantidad de movimiento lineal y el par de cantidad de movimiento angular equivalentes, se obtienen los tres diagramas que se muestran en la figura 17.8. Esta fi-

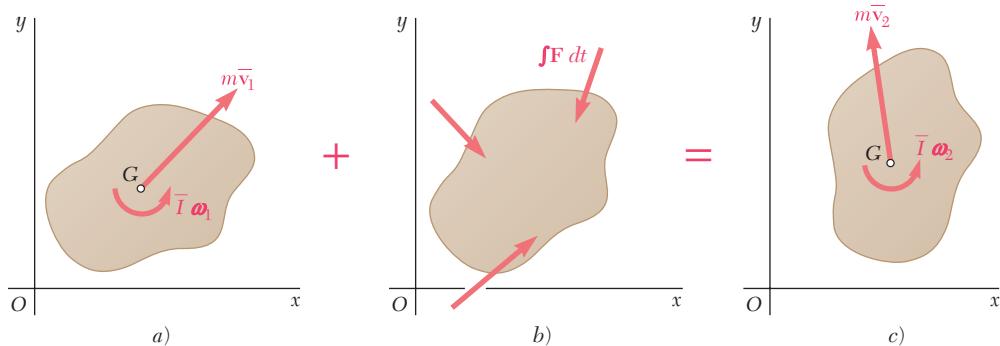


Figura 17.8

gura expresa como una ecuación de diagramas de cuerpo libre la relación fundamental entre (17.14) en el caso del movimiento plano de una placa rígida o de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia.

Es posible obtener tres ecuaciones de movimiento de la figura 17.8; dos se obtienen al sumar e igualar las *componentes x* y *y* de las cantidades de movimiento e impulsos, y la tercera al sumar e igualar los *momentos de estos vectores alrededor de cualquier punto dado*. Los ejes de coordenadas pueden elegirse fijos en el espacio o permitir que se muevan con el centro de masa del cuerpo mientras mantienen una

dirección fija. En cualquier caso, el punto alrededor del cual se consideran los momentos debe mantener la misma posición relativa con los ejes coordenados durante el intervalo de tiempo considerado.

Al derivar las tres ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido, es necesario tener cuidado de no sumar de manera indiscriminada cantidades de movimiento lineales y angulares. Es posible evitar la confusión al recordar que $m\bar{v}_x$ y $m\bar{v}_y$ representan las *componentes de un vector*, a saber, el vector de cantidad de movimiento lineal $m\bar{v}$, mientras que $I\omega$ representa la *magnitud de un par*, esto es, el par de cantidad de movimiento angular $I\omega$. Así, la cantidad $I\omega$ debe sumarse sólo al *momento* de la cantidad de movimiento lineal $m\bar{v}$, y nunca a este mismo vector ni a sus componentes. Todas las cantidades implicadas se expresarán entonces en las mismas unidades: $\text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$ o $\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}$.

Rotación no centroidal. En este caso particular del movimiento plano, la magnitud de la velocidad del centro de masa del cuerpo es $\bar{v} = \bar{r}\omega$, donde \bar{r} representa la distancia desde el centro de masa hasta el eje de rotación fijo, y ω la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado; la magnitud del vector de cantidad de movimiento fijo en G es consecuentemente $m\bar{v} = m\bar{r}\omega$. Al sumar los momentos alrededor de O del vector de cantidad de movimiento y del par de can-

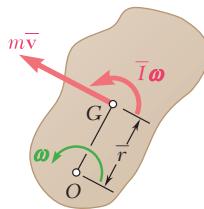


Figura 17.9

tidad de movimiento (figura 17.9) y al utilizar el teorema de los ejes paralelos para momentos de inercia, se encuentra que la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del cuerpo alrededor de O tiene la magnitud[†]

$$\bar{I}\omega + (m\bar{r}\omega)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\omega = I_O\omega \quad (17.15)$$

Al igualar los momentos alrededor de O de las cantidades de movimiento e impulsos en (17.14), se escribe

$$I_O\omega_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_O dt = I_O\omega_2 \quad (17.16)$$

En el caso general de movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, la ecuación (17.16) puede utilizarse con respecto al eje de rotación instantáneo bajo ciertas condiciones. Sin embargo, se recomienda que todos los problemas de movimiento plano se resuelvan mediante el método general que se describió antes en esta sección.

[†]Advierta que la suma \mathbf{H}_A de los momentos alrededor de un punto arbitrario A de la cantidad de movimiento de las partículas de una placa rígida *no* es, en general, igual a $I_A\omega$. (Véase el problema 17.67.)



Fotografía 17.3 Una patinadora al principio y al final de un giro. Empleando el principio de la conservación de la cantidad del movimiento angular encontrará que su velocidad angular es mucho más alta al final del giro.

[†]Advierta que como en la sección 16.7, no podemos hablar de sistemas *equivalentes*, ya que no estamos tratando con un solo cuerpo rígido.

17.9. SISTEMAS DE CUERPOS RÍGIDOS

Es posible analizar el movimiento de varios cuerpos rígidos aplicando el principio del impulso y la cantidad de movimiento a cada cuerpo por separado (problema resuelto 17.6). Sin embargo, al resolver problemas que no incluyen más de tres incógnitas (entre las que se cuentan los impulsos de reacciones desconocidas), muchas veces es conveniente aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema considerando como un todo. Los diagramas de cantidad de movimiento e impulso se dibujan para el sistema completo de cuerpos. Para cada parte móvil del sistema, los diagramas de cantidades de movimiento deben incluir un vector de cantidad de movimiento, un par de cantidad de movimiento o ambos. Es posible omitir los impulsos de las fuerzas internas al sistema del diagrama de impulso, ya que ocurre en pares de vectores iguales y opuestos. Al sumar e igualar de manera sucesiva las componentes x y las y , así como los momentos de todos los vectores que intervienen, se obtienen tres relaciones que expresan que las cantidades de movimiento en el tiempo t_1 y los impulsos de las fuerzas externas forman un sistema equipolente al sistema de las cantidades de movimiento en el tiempo t_2 .[†] De nuevo, es necesario ser cuidadosos y no sumar de manera indiscriminada cantidades de movimiento lineales y angulares; cada ecuación debe verificarse para asegurar que se han utilizado unidades consistentes. Este enfoque se ha empleado en el problema resuelto 17.8 y, más adelante, en los problemas resueltos 17.9 y 17.10.

17.10. CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

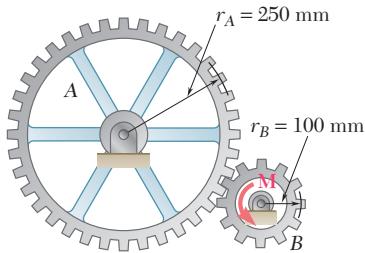
Cuando no actúa fuerza externa sobre un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, los impulsos de las fuerzas externas son cero y el sistema de las cantidades de movimiento en el tiempo t_1 es equipolente al sistema de las cantidades de movimiento en el tiempo t_2 . Sumando e igualando de manera sucesiva las componentes x , las componentes y y los momentos de las cantidades de movimiento en los tiempos t_1 y t_2 , se concluye que la cantidad de movimiento lineal total del sistema se conserva en cualquier dirección, y que su cantidad de movimiento angular total se conserva alrededor de cualquier punto.

Sin embargo, hay muchas aplicaciones de ingeniería en las que *no se conserva la cantidad de movimiento lineal* aunque *se conserve la cantidad de movimiento angular* \mathbf{H}_O del sistema alrededor de un punto dado O , esto es, en el que

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \quad (17.17)$$

Tales casos ocurren cuando las líneas de acción de todas las fuerzas externas pasan por O o, de manera más general, cuando la suma de los impulsos angulares de las fuerzas externas alrededor de O es cero.

Los problemas que implican *conservación de la cantidad de movimiento angular* alrededor de un punto O pueden resolverse mediante el método general del impulso y la cantidad de movimiento, esto es, dibujando diagramas de cantidad de movimiento e impulso según se describe en las secciones 17.8 y 17.9. La ecuación (17.17) se obtiene entonces al sumar e igualar los momentos alrededor de O (problema resuelto 17.8). Como se verá en el problema resuelto 17.9, al sumar e igualar las componentes x y y es posible escribir dos ecuaciones adicionales que pueden utilizarse para determinar dos impulsos lineales desconocidos, como los impulsos de las componentes de reacción en un punto fijo.



PROBLEMA RESUELTO 17.6

El engrane A tiene una masa de 10 kg y un radio de giro de 200 mm y el engrane B tiene una masa de 3 kg y un radio de giro de 80 mm. El sistema está en reposo cuando un par \mathbf{M} de magnitud 6 N · m se aplica al engrane B. (Estos engranes se consideraron en el problema resuelto 17.2.) Ignorando la fricción, determine a) el tiempo requerido para que la velocidad angular del engrane B llegue a 600 rpm, b) la fuerza tangencial que el engrane B ejerce sobre el engrane A.

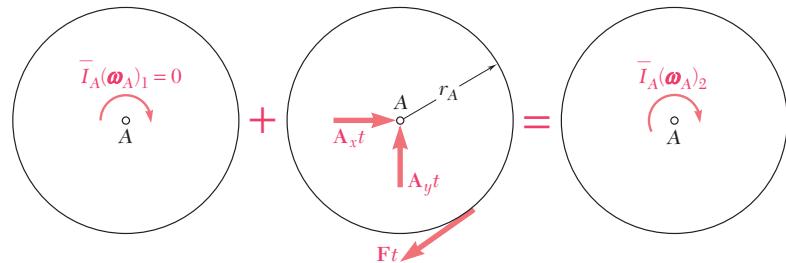
SOLUCIÓN

Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento a cada engrane por separado. Como todas las fuerzas y el par son constantes, sus impulsos se obtienen al multiplicarlos por el tiempo desconocido t . Se recuerda del problema resuelto 17.2 que los momentos de inercia centroidales y las velocidades angulares son

$$\begin{aligned}\bar{I}_A &= 0.400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 & \bar{I}_B &= 0.0192 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ (\omega_A)_2 &= 25.1 \text{ rad/s} & (\omega_B)_2 &= 62.8 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Principio del impulso y la cantidad de movimiento para el engrane A

A. Los sistemas de cantidades de movimiento iniciales, impulsos y cantidades de movimiento finales se ilustran en tres dibujos independientes.



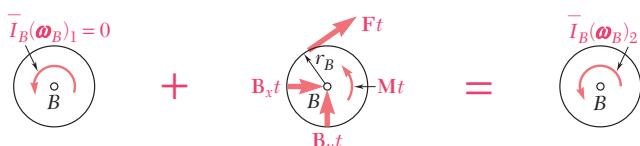
$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2$$

$$+\uparrow\text{momentos alrededor de } A: 0 - Ftr_A = -\bar{I}_A(\omega_A)_2$$

$$Ft(0.250 \text{ m}) = (0.400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(25.1 \text{ rad/s})$$

$$Ft = 40.2 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Principio del impulso y la cantidad de movimiento para el engrane B



$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2$$

$$+\uparrow\text{momentos alrededor de } B: 0 + Mt - Ftr_B = \bar{I}_B(\omega_B)_2$$

$$+(6 \text{ N} \cdot \text{m})t - (40.2 \text{ N} \cdot \text{s})(0.100 \text{ m}) = (0.0192 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(62.8 \text{ rad/s})$$

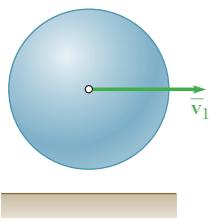
$$t = 0.871 \text{ s} \quad \blacktriangleleft$$

Si se recuerda que $Ft = 40.2 \text{ N} \cdot \text{s}$, se escribe

$$F(0.871 \text{ s}) = 40.2 \text{ N} \cdot \text{s} \quad F = +46.2 \text{ N}$$

De tal modo, la fuerza ejercida por el engrane B sobre el engrane A es

$$\mathbf{F} = 46.2 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$



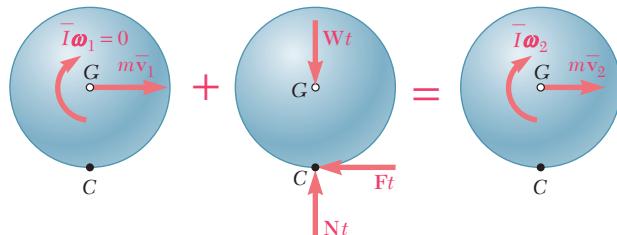
PROBLEMA RESUELTO 17.7

Una esfera uniforme de masa m y radio r se proyecta a lo largo de una superficie horizontal rugosa con una velocidad lineal \bar{v}_1 y sin velocidad angular. Denotando mediante μ_k el coeficiente de fricción cinética entre la esfera y la superficie, determine *a)* el tiempo t_2 en el cual la esfera empezará a rodar sin deslizarse, *b)* las velocidades lineal y angular de la esfera en el tiempo t_2 .

SOLUCIÓN

Si bien la esfera se desliza en relación con la superficie, sobre ella actúa la fuerza normal \mathbf{N} , la fuerza de fricción \mathbf{F} y su peso \mathbf{W} de magnitud $W = mg$.

Principio del impulso y la cantidad de movimiento. Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento a la esfera desde el tiempo $t_1 = 0$ cuando ésta se coloca sobre la superficie hasta el tiempo $t_2 = t$ en el momento que empieza a rodar sin deslizarse.



$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2$$

$$+\uparrow y \text{ componentes:} \quad Nt - Wt = 0 \quad (1)$$

$$\pm \rightarrow x \text{ componentes:} \quad m\bar{v}_1 - Ft = m\bar{v}_2 \quad (2)$$

$$+\downarrow \text{ momentos alrededor de } G: \quad Ftr = \bar{I}\omega_2 \quad (3)$$

De (1) se obtiene $N = W = mg$. Durante el intervalo de tiempo completo considerado, ocurre deslizamiento en el punto C y se tiene que $F = \mu_k N = \mu_k mg$. Al sustituir $\mu_k mg$ en lugar de F en (2), se escribe

$$m\bar{v}_1 - \mu_k mg t = m\bar{v}_2 \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_1 - \mu_k g t \quad (4)$$

Al sustituir $F = \mu_k mg$ e $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$ en (3),

$$\mu_k mg tr = \frac{2}{5}mr^2\omega_2 \quad \omega_2 = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} t \quad (5)$$

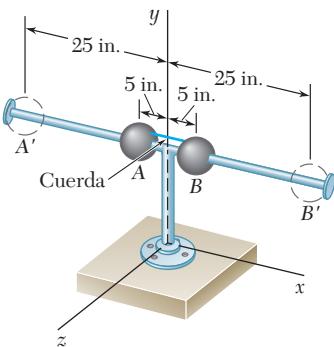
La esfera empezará a rodar sin deslizarse cuando la velocidad v_C del punto de contacto sea cero. En ese tiempo, el punto C se vuelve el centro instantáneo de rotación, y se tiene $\bar{v}_2 = r\omega_2$. Al utilizar las expresiones (4) y (5), se escribe

$$\bar{v}_2 = r\omega_2 \quad \bar{v}_1 - \mu_k g t = r \left(\frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} t \right) \quad t = \frac{2}{7} \frac{\bar{v}_1}{\mu_k g} \quad \blacktriangleleft$$

Al sustituir esta expresión para t en (5),

$$\omega_2 = \frac{5}{2} \frac{\mu_k g}{r} \left(\frac{2}{7} \frac{\bar{v}_1}{\mu_k g} \right) \quad \omega_2 = \frac{5}{7} \frac{\bar{v}_1}{r} \quad \omega_2 = \frac{5}{7} \frac{\bar{v}_1}{r} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{v}_2 = r\omega_2 \quad \bar{v}_2 = r \left(\frac{5}{7} \frac{\bar{v}_1}{r} \right) \quad \bar{v}_2 = \frac{5}{7} \bar{v}_1 \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

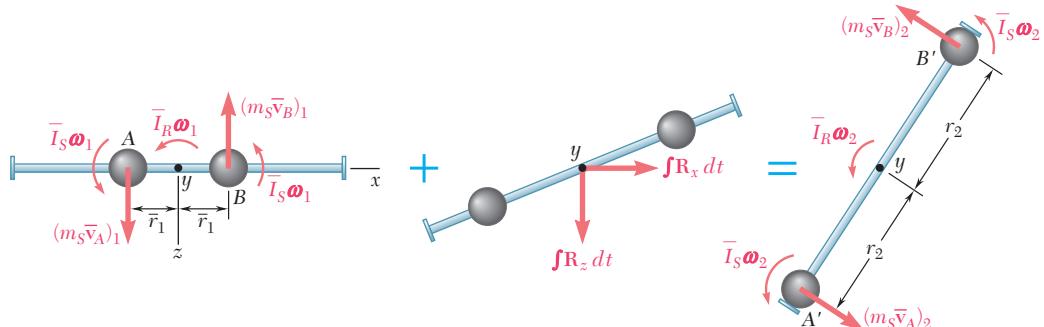


PROBLEMA RESUELTO 17.8

Dos esferas sólidas de 3 in. de radio, cada una de 2 lb de peso, se montan en A y B sobre la barra horizontal A'B', la cual gira libremente alrededor de la vertical con una velocidad angular de 6 rad/s contraria al sentido de las manecillas del reloj. Las esferas se mantienen en su posición mediante una cuerda que de repente se corta. Si el momento de inercia centroidal de la barra y el pivote es $\bar{I}_R = 0.25 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$, determine a) la velocidad angular de la barra después de que las esferas se han movido a las posiciones A' y B', b) la energía que se pierde debido al impacto plástico de las esferas y los topes en A' y B'.

SOLUCIÓN

a) Principio del impulso y la cantidad de movimiento. Para determinar la velocidad angular final de la barra, se expresa que las cantidades de movimiento iniciales de las distintas partes del sistema y los impulsos de las fuerzas externas son en conjunto equipolentes a la cantidad de movimiento final del sistema.



$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2$$

Al observar que las fuerzas externas consisten en los pesos y las reacciones en el pivote, el cual no tiene momento alrededor del eje y, y al notar que $\bar{v}_A = \bar{v}_B = \bar{r}\omega$, se igualan los momentos alrededor del eje y:

$$2(m_s \bar{r}_1 \omega_1) \bar{r}_1 + 2\bar{I}_S \omega_1 + \bar{I}_R \omega_1 = 2(m_s \bar{r}_2 \omega_2) \bar{r}_2 + 2\bar{I}_S \omega_2 + \bar{I}_R \omega_2 \\ (2m_s \bar{r}_1^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R) \omega_1 = (2m_s \bar{r}_2^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R) \omega_2 \quad (1)$$

lo cual expresa que se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor del eje y. A continuación se calcula

$$\bar{I}_S = \frac{2}{5} m_s a^2 = \frac{2}{5} (2 \text{ lb}/32.2 \text{ ft/s}^2) (\frac{3}{12} \text{ ft})^2 = 0.00155 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2 \\ m_s \bar{r}_1^2 = (2/32.2)(\frac{5}{12})^2 = 0.0108 \quad m_s \bar{r}_2^2 = (2/32.2)(\frac{25}{12})^2 = 0.2696$$

Al sustituir estos valores, e $\bar{I}_R = 0.25$ y $\omega_1 = 6 \text{ rad/s}$ en (1):

$$0.275(6 \text{ rad/s}) = 0.792\omega_2 \quad \omega_2 = 2.08 \text{ rad/s} \quad \blacktriangleleft$$

b) Energía perdida. La energía cinética del sistema en cualquier instante es

$$T = 2(\frac{1}{2}m_s \bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_S \omega^2) + \frac{1}{2}\bar{I}_R \omega^2 = \frac{1}{2}(2m_s \bar{r}^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega^2$$

Al recordar los valores numéricos que se encontraron antes, se tiene

$$T_1 = \frac{1}{2}(0.275)(6)^2 = 4.95 \text{ ft} \cdot \text{lb} \quad T_2 = \frac{1}{2}(0.792)(2.08)^2 = 1.713 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 1.71 - 4.95 \quad \Delta T = -3.24 \text{ ft} \cdot \text{lb} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a utilizar el método del impulso y la cantidad de movimiento para resolver problemas que implican el movimiento plano de cuerpos rígidos. Como se estudió previamente en el capítulo 13, este método es más efectivo cuando se utiliza en la solución de problemas que incluyen velocidades y tiempo.

1. El principio del impulso y la cantidad de movimiento para el movimiento plano de un cuerpo rígido se expresa mediante la siguiente ecuación vectorial:

$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Sist.}_2 \quad (17.14)$$

donde **Cant. Mov. Sist.** representa el sistema de las cantidades de movimiento de las partículas que forman al cuerpo rígido, e **Imp. Ext. Sist.** representa al sistema de todos los impulsos externos ejercidos durante el movimiento.

a) El sistema de las cantidades de movimiento de un cuerpo rígido es equivalente a un vector de cantidad de movimiento lineal $m\bar{v}$ fijo en el centro de masa del cuerpo y un par de cantidad de movimiento angular $\bar{I}\omega$ (figura 17.7).

b) Será necesario dibujar una ecuación de diagramas de cuerpo libre para el cuerpo rígido a fin de expresar en forma gráfica la ecuación vectorial anterior. La ecuación de diagramas constará de tres dibujos del cuerpo, que representarán de manera respectiva la cantidad de movimiento inicial, los impulsos de las fuerzas externas y la cantidad de movimiento final. Se demostrará que el sistema de las cantidades de movimiento iniciales y el sistema de los impulsos de las fuerzas externas son en conjunto equivalentes al sistema de las cantidades de movimiento finales (figura 17.8).

c) Mediante el uso de la ecuación de diagramas de cuerpo libre será posible sumar componentes en cualquier dirección y sumar cantidades de movimiento alrededor de cualquier punto. Al sumar cantidades de movimiento alrededor de un punto, recuerde incluir la *cantidad de movimiento angular* $\bar{I}\omega$ del cuerpo, así como los *momentos* de las componentes de su *cantidad de movimiento lineal*. En la mayoría de los casos usted será capaz de seleccionar y resolver una ecuación que implica sólo a una incógnita. Lo anterior se efectuó en todos los problemas resueltos de esta lección.

2. En problemas que implican un sistema de cuerpos rígidos puede aplicarse el principio del impulso y la cantidad de movimiento al sistema como un todo. Puesto que las fuerzas internas ocurren en pares iguales y opuestos, no serán parte de la solución [problema resuelto 17.8].

3. La conservación de la cantidad de movimiento angular alrededor de un eje dado ocurre cuando, para un sistema de cuerpos rígidos, *la suma de los momentos de los impulsos externos alrededor de ese eje es cero*. De hecho, resulta fácil observar de la ecuación de diagramas de cuerpo libre que las cantidades de movimiento angular inicial y final del sistema alrededor de ese eje son iguales y, en consecuencia, que *se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor del eje dado*. En ese caso es posible sumar las cantidades de movimiento angular de los diversos cuerpos del sistema y los momentos de sus cantidades de movimiento lineales alrededor de ese eje para obtener una ecuación que se resuelve para una incógnita [problema resuelto 17.8].

Problemas

17.52 El rotor de un motor eléctrico tiene una masa de 25 kg y un radio de giro de 180 mm. Se observa que se requieren 4.2 min para que el rotor gire hasta detenerse a partir de una velocidad angular de 3 600 rpm. Determine la magnitud promedio del par debido a la fricción cinética en los cojinetes del rotor.

17.53 Un volante de 4 000 lb con un radio de giro de 27 in. se deja girar hasta detenerse a partir de una velocidad angular de 450 rpm. Si la fricción cinética produce un par de magnitud igual a 125 lb · in., determine el tiempo requerido para que el volante gire hasta detenerse.

17.54 Dos discos del mismo grosor y el mismo material están unidos a una flecha, como se muestra en la figura. El disco A de 8 lb tiene un radio $r_A = 3$ in., y el disco B tiene un radio $r_B = 4.5$ in. Si se aplica un par \mathbf{M} con magnitud de 20 lb · in. al disco A cuando el sistema está en reposo, determine el tiempo requerido para que la velocidad angular del sistema alcance 960 rpm.

17.55 Dos discos del mismo grosor y el mismo material están unidos a una flecha, como se muestra en la figura. El disco A de 3 kg tiene un radio $r_A = 100$ mm, y el disco B tiene un radio $r_B = 125$ mm. Si la velocidad angular del sistema debe incrementarse de 200 a 800 rpm durante un intervalo de 3 s, determine la magnitud del par \mathbf{M} que debe aplicarse al disco A.

17.56 Un cilindro de radio r y peso W con una velocidad angular inicial ω_0 en sentido contrario al de las manecillas del reloj, se coloca en la esquina formada por el piso y una pared vertical. Si se denota con μ_k el coeficiente de fricción cinética entre el cilindro y la pared y el piso, obtenga una expresión para el tiempo requerido para que el cilindro quede en reposo.

17.57 Un cilindro de 3 kg y radio $r = 125$ mm, con una velocidad angular inicial $\omega_0 = 90$ rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, se coloca en la esquina formada por el piso y una pared vertical. Si el coeficiente de fricción cinética entre el cilindro y la pared y el piso es de 0.10, determine el tiempo requerido para que el cilindro quede en reposo.

17.58 Un disco de grosor constante, inicialmente en reposo, se pone en contacto con una banda que se mueve con una velocidad constante \mathbf{v} . Si se denota con μ_k el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda, deduzca una expresión para el tiempo requerido para que el disco alcance una velocidad angular constante.

17.59 El disco A con peso de 5 lb y radio $r = 3$ in., se encuentra en reposo cuando se pone en contacto con una banda que se mueve a una velocidad constante $v = 50$ ft/s. Si se sabe que $\mu_k = 0.20$ entre el disco y la banda, determine el tiempo requerido para que el disco alcance una velocidad angular constante.

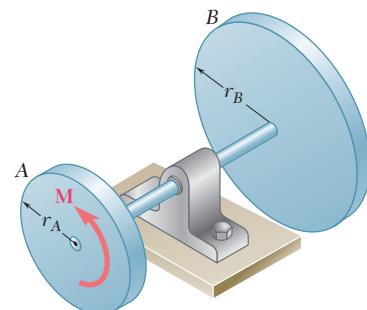


Figura P17.54 y P17.55

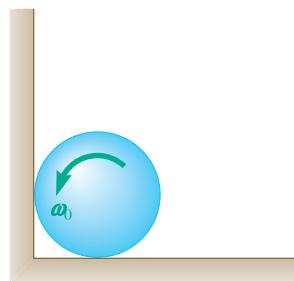


Figura P17.56 y P17.57

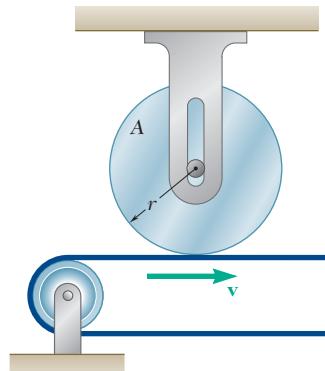


Figura P17.58 y P17.59

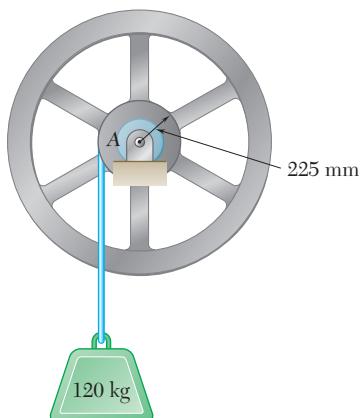


Figura P17.60

17.60 El volante de 350 kg de un pequeño malacate tiene un radio de giro de 600 mm. Si la energía eléctrica se interrumpe cuando la velocidad angular del volante es de 100 rpm en el sentido de las manecillas del reloj, determine el tiempo que se requiere para que el sistema quede en reposo.

17.61 En el problema 17.60, determine el tiempo requerido para que la velocidad angular del volante se reduzca hasta 40 rpm en el sentido de las manecillas del reloj.

17.62 Una cinta se mueve sobre los dos tambores que se muestran en la figura. El tambor A pesa 1.4 lb y tiene un radio de giro de 0.75 in., mientras que el tambor B pesa 3.5 lb y tiene un radio de giro de 1.25 in. En la parte inferior de la cinta la tensión es constante e igual a $T_A = 0.75$ lb. Si se sabe que la cinta se encuentra inicialmente en reposo, determine *a*) la tensión constante T_B requerida si la velocidad de la cinta debe ser $v = 10$ ft/s después de 0.24 s, *b*) la tensión correspondiente en la porción de la cinta ubicada entre los tambores.

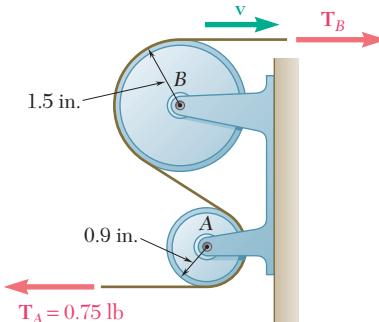


Figura P17.62

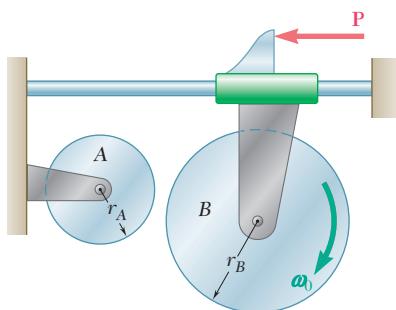


Figura P17.63 y P17.64

17.63 El disco B tiene una velocidad angular inicial ω_0 cuando se pone en contacto con el disco A, el cual se encuentra en reposo. Muestre que la velocidad angular final del disco B depende sólo de ω_0 y de la razón de las masas m_A y m_B de los dos discos.

17.64 El disco A de 7.5 lb tiene un radio $r_A = 6$ in. y se encuentra inicialmente en reposo. El disco B de 10 lb tiene un radio $r_B = 8$ in. y una velocidad angular ω_0 de 900 rpm cuando se pone en contacto con el disco A. Desprecie la fricción en los cojinetes y determine *a*) la velocidad angular final de cada disco, *b*) el impulso total de la fuerza de fricción ejercida sobre el disco A.

17.65 Muestre que el sistema de las cantidades de movimiento de una placa rígida en movimiento plano se reducen a un solo vector, y exprese la distancia desde el centro de masa G hasta la línea de acción de este vector en términos del radio de giro centroidal \bar{k} de la placa, la magnitud \bar{v} de la velocidad de G y la velocidad angular ω .

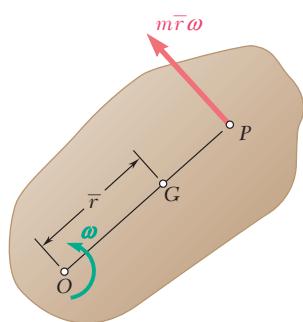


Figura P17.66

17.66 Muestre que, cuando una placa rígida gira alrededor de un eje fijo que pasa por O perpendicular a la placa, el sistema de las cantidades de movimiento de sus partículas es equivalente a un solo vector de magnitud $m\bar{r}\omega$, perpendicular a la línea OG, y aplicado a un punto P sobre esta línea, denominado el centro de percusión, a una distancia $GP = \bar{k}^2/\bar{r}$ desde el centro de masa de la placa.

17.67 Demuestre que la suma \mathbf{H}_A de los momentos alrededor del punto A de las cantidades de movimiento de las partículas de una placa rígida en movimiento plano es igual a $I_A\omega$, donde ω es la velocidad angular de la placa en el instante considerado y I_A es el momento de inercia de la placa alrededor de A, si y sólo si se satisface una de las siguientes condiciones: a) A es el centro de masa de la placa, b) A es el centro instantáneo de rotación, c) la velocidad de A está dirigida a lo largo de una línea que une el punto A y el centro de masa G.

17.68 Considere una placa rígida inicialmente en reposo y sujetada a una fuerza impulsiva \mathbf{F} contenida en el plano de la placa. Se define el *centro de percusión P* como el punto de intersección de la línea de acción de \mathbf{F} con la perpendicular dibujada a partir de G. a) Muestre que el centro instantáneo de rotación C de la placa se ubica en la línea GP a una distancia $GC = \bar{k}^2/GP$ sobre el lado opuesto de G. b) Muestre que si el centro de percusión se hubiera localizado en C el centro de rotación instantáneo estaría localizado en P.

17.69 Un neumático de radio r y radio de giro centroidal \bar{k} se suelta desde el reposo sobre la rampa mostrada en el tiempo $t = 0$. Si se supone que el neumático rueda sin deslizarse, determine a) la velocidad de su centro en el tiempo t , b) el coeficiente de fricción estática que se requiere para evitar el deslizamiento.

17.70 Un volante está rígidamente conectado a una flecha de 1.5 in. de radio que rueda sin deslizarse a lo largo de rieles paralelos. Si después de que se suelta desde el reposo el sistema llega a una velocidad de 6 in./s en 30 s, determine el radio de giro centroidal del sistema.

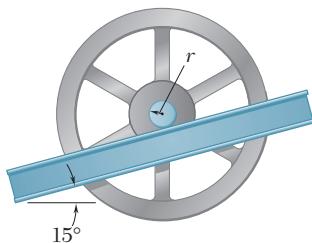


Figura P17.69

17.71 La polea doble que se muestra en la figura tiene una masa de 3 kg y un radio de giro de 100 mm. Si la polea está en reposo y se aplica una fuerza \mathbf{P} de magnitud igual a 24 N sobre la cuerda B, determine a) la velocidad del centro de la polea después de 1.5 s, b) la tensión en la cuerda C.

17.72 Dos cilindros uniformes, cada uno con peso $W = 14$ lb y radio $r = 5$ in., están conectados mediante una banda como se muestra en la figura. Si el sistema se suelta desde el reposo cuando $t = 0$, determine a) la velocidad del centro del cilindro B en $t = 3$ s, b) la tensión en la porción de la banda que conecta los dos cilindros.

17.73 Dos cilindros uniformes, cada uno con peso $W = 14$ lb y radio $r = 5$ in., están conectados mediante una banda como se muestra en la figura. Si en el instante mostrado la velocidad angular del cilindro A es de 30 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine a) el tiempo requerido para que la velocidad angular del cilindro A se reduzca a 5 rad/s, b) la tensión en la porción de la banda que conecta los dos cilindros.

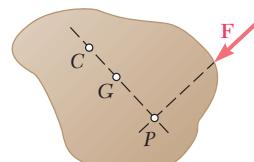


Figura P17.68

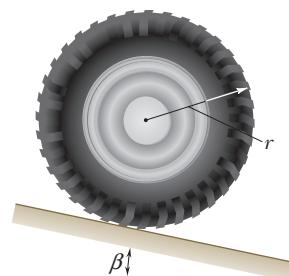


Figura P17.69

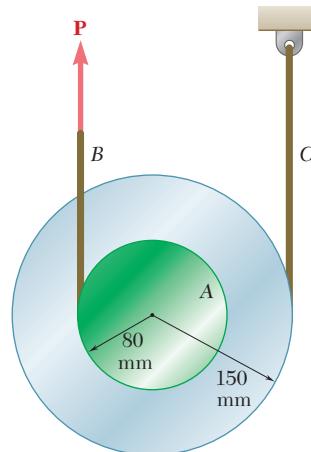


Figura P17.71

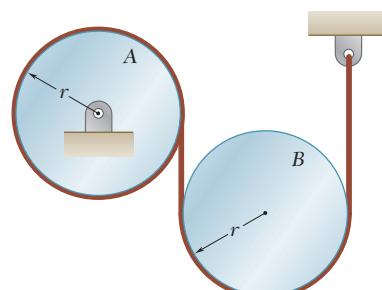


Figura P17.72 y P17.73

17.74 y 17.75 Un cilindro de 240 mm de radio y de 8 kg de masa descansa sobre una carretilla de 3 kg. El sistema está en reposo cuando se aplica una fuerza \mathbf{P} de 10 N de magnitud como se muestra en la figura durante 1.2 s. Si se sabe que el cilindro gira sin deslizarse sobre la carretilla y se desprecia la masa de sus ruedas, determine la velocidad resultante de *a*) la carretilla, *b*) el centro del cilindro.

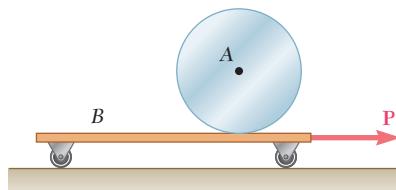


Figura P17.74

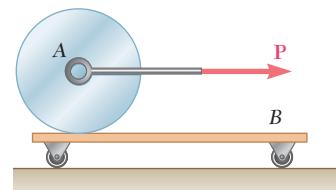


Figura P17.75

17.76 En el arreglo de engranes mostrado, los engranes *A* y *C* están unidos a la varilla *ABC*, la cual puede girar libremente alrededor de *B*, mientras que el engrane interior *B* está fijo. Si el sistema se encuentra en reposo, determine la magnitud del par \mathbf{M} que debe aplicarse a la varilla *ABC* sabiendo que 2.5 s después la velocidad angular de la varilla debe ser de 240 rpm en el sentido de las manecillas del reloj. Los engranes *A* y *C* pesan 2.5 lb cada uno y pueden considerarse como discos con radio de 2 in.; la varilla *ABC* pesa 4 lb.

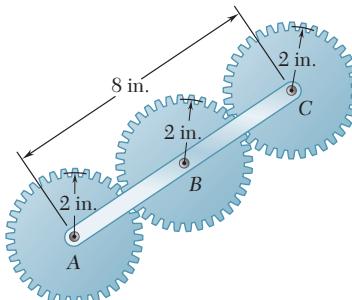


Figura P17.76

17.77 Una esfera de radio r y masa m se coloca sobre un piso horizontal sin velocidad lineal pero con una velocidad angular ω_0 en el sentido de las manecillas del reloj. Si se denota con μ_k el coeficiente de fricción cinética entre la esfera y el piso, determine *a*) el tiempo t_1 en el cual la esfera empezará a rodar sin deslizarse, *b*) las velocidades lineal y angular de la esfera en el tiempo t_1 .

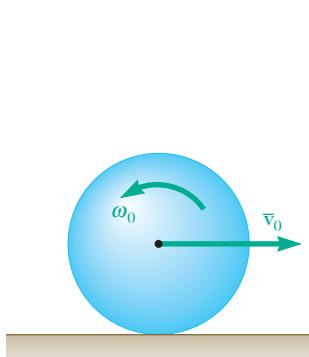


Figura P17.77

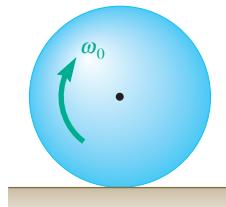


Figura P17.78

17.78 Una esfera de radio r y masa m se proyecta a lo largo de una superficie horizontal rugosa con las velocidades iniciales indicadas. Si la velocidad final de la esfera debe ser cero, exprese *a*) la magnitud requerida de ω_0 en términos de v_0 y r , *b*) el tiempo requerido para que la esfera quede en reposo en términos de v_0 y el coeficiente de fricción cinética μ_k .

17.79 Un disco de 2.5 lb y 4 in. de radio está conectado a la horquilla BCD mediante flechas cortas provistas de cojinetes en B y D . La horquilla de 1.5 lb tiene un radio de giro de 3 in. alrededor del eje x . Al principio, el mecanismo gira a 120 rpm con el disco en el plano de la horquilla ($\theta = 0$). Si el disco se perturba ligeramente y gira con respecto a la horquilla hasta $\theta = 90^\circ$, donde se detiene mediante una barra pequeña en D , determine la velocidad angular lineal del mecanismo.

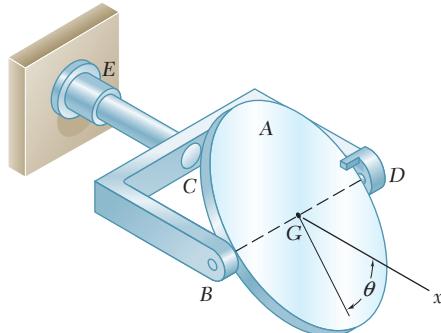


Figura P17.79

17.80 Dos paneles A y B están unidos mediante bisagras a una placa rectangular y se sostienen mediante un alambre, como se muestra en la figura. La placa y los paneles están hechos del mismo material y tienen el mismo grosor. Todo el ensamble gira con una velocidad angular ω_0 cuando el alambre se rompe. Determine la velocidad angular del ensamble después de que los paneles hayan caído sobre la placa.

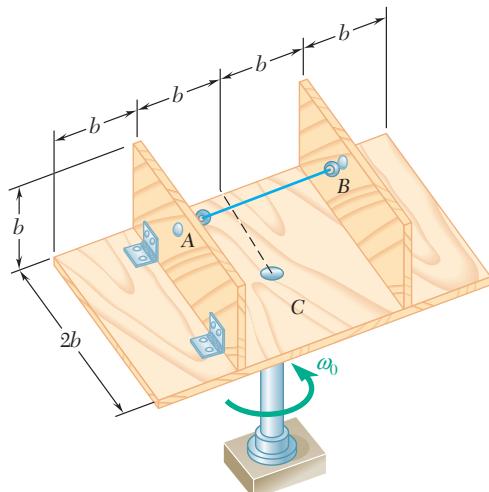


Figura P17.80

17.81 Un tubo AB de 1.6 kg puede deslizarse libremente sobre la varilla DE , la cual a su vez puede girar con libertad en un plano horizontal. Inicialmente, el ensamble gira con una velocidad angular $\omega = 5 \text{ rad/s}$ y el tubo se mantiene en posición mediante una cuerda. El momento de inercia de la barra y la ménsula con respecto al eje de rotación vertical es de $0.30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y el momento de inercia centroidal del tubo alrededor de un eje vertical es de $0.0025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Si la cuerda se rompe de manera súbita, determine *a)* la velocidad angular del ensamble después de que el tubo se haya movido hasta el extremo E , *b)* la energía perdida durante el impacto plástico en E .

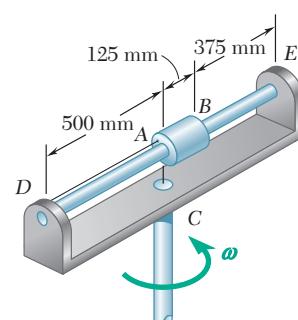


Figura P17.81

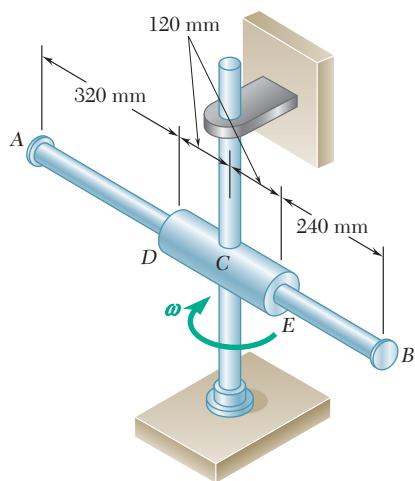


Figura P17.83

17.82 Dos bolas de 0.8 lb se introducen en forma sucesiva por el centro *C* del tubo ligero *AB* de 4 lb. Si se sabe que cuando la primera bola se introduce en el tubo la velocidad angular de éste es de 8 rad/s y si se desprecia el efecto de la fricción, determine la velocidad angular del tubo justo después *a)* de que la primera bola ha salido del tubo, *b)* la segunda bola sale del tubo.

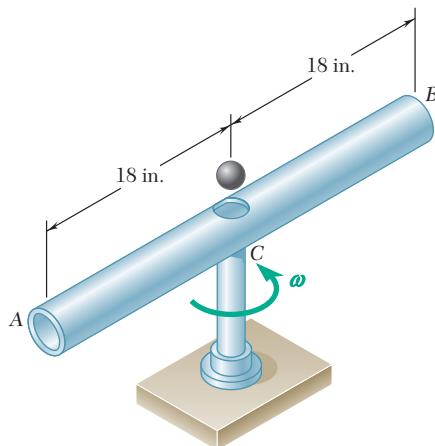


Figura P17.82

17.83 Una barra de 3 kg y 800 mm de longitud puede deslizarse libremente en el cilindro *DE* de 240 mm, el cual a su vez puede girar con libertad en un plano horizontal. En la posición mostrada, el ensamblaje gira con una velocidad angular de magnitud $\omega = 40$ rad/s y el extremo *B* de la barra se mueve hacia el cilindro a una velocidad de 75 mm/s respecto al cilindro. Si el momento de inercia de masa centroidal del cilindro alrededor de un eje vertical es $0.025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y si se desprecia el efecto de la fricción, determine la velocidad angular del ensamblaje cuando el extremo *B* choca con el extremo *E* del cilindro.

17.84 En el helicóptero que se muestra se usa una hélice vertical de cola para evitar la rotación de la cabina cuando varía la velocidad de las hélices principales. Si la hélice de la cola no está en operación, determine la velocidad angular final de la cabina después de que la velocidad de las hélices principales ha cambiado de 180 a 240 rpm. (La velocidad de las hélices principales se mide con respecto a la cabina, y esta última tiene un momento de inercia centroidal de $650 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$. Se supone que cada una de las cuatro hélices principales es una barra esbelta de 14 ft con un peso de 55 lb.)

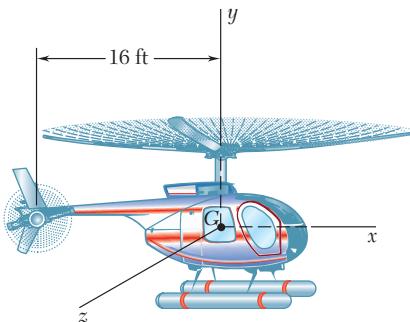


Figura P17.84

17.85 Si se supone que la hélice de la cola en el problema 17.84 se encuentra en operación, y que la velocidad angular de la cabina se mantiene igual a cero, determine la velocidad horizontal final de la cabina cuando la velocidad de las hélices principales varía de 180 a 240 rpm. La cabina tiene un peso de 1 250 lb y está inicialmente en reposo. Determine también la fuerza que ejerce la hélice de la cola si el cambio en la velocidad ocurre de manera uniforme en 12 s.

17.86 El disco *B* de 4 kg está conectado a la flecha de un motor montado sobre una placa *A*, la cual puede girar libremente alrededor del eje vertical *C*. La unidad de motor, placa y flecha tiene un momento de inercia de $0.20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ con respecto al eje de la flecha. Si el motor se pone en operación cuando el sistema está en reposo, determine las velocidades angulares del disco y de la placa después de que el motor ha alcanzado su velocidad de operación normal de 360 rpm.

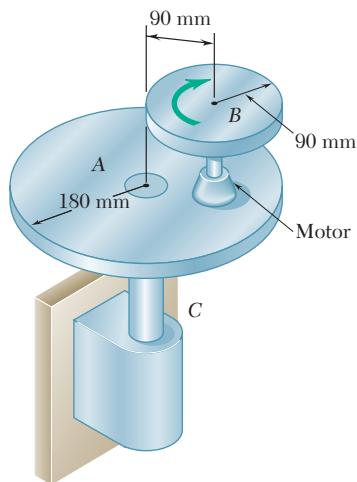


Figura P17.86

17.87 La plataforma circular *A* está acoplada con un aro de 200 mm de radio interior y puede girar libremente alrededor del eje vertical. Se sabe que la unidad de aro y plataforma tiene una masa de 5 kg y un radio de giro de 175 mm con respecto al eje. En el momento que la plataforma gira con una velocidad angular de 50 rpm, un disco *B* de 3 kg con radio de 80 mm se coloca sobre la plataforma sin velocidad. Si se sabe que entonces el disco *B* se desliza hasta que queda en reposo, en relación con la plataforma, re cargado en el aro, determine la velocidad angular final de la plataforma.

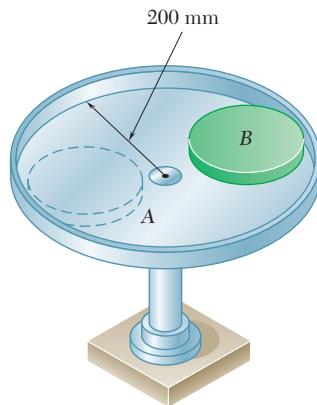


Figura P17.87

17.88 Un pequeño collarín C de 2 kg puede deslizarse con libertad sobre un aro delgado de 3 kg de masa y 250 mm de radio. El aro está soldado a una flecha vertical corta, que puede girar libremente en un cojinete fijo. Inicialmente el aro tiene una velocidad angular de 35 rad/s y el collarín está en la parte superior del aro ($\theta = 0$) cuando se le da un ligero golpe. Si se desprecia el efecto de la fricción, determine *a)* la velocidad angular del aro cuando el collarín pasa por la posición $\theta = 90^\circ$, *b)* la velocidad correspondiente del collarín relativa al aro.

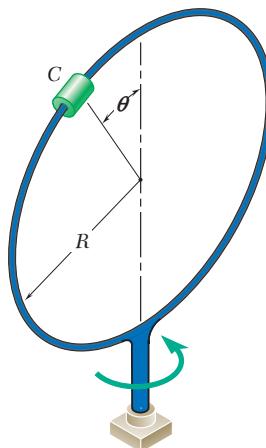


Figura P17.88

17.89 El collarín C tiene una masa de 8 kg y puede deslizarse con libertad sobre la barra AB , la cual a su vez puede girar libremente en un plano horizontal. El mecanismo gira con una velocidad angular ω de 1.5 rad/s cuando se suelta un resorte ubicado entre A y C , lo que proyecta al collarín a lo largo de la barra con una velocidad relativa inicial de $v_r = 1.5$ m/s. Si el momento de inercia de masa combinado alrededor de B de la barra y el resorte es de $1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, determine *a)* la distancia mínima entre el collarín y el punto B en el movimiento resultante, *b)* la velocidad angular correspondiente del ensamblaje.

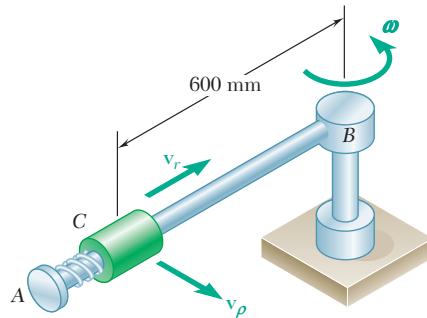


Figura P17.89

17.90 En el problema 17.89 determine la magnitud requerida de la velocidad relativa inicial v_r si durante el movimiento resultante la distancia mínima entre el collarín C y el punto B debe ser de 300 mm.

17.91 Un collarín *C* de 6 lb está unido a un resorte y puede deslizarse sobre la barra *AB*, la cual a su vez puede girar en un plano horizontal. El momento de inercia de masa de la barra *AB* con respecto al extremo *A* es de $0.35 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$. El resorte tiene una constante $k = 15 \text{ lb/in.}$ y una longitud sin deformar de 10 in. En el instante mostrado, la velocidad del collarín relativa a la barra es cero y el ensamble gira con una velocidad angular de 12 rad/s. Si se desprecia el efecto de la fricción, determine *a*) la velocidad angular del ensamble cuando el collarín pasa a través de un punto localizado a 7.5 in. del extremo *A* de la barra, *b*) la velocidad correspondiente del collarín relativa a la barra.

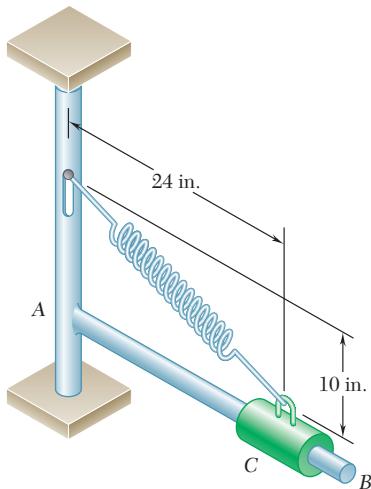


Figura P17.91

17.92 Una barra uniforme *AB*, que tiene un peso de 15 lb y una longitud de 3.6 ft, está fija a un carro *C* de 25 lb. Si el sistema se suelta desde el reposo en la posición que se indica y se desprecia la fricción, determine *a*) la velocidad del punto *B* cuando la barra *AB* pasa por una posición vertical, *b*) la velocidad correspondiente en el carro *C*.

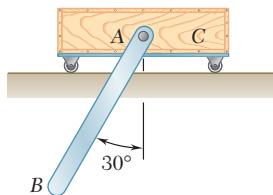


Figura P17.92

17.93 En el problema 17.83, determine la velocidad de la barra *AB* relativa al cilindro *DE* cuando el extremo *B* de la barra golpea el extremo *E* del cilindro.

17.94 En el problema 17.81, determine la velocidad del tubo relativa a la barra cuando el tubo golpea el extremo *E* del ensamble.

17.95 El cilindro de acero *A* de 6 lb y el carrito de madera *B* que pesa 10 lb están en reposo en la posición mostrada cuando al cilindro se le da un pequeño empujón, lo que ocasiona que ruede sin deslizarse a lo largo de la superficie superior del carrito. Si se desprecia la fricción entre el carrito y el suelo, determine la velocidad del carrito cuando el cilindro pasa por el punto más bajo de la superficie en *C*.

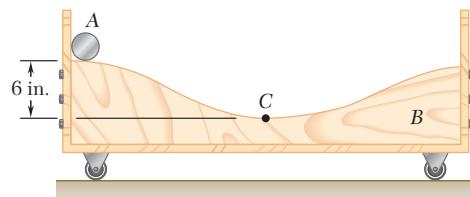


Figura P17.95

17.11. MOVIMIENTO IMPULSIVO

En el capítulo 13 se vio que el método del impulso y la cantidad de movimiento es el único método práctico para la solución de problemas que implican el movimiento impulsivo de una partícula. Ahora se verá que los problemas que conlleva el movimiento impulsivo de un cuerpo rígido son en particular muy apropiados a una solución por el método del impulso y la cantidad de movimiento. Puesto que el intervalo de tiempo que se considera en el cálculo de los impulsos lineales y de los impulsos angulares es muy corto, es posible suponer que los cuerpos que participan ocupan la misma posición durante ese intervalo de tiempo, lo que hace el cálculo bastante simple.

17.12. IMPACTO EXCÉNTRICO

En las secciones 13.13 y 13.14, se aprendió a resolver problemas de *impacto central*, esto es, problemas en que los centros de masa de los dos cuerpos que chocan se ubican sobre la línea de impacto. A continuación se analizará el *impacto excéntrico* de los cuerpos rígidos. Considerese dos cuerpos que chocan y denote por \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B las velocidades an-

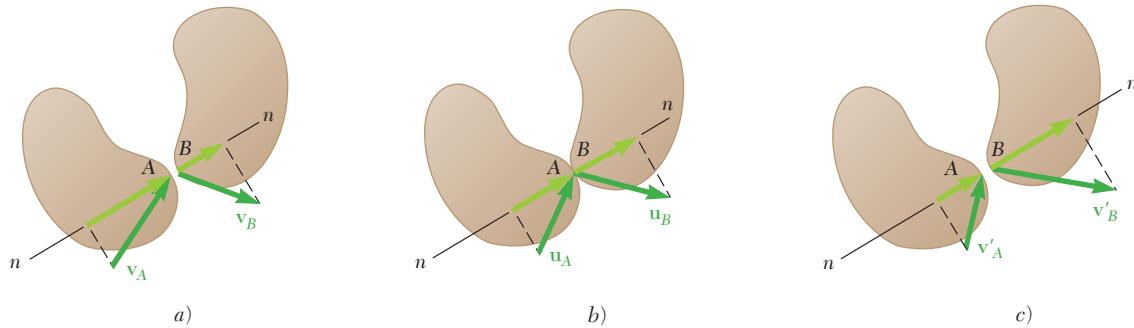


Figura 17.10

tes del impacto *de los dos puntos de contacto A y B* (figura 17.10a). Bajo el impacto, los dos cuerpos se *deformarán* y al final del periodo de deformación, las velocidades \mathbf{u}_A y \mathbf{u}_B de A y B tendrán componentes iguales a lo largo de la línea de impacto nn (figura 17.10b). Luego ocurrirá un periodo de *restitución*, al final del cual A y B tendrán velocidades \mathbf{v}'_A y \mathbf{v}'_B (figura 17.10c). Suponiendo que no hay fricción entre los cuerpos, se halla que las fuerzas que ejercen entre sí están dirigidas a lo largo de la línea de impacto. Al denotar la magnitud del impulso de una de estas fuerzas durante el periodo de deformación por $\int P dt$ y la magnitud de este impulso durante el periodo de restitución por $\int R dt$, se recuerda que el coeficiente de restitución e se define como el cociente

$$e = \frac{\int R dt}{\int P dt} \quad (17.18)$$

Se demostrará que la relación establecida en la sección 13.13 entre las velocidades relativas de las dos partículas antes y después del impacto también se cumple entre las componentes a lo largo de la línea de im-

pacto de las velocidades relativas de los dos puntos de contacto A y B. Por lo tanto, se demostrará que

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad (17.19)$$

Se supondrá que el movimiento de cada uno de los cuerpos que chocan de la figura 17.10 no tiene restricciones. De tal manera las únicas fuerzas impulsivas ejercidas sobre los cuerpos durante el impacto se aplican en A y B, respectivamente. Consideré el cuerpo al cual pertenece el punto A y dibuje los tres diagramas de cantidad de movimiento e impulso correspondientes al periodo de deformación (figura 17.11).

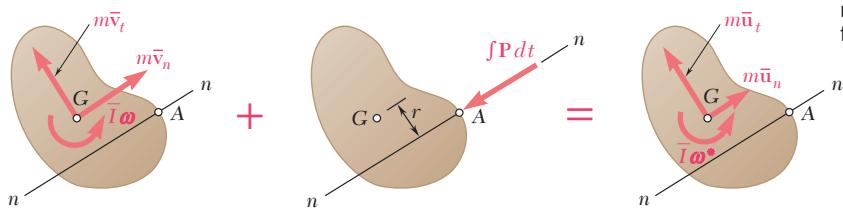


Figura 17.11

Se denota por \bar{v} y \bar{u} , respectivamente, la velocidad del centro de masa al principio y al final del periodo de deformación, y se denota por ω y ω^* la velocidad angular del cuerpo en los mismos instantes. Sumando e igualando las componentes de las cantidades de movimiento y los impulsos a lo largo de la línea de impacto nn , se escribe

$$m\bar{v}_n - \int P dt = m\bar{u}_n \quad (17.20)$$

Al sumar e igualar los momentos alrededor de G de la cantidad de movimiento y los impulsos, se escribe también

$$\bar{I}\omega - r\int P dt = \bar{I}\omega^* \quad (17.21)$$

donde r representa la distancia perpendicular desde G hasta la línea de impacto. Considerando ahora el periodo de restitución, se obtiene de una manera similar

$$m\bar{u}_n - \int R dt = m\bar{v}'_n \quad (17.22)$$

$$\bar{I}\omega^* - r\int R dt = \bar{I}\omega' \quad (17.23)$$

donde \bar{v}' y ω' representan, respectivamente, la velocidad de un centro de masa y la velocidad angular del cuerpo después del impacto. Resolviendo (17.20) y (17.22) para los dos impulsos y sustituyendo en (17.18), y resolviendo después (17.21) y (17.23) para los mismos dos impulsos y sustituyendo de nuevo en (17.18), se obtienen las siguientes dos expresiones alternativas para el coeficiente de restitución:

$$e = \frac{\bar{u}_n - \bar{v}'_n}{\bar{v}_n - \bar{u}_n} \quad e = \frac{\omega^* - \omega'}{\omega - \omega^*} \quad (17.24)$$



Fotografía 17.4 Cuando el bate giratorio hace contacto con la pelota, el bate aplica una fuerza impulsiva a la pelota por lo que se requiere utilizar el método del impulso y la cantidad de movimiento para determinar las velocidades finales de la pelota y el bate.

Si se multiplica por r el numerador y el denominador de la segunda expresión que se obtuvo para e , y se suma respectivamente al numerador y al denominador de la primera expresión, se tiene

$$e = \frac{\bar{u}_n + r\omega^* - (\bar{v}'_n + r\omega')}{\bar{v}_n + r\omega - (\bar{u}_n + r\omega^*)} \quad (17.25)$$

Al observar que $\bar{v}_n + r\omega$ representa la componente $(v_A)_n$ a lo largo de nn de la velocidad del punto de contacto A y que, de manera similar, $\bar{u}_n + r\omega^*$ y $\bar{v}'_n + r\omega'$ representan, respectivamente, las componentes $(u_A)_n$ y $(v'_A)_n$, se escribe

$$e = \frac{(u_A)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (u_A)_n} \quad (17.26)$$

El análisis del movimiento del segundo cuerpo conduce a una expresión similar para e en términos de las componentes a lo largo de nn de las velocidades sucesivas del punto B . Si se recuerda que $(u_A)_n = (u_B)_n$, y eliminando estas dos componentes de velocidad mediante un manejo similar al que se usó en la sección 13.13, se obtiene la relación (17.19).

Si uno o ambos de los cuerpos que chocan está restringido a girar alrededor de un punto fijo O , como en el caso de un péndulo compuesto (figura 17.12a), se ejercerá una reacción impulsiva en O (figura

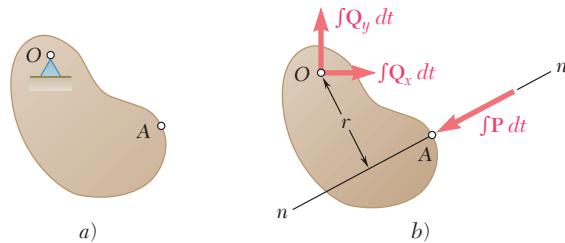


Figura 17.12

ra 17.12b). Verificar que si bien su deducción debe modificarse, las ecuaciones (17.26) y (17.19) siguen siendo válidas. Al aplicar la fórmula (17.16) al periodo de deformación y al periodo de restitución, se escribe

$$I_O\omega - r\int P \, dt = I_O\omega^* \quad (17.27)$$

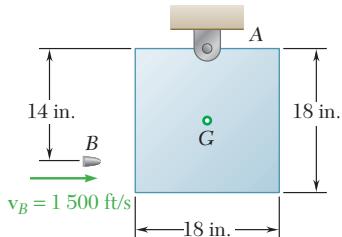
$$I_O\omega^* - r\int R \, dt = I_O\omega' \quad (17.28)$$

donde r representa la distancia perpendicular del punto fijo O hasta la línea de impacto. Al resolver (17.27) y (17.28) para los dos impulsos y sustituir en (17.18), y observar después que $r\omega$, $r\omega^*$ y $r\omega'$ representan las componentes a lo largo de nn de las velocidades sucesivas en el punto A , se escribe

$$e = \frac{\omega^* - \omega'}{\omega - \omega^*} = \frac{r\omega^* - r\omega'}{r\omega - r\omega^*} = \frac{(u_A)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (u_A)_n}$$

y se comprueba que la ecuación (17.26) sigue siendo válida. De tal modo, la ecuación (17.19) sigue siendo válida cuando uno de los cuerpos que chocan está restringido a girar alrededor de un punto fijo O .

Para determinar las velocidades de dos cuerpos que chocan después del impacto, la relación (17.19) debe usarse junto con una o varias de las ecuaciones que se obtuvieron al aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento (problema resuelto 17.10).

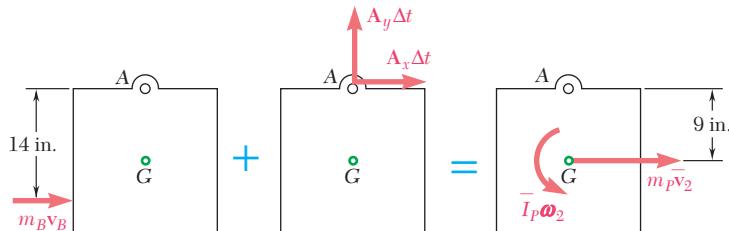


PROBLEMA RESUELTO 17.9

Una bala B de 0.05 lb se dispara con una velocidad horizontal de 1500 ft/s contra el costado del panel cuadrado suspendido de 20 lb de una bisagra en A . Si se sabe que el panel está inicialmente en reposo, determine *a)* la velocidad angular del panel inmediatamente después de que la bala quede incrustada, *b)* la reacción impulsiva en A suponiendo que la bala queda incrustada en 0.0006 s.

SOLUCIÓN

Principio del impulso y la cantidad de movimiento. Se consideran la bala y el panel como un solo sistema y se expresa que la cantidad del movimiento inicial de la bala y el panel, y los impulsos de las fuerzas externas son en conjunto equipolentes a la cantidad de movimiento final del sistema. Puesto que el intervalo de tiempo $\Delta t = 0.0006$ s es muy corto, se ignoran todas las fuerzas no impulsivas y se consideran únicamente los impulsos externos $\mathbf{A}_x \Delta t$ y $\mathbf{A}_y \Delta t$.



$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2$$

$$+\uparrow\text{momentos alrededor de } A: \quad m_B v_B \left(\frac{14}{12}\text{ ft}\right) + 0 = m_P \bar{v}_2 \left(\frac{9}{12}\text{ ft}\right) + \bar{I}_P \omega_2 \quad (1)$$

$$\pm x \text{ componentes:} \quad m_B v_B + A_x \Delta t = m_P \bar{v}_2 \quad (2)$$

$$\pm \uparrow y \text{ componentes:} \quad 0 + A_y \Delta t = 0 \quad (3)$$

El momento de inercia de masa centroidal del panel cuadrado es

$$\bar{I}_P = \frac{1}{6} m_P b^2 = \frac{1}{6} \left(\frac{20 \text{ lb}}{32.2} \right) \left(\frac{18}{12} \text{ ft} \right)^2 = 0.2329 \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$$

Al sustituir este valor, así como los datos dados en (1), y al notar que

$$\bar{v}_2 = \left(\frac{9}{12} \text{ ft} \right) \omega_2$$

se escribe

$$\left(\frac{0.05}{32.2} \right) (1500) \left(\frac{14}{12} \right) = 0.2329 \omega_2 + \left(\frac{20}{32.2} \right) \left(\frac{9}{12} \omega_2 \right) \left(\frac{9}{12} \right)$$

$$\omega_2 = 4.67 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 4.67 \text{ rad/s} \nabla$$

$$\bar{v}_2 = \left(\frac{9}{12} \text{ ft} \right) \omega_2 = \left(\frac{9}{12} \text{ ft} \right) (4.67 \text{ rad/s}) = 3.50 \text{ ft/s}$$

Al sustituir $\bar{v}_2 = 3.50 \text{ ft/s}$, $\Delta t = 0.0006 \text{ s}$, y los datos dados en la ecuación (2), se tiene

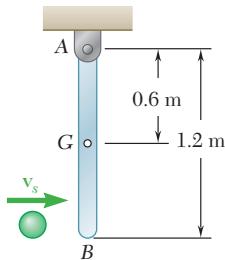
$$\left(\frac{0.05}{32.2} \right) (1500) + A_x (0.0006) = \left(\frac{20}{32.2} \right) (3.50)$$

$$A_x = -259 \text{ lb}$$

$$A_x = 259 \text{ lb} \leftarrow$$

De la ecuación (3) se encontró $A_y = 0$

$$A_y = 0 \leftarrow$$

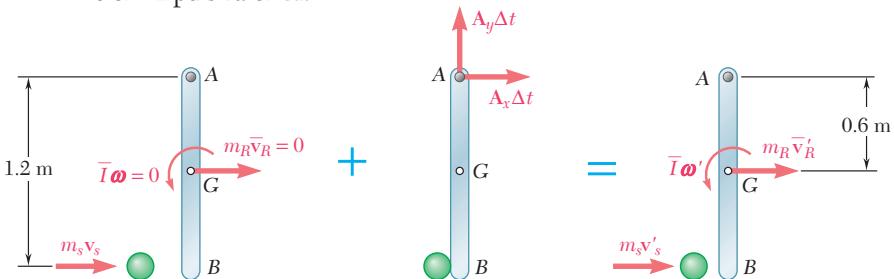


PROBLEMA RESUELTO 17.10

Una esfera de 2 kg que se mueve horizontalmente hacia la derecha con una velocidad inicial de 5 m/s golpea el extremo inferior de una barra rígida AB de 8 kg. La barra se suspende de una articulación en A y está inicialmente en reposo. Si el coeficiente de restitución entre la barra y la esfera es de 0.80, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad de la esfera inmediatamente después del impacto.

SOLUCIÓN

Principio del impulso y la cantidad de movimiento. La barra y la esfera se consideran como un solo sistema y se expresa que la cantidad de movimiento inicial de la barra y la esfera, y los impulsos de las fuerzas externas, son en conjunto equipolentes a la cantidad de movimiento final del sistema. Se advierte que la única fuerza impulsiva externa al sistema es la reacción impulsiva en A .



$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2$$

+ ↗ momentos alrededor de A :

$$m_s v_s (1.2 \text{ m}) = m_s v'_s (1.2 \text{ m}) + m_R v'_R (0.6 \text{ m}) + \bar{I} \omega' \quad (1)$$

Puesto que la barra gira alrededor de A , se tiene que $\bar{v}'_R = \bar{r} \omega' = (0.6 \text{ m}) \omega'$. Además,

$$\bar{I} = \frac{1}{12} m L^2 = \frac{1}{12} (8 \text{ kg})(1.2 \text{ m})^2 = 0.96 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Al sustituir estos valores y los datos proporcionados en la ecuación (1), se tiene

$$(2 \text{ kg})(5 \text{ m/s})(1.2 \text{ m}) = (2 \text{ kg})v'_s (1.2 \text{ m}) + (8 \text{ kg})(0.6 \text{ m})\omega' (0.6 \text{ m}) + (0.96 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\omega' \\ 12 = 2.4v'_s + 3.84\omega' \quad (2)$$

Velocidades relativas. Eligiendo como positivo el sentido hacia la derecha, se escribe

$$v'_B - v'_s = e(v_s - v_B)$$

Al sustituir $v_s = 5 \text{ m/s}$, $v_B = 0$ y $e = 0.80$, se obtiene

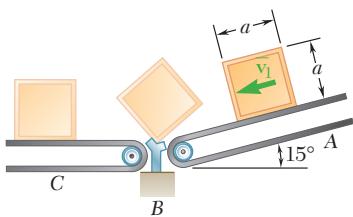
$$v'_B - v'_s = 0.80(5 \text{ m/s}) \quad (3)$$

Al notar otra vez que la barra gira alrededor de A , se escribe

$$v'_B = (1.2 \text{ m})\omega' \quad (4)$$

Al resolver las ecuaciones (2) a (4) de manera simultánea, se obtiene

$$\omega' = 3.21 \text{ rad/s} \quad \omega' = 3.21 \text{ rad/s} \uparrow \\ v'_s = -0.143 \text{ m/s} \quad v'_s = 0.143 \text{ m/s} \leftarrow \uparrow$$

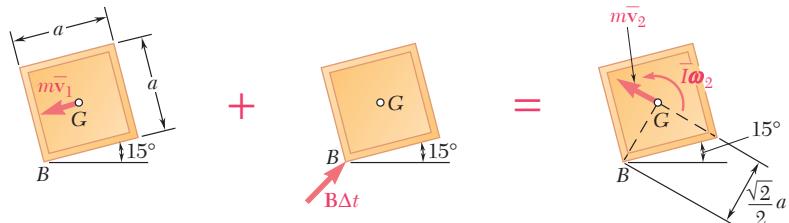


PROBLEMA RESUELTO 17.11

Un paquete cuadrado de lado a y masa m se mueve hacia abajo por una banda transportadora A con una velocidad constante \bar{v}_1 . En el extremo de la banda transportadora, la esquina del paquete choca contra un soporte rígido en B . Suponiendo que el impacto en B es perfectamente plástico, obtenga una expresión para la magnitud mínima de la velocidad \bar{v}_1 para la cual el paquete girará alrededor de B y llegará a la banda transportadora C .

SOLUCIÓN

Principio del impulso y la cantidad de movimiento. Puesto que el impacto entre el paquete y el soporte es perfectamente plástico, el paquete gira alrededor de B durante el impacto. Se aplica el principio del impulso y la cantidad de movimiento al paquete y se nota que la única fuerza impulsiva externa al paquete es la reacción impulsiva en B .



$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2$$

$$+ \gamma \text{ momentos alrededor de } B: (m\bar{v}_1)(\frac{1}{2}a) + 0 = (m\bar{v}_2)(\frac{1}{2}\sqrt{2}a) + \bar{I}\omega_2 \quad (1)$$

Puesto que el paquete gira alrededor de B , se tiene que $\bar{v}_2 = (GB)\omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2$. Se sustituye esta expresión, junto con $\bar{I} = \frac{1}{6}ma^2$, en la ecuación (1):

$$(m\bar{v}_1)(\frac{1}{2}a) = m(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2)(\frac{1}{2}\sqrt{2}a) + \frac{1}{6}ma^2\omega_2 \quad \bar{v}_1 = \frac{4}{3}a\omega_2 \quad (2)$$

Principio de la conservación de la energía. Se aplica el principio de la conservación de la energía entre las posiciones 2 y 3.

Posición 2. $V_2 = Wh_2$. Recordando que $\bar{v}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2$, se escribe

$$T_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \frac{1}{2}m(\frac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{6}ma^2)\omega_2^2 = \frac{1}{3}ma^2\omega_2^2$$

Posición 3. Puesto que el paquete debe alcanzar la barra transportadora C , debe pasar por la posición 3 donde G está directamente arriba de B . Además, puesto que deseamos determinar la velocidad mínima para la cual el paquete llegará a esta posición, se elige $\bar{v}_3 = \omega_3 = 0$. Por lo tanto, $T_3 = 0$ y $V_3 = Wh_3$.

Conservación de la energía

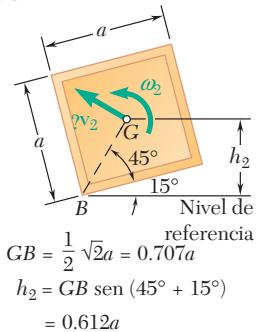
$$\begin{aligned} T_2 + V_2 &= T_3 + V_3 \\ \frac{1}{3}ma^2\omega_2^2 + Wh_2 &= 0 + Wh_3 \\ \omega_2^2 &= \frac{3W}{ma^2}(h_3 - h_2) = \frac{3g}{a^2}(h_3 - h_2) \end{aligned} \quad (3)$$

Al sustituir los valores calculados de h_2 y h_3 en la ecuación (3), se obtiene

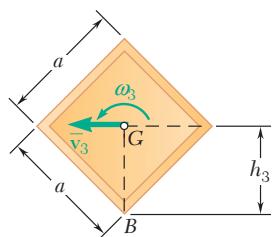
$$\omega_2^2 = \frac{3g}{a^2}(0.707a - 0.612a) = \frac{3g}{a^2}(0.095a) \quad \omega_2 = \sqrt{0.285 \text{ g/a}}$$

$$\bar{v}_1 = \frac{4}{3}a\omega_2 = \frac{4}{3}a\sqrt{0.285 \text{ g/a}} \quad \bar{v}_1 = 0.712\sqrt{\text{g/a}} \quad \blacktriangleleft$$

Posición 2



Posición 3



$$h_3 = GB = 0.707a$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección se dedicó al *movimiento impulsivo* y al *impacto excéntrico de cuerpos rígidos*.

1. El movimiento impulsivo ocurre cuando un cuerpo rígido se somete a una fuerza muy grande \mathbf{F} por un corto intervalo de tiempo Δt ; el impulso resultante $\mathbf{F} \Delta t$ es tanto finito como diferente de cero. Tales fuerzas se conocen como *fuerzas impulsivas* y se presentan cuando hay un impacto en los cuerpos rígidos. Las fuerzas para las cuales el impulso es cero se conocen como *fuerzas no impulsivas*. Como se vio en el capítulo 13, las siguientes fuerzas pueden suponerse no impulsivas: el *peso* de un cuerpo, la fuerza que ejerce un *resorte*, y cualquier otra fuerza que *se conoce* que es pequeña en comparación con las fuerzas impulsivas. Sin embargo, las reacciones desconocidas *no pueden suponerse* no impulsivas.

2. Impacto excéntrico de cuerpos rígidos. Se vio que cuando dos cuerpos chocan, las componentes de la velocidad a lo largo de la línea de impacto de los *puntos de contacto A y B* antes y después del impacto cumplen la siguiente ecuación:

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad (17.19)$$

donde el miembro del lado izquierdo es la *velocidad relativa después del impacto*, y el miembro del lado derecho es el producto del coeficiente de restitución y la *velocidad relativa antes del impacto*.

Esta ecuación expresa la misma relación de las componentes de la velocidad de los puntos de contacto antes y después del impacto que se usaron para las partículas en el capítulo 13.

3. Para resolver un problema que implica un impacto debe usarse el *método del impulso y la cantidad de movimiento* y seguir los siguientes pasos:

a) Dibujar una ecuación de diagramas de cuerpo libre del cuerpo que expresará que el sistema compuesto por las cantidades de movimiento inmediatamente antes del impacto y por los impulsos de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las cantidades de movimiento inmediatamente después del impacto.

b) La ecuación de diagramas de cuerpo libre relacionará las velocidades antes y después del impacto y las fuerzas y reacciones impulsivas. En algunos casos, será posible determinar las velocidades y reacciones impulsivas desconocidas al resolver las ecuaciones obtenidas al sumar componentes y momentos [problema resuelto 17.9].

c) En el caso de un impacto en que $e > 0$, el número de incógnitas será más grande que el número de ecuaciones que es posible escribir al sumar componentes y momentos y será necesario complementar las ecuaciones que se obtuvieron de la ecuación de diagramas de cuerpo libre con la ecuación (17.19), la cual relaciona las velocidades relativas de los puntos de contacto antes y después del impacto [problema resuelto 17.10].

d) Durante un impacto es necesario usar el método del impulso y la cantidad de movimiento. Sin embargo, *antes y después del impacto* es posible, si es necesario, utilizar alguno de los métodos de solución que se han aprendido, tales como el del trabajo y la energía [problema resuelto 17.11].

Problemas

17.96 Una bala que pesa 0.08 lb se dispara con una velocidad horizontal de 1 800 ft/s en el extremo inferior de una barra ligera de 15 lb y longitud $L = 30$ in. Si $h = 12$ in. y la barra está inicialmente en reposo, determine *a*) la velocidad angular de la barra inmediatamente después de que la bala queda incrustada, *b*) la reacción impulsiva de *C*, si se supone que la bala queda incrustada en 0.001 s.

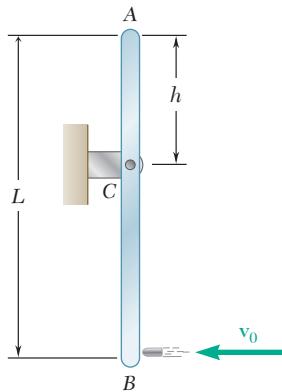


Figura P17.96

17.97 En el problema 17.96, determine *a*) la distancia requerida h si la reacción impulsiva en *C* debe ser cero, *b*) la velocidad angular correspondiente de la barra inmediatamente después de que la bala queda incrustada.

17.98 Una bala de 45 g se dispara con una velocidad de 400 m/s a un ángulo $\theta = 30^\circ$ en un panel cuadrado cuyos lados miden $b = 200$ mm y tiene una masa de 9 kg. Si se sabe que $h = 150$ mm y que el panel está inicialmente en reposo, determine *a*) la velocidad del centro del panel inmediatamente después de que la bala queda incrustada, *b*) la reacción impulsiva en *A* suponiendo que la bala queda incrustada en 2 ms.

17.99 Una bala de 45 g se dispara con una velocidad de 400 m/s a un ángulo $\theta = 5^\circ$ en un panel cuadrado cuyos lados miden $b = 200$ mm y tiene una masa de 9 kg. Si se sabe que $h = 150$ mm y que el panel está inicialmente en reposo, determine *a*) la distancia h requerida si la componente horizontal de la reacción impulsiva en *A* debe ser cero, *b*) la velocidad correspondiente del centro del panel inmediatamente después de que la bala queda incrustada.

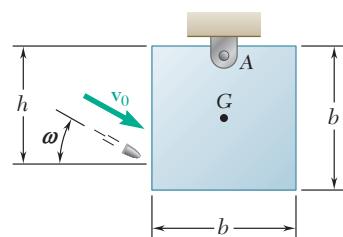


Figura P17.98 y P17.99

17.100 Un panel de madera de 8 kg está suspendido de un soporte de pasador en A y se encuentra inicialmente en reposo. Una esfera metálica de 2 kg se suelta desde el reposo en B y cae en la copa hemisférica C unida al panel en un punto localizado sobre su borde superior. Si se supone que el impacto es perfectamente plástico, determine la velocidad del centro de masa G del panel inmediatamente después del impacto.

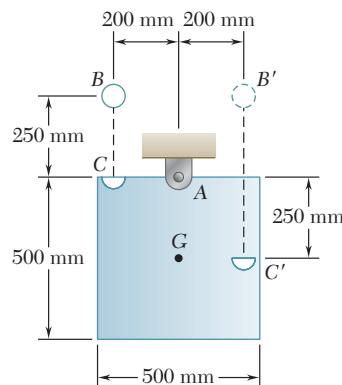


Figura P17.100 y P17-101

17.101 Un panel de madera de 8 kg está suspendido de un soporte de pasador en A y se encuentra inicialmente en reposo. Una esfera metálica de 2 kg se suelta desde el reposo en B' y cae en la copa hemisférica C' unida al panel en un punto al mismo nivel que su centro de masa G. Si se supone que el impacto es perfectamente plástico, determine la velocidad del centro de masa G del panel inmediatamente después del impacto.

17.102 El engrane mostrado tiene un radio $R = 150$ mm y un radio de giro $\bar{k} = 125$ mm. El engrane rueda sin deslizarse con una velocidad \bar{v}_1 de 3 m/s en magnitud cuando golpea un escalón de altura $h = 75$ mm. Debido a que el borde del escalón se ensambla en los dientes del engrane, no ocurre deslizamiento entre el engrane y el escalón. Suponiendo un impacto perfectamente plástico, determine la velocidad angular del engrane inmediatamente después del impacto.

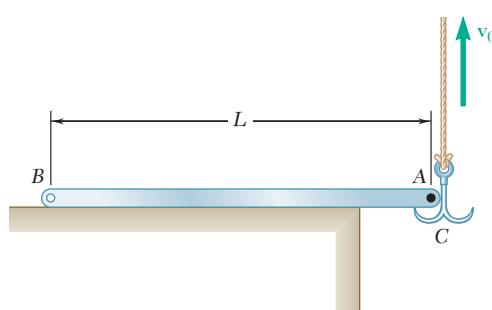


Figura P17.103

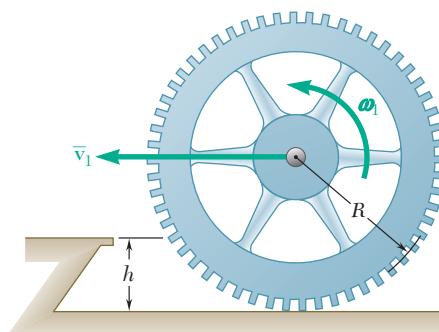


Figura P17.102

17.103 Una barra ligera y uniforme AB de masa m está en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción cuando el gancho C se engancha en una pequeña clavija en A. Si se sabe que el gancho se jala hacia arriba con una velocidad constante v_0 , determine el impulso que se ejerce sobre la barra a) en A, b) en B. Suponga que la velocidad del gancho no cambia y que el impacto es perfectamente plástico.

17.104 Una barra delgada uniforme de longitud L y masa m está soportada por una mesa horizontal sin fricción. En un inicio, la barra gira alrededor de su centro de masa G con una velocidad angular constante ω_1 . De manera súbita el cerrojo D se mueve a la derecha y es golpeado por el extremo A de la barra. Suponiendo que el impacto de A y D es perfectamente plástico, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad de su centro de masa inmediatamente después del impacto.

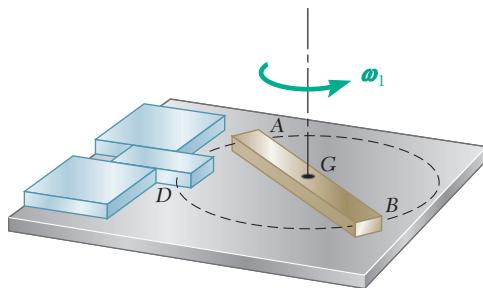


Figura P17.104

17.105 Retome el problema 17.104, y ahora suponga que el impacto de A y D es perfectamente plástico.

17.106 Una barra delgada y uniforme de longitud L se deja caer sobre soportes rígidos en A y B . Como el soporte B está un poco más abajo que el soporte A , la barra golpea A con una velocidad \bar{v}_1 antes de golpear B . Si se suponen impactos perfectamente elásticos tanto en A como en B , determine la velocidad angular de la barra y su centro de masa inmediatamente después de que la barra *a)* golpea el soporte A , *b)* golpea el soporte B , *c)* golpea de nuevo el soporte A .

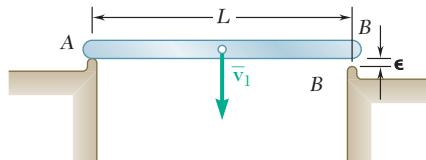


Figura P17.106

17.107 Una barra ligera y uniforme AB está en reposo sobre una mesa horizontal sin fricción, cuando el extremo A de la barra se golpea con un martillo que libera un impulso perpendicular a la barra. En el movimiento subsecuente, determine la distancia b que se moverá la barra cada vez que termine una revolución completa.

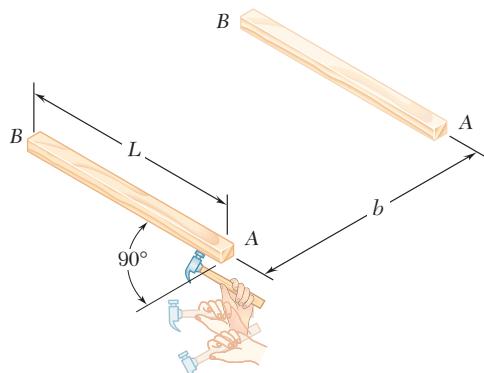


Figura P17.107

17.108 Una esfera uniforme de radio r rueda hacia abajo por la rampa que se muestra en la figura sin deslizarse. Golpea la superficie horizontal y, después de deslizarse un poco, empieza a rodar otra vez. Si se supone que la esfera no rebota cuando choca contra la superficie horizontal, determine su velocidad angular y la velocidad de su centro de masa después de que comienza a rodar de nuevo.

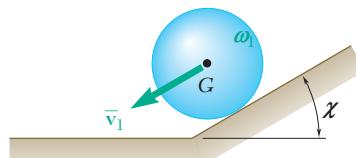


Figura P17.108

17.109 La barra ligera AB de longitud L forma un ángulo β con el eje vertical cuando hace contacto contra la superficie sin fricción que se muestra en la figura, con una velocidad \bar{v}_1 y sin velocidad angular. Si se supone que el impacto es perfectamente elástico, obtenga una expresión para la velocidad angular de la barra inmediatamente después del impacto.

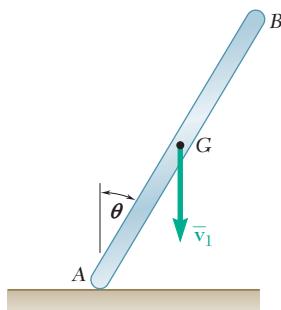


Figura P17.109

17.110 Retome el problema 17.109, y ahora suponga que el impacto entre la varilla AB y la superficie sin fricción es perfectamente elástico.

17.111 Una caja rectangular con carga uniforme se suelta desde el reposo en la posición mostrada. Si se supone que el piso tiene la suficiente rugosidad para evitar el deslizamiento y que el impacto en B es perfectamente plástico, determine el valor mínimo de la razón a/b para la cual la esquina A permanecerá en contacto con el piso.

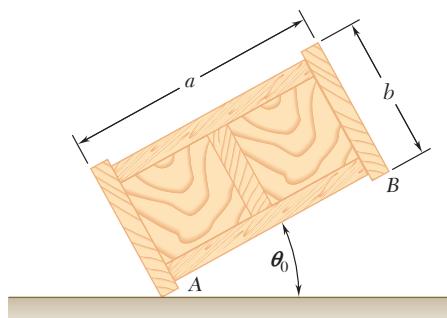


Figura P17.111

17.112 y 17.113 Una barra delgada uniforme AB de longitud L cae libremente con una velocidad v_0 cuando la cuerda AC se pone tensa. Suponiendo que el impacto es perfectamente plástico, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad de su centro de masa en seguida de que la cuerda se pone tensa.

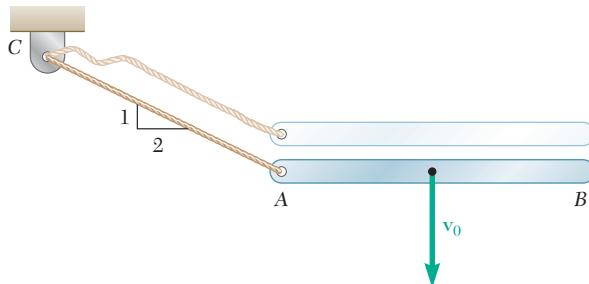


Figura P17.112

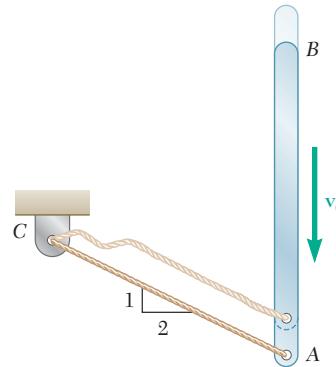


Figura P17.113

17.114 Una barra esbelta de longitud L y masa m se suelta desde el reposo en la posición mostrada. Se observa que después de que la barra choca con la superficie vertical rebota para formar un ángulo de 30° con la vertical. *a)* Determine el coeficiente de restitución entre la perilla K y la superficie. *b)* Muestre que puede esperarse el mismo rebote para cualquier posición de la perilla K .

17.115 El bloque rectangular uniforme que se muestra en la figura se mueve a lo largo de una superficie sin fricción con una velocidad \bar{v}_1 cuando golpea una pequeña obstrucción en B . Si se supone que el impacto entre la esquina A y la obstrucción B es perfectamente plástico, determine la magnitud de la velocidad \bar{v}_1 para la cual el ángulo máximo θ a través del cual girará el bloque es de 30° .

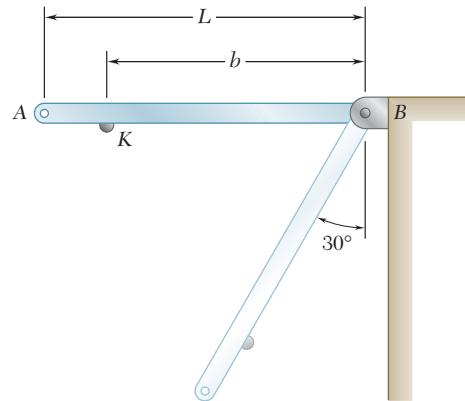


Figura P17.114

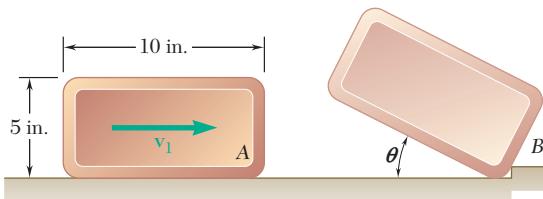


Figura P17.115

17.116 Una barra esbelta de masa m y longitud L se suelta desde el reposo en la posición mostrada y golpea el reborde D . Suponiendo un impacto perfectamente plástico en D , determine para $b = 0.6L$, *a)* la velocidad angular de la barra inmediatamente después del impacto, *b)* el ángulo máximo a través del cual girará la barra después del impacto.

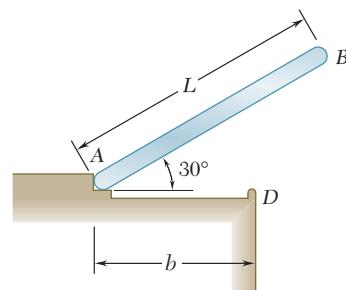


Figura P17.116

1136

Movimiento plano de cuerpos rígidos:
métodos de la energía y la cantidad
de movimiento

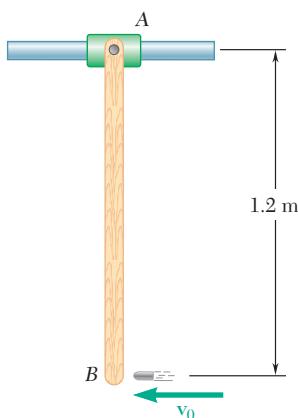


Figura P17.117

17.117 Una bala de 30 g se dispara con una velocidad horizontal de 350 m/s hacia una viga de madera AB de 8 kg. La viga está suspendida de un collarín de peso despreciable que puede deslizarse a lo largo de una barra horizontal. Si se desprecia la fricción entre el collarín y la barra, determine el ángulo máximo de rotación de la viga durante su movimiento subsecuente.

17.118 Para la viga del problema 17.117, determine la velocidad de la bala de 30 g para la cual el ángulo máximo de rotación de la viga será de 90° .

17.119 Un caja cuadrada cargada de manera uniforme se suelta desde el reposo con su esquina B directamente arriba de A , gira alrededor de A hasta que su esquina B golpea el suelo, y después rota alrededor de B . El suelo tiene la suficiente rugosidad para evitar el deslizamiento y el impacto en B es perfectamente plástico. Si se denota con ω_0 la velocidad angular de la caja inmediatamente después de que B golpea el suelo, determine *a)* la velocidad angular de la caja en seguida de que B golpea el suelo, *b)* la reacción de la energía cinética que pierde la caja durante el impacto, *c)* el ángulo θ que gira la caja después de que B golpea el suelo.

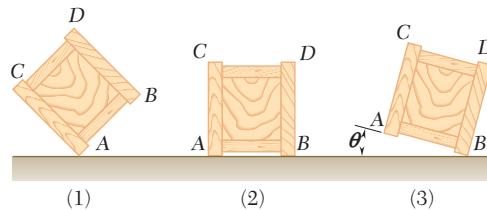


Figura P17.119

17.120 Una barra ligera y uniforme AB de longitud $L = 30$ in., se coloca con su centro equidistante de dos soportes que están localizados a una distancia $b = 5$ in. uno del otro. El extremo B de la barra se levanta una distancia $h_0 = 4$ in. y se suelta; la barra se balancea en los soportes de la forma que se indica. Si se supone que el impacto en cada soporte es perfectamente plástico y que no ocurre deslizamiento entre la barra y los soportes, determine *a)* la altura h_1 que alcanza el extremo A después del primer impacto, *b)* la altura h_2 que alcanza el extremo B después del segundo impacto.

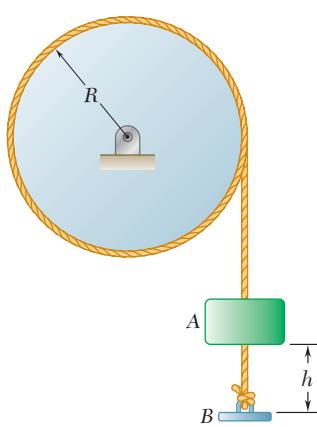


Figura P17.121

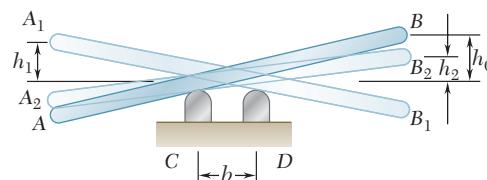


Figura P17.120

17.121 Una placa pequeña B está unida a una cuerda que se encuentra enrollada alrededor de un disco de 8 lb con radio $R = 9$ in. Un collarín A de 3 lb se suelta desde el reposo y cae una distancia $h = 15$ in. antes de golpear la placa B . Si se supone que el impacto es perfectamente plástico y se desprecia el peso de la placa, determine inmediatamente después del impacto *a)* la velocidad del collarín, *b)* la velocidad angular del disco.

17.122 Retome el problema 17.121, y ahora suponga que el coeficiente de restitución entre A y B es de 0.8.

- 17.123** Una barra ligera AB se suelta desde el reposo en la posición que se indica. Oscila hasta una posición vertical y choca contra una segunda barra idéntica CD que está en reposo sobre una superficie sin fricción. Si se supone que el coeficiente de restitución entre las barras es de 0.5, determine la velocidad de la barra CD inmediatamente después del impacto.

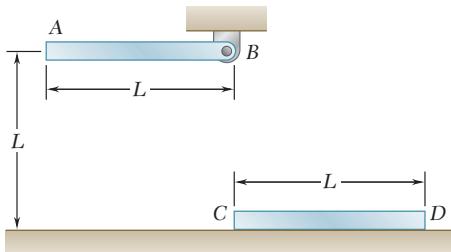


Figura P17.123

- 17.124** Retome el problema 17.123, y ahora suponga que el impacto es perfectamente elástico.

- 17.125** El tablón CDE tiene una masa 15 kg y descansa sobre un pequeño pivote en D . La gimnasta A de 55 kg está parada sobre el tablón en C cuando un gimnasta B de 70 kg salta desde una altura de 2.5 m y golpea al tablón en E . Si se supone un impacto perfectamente plástico y que la gimnasta A está de pie erguida por completo, determine la altura a la cual se elevará la gimnasta A .

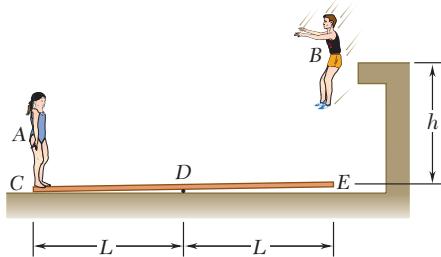


Figura P17.125

- 17.126** Retome el problema 17.125, y ahora suponga que los gimnastas cambian lugares de manera que la gimnasta A salta sobre el tablón y el gimnasta B permanece de pie en C .

- 17.127 y 17.128** El elemento ABC tiene una masa de 2.4 kg y se encuentra atado a un soporte de pasador en B . Una esfera D de 800 g golpea el extremo ABC con una velocidad vertical v_1 de 3 m/s. Si se sabe que $L = 750$ mm y que el coeficiente de restitución entre la esfera y el elemento ABC es de 0.5, determine inmediatamente después del impacto *a)* la velocidad angular del elemento ABC , *b)* la velocidad de la esfera.

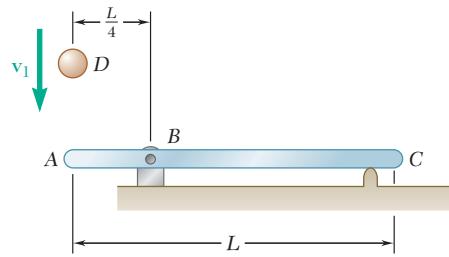


Figura P17.127

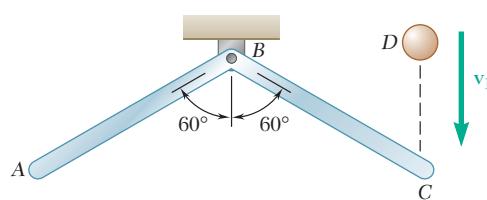


Figura P17.128

1138

Movimiento plano de cuerpos rígidos:
métodos de la energía y la cantidad
de movimiento

17.129 Una barra esbelta *CDE* con longitud L y masa m está unida a un soporte de pasador en su punto medio *D*. Una segunda barra idéntica *AB* gira alrededor de un soporte de pasador en *A* con una velocidad angular ω_1 cuando su extremo *B* golpea el extremo *C* de la barra *CDE*. Si se denota con e el coeficiente de restitución entre las barras, determine la velocidad angular de cada barra inmediatamente después del impacto.

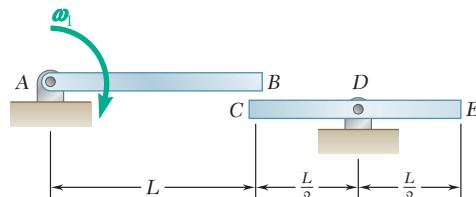


Figura P17.129

17.130 La barra ligera *AB* de 5 lb se suelta desde el reposo en la posición que se muestra y oscila hasta una posición vertical donde golpea a la barra ligera *CD* de 1.5 kg. Si se sabe que el coeficiente de restitución entre la perilla *K* fija en la barra *AB* y la barra *CD* es 0.8, determine el ángulo máximo θ_m que girará la barra *CD* después del impacto.

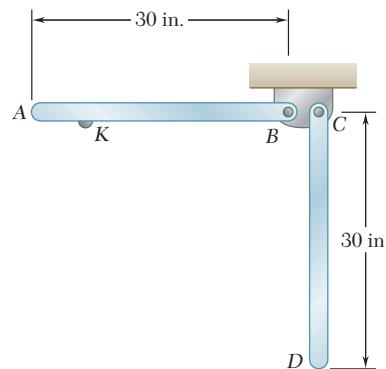


Figura P17.130

17.131 La esfera *A* de masa m y radio r rueda sin deslizarse con una velocidad \bar{v}_1 sobre una superficie horizontal cuando choca frontalmente con una esfera idéntica *B* que está en reposo. Si se denota con μ_k el coeficiente de fricción cinética entre las esferas y la superficie, se desprecia la fricción entre las esferas y se supone un impacto perfectamente elástico, determine *a*) las velocidades lineal y angular de cada esfera inmediatamente después del impacto, *b*) la velocidad de cada esfera después de que empiezan a rodar uniformemente.

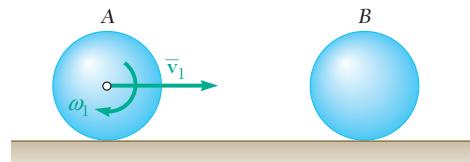


Figura P17.131

- 17.132** Una pequeña pelota de plástico de radio r se lanza contra un suelo rugoso con una velocidad \bar{v}_A de magnitud v_0 y contragiro ω_A de magnitud ω_0 . Se observa que la pelota rebota de A a B , después de B a A y luego de A a B , etc. Si se supone un impacto perfectamente elástico, determine la magnitud requerida ω_0 del contragiro en términos de \bar{v}_0 y r .

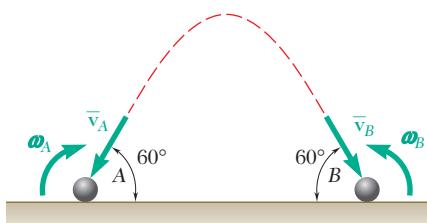


Figura P17.132

- 17.133** En un juego de billar, la bola A rueda sin deslizarse con una velocidad \bar{v}_0 cuando golpea en forma oblicua a la bola B , que está en reposo. Si se denota con r el radio de cada bola y mediante μ_k el coeficiente de fricción cinética entre las bolas, y se supone un impacto perfectamente elástico, determine *a)* la velocidad lineal y angular de cada bola inmediatamente después del impacto, *b)* la velocidad de la bola B después de que ha empezado a rodar de manera uniforme.

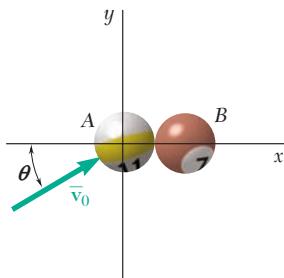


Figura P17.133

- *17.134** Cada una de las barras AB y BC tiene una longitud $L = 15$ in. y un peso $W = 2.5$ lb. Determine la velocidad angular de cada barra inmediatamente después de que el impulso $\mathbf{Q}\Delta t = (0.30 \text{ lb} \cdot \text{s})\mathbf{i}$ se aplique en C .

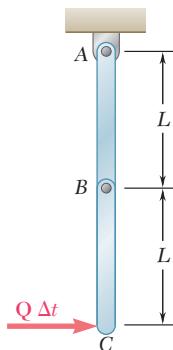


Figura P17.134

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 17

Principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido

Trabajo de una fuerza o un par

Energía cinética en movimiento plano

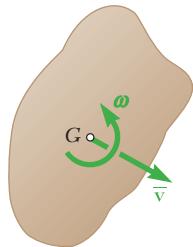


Figura 17.13

En este capítulo se consideró de nuevo el método del trabajo y la energía y el método de impulso y la cantidad de movimiento. En la primera parte del capítulo se estudió el método del trabajo de la energía y su aplicación al análisis del movimiento de cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos.

En la sección 17.2 se expresó primero el principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido en la forma

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (17.1)$$

donde T_1 y T_2 representan los valores inicial y final de la energía cinética del cuerpo rígido y $U_{1 \rightarrow 2}$ representa el trabajo de las *fuerzas externas* que actúan sobre el cuerpo rígido.

En la sección 17.3 se recordó la expresión que se encontró en el capítulo 13 para el trabajo de una fuerza \mathbf{F} aplicada en el punto A, a saber

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds \quad (17.3')$$

donde F fue la magnitud de la fuerza, α el ángulo que forma con la dirección del movimiento de A, y s la variable de integración que mide la distancia recorrida por A a lo largo de su trayectoria. También se derivó la expresión para el *trabajo de un par de momento* \mathbf{M} aplicado a un cuerpo rígido durante una rotación θ del cuerpo rígido:

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (17.5)$$

Después se obtuvo una expresión para la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano [sección 17.4]. Se escribió

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \quad (17.9)$$

donde \bar{v} es la velocidad del centro de masa G del cuerpo, ω es la velocidad angular del cuerpo e \bar{I} es su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por G perpendicular al plano de referencia (figura 17.13) [problema resuelto 17.3]. Se señaló que la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano puede separarse en dos partes: 1) la energía cinética $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ asociada con el movimiento del centro de masa G del cuerpo, y 2) la energía cinética $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$ asociada con la rotación del cuerpo en torno a G .

Para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo que pasa por O con una velocidad angular ω se tuvo

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \quad (17.10)$$

donde I_O fue el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje fijo. Se observó que el resultado que se obtuvo no se limita a la rotación de placas planas o de cuerpos simétricos con respecto al plano de referencia, aunque es válida independientemente de la forma del cuerpo o de la ubicación del eje de rotación.

La ecuación (17.1) puede aplicarse al movimiento de sistemas de cuerpos rígidos [sección 17.5] siempre que todas las fuerzas que actúan sobre los diversos cuerpos participantes —internas así como externas al sistema— se incluyan en el cálculo de $U_{1 \rightarrow 2}$. Sin embargo, en el caso de sistemas compuestos por elementos conectados por pasadores o bloques y poleas conectadas mediante cuerdas inextensibles o engranes dentados, los puntos de aplicación de las fuerzas internas se mueven distancias iguales y el trabajo de estas fuerzas se cancela [problemas resueltos 17.1 y 17.2].

Cuando un cuerpo rígido, o un sistema de cuerpos rígidos, se mueve bajo la acción de fuerzas conservativas, el principio del trabajo de energía puede expresarse en la forma

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (17.12)$$

que se conoce como el principio de la *conservación de la energía* [sección 17.6]. Es posible utilizar este principio para resolver problemas que implican fuerzas conservativas como la fuerza de la gravedad o la que ejerce un resorte [problemas resueltos 17.4 y 17.5]. Sin embargo, cuando se va a determinar una reacción, el principio de la conservación de la energía debe complementarse mediante la aplicación del principio de d'Alembert [problema resuelto 17.4].

En la sección 17.7 se amplió el concepto de potencia a un cuerpo que gira y que está sujeto a un par; se escribió

$$\text{Potencia} = \frac{dU}{dt} = \frac{M d\theta}{dt} = M\omega \quad (17.13)$$

donde M es la magnitud del par y ω la velocidad angular del cuerpo.

La parte media del capítulo se dedicó al método del impulso y la cantidad de movimiento, y a su aplicación en la solución de diversos tipos de problemas que incluyen el movimiento plano de placas rígidas y cuerpos rígidos simétricos con respecto al plano de referencia.

Se recordó primero el principio del *impulso y la cantidad de movimiento* en la forma en que se dedujo en la sección 14.9 para un sistema de partículas y se aplicó al *movimiento de cuerpo rígido* [sección 17.8]. Se escribió

$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2 \quad (17.14)$$

Energía cinética en rotación

Sistemas de cuerpos rígidos

Conservación de la energía

Potencia

Principio del impulso y la cantidad de movimiento para un cuerpo rígido

A continuación se demostró que para una placa rígida o un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, el sistema de las cantidades de movimiento de las partículas que forman el cuerpo es equivalente a un vector $m\bar{v}$ conectado con su punto de aplicación en el centro de masa G del cuerpo y un par $\bar{I}\omega$ (figura 17.14). El vector

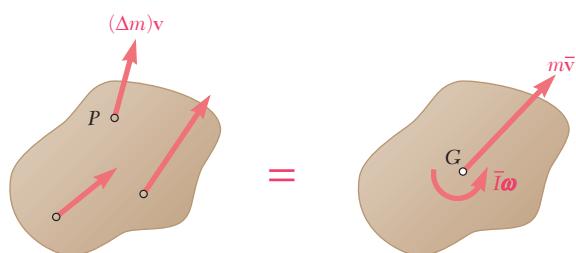


Figura 17.14

$m\bar{v}$ se asocia con la traslación del cuerpo con G y representa la *cantidad de movimiento lineal* del cuerpo, en tanto que el par $\bar{I}\omega$ corresponde a la rotación del cuerpo alrededor de G y representa la *cantidad de movimiento angular* del cuerpo alrededor de un eje que pasa por G .

La ecuación (17.14) puede expresarse en forma gráfica como se muestra en la figura 17.15 dibujando tres diagramas que representen, respectivamente, al sistema de las cantidades de movimiento iniciales del cuerpo, los impulsos de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo y el sistema de las cantidades de movimiento finales del cuerpo.

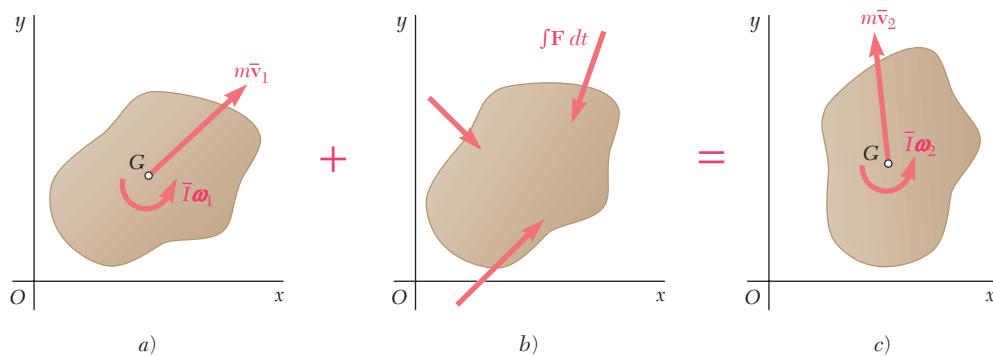


Figura 17.15

Al sumar e igualar de manera respectiva las *componentes x*, las *componentes y* y los *momentos alrededor de cualquier punto dado* de los vectores que se indican en la figura, se obtienen tres ecuaciones de movimiento que pueden resolverse respecto a las incógnitas deseadas [problemas resueltos 17.6 y 17.7].

En problemas que tienen que ver con varios cuerpos rígidos conectados [sección 17.9], cada cuerpo puede considerarse de manera separada [problema resuelto 17.6], o, si no intervienen más de tres incógnitas, es posible aplicar el principio del impulso y la can-

tidad de movimiento al sistema completo, considerando sólo los impulsos de las fuerzas externas [problema resuelto 17.8].

Cuando las líneas de acción de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de cuerpos rígidos pasa por un punto O , se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor de O [sección 17.10]. Se sugirió que los problemas que implican la conservación de la cantidad de movimiento angular se resuelvan con el método general que se describió antes [problema resuelto 17.8].

La última parte del capítulo se dedicó al *movimiento impulsivo* y al *impacto excéntrico* de cuerpos rígidos. De la sección 17.11 se recordó que el método del impulso de la cantidad de movimiento es el único método práctico para la solución de problemas que implican el movimiento impulsivo, y que el cálculo de impulso en tales problemas es en particular simple [problema resuelto 17.9].

En la sección 17.12 se recordó que el impacto excéntrico de dos cuerpos rígidos se define como un impacto en el cual los centros de masa de los cuerpos que chocan *no* se localizan sobre la línea de impacto. Se demostró que en una situación de este tipo se sigue cumpliendo una relación similar a la que se dedujo en el capítulo 13 para el impacto central de dos partículas y en la que interviene el coeficiente de restitución e , pero que *se deben usar las velocidades de los puntos A y B donde ocurre el contacto durante el impacto*. En consecuencia

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \quad (17.19)$$

donde $(v_A)_n$ y $(v_B)_n$ son las componentes a lo largo de la línea de impacto de las velocidades de A y B antes del impacto, y $(v'_A)_n$ y $(v'_B)_n$ son sus componentes después del impacto (figura 17.16). La

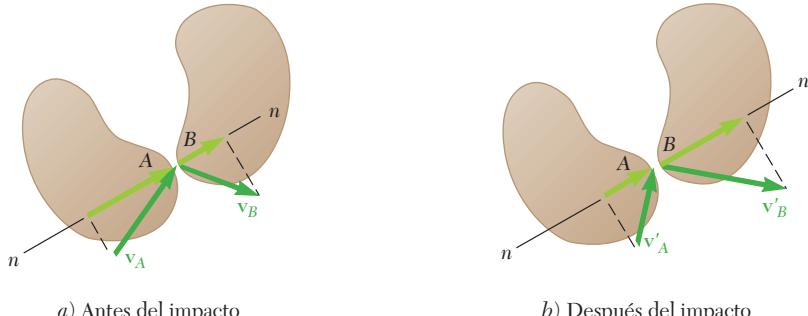


Figura 17.16

ecuación (17.19) es aplicable no sólo cuando los cuerpos que chocan se mueven con libertad después del impacto, sino también cuando están parcialmente restringidos en su movimiento. Debe usarse junto con una o varias ecuaciones obtenidas al aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento [problema resuelto 17.10]. También se consideró un problema donde es posible combinar el método del impulso y la cantidad de movimiento, y el método de trabajo y la energía [problema resuelto 17.11].

Conservación de la cantidad de movimiento angular

Movimiento impulsivo

Impacto excéntrico

Problemas de repaso

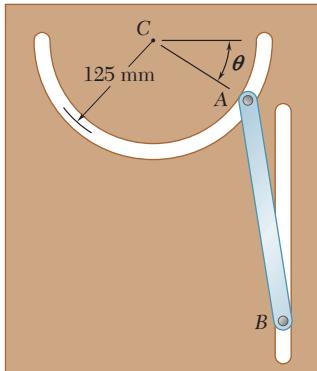


Figura P17.135

17.135 El movimiento de la varilla delgada AB de 250 mm se guía mediante pasadores en A y B que se deslizan libremente por ranuras cortadas en una placa vertical, como se muestra en la figura. Si la barra tiene una masa de 2 kg y se suelta desde el reposo cuando $\theta = 0$, determine las reacciones en A y B cuando $\theta = 90^\circ$.

17.136 Un disco uniforme de grosor constante y que se encuentra inicialmente en reposo se pone en contacto con la banda mostrada, la cual se mueve a una velocidad constante $v = 25$ m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la banda es de 0.15, determine *a)* el número de revoluciones ejecutadas por el disco antes de alcanzar una velocidad angular constante, *b)* el tiempo requerido para que el disco alcance esa velocidad angular constante.

17.137 Retome el problema 17.136, y ahora suponga que la dirección del movimiento de la banda se invierte.

17.138 Una barra esbelta uniforme se coloca en la esquina B y se le imprime un pequeño movimiento en el sentido de las manecillas del reloj. Si se supone que la esquina es afilada y se incrusta ligeramente en el extremo de la barra, de manera que el coeficiente de fricción estática en B es muy grande, determine *a)* el ángulo β que habrá girado la barra cuando pierda contacto con la esquina, *b)* la velocidad correspondiente del extremo A .

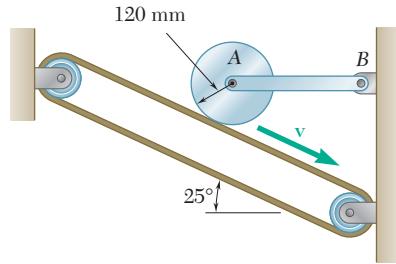


Figura P17.136

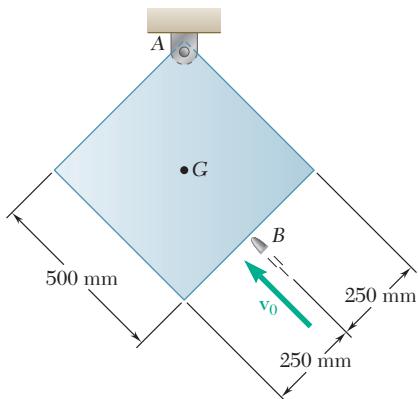


Figura P17.139

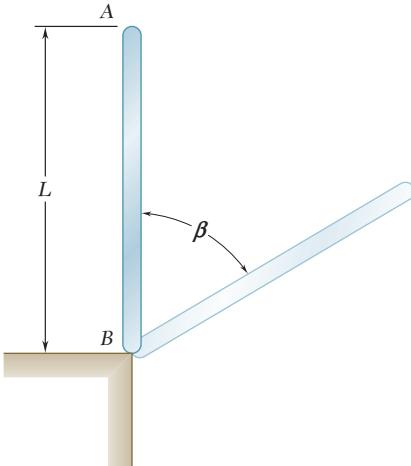


Figura P17.138

17.139 Una bala de 35 g se dispara con una velocidad de 400 m/s hacia uno de los lados del panel cuadrado que cuelga de un pasador en A , como se muestra en la figura. Si el panel está inicialmente en reposo, determine las componentes de la reacción en A después de que el panel ha girado 90° .

17.140 Un bloque cuadrado de masa m cae con una velocidad \bar{v}_1 cuando golpea una pequeña obstrucción en B . Si se supone que el impacto entre la esquina A y la obstrucción B es perfectamente plástica, determine inmediatamente después del impacto *a)* la velocidad angular del bloque, *b)* la velocidad de su centro de masa G .

17.141 Retome el problema 17.140, y ahora suponga que el impacto entre la esquina A y la obstrucción B es perfectamente elástico.

17.142 Una barra AB de 3 kg está unida mediante un pasador en D a una placa cuadrada de 4 kg, la cual puede girar libremente alrededor de un eje vertical. Si la velocidad angular de la placa es de 120 rpm cuando la barra está en posición vertical, determine *a)* la velocidad angular de la placa después de que la barra haya oscilado hasta una posición horizontal y después haya llegado al reposo contra el pasador C , *b)* la energía perdida durante el impacto plástico en C .

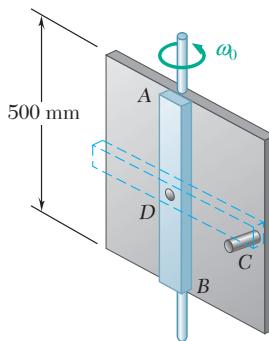


Figura P17.142

17.143 Una placa rectangular de 6×8 in. se suspende mediante pasadores en A y B . El pasador en B se retira y la placa oscila libremente alrededor del pasador A . Determine *a)* la velocidad angular de la placa después de que haya girado 90° , *b)* la velocidad angular máxima alcanzada por la placa mientras oscila libremente.

17.144 Los discos A y B están hechos del mismo material y tienen el mismo grosor; pueden girar libremente alrededor del eje vertical. El disco B se encuentra en reposo cuando se deja caer sobre el disco A , el cual gira con una velocidad angular de 500 rpm. Si el disco A pesa 18 lb, determine *a)* la velocidad angular final de los discos, *b)* el cambio en la energía cinética del sistema.

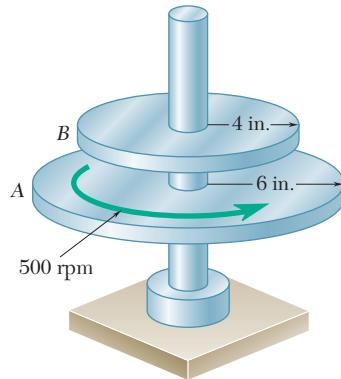


Figura P17.144

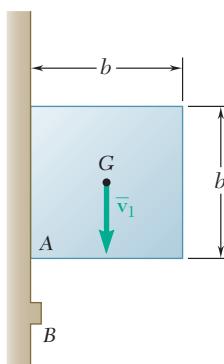


Figura P17.140

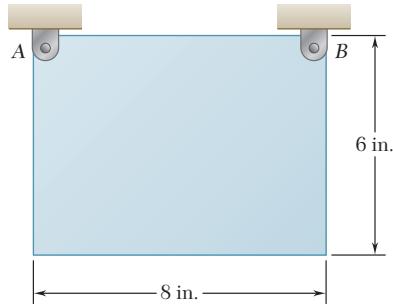


Figura P17.143

1146

Movimiento plano de cuerpos rígidos:
métodos de la energía y la cantidad
de movimiento

17.145 ¿A qué altura h sobre su centro G debe golpearse con un taco y de manera horizontal la bola de billar mostrada si debe comenzar a rodar sin deslizarse?

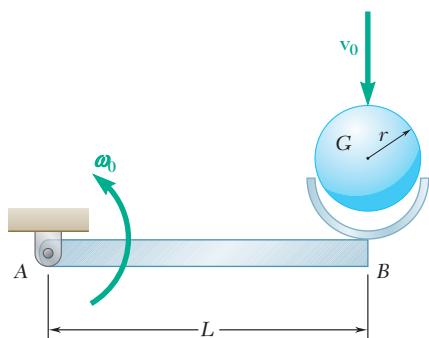


Figura P17.146

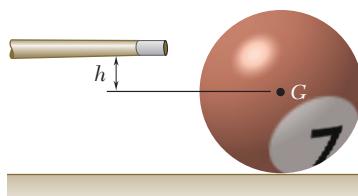


Figura P17.145

17.146 Una esfera grande de 3 lb con un radio $r = 3$ in. se lanza hacia una canasta ligera al extremo de una barra delgada y uniforme que pesa 2 lb y tiene una longitud $L = 10$ in., como se muestra en la figura. Inmediatamente antes del impacto, la velocidad angular de la barra es de 3 rad/s en sentido contrario al de las manecillas del reloj y la velocidad de la esfera es de 2 ft/s hacia abajo. Suponga que la esfera se incrusta en la canasta. Determine después del impacto *a)* la velocidad angular de la barra y la esfera, *b)* las componentes de las reacciones en A .

Problemas de computadora

17.C1 La barra AB tiene una masa de 3 kg y se conecta en A a un carro C de 5 kg. Si el sistema se suelta desde el reposo cuando $\theta = 30^\circ$ y se desprecia la fricción, utilice software para calcular la velocidad del carro y la velocidad del extremo B de la barra para valores de θ de $+30^\circ$ a -90° . Determine el valor de θ para el cual la velocidad del carro hacia la izquierda es máxima y el valor correspondiente de la velocidad.

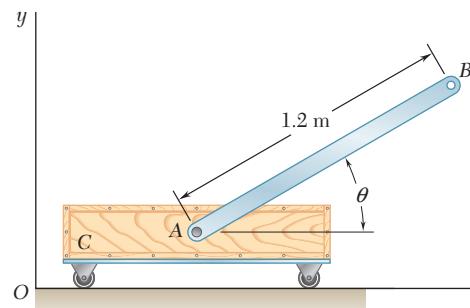


Figura P17.C1

17.C2 La barra ligera y uniforme AB de longitud $L = 800$ mm y masa de 5 kg descansa sobre una pequeña rueda en D y está conectada a un collarín de masa despreciable que puede deslizarse con libertad sobre la barra vertical EF . Si $a = 200$ mm y la barra se suelta desde el reposo cuando $\theta = 0$, utilice software para calcular y graficar la velocidad angular de la barra y la velocidad del extremo A para valores de θ desde 0 hasta 50° . Determine la velocidad angular máxima de la barra y el valor correspondiente de θ .

17.C3 Una esfera uniforme de 10 in. de radio rueda sobre una serie de barras horizontales paralelas separadas por el mismo espacio d . Cuando rueda sin deslizarse alrededor de una barra determinada, la esfera choca con la siguiente barra y empieza a rotar alrededor de ella sin deslizarse, hasta que hace contacto con la siguiente barra, y así sucesivamente. Si se supone un impacto perfectamente plástico y se sabe que la esfera tiene una velocidad angular ω_0 de 1.5 rad/s cuando su centro de masa G está directamente arriba de la barra A , utilice software para calcular, respecto a valores de d desde 1 hasta 6 in., *a)* la velocidad angular ω_1 de la esfera cuando G pasa directamente arriba de la barra B , *b)* el número de barras sobre las cuales la esfera rodará después de dejar la barra A .

17.C4 El collarín C tiene una masa de 2.5 kg y puede deslizarse sin fricción sobre la barra AB . Un resorte de constante de 750 N/m y longitud no deformada $r_0 = 500$ mm se conecta en la forma mostrada al collarín y al eje B . Se sabe que el momento de inercia de la masa total de la barra, el eje y el resorte corresponde a $0.3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ alrededor de B . Al principio el collarín se mantiene a una distancia de 500 mm desde el eje de rotación mediante un pequeño pasador que sobresale en la barra. El pasador se quita de repente cuando el mecanismo está girando en un plano horizontal con velocidad angular ω_0 de 10 rad/s. Si se denota con r la distancia del collarín desde el eje de rotación, utilice software para calcular y graficar la velocidad angular del mecanismo y la velocidad del collarín relativa a la barra para valores de r desde 500 hasta 700 mm. Determine el valor máximo de r en el movimiento resultante.

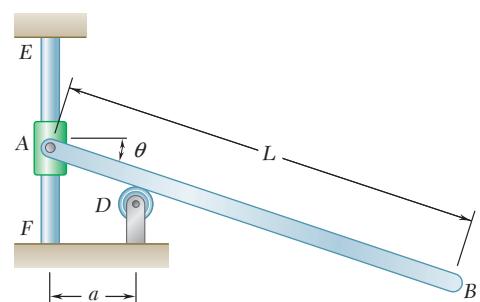


Figura P17.C2

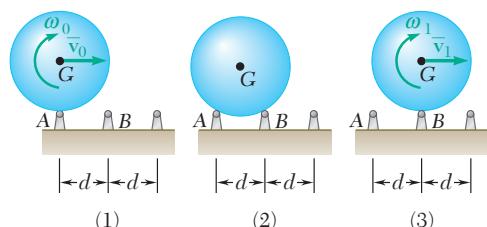


Figura P17.C3

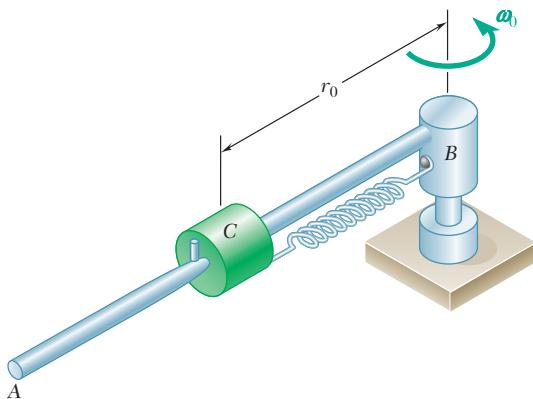


Figura P17.C4

17.C5 Cada una de las dos barras ligeras e idénticas que se muestran tiene una longitud $L = 30$ in. Si el sistema se suelta desde el reposo cuando las barras están horizontales, utilice software para calcular y graficar la velocidad angular de la barra BC y la velocidad del punto AB para valores de θ desde 0 hasta 90° .

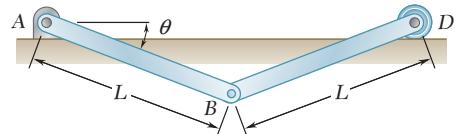
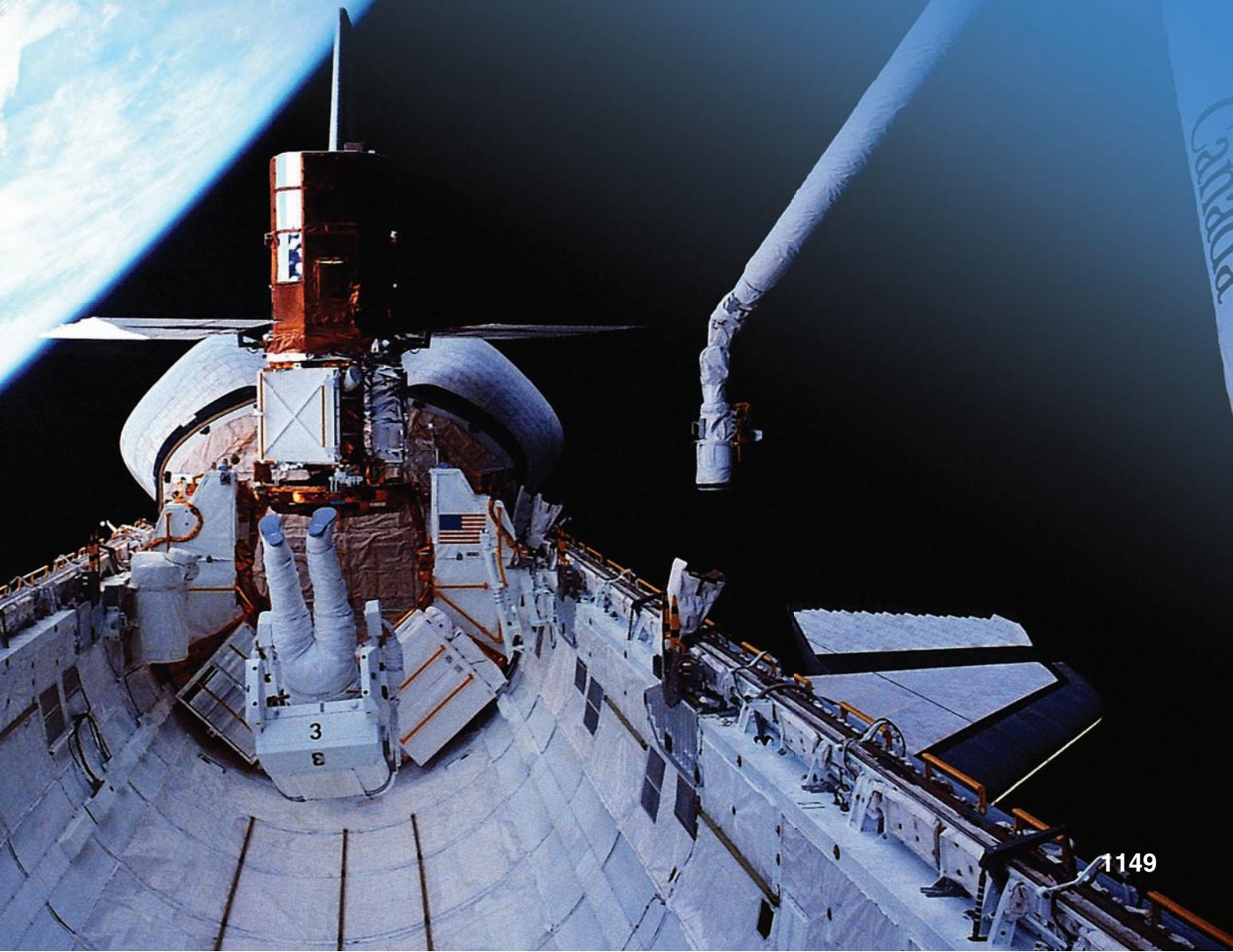


Figura P17.C5

Si bien los principios generales que se han aprendido en los capítulos anteriores pueden utilizarse de nuevo para resolver problemas que implican el movimiento en tres dimensiones de cuerpos rígidos, la resolución de dichos problemas requiere de un enfoque distinto y resulta considerablemente más amplia que la resolución de problemas bidimensionales. Un ejemplo es la determinación de las fuerzas que actúan sobre el brazo robótico de un transbordador espacial.

CAPÍTULO **18**

Cinética de cuerpos rígidos en tres dimensiones



CAPÍTULO 18 CINÉTICA DE CUERPOS RÍGIDOS EN TRES DIMENSIONES

- 18.1** Introducción
- 18.2** Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones
- 18.3** Aplicación del principio del impulso y la cantidad de movimiento al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido
- 18.4** Energía cinética de un cuerpo rígido en tres dimensiones
- 18.5** Movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones
- 18.6** Ecuaciones de movimiento de Euler. Extensión del principio de d'Alembert al movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones
- 18.7** Movimiento de un cuerpo rígido alrededor de un punto fijo
- 18.8** Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo
- 18.9** Movimiento de un giroscopio. Ángulos de Euler.
- 18.10** Precesión estable de un giroscopio
- 18.11** Movimiento de un cuerpo asimétrico con respecto a un eje y que no se somete a ninguna fuerza

*18.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos 16 y 17 se estudió el movimiento plano de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos. En el capítulo 16 y en la segunda mitad del capítulo 17 (método de la cantidad de movimiento), nuestro estudio se limitó aún más a las placas planas y de cuerpos simétricos con respecto al plano de referencia. Sin embargo, muchos de los resultados fundamentales que se obtuvieron en esos dos capítulos siguen siendo válidos en el caso del movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones.

Por ejemplo, las dos ecuaciones fundamentales

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (18.1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (18.2)$$

sobre las cuales se basó el análisis del movimiento plano de un cuerpo rígido siguen siendo válidas en el caso más general del movimiento de un cuerpo rígido. Como se indicó en la sección 16.2, estas ecuaciones expresan que el sistema de las fuerzas externas es equipolente al sistema consistente en el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ fijo en G y al par de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$ (figura 18.1).

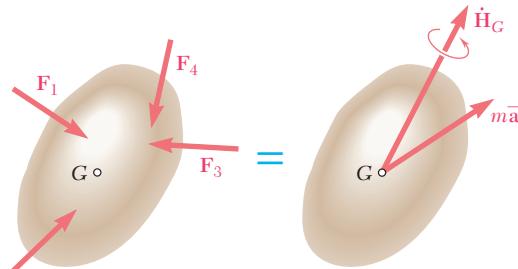


Figura 18.1

Sin embargo, la relación $\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega}$, la cual permitió determinar la cantidad de movimiento angular de una placa rígida y que desempeña una parte importante en la solución de problemas que implican el movimiento plano de placas y cuerpos simétricos con respecto al plano de referencia, deja de ser válida en el caso de cuerpos no simétricos o movimiento en tres dimensiones. En consecuencia, en la primera parte del capítulo, en la sección 18.2, se formula un método más general para calcular la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G de un cuerpo rígido en tres dimensiones.

Asimismo, si bien la característica principal del método del impulso-cantidad de movimiento que se analizó en la sección 17.7, esto es, la reducción de cantidad de movimiento de las partículas de un cuerpo rígido a un vector de movimiento lineal $m\bar{\mathbf{v}}$ fijo al centro de masa G del cuerpo y un par de cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G , sigue siendo válida, la relación $\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega}$ debe descartarse y sustituirse por la relación más general que se formula en la sección 18.2 antes de que este método pueda aplicarse al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido (sección 18.3).

También se advirtió que el principio del trabajo y la energía (sección 17.2) y el principio de la conservación de la energía (sección 17.6) continúan aplicándose en el caso del movimiento de un cuerpo rígido

en tres dimensiones. Sin embargo, la expresión que se obtuvo en la sección 17.4 para la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento plano será sustituida por una nueva expresión desarrollada en la sección 18.4 para un cuerpo rígido en movimiento tridimensional.

En la segunda parte del capítulo se aprenderá a determinar la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del cuerpo rígido tridimensional, utilizando un sistema de referencia rotatorio con respecto al cual los momentos y los productos de inercia del cuerpo permanecen constantes (sección 18.5). Las ecuaciones (18.1) y (18.2) se expresarán entonces en forma de ecuaciones de diagramas de cuerpo libre, las cuales pueden utilizarse para resolver diversos problemas que implican movimiento tridimensional de cuerpos rígidos (secciones 18.6 a 18.8).

La última parte del capítulo (secciones 18.9 a 18.11) se dedica al estudio del movimiento del giroscopio o, de manera más general, de un cuerpo simétrico con respecto a un eje con un punto fijo localizado sobre su eje de simetría. En la sección 18.10 se considera el caso particular de la precesión continua de un giroscopio y, en la sección 18.11, se analiza el movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje que no está sujeto a alguna fuerza, salvo su propio peso.

*18.2. CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

En esta sección se puede observar cómo la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G de un cuerpo alrededor de su centro de masa G puede determinarse a partir de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo en el caso de movimiento tridimensional.

De acuerdo con la ecuación (14.24), la cantidad de movimiento angular del cuerpo alrededor de G puede expresarse como

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \Delta m_i) \quad (18.3)$$

donde \mathbf{r}'_i y \mathbf{v}'_i denotan, respectivamente, el vector de posición y la velocidad de la partícula P_i , de masa Δm_i , relativa al sistema de referencia centroidal $Gxyz$ (figura 18.2). Pero $\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la ve-

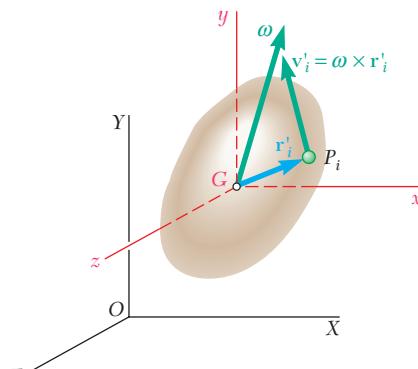


Figura 18.2

locidad angular del cuerpo en el instante considerado. Al sustituir en (18.3), se tiene

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \Delta m_i]$$

Si se recuerda la regla para determinar las componentes rectangulares de un producto vectorial (sección 3.5), se obtiene la siguiente expresión para la componente x de la cantidad de movimiento angular

$$\begin{aligned} H_x &= \sum_{i=1}^n [y_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)_z - z_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)_y] \Delta m_i \\ &= \sum_{i=1}^n [y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i)] \Delta m_i \\ &= \omega_x \sum_i (y_i^2 + z_i^2) \Delta m_i - \omega_y \sum_i x_i y_i \Delta m_i - \omega_z \sum_i z_i x_i \Delta m_i \end{aligned}$$

Al sustituir las sumas por integrales en esta expresión y en las dos expresiones similares que se obtienen para H_y y H_z se tiene

$$\begin{aligned} H_x &= \omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int zx dm \\ H_y &= -\omega_x \int xy dm + \omega_y \int (z^2 + x^2) dm - \omega_z \int yz dm \\ H_z &= -\omega_x \int zx dm - \omega_y \int yz dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (18.4)$$

Se puede observar que las integrales contienen cuadrados que representan, respectivamente, los *momentos de inercia centroidales* del cuerpo alrededor de los ejes x , y y z (sección 9.11); se tiene

$$\bar{I}_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad \bar{I}_y = \int (z^2 + x^2) dm \quad (18.5)$$

$$\bar{I}_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

De manera similar, las integrales contienen productos de coordenadas que representan los *productos de inercia de masa centroidales* del cuerpo (sección 9.16); se tiene

$$\bar{I}_{xy} = \int xy dm \quad \bar{I}_{yz} = \int yz dm \quad \bar{I}_{zx} = \int zx dm \quad (18.6)$$

Al sustituir de (18.5) y (18.6) en (18.4), se obtienen las componentes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del cuerpo alrededor de su centro de masa

$$\begin{aligned} H_x &= +\bar{I}_x \omega_x - \bar{I}_{xy} \omega_y - \bar{I}_{xz} \omega_z \\ H_y &= -\bar{I}_{yx} \omega_x + \bar{I}_y \omega_y - \bar{I}_{yz} \omega_z \\ H_z &= -\bar{I}_{zx} \omega_x - \bar{I}_{zy} \omega_y + \bar{I}_z \omega_z \end{aligned} \quad (18.7)$$

Las relaciones (18.7) muestran que la operación que transforma al vector ω en el vector \mathbf{H}_G (figura 18.3) se caracteriza por el arreglo de momentos y productos de inercia

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_x & -\bar{I}_{xy} & -\bar{I}_{xz} \\ -\bar{I}_{yx} & \bar{I}_y & -\bar{I}_{yz} \\ -\bar{I}_{zx} & -\bar{I}_{zy} & \bar{I}_z \end{pmatrix} \quad (18.8)$$

El arreglo (18.8) define al *tensor de inercia* del cuerpo en su centro de masa G .[†] Se obtendría un nuevo arreglo de momentos y productos de inercia si se usara un sistema de ejes diferente. La transformación caracterizada por este nuevo arreglo, sin embargo, seguiría siendo la misma. Es claro, la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G correspondiente a una velocidad angular dada ω es independiente de la elección de los ejes de coordenadas. Como se mostró en las secciones 9.17 y 9.18, siempre es posible seleccionar un sistema de ejes $Gx'y'z'$, denominados *ejes principales de inercia*, con respecto a los cuales todos los productos de inercia de un cuerpo dado son cero. El arreglo (18.8) toma la forma diagonalizada

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{z'} \end{pmatrix} \quad (18.9)$$

donde $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{z'}$ representan los *momentos de inercia centroidales principales* del cuerpo, y las relaciones (18.7) se reducen a

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'} \omega_{x'} \quad H_{y'} = \bar{I}_{y'} \omega_{y'} \quad H_{z'} = \bar{I}_{z'} \omega_{z'} \quad (18.10)$$

Adviértase que si los tres momentos de inercia centroidales principales $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{z'}$ son iguales, las componentes $H_{x'}$, $H_{y'}$, $H_{z'}$ de la cantidad de movimiento angular alrededor de G son proporcionales a las componentes $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ de la velocidad angular, y los vectores \mathbf{H}_G y ω son colineales. Sin embargo, en general los momentos de inercia principales serán diferentes y los vectores \mathbf{H}_G y ω tendrán direcciones diferentes, salvo cuando dos de las tres componentes de ω sean cero, esto es, cuando ω apunte a lo largo de uno de los ejes de coordenadas. Por consiguiente, la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G de un cuerpo rígido y su velocidad angular ω tienen la misma dirección si, y sólo si, ω está dirigido a lo largo de un eje principal.[‡]

[†]Con $\bar{I}_x = I_{11}$, $\bar{I}_y = I_{22}$, $\bar{I}_z = I_{33}$, y $-\bar{I}_{xy} = I_{12}$, $-\bar{I}_{xz} = I_{13}$, etc., es posible escribir el tensor de inercia (18.8) en la forma estándar

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

Si se denota mediante H_1 , H_2 , H_3 las componentes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G y mediante ω_1 , ω_2 , ω_3 las componentes de la velocidad angular ω , se pueden escribir las relaciones (18.7) en la forma

$$H_i = \sum_j I_{ij} \omega_j$$

donde i y j toman los valores 1, 2, 3. Se afirma que las cantidades I_{ij} son las componentes del tensor de inercia. Puesto que $I_{ij} = I_{ji}$, el tensor de inercia es un *tensor simétrico de segundo orden*.

[‡]En el caso particular en el que $\bar{I}_{x'} = \bar{I}_{y'} = \bar{I}_{z'}$, cualquier línea que pase por G puede considerarse como un eje principal de inercia y los vectores \mathbf{H}_G y ω siempre son colineales.

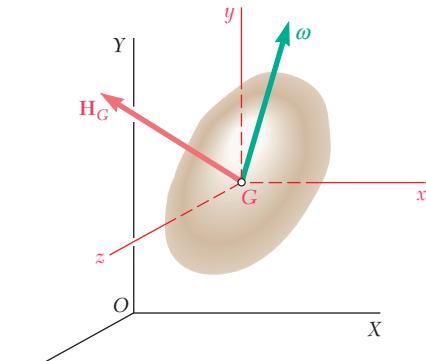


Figura 18.3



Fotografía 18.1 El diseño de un sistema robótico de soldadura para una línea de ensamblaje de automóviles requiere un estudio tridimensional tanto de cinemática como de cinética.

Puesto que esta condición se satisface en el caso de movimiento plano de un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia, en las secciones 16.3 y 17.8 se representó la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G de un cuerpo de este tipo por el vector $I\omega$. Sin embargo, se debe reconocer que este resultado no puede extenderse al caso del movimiento plano de un cuerpo no simétrico, o al del movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. Excepto cuando ω esté dirigida a lo largo de un eje principal de inercia, la cantidad de movimiento angular y la velocidad angular de un cuerpo rígido tiene direcciones diferentes, y la relación (18.7) o (18.10) debe usarse para determinar \mathbf{H}_G a partir de ω .

Reducción de las cantidades de movimiento de las partículas de un cuerpo rígido a un vector de cantidad de movimiento y a un par en G . En la sección 17.8 se trató que el sistema formado por la cantidad de movimiento de las diversas partículas de un cuerpo rígido puede reducirse a un vector \mathbf{L} fijo al centro de masa G del cuerpo, que representa la cantidad de movimiento lineal del cuerpo, y a un

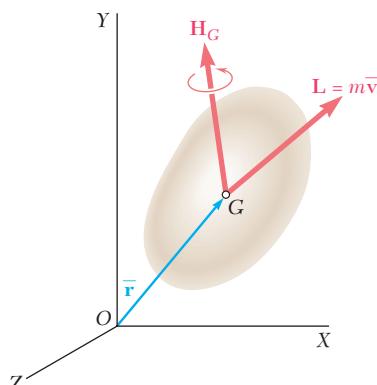


Figura 18.4

par \mathbf{H}_G , que representa a la cantidad de movimiento angular del cuerpo alrededor de G (figura 18.4). Ahora está la posibilidad de determinar el vector \mathbf{L} y el par \mathbf{H}_G en el caso más general del movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. Como en el caso del movimiento bidimensional considerado en la sección 17.8, la cantidad de movimiento lineal \mathbf{L} del cuerpo es igual al producto $m\bar{v}$ de su masa m y la velocidad \bar{v} de su centro de masa G . Sin embargo, la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G ya no puede obtenerse multiplicando simplemente la velocidad angular ω del cuerpo por el escalar I ; ahora deben obtenerse de las componentes de ω y de los momentos y productos de inercia centroidales del cuerpo mediante el uso de la ecuación (18.7) o (18.10).

Hay que observar que una vez que se ha determinado la cantidad de movimiento lineal $m\bar{v}$ y la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G de un cuerpo rígido, su cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O alrededor de cualquier punto dado O puede obtenerse sumando las cantidades de movimiento alrededor de O del vector $m\bar{v}$ y del par \mathbf{H}_G . Se escribe

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{v} + \mathbf{H}_G \quad (18.11)$$

Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido restringido a girar alrededor de un punto fijo. En el caso particular de un cuerpo rígido restringido a girar en el espacio tridimensional alrededor de un punto fijo O (figura 18.5a), a veces resulta conveniente

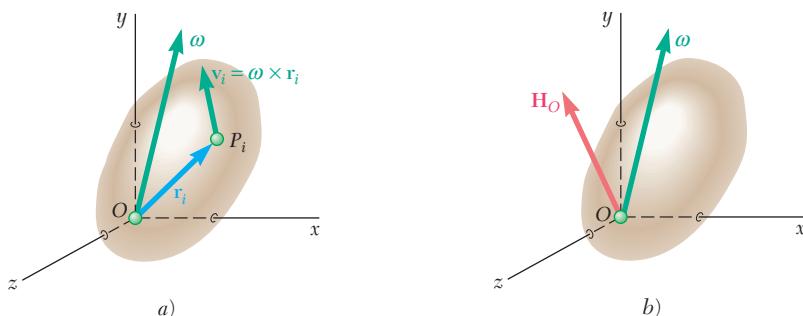


Figura 18.5

determinar la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del cuerpo alrededor del punto fijo O . Si bien \mathbf{H}_O podría obtenerse calculando primero \mathbf{H}_G como se indicó antes y utilizando después la ecuación (18.11), en muchas ocasiones es ventajoso determinar \mathbf{H}_O directamente de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo y de sus momentos y productos de inercia con respecto al sistema de referencia $Oxyz$ centrado en el punto fijo O . Si se recuerda la ecuación (14.7), se escribe

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \Delta m_i) \quad (18.12)$$

donde \mathbf{r}_i y \mathbf{v}_i denotan, respectivamente, el vector de posición y la velocidad de la partícula P_i con respecto al sistema de referencia fijo $Oxyz$. Al sustituir $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$, y después de realizar manipulaciones similares a las que se usaron en la parte anterior de esta sección, se encontró que las componentes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O (figura 18.5b) están dadas por las relaciones

$$\begin{aligned} H_x &= +I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z \end{aligned} \quad (18.13)$$

donde los momentos de inercia I_x , I_y , I_z y los productos de inercia I_{xy} , I_{yz} , I_{zx} se calculan con respecto al sistema de referencia $Oxyz$ centrado en el punto fijo O .

*18.3. APPLICACIÓN DEL PRINCIPIO DEL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO AL MOVIMIENTO TRIDIMENSIONAL DE UN CUERPO RÍGIDO

Antes de que sea posible aplicar la ecuación fundamental (18.2) a la solución de problemas que implican el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, se debe aprender a calcular la derivada del vector \mathbf{H}_G . Esto se hará en la sección 18.5. Los resultados que se obtuvieron en la sección anterior pueden, sin embargo, utilizarse de manera directa para resolver problemas mediante el método del impulso y la cantidad de movimiento.



Fotografía 18.2 Como consecuencia de la fuerza impulsiva aplicada mediante una bola de boliche, un pino adquiere tanto cantidad de movimiento lineal como cantidad de movimiento angular.

Si se recuerda que el sistema formado por la cantidad de movimiento de las partículas de un cuerpo rígido se reduce al vector de cantidad de movimiento lineal $m\bar{v}$ fijo en el centro de masa G del cuerpo y a un par de cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G , se representa gráficamente la relación fundamental

$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2 \quad (17.4)$$

mediante los tres dibujos que se presentan en la figura 18.6. Para resolver un problema determinado, es posible utilizar estos dibujos para es-

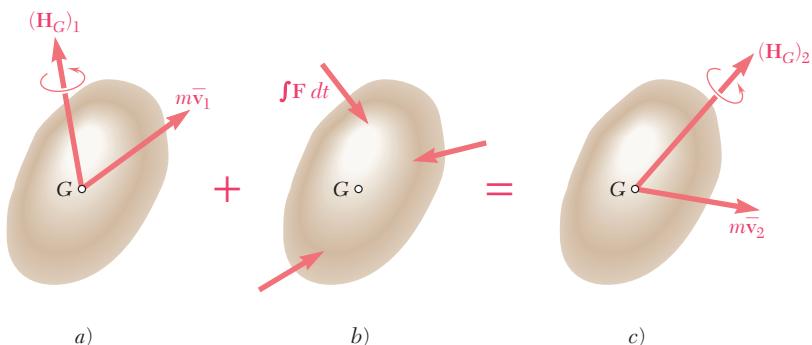


Figura 18.6

cribir componentes y ecuaciones de momento apropiadas, teniendo presente que las componentes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G se relacionan con las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ mediante las ecuaciones (18.7) de la sección precedente.

Al resolver problemas que tienen que ver con el movimiento de un cuerpo que gira alrededor de un punto fijo O , resultará conveniente eliminar el impulso de la reacción en O al escribir una ecuación que incluya los momentos de las cantidades de movimiento e impulsos con respecto a O . Recuérdese que la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del cuerpo alrededor del punto fijo O puede obtenerse directamente de las ecuaciones (18.13) o calculando primero su cantidad de movimiento lineal $m\bar{v}$ y su momento angular \mathbf{H}_G y utilizando después la ecuación (18.11).

*18.4. ENERGÍA CINÉTICA DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

Considere un cuerpo rígido de masa m en movimiento tridimensional. Recuerde de la sección 14.6 que si la velocidad absoluta \mathbf{v}_i de cada partícula P_i del cuerpo se expresa como la suma de la velocidad \bar{v} del centro de masa G del cuerpo y de la velocidad \mathbf{v}'_i de la partícula relativa al sistema de referencia $Gxyz$ con origen en G y de orientación fija (figura 18.7), la energía cinética del sistema de partículas que forman al cuerpo rígido puede escribirse en la forma

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v'_i{}^2 \quad (18.14)$$

donde el último término representa la energía cinética T' del cuerpo relativa al sistema de referencia centroidal $Gxyz$. Puesto que $v'_i = |\mathbf{v}'_i| = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i|$, se escribe

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v'_i{}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i|^2 \Delta m_i$$

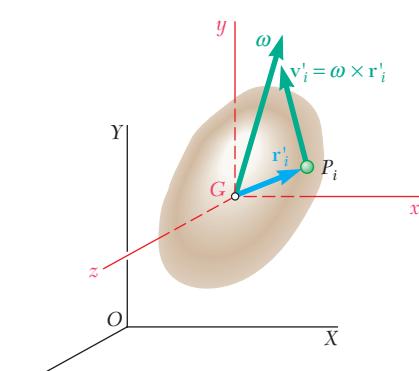


Figura 18.7

Al expresar el cuadrado en términos de componentes rectangulares del producto vectorial y sustituir las sumas por integrales, se tiene

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2} \int [(\omega_x y - \omega_y x)^2 + (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2] dm \\ &= \frac{1}{2} [\omega_x^2 \int (y^2 + z^2) dm + \omega_y^2 \int (z^2 + x^2) dm + \omega_z^2 \int (x^2 + y^2) dm \\ &\quad - 2\omega_x \omega_y \int xy dm - 2\omega_y \omega_z \int yz dm - 2\omega_z \omega_x \int zx dm] \end{aligned}$$

o, al recordar las relaciones (18.5) y (18.6),

$$T' = \frac{1}{2} (\bar{I}_x \omega_x^2 + \bar{I}_y \omega_y^2 + \bar{I}_z \omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy} \omega_x \omega_y - 2\bar{I}_{yz} \omega_y \omega_z - 2\bar{I}_{zx} \omega_z \omega_x) \quad (18.15)$$

Si se sustituye en (18.14) la expresión (18.15) que se acaba de obtener para la energía cinética del cuerpo relativa a los ejes centroidales, se escribe

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} (\bar{I}_x \omega_x^2 + \bar{I}_y \omega_y^2 + \bar{I}_z \omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy} \omega_x \omega_y - 2\bar{I}_{yz} \omega_y \omega_z - 2\bar{I}_{zx} \omega_z \omega_x) \quad (18.16)$$

Si los ejes de coordenadas se eligen de manera que coincidan en el instante considerado con los ejes principales x' , y' , z' del cuerpo, la relación que se obtuvo se reduce a

$$T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} (\bar{I}_{x'} \omega_{x'}^2 + \bar{I}_{y'} \omega_{y'}^2 + \bar{I}_{z'} \omega_{z'}^2) \quad (18.17)$$

donde \bar{v} = velocidad del centro de masa

ω = velocidad angular

m = masa del cuerpo rígido

$\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{z'}$ = momentos de inercia centroidales principales

Los resultados obtenidos permiten aplicar al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido el principio del trabajo y la energía (sección 17.2) y la conservación de la energía (sección 17.6).

Energía cinética de un cuerpo rígido con un punto fijo. En el caso particular de un cuerpo rígido que gira en el espacio tridimensional alrededor de un punto fijo O , la energía cinética del cuerpo puede expresarse en términos de sus momentos y productos de inercia con respecto a los ejes con origen en O (figura 18.8). Si se recuerda la definición de la energía cinética de un sistema de partículas y se sustituye $v_i = |\mathbf{v}_i| = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|$, se escribe

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|^2 \Delta m_i \quad (18.18)$$

Manipulaciones similares a las que se usaron para obtener la ecuación (18.15) producen

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2I_{xy} \omega_x \omega_y - 2I_{yz} \omega_y \omega_z - 2I_{zx} \omega_z \omega_x) \quad (18.19)$$

o si los ejes principales x' , y' , z' del cuerpo en el origen O se eligen como ejes coordenados,

$$T = \frac{1}{2} (I_{x'} \omega_{x'}^2 + I_{y'} \omega_{y'}^2 + I_{z'} \omega_{z'}^2) \quad (18.20)$$

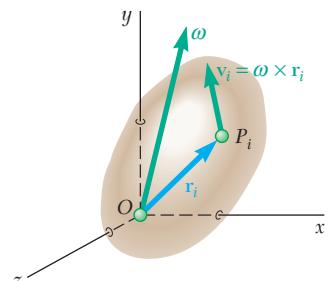
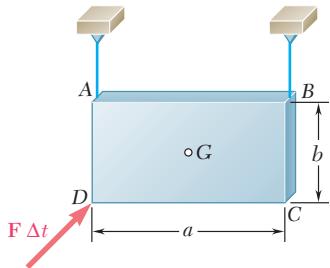


Figura 18.8



PROBLEMA RESUELTO 18.1

Una placa rectangular de masa m suspendida de dos alambres en A y B se golpea en D en una dirección perpendicular a la placa. Denotando por $\mathbf{F} \Delta t$ el impulso aplicado en D , determine inmediatamente después del impacto a) la velocidad del centro de masa G , b) la velocidad angular de la placa.

SOLUCIÓN

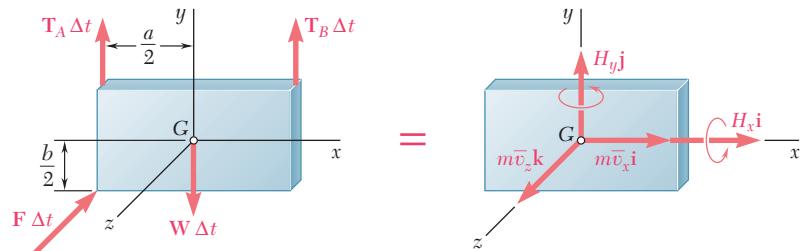
Suponiendo que los alambres permanecen tensos y que en consecuencia las componentes \bar{v}_y de $\bar{\mathbf{v}}$ y ω_z de $\boldsymbol{\omega}$ son cero después del impacto, se tiene

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x \mathbf{i} + \bar{v}_z \mathbf{k} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}$$

y puesto que los ejes x , y , z son ejes principales de inercia,

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x \omega_x \mathbf{i} + \bar{I}_y \omega_y \mathbf{j} \quad \mathbf{H}_G = \frac{1}{12} mb^2 \omega_x \mathbf{i} + \frac{1}{12} ma^2 \omega_y \mathbf{j} \quad (1)$$

Principio del impulso y cantidad de movimiento. Puesto que las cantidades de movimiento iniciales son cero, el sistema de los impulsos debe ser equivalente al sistema de las cantidades de movimiento finales:



a) **Velocidad del centro de masa.** Si se igualan las componentes de los impulsos y las cantidades de movimiento en las direcciones x y z :

$$\begin{aligned} x \text{ componentes: } & 0 = m \bar{v}_x & \bar{v}_x = 0 \\ z \text{ componentes: } & -F \Delta t = m \bar{v}_z & \bar{v}_z = -F \Delta t / m \\ & \bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x \mathbf{i} + \bar{v}_z \mathbf{k} & \bar{\mathbf{v}} = -(F \Delta t / m) \mathbf{k} \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

b) **Velocidad angular.** Al igualar los momentos de los impulsos y las cantidades de movimiento alrededor de los ejes x y y :

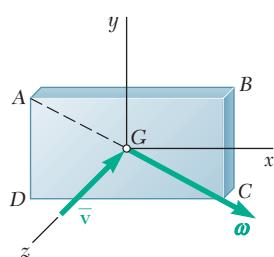
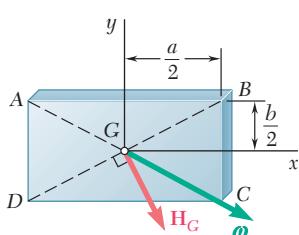
$$\begin{aligned} \text{Alrededor del eje } x: & \frac{1}{2} b F \Delta t = H_x \\ \text{Alrededor del eje } y: & -\frac{1}{2} a F \Delta t = H_y \\ \mathbf{H}_G = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} & \mathbf{H}_G = \frac{1}{2} b F \Delta t \mathbf{i} - \frac{1}{2} a F \Delta t \mathbf{j} \end{aligned} \quad (2)$$

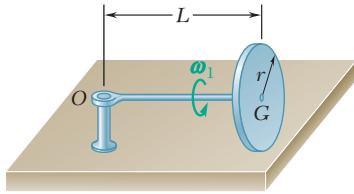
Si se comparan las ecuaciones (1) y (2), se concluye que

$$\begin{aligned} \omega_x &= 6F \Delta t / mb & \omega_y &= -6F \Delta t / ma \\ \boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} & & \boldsymbol{\omega} = (6F \Delta t / mab)(a \mathbf{i} - b \mathbf{j}) \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

Se observa que $\boldsymbol{\omega}$ está dirigida a lo largo de la diagonal AC .

Observación: Al igualar las componentes y de los impulsos y las cantidades de movimiento, así como sus momentos alrededor del eje z , se obtienen dos ecuaciones adicionales que producen $T_A = T_B = \frac{1}{2}W$. De esa manera se verifica que los alambres permanecen rígidos y que la suposición fue correcta.

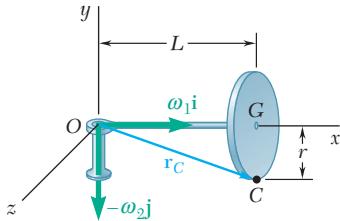




PROBLEMA RESUELTO 18.2

Un disco homogéneo de radio r y masa m se monta sobre una flecha OG de longitud L y masa despreciable. El eje se articula en el punto fijo O , y el disco está restringido a rodar sobre el piso horizontal. Si el disco gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a la velocidad ω_1 alrededor de la flecha OG , determine *a)* la velocidad angular del disco, *b)* su cantidad de movimiento angular alrededor de O , *c)* su energía cinética, *d)* el vector y el par en G equivalentes a las cantidades de movimiento de las partículas del disco.

SOLUCIÓN



a) Velocidad angular. Cuando el disco gira alrededor de la flecha OG también gira con el eje alrededor del eje y a una velocidad ω_2 en el sentido de las manecillas del reloj. La velocidad angular total del disco es entonces

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} - \omega_2\mathbf{j} \quad (1)$$

Para determinar ω_2 se escribe que la velocidad de C es cero

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = 0 \\ (\omega_1\mathbf{i} - \omega_2\mathbf{j}) \times (L\mathbf{i} - r\mathbf{j}) &= 0 \\ (L\omega_2 - r\omega_1)\mathbf{k} &= 0 \quad \omega_2 = r\omega_1/L\end{aligned}$$

Al sustituir (1) en ω_2 :

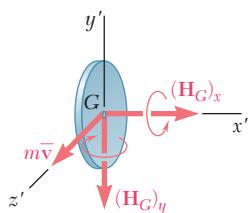
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} = (r\omega_1/L)\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

b) Cantidad de movimiento angular alrededor de O . Suponiendo que la flecha es parte del disco, es posible considerar que este mismo tenga un punto fijo en O . Puesto que los ejes x , y y z son ejes principales de inercia para el disco,

$$\begin{aligned}H_x &= I_x\omega_x = (\frac{1}{2}mr^2)\omega_1 \\ H_y &= I_y\omega_y = (mL^2 + \frac{1}{4}mr^2)(-r\omega_1/L) \\ H_z &= I_z\omega_z = (mL^2 + \frac{1}{4}mr^2)0 = 0 \\ \mathbf{H}_O &= \frac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} - m(L^2 + \frac{1}{4}r^2)(r\omega_1/L)\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

c) Energía cinética. Al utilizar los valores que se obtuvieron para los momentos de inercia y las componentes de $\boldsymbol{\omega}$, se tiene

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}mr^2\omega_1^2 + m(L^2 + \frac{1}{4}r^2)(-r\omega_1/L)^2] \\ T &= \frac{1}{8}mr^2 \left(6 + \frac{r^2}{L^2}\right) \omega_1^2 \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$



d) Vector de cantidad de movimiento y par aplicado en G . El vector de cantidad de movimiento lineal $m\bar{v}$ y el par de cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G son

$$m\bar{v} = mr\omega_1\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

y

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_G &= \bar{I}_x\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_y\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_z\omega_z\mathbf{k} = \frac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} + \frac{1}{4}mr^2(-r\omega_1/L)\mathbf{j} \\ \mathbf{H}_G &= \frac{1}{2}mr^2\omega_1 \left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right) \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aprendió a calcular la *cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones* y aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. También se aprendió a calcular la *energía cinética de un cuerpo rígido en tres dimensiones*. Es importante tener presente que, salvo para situaciones muy especiales, la cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones *no puede* expresarse como el producto $\bar{I}\omega$ y, por lo tanto, *no tendrá la misma dirección que la velocidad angular ω* (figura 18.3).

1. Para calcular la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G de un cuerpo rígido alrededor de su centro de masa G , es necesario determinar primero la velocidad angular ω del cuerpo con respecto al sistema de ejes *centrados en G y de orientación fija*. Puesto que en esta lección se le pedirá sólo determinar la cantidad de movimiento angular del cuerpo *en un instante dado*, elija el sistema de ejes que resulte más conveniente para los cálculos.

a) Si se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en G , utilice estos ejes como ejes de coordenadas x' , y' y z' , ya que los correspondientes productos de inercia del cuerpo serán iguales a cero. Descomponga ω en las componentes $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ y $\omega_{z'}$ a lo largo de estos ejes y calcule los momentos de inercia principales $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{z'}$. Las componentes correspondientes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G son

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \quad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \quad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \quad (18.10)$$

b) Si se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en G , será necesario utilizar las ecuaciones (18.7) para determinar las componentes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G . Estas ecuaciones requieren cálculos previos del *producto de inercia* del cuerpo, así como de cálculos previos de sus momentos de inercia con respecto a los ejes seleccionados.

c) La magnitud y los cosenos directores de \mathbf{H}_G se obtienen de fórmulas similares a las utilizadas en Estática [sección 2.12]. Se tiene

$$\begin{aligned} H_G &= \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} \\ \cos \theta_x &= \frac{H_x}{H_G} \quad \cos \theta_y = \frac{H_y}{H_G} \quad \cos \theta_z = \frac{H_z}{H_G} \end{aligned}$$

d) Una vez que se ha determinado \mathbf{H}_G , es posible obtener la cantidad de movimiento angular del cuerpo *alrededor de cualquier punto dado O* observando de la figura 18.4 que

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G \quad (18.11)$$

donde $\bar{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de G relativo a O , y $m\bar{\mathbf{v}}$ es la cantidad de movimiento lineal del cuerpo.

2. Para calcular la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O de un cuerpo rígido con un punto fijo O siga el procedimiento que se describe en el párrafo 1, con la excepción de que debe utilizar en este caso ejes centrados en el punto fijo O .

a) Si se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en O , descomponga ω en componentes a lo largo de estos ejes [problema resuelto 18.2]. Las componentes correspondientes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G se obtienen de ecuaciones similares a las ecuaciones (18.10).

b) Si no se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en O, es necesario calcular los productos, así como los momentos de inercia del cuerpo, con respecto a los ejes que se han seleccionado y utilizar las ecuaciones (18.13) para determinar las componentes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O .

3. Para aplicar el principio del impulso y la cantidad de movimiento a la solución de un problema que implica el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, se utilizará la misma ecuación vectorial que se utilizó para el movimiento plano en el capítulo 17,

$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sist.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2 \quad (17.4)$$

donde los sistemas de cantidades de movimiento inicial y final se representan cada uno mediante un *vector de cantidad de movimiento lineal* $m\bar{v}$ y un *par de cantidad de movimiento angular* \mathbf{H}_G . Sin embargo, en este caso estos sistemas de vector y par deben representarse en tres dimensiones como se ilustra en la figura 18.6 y \mathbf{H}_G debe determinarse como se explicó en el párrafo 1.

a) En problemas que implican la aplicación de un impulso conocido a un cuerpo rígido, dibuje las ecuaciones de diagramas de cuerpo libre correspondientes a la ecuación (17.4). Al igualar las componentes de los vectores implicados, se determinarán las cantidades de movimiento lineal $m\bar{v}$ del cuerpo y, por consiguiente, la velocidad correspondiente \bar{v} de su centro de masa. Igualando las cantidades de movimiento alrededor de G , se determinará la cantidad de movimiento angular final \mathbf{H}_G del cuerpo. Después se sustituirán los valores que se obtuvieron para las componentes de \mathbf{H}_G en las ecuaciones (18.10) o (18.7) y se resolverán estas ecuaciones para los valores correspondientes de las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo [problema resuelto 18.1].

b) En problemas que implican impulsos desconocidos se dibuja una ecuación de diagramas de cuerpo libre correspondiente a la ecuación (17.4) y se escriben ecuaciones que no incluyen impulsos desconocidos. Estas ecuaciones pueden obtenerse al igualar momentos alrededor del punto o línea de impacto.

4. Para calcular la energía cinética de un cuerpo rígido con un punto fijo O se descompone la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en componentes a lo largo de los ejes que se elijan y se calculan los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a esos ejes. Como ocurrió en el caso del cálculo de la cantidad de movimiento angular, utilice los ejes principales de inercia x' , y' y z' si es fácil determinarlos. Los productos de inercia serán en ese caso cero [problema resuelto 18.2] y la expresión para la energía cinética se reducirá a

$$T = \frac{1}{2}(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2) \quad (18.20)$$

Si es necesario utilizar otros ejes diferentes a los ejes principales de inercia, la energía cinética del cuerpo debe expresarse como se indica en la ecuación (18.19).

5. Para calcular la energía cinética de un cuerpo rígido en movimiento general, considere el movimiento como la suma de una *traslación con el centro de masa G y una rotación alrededor de G*. La energía cinética asociada con la traslación es $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$. Si es posible utilizar ejes principales de inercia, la energía cinética asociada con la rotación alrededor de G puede expresarse en la forma utilizada en la ecuación (18.20). La energía cinética total del cuerpo rígido es entonces

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}(\bar{I}_{x'}\omega_{x'}^2 + \bar{I}_{y'}\omega_{y'}^2 + \bar{I}_{z'}\omega_{z'}^2) \quad (18.17)$$

Si es necesario utilizar ejes diferentes a los ejes principales de inercia para determinar la energía cinética asociada con la rotación alrededor de G , la energía cinética total del cuerpo debe expresarse como se indica en la ecuación (18.16).

Problemas

18.1 Dos barras uniformes AB y CE , cada una con masa de 1.5 kg y longitud de 600 mm, se sueldan entre sí en sus puntos medios. Si este ensamble tiene una velocidad angular de magnitud constante $\omega = 12 \text{ rad/s}$, determine la magnitud y la dirección de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_D del ensamble alrededor de D .

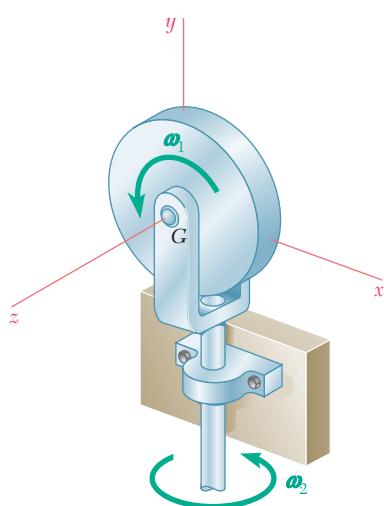


Figura P18.2

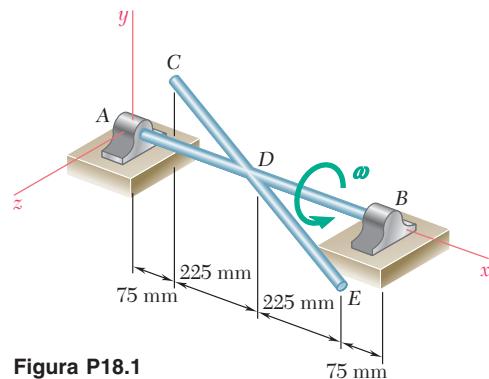


Figura P18.1

18.2 Un disco homogéneo delgado de masa m y radio r gira a la razón constante ω_1 alrededor de un eje que se sostiene mediante una varilla terminada en horquilla, la cual gira a razón constante ω_2 . Determine la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del disco alrededor de su centro de masa G .

18.3 Un cuadrado homogéneo delgado de masa m y lado a está soldado a una flecha vertical AB con la cual forma un ángulo de 45° . Si la flecha gira con una velocidad angular ω , determine la cantidad de movimiento angular de la placa alrededor de A .

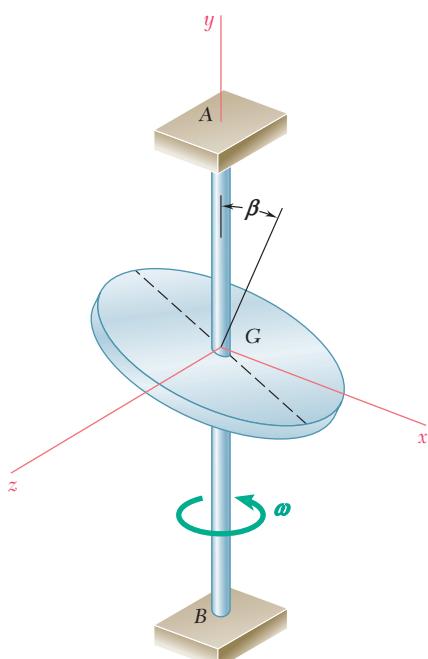


Figura P18.4

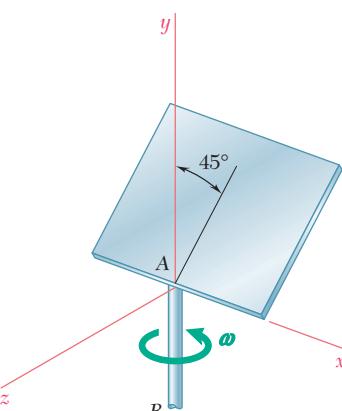


Figura P18.3

18.4 Un disco homogéneo de masa m y radio r está montado sobre la flecha vertical AB . La normal al disco G forma un ángulo $\beta = 25^\circ$ con la flecha. Si la flecha tiene una velocidad angular constante ω , determine el ángulo θ formado por el eje AB y la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del disco con respecto a su centro de masa G .

- 18.5** Un disco delgado de peso $W = 10 \text{ lb}$ gira a la razón constante $\omega_2 = 15 \text{ rad/s}$ con respecto al brazo ABC , el cual gira a su vez a la razón constante $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$ alrededor del eje y . Determine la cantidad de movimiento angular del disco alrededor de su centro C .

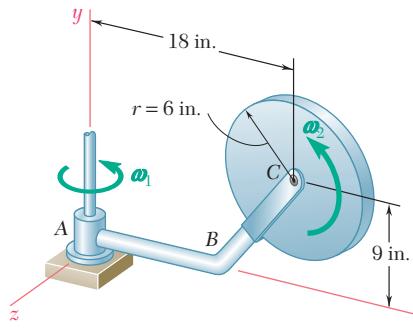


Figura P18.5

- 18.6** Un disco homogéneo de peso $W = 6 \text{ lb}$ gira a la razón constante $\omega_1 = 16 \text{ rad/s}$ con respecto al brazo ABC , que está soldado a una flecha DCE que gira a la razón constante $\omega_2 = 8 \text{ rad/s}$. Determine la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_A del disco alrededor de su centro A .

- 18.7** Un paralelepípedo rectangular sólido de masa m tiene una base cuadrada de lado a y una longitud $2a$. Si gira a la razón constante ω alrededor de su diagonal AC' y esa rotación se observa contraria al sentido de las manecillas del reloj desde A , determine *a)* la magnitud de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del paralelepípedo alrededor de su centro de masa G , *b)* el ángulo que forma \mathbf{H}_G con la diagonal AC' .

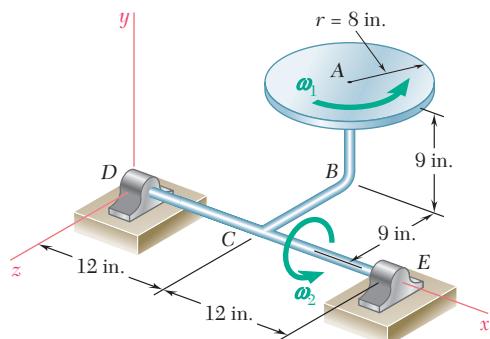


Figura P18.6

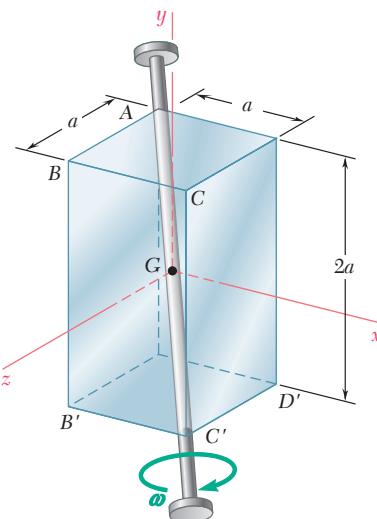


Figura P18.7

- 18.8** Retome el problema 18.7, y ahora suponga que el paralelepípedo rectangular sólido se sustituye por uno hueco que consiste en seis placas de metal delgadas soldadas entre sí.

- 18.9** Determine la cantidad de movimiento angular del disco del problema 18.5 alrededor del punto A .

- 18.10** Determine la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_D del disco del problema 18.6 alrededor del punto D .

18.11 El proyectil de 30 kg que se muestra en la figura tiene un radio de giro de 60 mm alrededor de su eje de simetría Gx y un radio de giro de 250 mm en torno a su eje transversal Gy . Su velocidad angular ω puede descomponerse en dos componentes: una dirigida a lo largo de Gx , mide la *velocidad de giro* del proyectil, en tanto que la otra, dirigida a lo largo de GD , mide su *velocidad de precesión*. Si se sabe que $\theta = 5^\circ$ y que la cantidad de movimiento angular del proyectil alrededor de su centro de masa G es $\mathbf{H}_G = (320 \text{ g} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} - (9 \text{ g} \cdot \text{m}^2)\mathbf{j}$, determine *a)* la velocidad de giro, *b)* la velocidad de precesión.

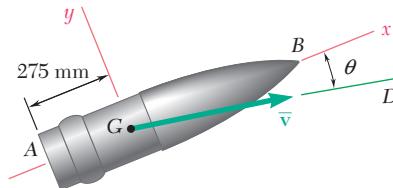


Figura P18.11

18.12 Determine la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_A del proyectil del problema 18.11 alrededor del centro A de su base, si se sabe que su centro de masa G tiene una velocidad \bar{v} de 650 m/s. Proporcione su respuesta en términos de componentes respectivamente paralelas a los ejes x y y y al tercer eje z que apunta hacia usted.

18.13 *a)* Demuestre que la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_B de un cuerpo rígido alrededor del punto B puede obtenerse al sumar la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_A de ese cuerpo alrededor del punto A y el producto vectorial del vector $\mathbf{r}_{A/B}$ dibujado desde B hasta A y la cantidad de movimiento lineal $m\bar{v}$ del cuerpo:

$$\mathbf{H}_B = \mathbf{H}_A + \mathbf{r}_{A/B} \times m\bar{v}$$

b) Demuestre además que cuando un cuerpo rígido gira alrededor de un eje fijo, su cantidad de movimiento angular es el mismo alrededor de cualesquiera dos puntos A y B ubicados sobre el eje fijo ($\mathbf{H}_A = \mathbf{H}_B$) si y sólo si el centro de masa G del cuerpo se localiza sobre el eje fijo.

18.14 Determine la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del disco del problema resuelto 18.2 a partir de las expresiones que se obtuvieron para su cantidad de movimiento lineal $m\bar{v}$ y su cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G , utilizando las ecuaciones (18.11). Verifique que el resultado obtenido es el mismo que se obtuvo mediante cálculo directo.

18.15 Una barra de sección transversal uniforme se utiliza para formar la flecha que se muestra en la figura. Si la masa total de la flecha se denota con m y se sabe que la flecha gira con una velocidad angular constante ω , determine *a)* la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G de la flecha alrededor de su centro de masa G , *b)* el ángulo formado por \mathbf{H}_G y el eje AB .

18.16 La placa triangular mostrada tiene una masa de 7.5 kg y está soldada a una flecha vertical AB . Si se sabe que la placa gira a la razón constante $\omega = 12 \text{ rad/s}$, determine su cantidad de movimiento angular alrededor de *a)* el punto C , *b)* el punto A . (Sugerencia: Para resolver la parte *b*) encuentre \bar{v} y utilice la propiedad indicada en la parte *a*) del problema 18.13.)

18.17 La placa triangular mostrada tiene una masa de 7.5 kg y está soldada a una flecha vertical AB . Si la placa gira a la razón constante $\omega = 12 \text{ rad/s}$, determine su cantidad de movimiento angular alrededor de *a)* el punto C , *b)* el punto B . (Vea la sugerencia del problema 18.16.)

18.18 Determine la cantidad de movimiento angular de la flecha del problema 18.15 alrededor de *a)* el punto A , *b)* el punto B .

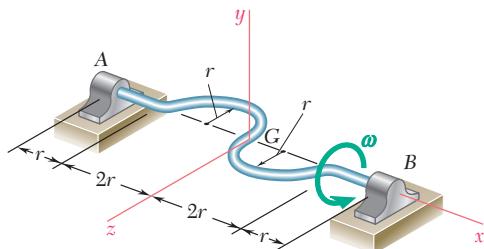


Figura P18.15

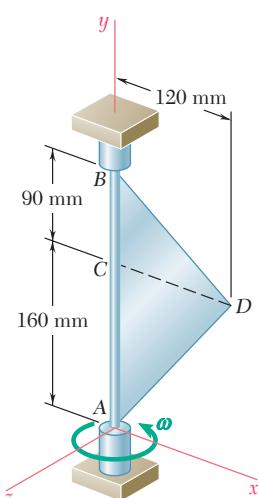


Figura P18.16 y P18.17

- 18.19** Dos brazos en forma de L, cada uno con un peso de 4 lb, se sueldan a los puntos que dividen en tercios a la flecha AB de 2 ft. Si se sabe que la flecha AB gira a la razón constante $\omega = 240$ rpm, determine *a)* la cantidad de movimiento angular del cuerpo alrededor de A, *b)* el ángulo que forman la cantidad de movimiento angular y la flecha AB.

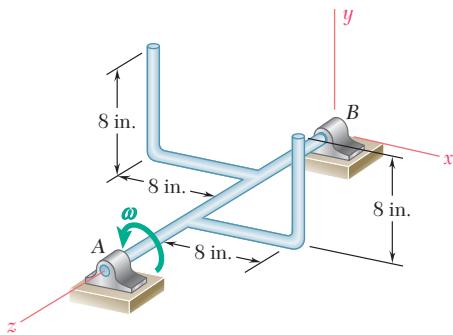


Figura P18.19

- 18.20** Para el cuerpo del problema 18.19, determine *a)* la cantidad de movimiento angular alrededor del punto B, *b)* el ángulo formado por la cantidad de movimiento angular alrededor de la flecha BA.

- 18.21** Una de las esculturas que se exhiben en un plantel universitario está compuesta por un cubo hueco hecho de seis láminas de aluminio, cada una de 5×5 ft, soldadas en conjunto y reforzadas por dentro con un peso despreciable. El cubo se monta sobre una base fija A y puede girar con libertad alrededor de su diagonal vertical AB. Al pasar al lado de esta escultura en camino a su clase de mecánica, una estudiante de ingeniería sujeta la esquina C del cubo y la empuja durante 1.2 s en dirección perpendicular al plano ABC con una fuerza promedio de 12.5 lb. Luego de observar que se requieren 5 s para que el cubo dé una revolución completa, la estudiante saca su calculadora y procede a determinar el peso del cubo. ¿Cuál es el resultado de su cálculo? (Sugerencia: La distancia perpendicular desde la diagonal que une los dos vértices de un cubo a cualquiera de sus otros seis vértices puede obtenerse al multiplicar el lado del cubo por $\sqrt{2}/3$.)

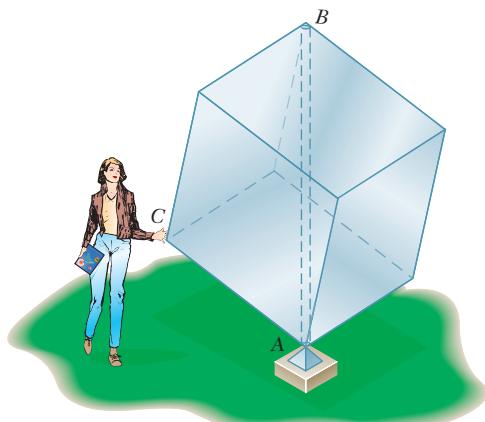


Figura P18.21

- 18.22** Si el cubo de aluminio del problema 18.21 se sustituyera por un cubo del mismo tamaño, fabricado con seis hojas de madera contrachapada cada una con un peso de 20 lb, ¿cuánto tardaría el cubo en completar una revolución si la estudiante empujara su esquina C de la misma manera que empujó la esquina del cubo de aluminio?

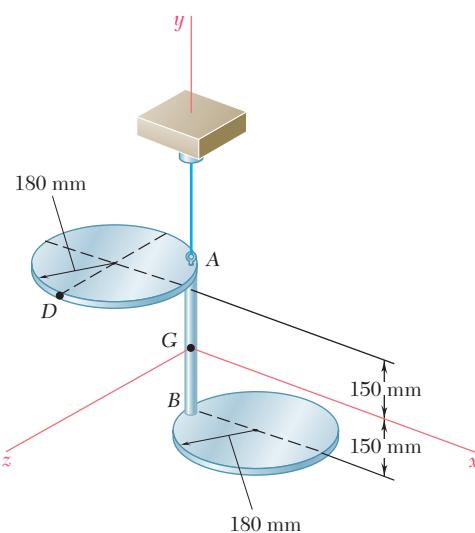


Figura P18.23 y P18.24

18.23 Dos placas circulares, cada una con una masa de 4 kg, están conectadas rígidamente mediante una varilla AB de masa despreciable y se suspenden del punto A , como se muestra en la figura. Si se sabe que un impulso $\mathbf{F} \Delta t = -(2.4 \text{ N} \cdot \text{s})\mathbf{k}$ se aplica en el punto D , determine *a*) la velocidad del centro de masa G del ensamble, *b*) la velocidad angular del ensamble.

18.24 Dos placas circulares, cada una con una masa de 4 kg, están conectadas rígidamente mediante una varilla AB de masa despreciable y se suspenden del punto A , como se muestra en la figura. Si se sabe que un impulso $\mathbf{F} \Delta t = (2.4 \text{ N} \cdot \text{s})\mathbf{j}$ se aplica en el punto D , determine *a*) la velocidad del centro de masa G del ensamble, *b*) la velocidad angular del ensamble.

18.25 Una barra uniforme de masa m se dobla en la forma que se muestra y se suspende de un alambre conectado en su centro de masa G . La barra dobrada se golpea en A en una dirección perpendicular al plano que contiene a la barra (en la dirección x positiva). Si se denota el impulso correspondiente mediante $\mathbf{F} \Delta t$, determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad del centro de masa G , *b*) la velocidad angular de la barra.

18.26 Retome el problema 18.25, y ahora suponga que la barra dobrada se golpea en B .

18.27 Tres barras delgadas, cada una de masa m y longitud $2a$, se sueldan entre sí para formar el ensamble que se muestra en la figura. El ensamble es golpeado en A con una dirección vertical hacia abajo. Si el impulso correspondiente se denota con $\mathbf{F} \Delta t$, determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad del centro de masa G , *b*) la velocidad angular del ensamble.

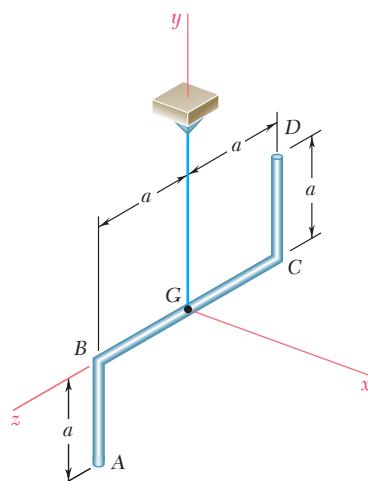


Figura P18.25

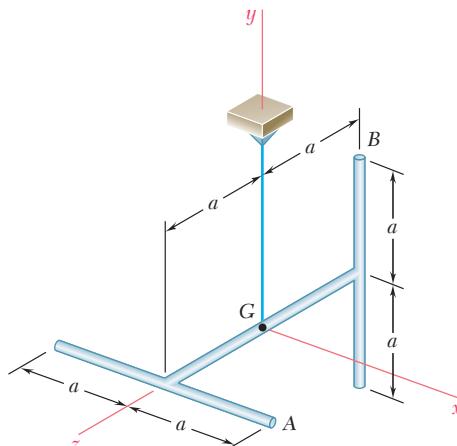


Figura P18.27

18.28 Retome el problema 18.27, y ahora suponga que el ensamble es golpeado en B con una dirección opuesta a la del eje x .

18.29 Una placa cuadrada de lado a y masa m que se sostiene mediante una articulación de rótula en A gira alrededor del eje y con una velocidad angular constante $\omega = \omega_0 j$ cuando súbitamente aparece una obstrucción en B en el plano xy . Si se supone que el impacto en B es perfectamente plástico ($e = 0$), determine inmediatamente después del impacto *a*) la velocidad angular de la placa, *b*) la velocidad de su centro de masa G .

18.30 Con referencia a la placa del problema 18.29, determine el impulso ejercido durante el impacto por, *a*) la obstrucción en B , *b*) el soporte en A .

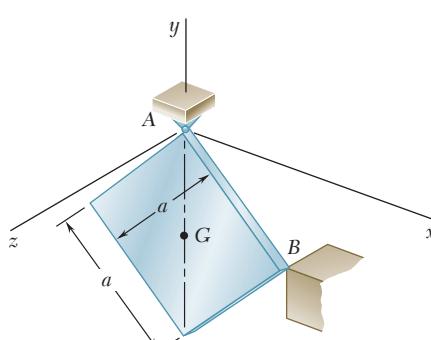


Figura P18.29

18.31 Una placa rectangular de masa m cae con una velocidad \bar{v}_0 y sin velocidad angular cuando su esquina C golpea una obstrucción. Si se supone que el impacto va a ser perfectamente plástico ($e = 0$), determine la velocidad angular de la placa inmediatamente después del impacto.

18.32 Para la placa del problema 18.31, determine *a)* la velocidad de su centro de masa G inmediatamente después del impacto, *b)* el impulso ejercido sobre la placa por la obstrucción durante el impacto.

18.33 Una sonda de 2 500 kg en órbita alrededor de la Luna mide 2.4 m de altura y tiene una base octagonal de lados de 1.2 m. Los ejes de coordenadas que se muestran son los ejes de inercia centroidales de la sonda, y sus radios de giro son $k_x = 0.98$ m, $k_y = 1.06$ m y $k_z = 1.02$ m. La sonda está equipada con un propulsor principal E de 500 N y con cuatro propulsores A , B , C y D de 20 N que pueden expeler combustible en la dirección y positiva. La sonda tiene una velocidad angular $\omega = (0.040 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (0.060 \text{ rad/s})\mathbf{k}$ cuando se usan dos de los propulsores de 20 N para reducir la velocidad angular a cero. Determine *a)* cuál de los propulsores debe utilizarse, *b)* el tiempo de operación de cada uno de estos propulsores, *c)* por cuánto tiempo debe activarse el propulsor principal E si la velocidad del centro de masa de la sonda debe permanecer sin cambio.

18.34 Retome el problema 18.33, y ahora suponga que la velocidad angular de la sonda es $\omega = (0.060 \text{ rad/s})\mathbf{i} - (0.040 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.

18.35 El eje de coordenadas que se muestra en la figura representa los principales ejes centroidales de inercia de una sonda espacial de 3 000 lb cuyos radios de giro son $k_x = 1.375$ ft, $k_y = 1.425$ ft y $k_z = 1.250$ ft. La sonda no tiene velocidad angular cuando un meteorito de 5 oz golpea uno de sus paneles solares en A con una velocidad relativa a la sonda de $\mathbf{v}_0 = (2400 \text{ ft/s})\mathbf{i} - (3000 \text{ ft/s})\mathbf{j} + (3200 \text{ ft/s})\mathbf{k}$. Si se sabe que el meteorito sale del otro lado del panel sin cambio en la dirección de su velocidad, pero con una reducción en la misma de 20 por ciento, determine la velocidad angular final de la sonda.

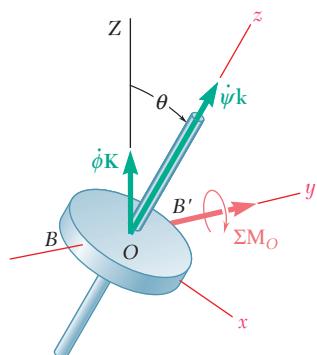


Figura P18.31

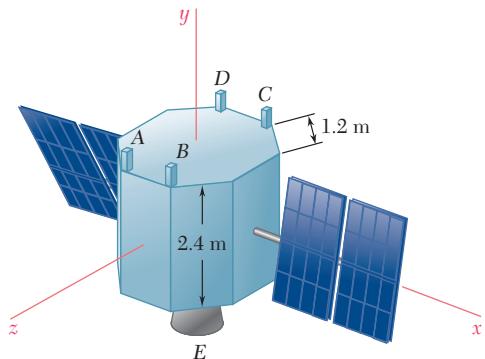


Figura P18.33

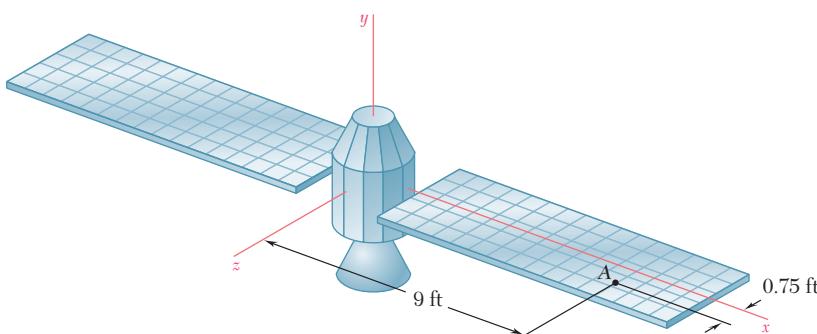


Figura P18.35 y P18.36

18.36 El eje de coordenadas que se muestra en la figura representa los principales ejes centroidales de inercia de una sonda espacial de 3 000 lb cuyos radios de giro son $k_x = 1.375$ ft, $k_y = 1.425$ ft y $k_z = 1.250$ ft. La sonda no tiene velocidad angular cuando un meteorito de 5 oz golpea en uno de sus paneles solares en A y sale por el otro lado del panel sin cambio en la dirección de su velocidad, pero con una reducción en la misma de 25 por ciento. Si la velocidad angular final de la sonda es $\omega = (0.05 \text{ rad/s})\mathbf{i} - (0.12 \text{ rad/s})\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ y la componente x del cambio resultante en la velocidad del centro

de masa de la sonda es -0.675 in./s , determine *a*) la componente ω_z de la velocidad angular final de la sonda, *b*) la velocidad relativa \mathbf{v}_0 con la que el meteorito choca contra el panel.

18.37 Si se denota, respectivamente, con $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{H}_O y T la velocidad angular, la cantidad de movimiento angular y la energía cinética de un cuerpo rígido con un punto fijo O , *a*) demuestre que $\mathbf{H}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = 2T$; *b*) demuestre que el ángulo θ entre $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{H}_O siempre será agudo.

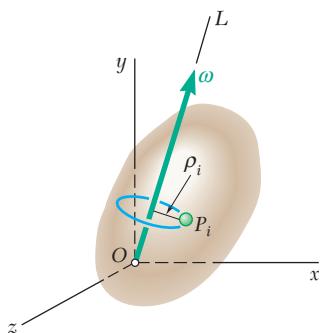


Figura P18.38

18.38 Demuestre que la energía cinética de un cuerpo rígido con un punto fijo O puede expresarse como $T = \frac{1}{2} I_{OL} \omega^2$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular instantánea del cuerpo e I_{OL} es su momento de inercia alrededor de la línea de acción OL de $\boldsymbol{\omega}$. Deduzca esta expresión *a*) a partir de las ecuaciones (9.46) y (18.19), *b*) considere T como la suma de las energías cinéticas de las partículas P_i que describen círculos de radio ρ_i alrededor de la línea OL .

18.39 Determine la energía cinética del ensamble del problema 18.1.

18.40 Determine la energía cinética del disco del problema 18.2.

18.41 Determine la energía cinética de la placa del problema 18.3.

18.42 Determine la energía cinética del disco del problema 18.4.

18.43 Determine la energía cinética de la varilla del problema 18.15.

18.44 Determine la energía cinética de la placa triangular del problema 18.16.

18.45 Determine la energía cinética del cuerpo del problema 18.19.

18.46 Determine la energía cinética impartida al cubo del problema 18.21.

18.47 Determine la energía cinética del disco del problema 18.5.

18.48 Determine la energía cinética del disco del problema 18.6.

18.49 Determine la energía cinética del paralelepípedo sólido del problema 18.7.

18.50 Determine la energía cinética del paralelepípedo hueco del problema 18.8.

18.51 Determine la energía cinética perdida cuando la placa del problema 18.29 golpea la obstrucción en el punto *B*.

18.52 Determine la energía cinética perdida cuando la esquina *C* de la placa del problema 18.31 golpea la obstrucción.

18.53 Determine la energía cinética de la sonda espacial del problema 18.35 en su movimiento alrededor de su centro de masa después de la colisión con el meteorito.

18.54 Determine la energía cinética de la sonda espacial del problema 18.36 en su movimiento alrededor de su centro de masa después de la colisión con el meteorito.

*18.5. MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

18.5. Movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones

1169

Como se indicó en la sección 18.2, las ecuaciones fundamentales

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (18.1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (18.2)$$

conservan su validez en el caso más general del movimiento de un cuerpo rígido. Sin embargo, antes de que pudiera aplicarse la ecuación (18.2) al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido fue necesario deducir las ecuaciones (18.7), las cuales relacionan las componentes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G con las de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Aún falta encontrar una forma efectiva y conveniente de calcular las componentes de la derivada $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular.

Puesto que \mathbf{H}_G representa la cantidad de movimiento angular del cuerpo en su movimiento relativo a los ejes centroidales $GX'Y'Z'$ de orientación fija (figura 18.9), y puesto que $\dot{\mathbf{H}}_G$ representa la razón de cambio de \mathbf{H}_G con respecto a los mismos ejes, parecería natural utilizar las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{H}_G a lo largo de los ejes X' , Y' , Z' al escribir las relaciones (18.7). Pero puesto que el cuerpo gira, sus momentos y productos de inercia cambiarían continuamente, y resultaría necesario determinar sus valores como funciones del tiempo. Por lo tanto, es más conveniente utilizar los ejes x , y , z con origen en el cuerpo, asegurando que sus momentos y productos de inercia mantendrán los mismos valores durante el movimiento. Lo anterior es permisible puesto que, como se indicó antes, la transformación de $\boldsymbol{\omega}$ en \mathbf{H}_G es independiente del sistema de ejes de coordenadas elegido. A pesar de eso, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ debe seguirse *definiendo* con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ de orientación fija. En ese caso, el vector $\boldsymbol{\omega}$ puede *descomponerse* en componentes a lo largo de los ejes rotatorios x , y y z . Al aplicar las relaciones (18.7), se obtienen las *componentes* del vector \mathbf{H}_G a lo largo de los ejes rotatorios. Sin embargo, el vector \mathbf{H}_G representa la cantidad de movimiento angular alrededor de G del cuerpo *en su movimiento relativo al sistema de referencia $GX'Y'Z'$* .

Al diferenciar con respecto a t las componentes de la cantidad de movimiento angular en (18.7), se define la razón de cambio del vector \mathbf{H}_G con respecto al sistema de referencia en rotación $Gxyz$:

$$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} = \dot{H}_x \mathbf{i} + \dot{H}_y \mathbf{j} + \dot{H}_z \mathbf{k} \quad (18.21)$$

donde \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} son los vectores unitarios a lo largo de los ejes en rotación. Hay que recordar de la sección 15.10 que la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ del vector \mathbf{H}_G con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ se encuentra sumando a $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ el producto vectorial $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G$, donde $\boldsymbol{\Omega}$ denota la velocidad angular del sistema de referencia en rotación, se escribe

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \quad (18.22)$$

donde \mathbf{H}_G = cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ de orientación fija

$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ = razón de cambio de \mathbf{H}_G con respecto al sistema de referencia en rotación $Gxyz$, que se calcula a partir de las relaciones (18.7) y (18.21)

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del sistema de referencia en rotación $Gxyz$

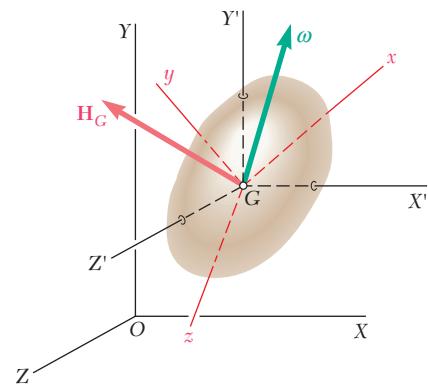


Figura 18.9

Al sustituir $\dot{\mathbf{H}}_G$ de (18.22) en (18.2), se tiene

$$\Sigma \mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \quad (18.23)$$

Si el sistema de referencia rotatorio tiene su origen en el cuerpo, como se ha supuesto en esta discusión, su velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es idénticamente igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Sin embargo, existen muchas aplicaciones donde es ventajoso utilizar un sistema de referencia que no tiene su origen en realidad en el cuerpo, sino que gira de una manera independiente. Por ejemplo, si el cuerpo considerado es simétrico con respecto a un eje, como en el problema resuelto 18.5 o en la sección 18.9, es posible elegir un sistema de referencia con respecto al cual los momentos y productos de inercia del cuerpo permanecen constantes, pero que gire menos que el propio cuerpo.[†] Como resultado, es posible obtener expresiones más simples para la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del cuerpo que las que se habrían obtenido si el sistema de referencia se hubiera fijado realmente al cuerpo. Es claro que en estos casos la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia en rotación y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo son diferentes.

*18.6. ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE EULER. EXTENSIÓN DEL PRINCIPIO DE D'ALEMBERT AL MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

Si se eligen los ejes x , y y z de manera que coincidan con los ejes principales de inercia del cuerpo, es posible utilizar las relaciones simplificadas (18.10) para determinar las componentes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G . Si se omiten las primas de los subíndices, se escribe

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x \boldsymbol{\omega}_x \mathbf{i} + \bar{I}_y \boldsymbol{\omega}_y \mathbf{j} + \bar{I}_z \boldsymbol{\omega}_z \mathbf{k} \quad (18.24)$$

donde \bar{I}_x , \bar{I}_y e \bar{I}_z denotan los momentos de inercia centroidales principales del cuerpo. Sustituyendo \mathbf{H}_G de (18.24) en (18.23) y fijando $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, se obtienen las tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= \bar{I}_x \dot{\omega}_x - (\bar{I}_y - \bar{I}_z) \omega_y \omega_z \\ \Sigma M_y &= \bar{I}_y \dot{\omega}_y - (\bar{I}_z - \bar{I}_x) \omega_z \omega_x \\ \Sigma M_z &= \bar{I}_z \dot{\omega}_z - (\bar{I}_x - \bar{I}_y) \omega_x \omega_y \end{aligned} \quad (18.25)$$

Estas ecuaciones, llamadas *ecuaciones de movimiento de Euler* en honor al matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), se utilizan para analizar el movimiento de un cuerpo rígido alrededor de su centro de masa. En la siguiente sección, sin embargo, se utilizará de manera preferente la ecuación (18.23) en vez de las ecuaciones (18.25), ya que la primera es más general y la forma vectorial compacta en la que se expresa es más fácil de recordar.

Al escribir la ecuación (18.1) en forma escalar, se obtienen las tres ecuaciones adicionales

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \quad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \quad \Sigma F_z = m\bar{a}_z \quad (18.26)$$

las cuales, junto con las ecuaciones de Euler, forman un sistema de seis ecuaciones diferenciales. Al indicar las condiciones iniciales apropiadas, estas ecuaciones diferenciales tienen una solución única. Así, el movimiento de un cuerpo rígido en tres dimensiones está completamente definido por la resultante y por la resultante del momento de

[†]De manera más específica, el sistema de referencia no tendrá giro (véase la sección 18.9).

las fuerzas externas que actúan sobre él. Este resultado se reconocerá como una generalización de un resultado similar que se obtuvo en la sección 16.4 en el caso del movimiento plano de una placa rígida. Se concluye que en tres, así como en dos dimensiones, dos sistemas de fuerzas que son equipolentes también resultan equivalentes, esto es, tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado.

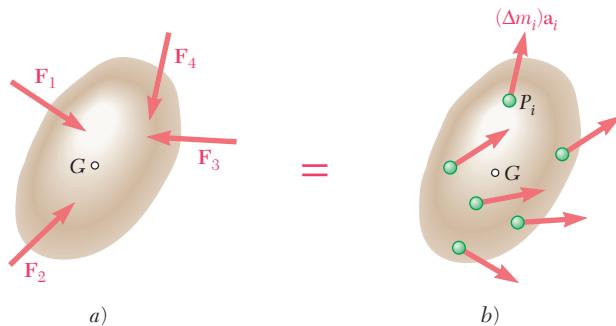


Figura 18.10

Si se consideran en particular el sistema de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido (figura 18.10a) y el sistema de las fuerzas efectivas asociadas con las partículas que forman al cuerpo rígido (figura 18.10b), es posible establecer que los dos sistemas —los cuales se demostró en la sección 14.2 que eran equipolentes— también son equivalentes. Ésta es una extensión del principio de d'Alembert al movimiento tridimensional de un cuerpo rígido. Al sustituir las fuerzas efectivas en la figura 18.10b por un sistema equivalente fuerza-par se confirma que el sistema de fuerzas externas que actúa sobre un cuerpo rígido en movimiento tridimensional es equivalente al sistema compuesto por el vector $m\bar{a}$ con origen en el centro de masa G del cuerpo y el par de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$ (figura 18.11), donde $\dot{\mathbf{H}}_G$ se obtiene de las relaciones (18.7) y (18.22). Advierta que la equivalencia de los sistemas de vectores mostrados en la figura 18.10 y en la figura 18.11 se han indicado mediante signos de igualdad rojos. Los problemas que implican el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido pueden resolverse considerando la ecuación de diagramas de cuerpo libre que se representa en la figura 18.11 y al escribir ecuaciones escalares apropiadas que relacionen las componentes o momentos de las fuerzas externas y efectivas (véase el problema resuelto 18.3).

*18.7. MOVIMIENTO DE UN CUERPO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN PUNTO FIJO

Cuando un cuerpo rígido está restringido a girar alrededor de un punto fijo O , es deseable escribir una ecuación que incluya los momentos alrededor de O de las fuerzas externas y efectivas, pues esta ecuación no contendrá la reacción desconocida en O . Aunque una ecuación de este tipo se obtiene de la figura 18.11, es más conveniente escribirla al considerar la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular $\dot{\mathbf{H}}_O$ del cuerpo alrededor del punto fijo O (figura 18.12). Al recordar la ecuación (14.11), se escribe

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \quad (18.27)$$

donde $\dot{\mathbf{H}}_O$ denota la razón de cambio del vector \mathbf{H}_O con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$. Una deducción similar a la que se utilizó

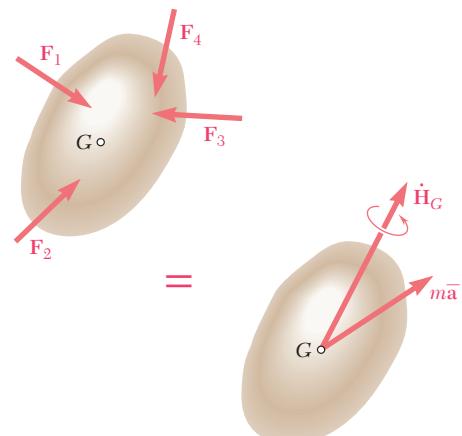


Figura 18.11

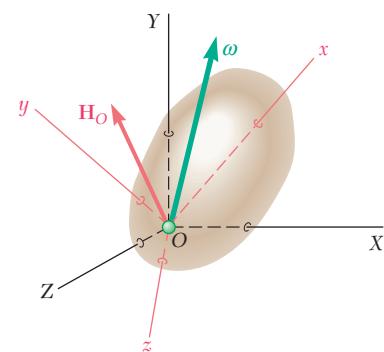


Figura 18.12



Fotografía 18.3 El radiotelescopio giratorio es un ejemplo de una estructura restringida a girar alrededor de un punto fijo.

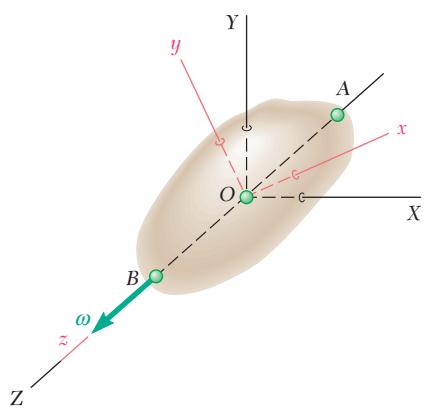


Figura 18.13

en la sección 18.5 permite relacionar $\dot{\mathbf{H}}_O$ con la razón de cambio $(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ de \mathbf{H}_O con respecto al sistema de referencia en rotación $Oxyz$. La sustitución en (18.27) conduce a la ecuación

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \quad (18.28)$$

donde $\Sigma \mathbf{M}_O$ = suma de momentos alrededor de O de las fuerzas aplicadas al cuerpo rígido

\mathbf{H}_O = cantidad de movimiento angular del cuerpo con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$

$(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ = razón de cambio de \mathbf{H}_O con respecto al sistema de referencia en rotación $Oxyz$, que se calculará de las relaciones (18.13)

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del sistema de referencia en rotación $Oxyz$

Si el sistema de referencia en rotación está sobre el cuerpo, su velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ es idénticamente igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Sin embargo, como se señaló en el último párrafo de la sección 18.5, existen muchas aplicaciones en las que tiene ventaja utilizar un sistema de referencia que no está fijo en realidad al cuerpo, sino que gira de una manera independiente.

*18.8. ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO ALREDEDOR DE UN EJE FIJO

La ecuación (18.28), la cual se dedujo en la sección anterior, se usará para analizar el movimiento de un cuerpo rígido restringido a girar alrededor de un eje fijo AB (figura 18.13). Primero, se advierte que la velocidad angular del cuerpo con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ se representa mediante el vector $\boldsymbol{\omega}$ dirigido a lo largo del eje de rotación. Al montar el sistema de referencia en movimiento $Oxyz$ al cuerpo, con el eje z a lo largo de AB , se tiene que $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega k}$. Si se sustituye $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$ en las relaciones (18.13), se obtienen las componentes a lo largo de los ejes rotatorios de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del cuerpo alrededor de O :

$$H_x = -I_{xz}\omega \quad H_y = -I_{yz}\omega \quad H_z = I_z\omega$$

Puesto que el sistema de referencia $Oxyz$ tiene su origen en el cuerpo, se tiene $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$ y la ecuación (18.28) produce

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O \\ &= (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\dot{\omega} + \boldsymbol{\omega k} \times (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\omega \\ &= (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\alpha + (-I_{xz}\mathbf{j} + I_{yz}\mathbf{i})\omega^2 \end{aligned}$$

El resultado que se obtuvo puede expresarse mediante las tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= -I_{xz}\alpha + I_{yz}\omega^2 \\ \Sigma M_y &= -I_{yz}\alpha - I_{xz}\omega^2 \\ \Sigma M_z &= I_z\alpha \end{aligned} \quad (18.29)$$

Cuando se conocen las fuerzas aplicadas al cuerpo, es posible obtener la aceleración angular α de las ecuaciones (18.29). La velocidad angular ω se determina entonces mediante integración y los valores que se obtienen para α y ω se sustituyen en las primeras dos ecuaciones

(18.29). Estas ecuaciones, más las tres ecuaciones (18.26) que definen el movimiento del centro de masa del cuerpo se usan entonces para determinar las reacciones en los cojinetes A y B.

Es posible elegir ejes distintos a los que se muestran en la figura 18.13 para analizar la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo. En muchos casos se encontrará que son más ventajosos los ejes principales de inercia del cuerpo. Por lo tanto, resulta prudente recurrir a la ecuación (18.28) y seleccionar el sistema de ejes que mejor se ajusta al problema que se está considerando.

Si el cuerpo en rotación es simétrico con respecto al plano xy , los productos de inercia I_{xz} e I_{yz} son iguales a cero y las ecuaciones (18.29) se reducen a

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = I_z \alpha \quad (18.30)$$

que está de acuerdo con los resultados que se obtuvieron en el capítulo 16. Si, por otro lado, los productos de inercia I_{xz} e I_{yz} son diferentes de cero, la suma de los momentos de las fuerzas externas alrededor de los ejes x y y también serán diferentes de cero, aun cuando el cuerpo gire a una velocidad constante ω . De hecho, en el último caso, las ecuaciones (18.29) producen

$$\Sigma M_x = I_{yz} \omega^2 \quad \Sigma M_y = -I_{xz} \omega^2 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (18.31)$$

Esta última observación conduce al análisis de *balanceo de flechas rotatorias*. Considere, por ejemplo, el cigüeñal que se muestra en la figura 18.14a, que es simétrico alrededor de su centro de masa G. Primero se observa que cuando el cigüeñal está en reposo, no ejerce empuje lateral sobre sus soportes, ya que su centro de gravedad G está localizado directamente arriba de A. Se dice que el cigüeñal está *estáticamente balanceado*. La reacción en A, denominada muchas veces como una *reacción estática*, es vertical y su magnitud es igual al peso W de la flecha. Ahora supóngase que la flecha gira con una velocidad angular constante ω . Al fijar el sistema de referencia en la flecha, con su origen en G, el eje z a lo largo de AB, y el eje y en el plano de simetría de la flecha (figura 18.14b), se advierte que I_{xz} es cero y que I_{yz} es positivo. De acuerdo con las ecuaciones (18.31), las fuerzas externas incluyen un par de momento $I_{yz} \omega^2 \mathbf{i}$. Puesto que este par se forma mediante la reacción en B y la componente horizontal de la reacción en A, se tiene

$$\mathbf{A}_y = \frac{I_{yz} \omega^2}{l} \mathbf{j} \quad \mathbf{B} = -\frac{I_{yz} \omega^2}{l} \mathbf{j} \quad (18.32)$$

Puesto que las reacciones en los cojinetes son proporcionales a ω^2 , la flecha tendrá la tendencia a desprenderse de sus cojinetes cuando gire a elevadas velocidades. Además, puesto que las reacciones en los cojinetes \mathbf{A}_y y \mathbf{B} , denominadas *reacciones dinámicas*, están contenidas en el plano yz , éstas giran con la flecha y ocasionan la vibración de la estructura de soporte. Estos efectos indeseables se evitarán rearreglando la distribución de masa alrededor de la flecha o agregando masas correctivas, dejando que I_{yz} se vuelva igual a cero. Las reacciones dinámicas en \mathbf{A}_y y \mathbf{B} se anularán y las reacciones en los cojinetes se reducirán a la reacción estática \mathbf{A}_z , la dirección de la cual está fija. El eje estará entonces *balanceado tanto dinámicamente como estáticamente*.



Fotografía 18.4 Las fuerzas ejercidas mediante un cigüeñal giratorio de automóvil sobre sus cojinetes son las reacciones estática y dinámica. Es posible diseñar el cigüeñal para que esté equilibrado tanto dinámicamente como estáticamente.

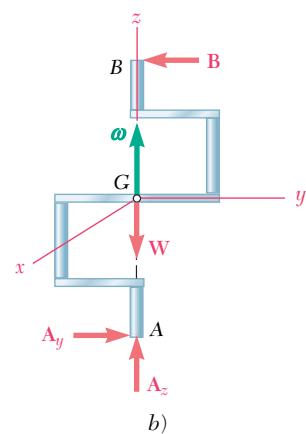
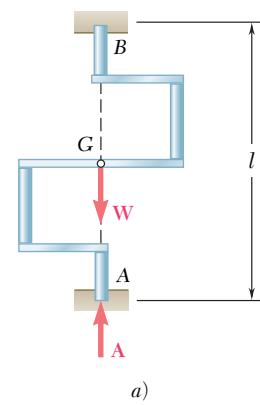
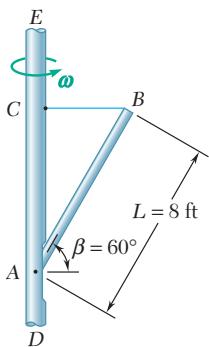


Figura 18.14



PROBLEMA RESUELTO 18.3

Una barra ligera AB de longitud $L = 8 \text{ ft}$ y peso $W = 40 \text{ lb}$ se conecta por medio de un pasador en A a un eje vertical DE que gira con una velocidad angular constante ω de 15 rad/s . La barra mantiene su posición mediante un alambre horizontal BC conectado al eje y al extremo B de la barra. Determine la tensión en el alambre y la reacción en A .

SOLUCIÓN

Las fuerzas efectivas se reducen al vector $m\bar{\mathbf{a}}$ con origen en G y al par $\dot{\mathbf{H}}_G$. Puesto que G describe un círculo horizontal de radio $\bar{r} = \frac{1}{2}L \cos \beta$ a la velocidad constante ω , se tiene

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} &= \mathbf{a}_n = -\bar{r}\omega^2\mathbf{i} = -(\frac{1}{2}L \cos \beta)\omega^2\mathbf{i} = -(450 \text{ ft/s}^2)\mathbf{i} \\ m\bar{\mathbf{a}} &= \frac{40}{g}(-450\mathbf{i}) = -(559 \text{ lb})\mathbf{i}\end{aligned}$$

Determinación de $\dot{\mathbf{H}}_G$. Se calcula primero la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G . Si se utilizan los ejes centroidales principales de inercia x, y, z , se escribe

$$\begin{aligned}\bar{I}_x &= \frac{1}{12}mL^2 & \bar{I}_y &= 0 & \bar{I}_z &= \frac{1}{12}mL^2 \\ \omega_x &= -\omega \cos \beta & \omega_y &= \omega \sin \beta & \omega_z &= 0 \\ \mathbf{H}_G &= \bar{I}_x\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_y\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_z\omega_z\mathbf{k} \\ \mathbf{H}_G &= -\frac{1}{12}mL^2\omega \cos \beta \mathbf{i}\end{aligned}$$

La razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de \mathbf{H}_G con respecto a los ejes de orientación fija se obtiene de la ecuación (18.22). Si se observa que la razón de cambio $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ de \mathbf{H}_G con respecto al sistema de referencia en rotación $Gxyz$ es cero, y que la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia es igual a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de la barra, se tiene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_G &= (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G \\ \dot{\mathbf{H}}_G &= 0 + (-\omega \cos \beta \mathbf{i} + \omega \sin \beta \mathbf{j}) \times (-\frac{1}{12}mL^2\omega \cos \beta \mathbf{i}) \\ \dot{\mathbf{H}}_G &= \frac{1}{12}mL^2\omega^2 \sin \beta \cos \beta \mathbf{k} = (645 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}\end{aligned}$$

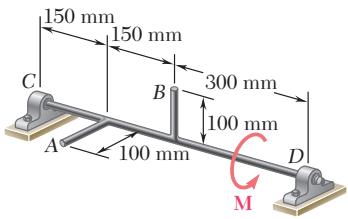
Ecuaciones de movimiento. Si se expresa que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas, se escribe

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{M}_A &= \Sigma (\mathbf{M}_A)_{ef} \\ 6.93\mathbf{J} \times (-T\mathbf{i}) + 2\mathbf{i} \times (-40\mathbf{j}) &= 3.46\mathbf{j} \times (-559\mathbf{i}) + 645\mathbf{k} \\ (6.93T - 80)\mathbf{k} &= (1934 + 645)\mathbf{k} \quad T = 384 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_{ef} \quad A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} - 384\mathbf{i} - 40\mathbf{j} = -559\mathbf{i} \quad \blacktriangleleft$$

$$\mathbf{A} = -(175 \text{ lb})\mathbf{i} + (40 \text{ lb})\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

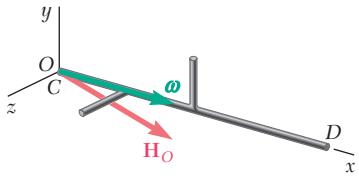
Observación. El valor de T podría haberse obtenido de \mathbf{H}_A y la ecuación (18.28). Sin embargo, el método que se utilizó aquí también produce la reacción en A . Además, centró la atención en el efecto de la asimetría de la barra en la solución del problema al demostrar claramente que tanto el vector $m\bar{\mathbf{a}}$ y el par $\dot{\mathbf{H}}_G$ deben utilizarse para representar las fuerzas efectivas.



PROBLEMA RESUELTO 18.4

Dos barras *A* y *B* de 100 mm, cada una de 300 g de masa, se sueldan a la flecha *CD* que está soportada mediante cojinetes en *C* y *D*. Si se aplica a la flecha un par **M** de magnitud igual a 6 N · m, determine las componentes de las reacciones dinámicas en *C* y *D* en el instante en el que el eje ha alcanzado una velocidad angular de 1200 rpm. Ignore el momento de inercia de la flecha.

SOLUCIÓN

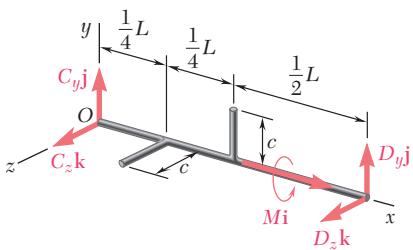


Cantidad de movimiento angular con respecto a *O*. Se asocia al cuerpo el sistema de referencia *Oxyz* y se observa que los ejes elegidos no son ejes principales de inercia para el cuerpo. Puesto que el cuerpo gira alrededor del eje *x*, se tiene $\omega_x = \omega$ y $\omega_y = \omega_z = 0$. Sustituyendo en las ecuaciones (18.13),

$$H_x = I_x \omega \quad H_y = -I_{xy} \omega \quad H_z = -I_{xz} \omega \\ \mathbf{H}_O = (I_x \mathbf{i} - I_{xy} \mathbf{j} - I_{xz} \mathbf{k}) \omega$$

Momentos de las fuerzas externas con respecto a *O*. Como el sistema de referencia gira con la velocidad angular ω , la ecuación (18.28) produce

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O \\ &= (I_x \mathbf{i} - I_{xy} \mathbf{j} - I_{xz} \mathbf{k})\alpha + \boldsymbol{\omega} \times (I_x \mathbf{i} - I_{xy} \mathbf{j} - I_{xz} \mathbf{k})\omega \\ &= I_x \alpha \mathbf{i} - (I_{xy}\alpha - I_{xz}\omega^2)\mathbf{j} - (I_{xz}\alpha + I_{xy}\omega^2)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1)$$



Reacción dinámica en *D*. Las fuerzas externas son los pesos de los ejes y las barras, el par **M**, las reacciones estáticas en *C* y *D* y las reacciones dinámicas en *C* y *D*. Puesto que los pesos y las reacciones estáticas están equilibrados, las fuerzas externas se reducen al par **M** y a las reacciones dinámicas **C** y **D** como se muestra en la figura. Al tomar los momentos con respecto a *O*, se tiene

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{L} \times (D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k}) + M \mathbf{i} = M \mathbf{i} - D_z L \mathbf{j} + D_y L \mathbf{k} \quad (2)$$

Si se igualan los coeficientes del vector unitario **i** en (1) y (2)

$$M = I_x \alpha \quad M = 2(\frac{1}{3}mc^2)\alpha \quad \alpha = 3M/2mc^2$$

Al igualar los coeficientes de **k** y **j** en (1) y (2)

$$D_y = -(I_{xz}\alpha + I_{xy}\omega^2)/L \quad D_z = (I_{xy}\alpha - I_{xz}\omega^2)/L \quad (3)$$

Al utilizar el teorema de ejes paralelos y notar que el producto de inercia de cada barra es cero con respecto a los ejes centroidales, se tiene

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \sum m \bar{x} \bar{y} = m(\frac{1}{2}L)(\frac{1}{2}c) = \frac{1}{4}mLc \\ I_{xz} &= \sum m \bar{x} \bar{z} = m(\frac{1}{4}L)(\frac{1}{2}c) = \frac{1}{8}mLc \end{aligned}$$

Al sustituir en (3) los valores que se encontraron para I_{xy} , I_{xz} y α :

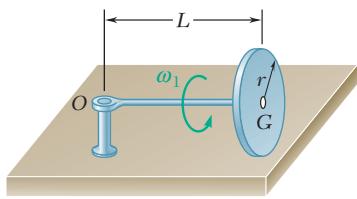
$$D_y = -\frac{3}{16}(M/c) - \frac{1}{4}mc\omega^2 \quad D_z = \frac{3}{8}(M/c) - \frac{1}{8}mc\omega^2$$

Al sustituir $\omega = 1200$ rpm = 125.7 rad/s, $c = 0.100$ m, $M = 6$ N · m y $m = 0.300$ kg, se tiene

$$D_y = -129.8 \text{ N} \quad D_z = -36.8 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

Reacción dinámica en *C*. Utilizando el sistema de referencia asociado en *D*, se obtienen ecuaciones similares a las ecuaciones (3), las cuales producen

$$C_y = -152.2 \text{ N} \quad C_z = -155.2 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 18.5

Un disco homogéneo de radio r y masa m se monta sobre un eje OG de longitud L y masa despreciable. El eje gira en el punto fijo O y el disco está restringido a rodar sobre un piso horizontal. Si el disco gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a la velocidad constante ω_1 alrededor del eje, determine *a)* la fuerza (que se supone vertical) que ejerce el piso sobre el disco, *b)* la reacción en el pivote O .

SOLUCIÓN

Las fuerzas efectivas se reducen al vector $m\bar{a}$ aplicado en G y al par $\dot{\mathbf{H}}_G$. Recordando del problema resuelto 18.2 que el eje gira alrededor del eje y a la velocidad $\omega_2 = r\omega_1/L$, se escribe

$$m\bar{a} = -mL\omega_2^2\mathbf{i} = -mL(r\omega_1/L)^2\mathbf{i} = -(mr^2\omega_1^2/L)\mathbf{i} \quad (1)$$

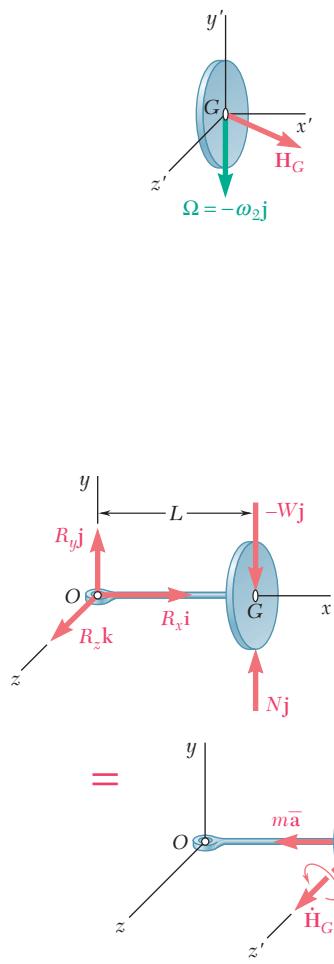
Determinación de $\dot{\mathbf{H}}_G$. Recuérdese del problema resuelto 18.2 que la cantidad de movimiento angular del disco respecto a G es

$$\mathbf{H}_G = \frac{1}{2}mr^2\omega_1 \left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j} \right)$$

donde \mathbf{H}_G se descompone en componentes a lo largo de los ejes en rotación x' , y' , z' , con x' a lo largo de OG y y' vertical. La razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de \mathbf{H}_G con respecto a los ejes de orientación fija se obtiene de la ecuación (18.22). Al notar que la razón de cambio $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'}$ de \mathbf{H}_G con respecto al sistema de referencia en rotación es cero, y que la velocidad angular Ω del sistema de referencia es

$$\Omega = -\omega_2\mathbf{j} = -\frac{r\omega_1}{L}\mathbf{j}$$

se tiene



$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_G &= (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'} + \Omega \times \mathbf{H}_G \\ &= 0 - \frac{r\omega_1}{L}\mathbf{j} \times \frac{1}{2}mr^2\omega_1 \left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j} \right) \\ &= \frac{1}{2}mr^2(r/L)\omega_1^2\mathbf{k} \end{aligned} \quad (2)$$

Ecuaciones de movimiento. Si se expresa que el sistema de las fuerzas externas es equivalente al sistema de las fuerzas efectivas, se escribe

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{M}_O &= \Sigma (\mathbf{M}_O)_{\text{ef}}: \quad L\mathbf{i} \times (N\mathbf{j} - W\mathbf{j}) = \dot{\mathbf{H}}_G \\ &\quad (N - W)L\mathbf{k} = \frac{1}{2}mr^2(r/L)\omega_1^2\mathbf{k} \\ N &= W + \frac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2 \quad \mathbf{N} = [W + \frac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2]\mathbf{j} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_{\text{ef}}: \quad \mathbf{R} + N\mathbf{j} - W\mathbf{j} = m\bar{a}$$

Al sustituir N de (3), y $m\bar{a}$ de (1) y resolver para \mathbf{R} , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= -(mr^2\omega_1^2/L)\mathbf{i} - \frac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2\mathbf{j} \\ \mathbf{R} &= -\frac{mr^2\omega_1^2}{L}\left(\mathbf{i} + \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right) \end{aligned}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se pedirá que se resuelvan problemas que implican el *movimiento tridimensional de cuerpos rígidos*. El método empleado es básicamente el mismo que se aplicó en el capítulo 16, donde se estudió el movimiento plano de cuerpos rígidos. Se dibujará una ecuación de diagramas de cuerpo libre que muestre que el sistema de fuerzas externas es equivalente al sistema de fuerzas efectivas, y se igualarán las sumas de componentes y las sumas de momentos en ambos lados de esta ecuación. Sin embargo, en este caso el sistema de fuerzas efectivas se representará mediante el vector $\bar{m}\mathbf{a}$ y un vector par $\dot{\mathbf{H}}_G$, cuya determinación se explicará en los párrafos 1 y 2 siguientes.

Para resolver un problema que implique el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, se seguirán estos pasos:

1. Determinar la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del cuerpo con respecto a su centro de masa \mathbf{G} a partir de su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$ de orientación fija. Ésta es una operación que se aprendió en la lección anterior. Sin embargo, puesto que la configuración del cuerpo cambiará con el tiempo, ahora será necesario utilizar un sistema de ejes auxiliares $Gx'y'z'$ (figura 18.9) para calcular las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ y los momentos y productos de inercia del cuerpo. Estos ejes pueden estar rígidamente asociados al cuerpo, en cuyo caso su velocidad angular es igual a $\boldsymbol{\omega}$ [problemas resueltos 18.3 y 18.4] o quizás tengan una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ propia [problema resuelto 18.5].

Recuerde lo siguiente de la lección precedente:

a) **Si se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en \mathbf{G} ,** úselos como ejes de coordenadas x' , y' y z' , ya que los productos de inercia correspondientes del cuerpo serán iguales a cero. (Advierta que si el cuerpo es simétrico con respecto a un eje, estos ejes no necesitan estar asociados rígidamente al cuerpo.) Descomponga $\boldsymbol{\omega}$ en componentes $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ y $\omega_{z'}$ a lo largo de estos ejes y calcule los momentos principales de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{z'}$. Las componentes correspondientes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G son

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \quad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \quad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \quad (18.10)$$

b) **Si se conocen los ejes principales de inercia del cuerpo en \mathbf{G} ,** será necesario utilizar las ecuaciones (18.7) para determinar las componentes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G . Estas ecuaciones requieren el cálculo previo de los *productos de inercia* del cuerpo, así como de sus momentos de inercia con respecto a los ejes seleccionados.

2. Calcular la razón de cambio de $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G con respecto al sistema de referencia $GX'Y'Z'$. Advierta que este sistema de referencia tiene una *orientación fija* en tanto que el sistema de referencia $Gx'y'z'$ que se utilizó al calcular las componentes del vector $\boldsymbol{\omega}$ era un *sistema de referencia en rotación*. Hay que recurrir al análisis de la sección 15.10 de la razón de cambio de un vector con respecto a un sistema de referencia en rotación. Al recordar la ecuación (15.31), la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ se expresará de la forma siguiente:

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \quad (18.22)$$

El primer término en el miembro del lado derecho de la ecuación (18.22) representa la razón de cambio de \mathbf{H}_G con respecto al sistema de referencia en rotación $Gx'y'z'$. Este término se anula si $\boldsymbol{\omega}$ y, en consecuencia, \mathbf{H}_G permanece constante tanto en magnitud como en dirección cuando se observa desde ese sistema de referencia. Por otro lado, si cualesquiera de las derivadas respecto al tiempo $\dot{\omega}_{x'}$, $\dot{\omega}_{y'}$ y $\dot{\omega}_{z'}$ es diferente de cero, también serán

(continúa)

diferentes de cero, $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{G'x'y'z'}$ y sus componentes deberán determinarse al diferenciar las ecuaciones (18.10) con respecto a t . Finalmente, recuérdese que si el sistema de referencia en rotación está rígidamente asociado al cuerpo, su velocidad angular será la misma que la del cuerpo, y $\boldsymbol{\Omega}$ puede sustituirse por $\boldsymbol{\omega}$.

3. Dibujar la ecuación de diagramas de cuerpo libre para el cuerpo rígido, que muestre que el sistema de fuerzas externas ejercidas sobre el cuerpo es equivalente al vector $m\ddot{\mathbf{a}}$ aplicado en G y el vector par $\dot{\mathbf{H}}_G$ (figura 18.11). Al igualar las componentes en cualquier dirección y los momentos alrededor de cualquier punto, es posible escribir hasta seis ecuaciones de movimiento escalares e independientes [problemas resueltos 18.3 y 18.5].

4. Al resolver problemas que implican el movimiento de un cuerpo rígido con respecto a un punto fijo O , es posible que se encuentre conveniente utilizar la siguiente ecuación, que se dedujo en la sección 18.7, la cual elimina las componentes de la reacción en el soporte O ,

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \quad (18.28)$$

donde el primer término en el miembro del lado derecho representa la razón de cambio de \mathbf{H}_O con respecto al sistema de referencia en rotación $Oxyz$, y donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular de ese sistema de referencia.

5. Cuando se determinen las reacciones en los cojinetes de una flecha rotatoria, recurra a la ecuación (18.28) y siga estos pasos:

a) Coloque el punto fijo O en uno de los dos cojinetes que sostienen la flecha y sitúe el sistema de referencia en rotación $Oxyz$ en la flecha, con uno de los ejes dirigido a lo largo de ella. Suponiendo, por ejemplo, que se ha alineado con la flecha al eje x , se tendrá $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{i}$ [problema resuelto 18.4].

b) Puesto que los ejes elegidos no serán, en la mayoría de los casos, los ejes principales de inercia en O , es necesario calcular los productos de inercia de la flecha, así como sus momentos de inercia, con respecto a estos ejes, y utilizar las ecuaciones (18.13) para determinar \mathbf{H}_O . Suponiendo otra vez que el eje x se ha alineado con la flecha, las ecuaciones (18.13) se reducen a

$$H_x = I_x \omega \quad H_y = -I_{yz} \omega \quad H_z = -I_{zx} \omega \quad (18.13')$$

la cual muestra que \mathbf{H}_O no estará dirigida a lo largo de la flecha.

c) Para obtener $\dot{\mathbf{H}}_O$ sustituya las expresiones obtenidas en la ecuación (18.28) y deje que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{i}$. Si la velocidad angular de la flecha es constante, el primer término del miembro del lado derecho de la ecuación se anulará. Sin embargo, si la flecha tiene una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{i}$, el primer término no será cero y debe determinarse diferenciando con respecto a t las expresiones en (18.13'). El resultado serán ecuaciones similares a las (18.13'), con α en lugar de ω .

d) Puesto que el punto O coincide con uno de los cojinetes, las tres ecuaciones escalares correspondientes a la ecuación (18.28) pueden resolverse para las componentes de la reacción dinámica en el otro cojinete. Si el centro de masa G de la flecha se localiza en la línea que une los dos cojinetes, la fuerza efectiva $m\ddot{\mathbf{a}}$ será cero. Al dibujar la ecuación de diagramas de cuerpo libre de la flecha, se puede observar en ese caso que las componentes de la reacción dinámica del primer cojinete deben ser iguales y opuestas a las que acaba de determinar. Si G no se ubica sobre la línea que une a los dos cojinetes, es posible determinar la reacción en el primer cojinete colocando el punto fijo O en el segundo cojinete y repitiendo el procedimiento anterior [problema resuelto 18.4]; o también puede obtener ecuaciones de movimiento adicionales de la ecuación de diagramas de cuerpo libre de la flecha, asegurándose de determinar e incluir primero la fuerza efectiva $m\ddot{\mathbf{a}}$ aplicada en G .

e) La mayoría de los problemas requieren la determinación de las “reacciones dinámicas” en los cojinetes, esto es, para las *fuerzas adicionales* que ejercen los cojinetes sobre la flecha cuando ésta gira. Al determinar las reacciones dinámicas, ignore el efecto de las cargas estáticas, como el peso de la flecha.

Problemas

18.55 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_D$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_D del ensamble del problema 18.1.

18.56 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del disco del problema 18.2.

18.57 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_A$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_A de la placa del problema 18.3, si se sabe que su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ permanece constante.

18.58 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del disco del problema 18.4.

18.59 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del disco del problema 18.5.

18.60 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_A$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_A del disco del problema 18.6.

18.61 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_D$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_D del ensamble del problema 18.1, suponiendo que en el instante considerado el ensamble tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = (12 \text{ rad/s})\mathbf{i}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = (96 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$.

18.62 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_D$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_D del ensamble del problema 18.1, suponiendo que en el instante considerado el ensamble tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = (12 \text{ rad/s})\mathbf{i}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = -(96 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$.

18.63 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_A$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_A de la placa del problema 18.3, suponiendo que ésta tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{j}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{j}$.

18.64 Determine la razón de cambio $\dot{\mathbf{H}}_G$ de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del disco del problema 18.4, suponiendo que en el instante considerado el ensamble tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{j}$ y una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{j}$.

18.65 Una placa triangular homogénea y delgada con masa de 2.5 kg está soldada a una flecha vertical ligera, la cual se sostiene mediante cojinetes en A y B. Si la placa gira a la razón constante $\omega = 8 \text{ rad/s}$, determine las reacciones dinámicas en A y B.

18.66 Una barra delgada y uniforme AB con masa m y una flecha vertical CD, cada una con longitud $2b$, se sueldan entre sí en sus puntos medios G. Si la flecha gira a la razón constante ω , determine las reacciones dinámicas en C y D.

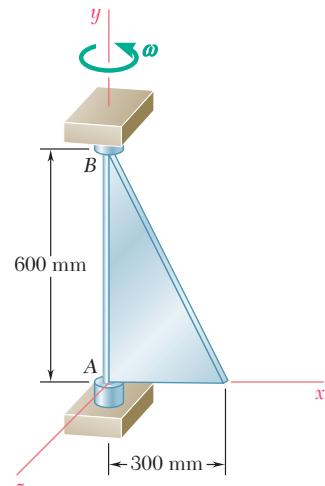


Figura P18.65

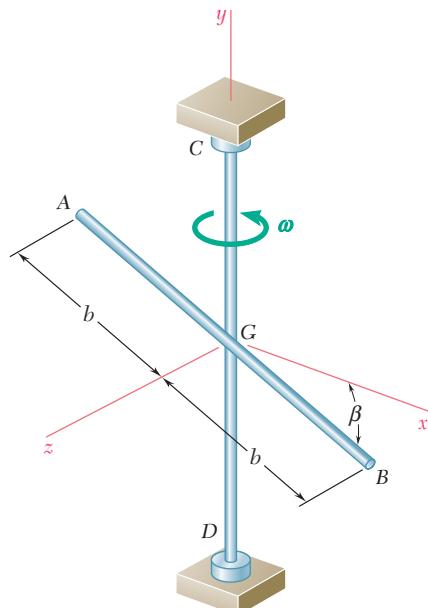


Figura P18.66

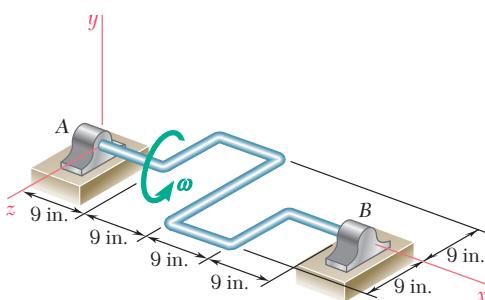


Figura P18.67

18.67 La flecha de 16 lb que se muestra tiene una sección transversal uniforme. Si la flecha gira a la razón constante $\omega = 12 \text{ rad/s}$, determine las reacciones dinámicas en A y B.

18.68 El ensamble que se muestra consta de piezas de lámina de aluminio de espesor uniforme y de un peso total de 2.7 lb soldadas a una flecha ligera soportada mediante los cojinetes A y B. Si se sabe que el ensamble gira a la razón constante $\omega = 240 \text{ rpm}$, determine las reacciones dinámicas en A y B.

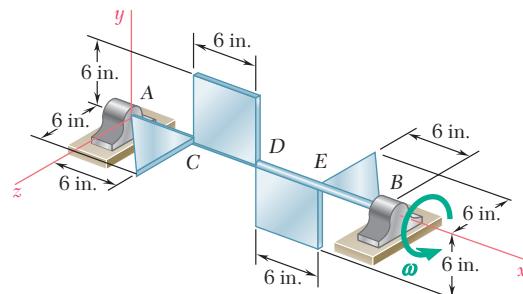


Figura P18.68

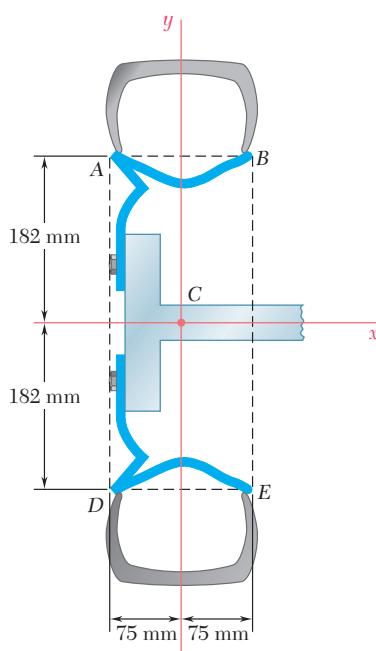


Figura P18.69 y P18.70

18.69 Cuando el neumático de 18 kg que se muestra en la figura se monta en una máquina de balanceo y se hace girar a 12.5 rev/s, se encuentra que las fuerzas ejercidas por el neumático sobre la máquina son equivalentes a un sistema fuerza-par consistente en una fuerza $\mathbf{F} = (160 \text{ N})\mathbf{j}$ aplicada en C y un par $\mathbf{M}_C = (14.7 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$, donde los vectores unitarios forman una triada que gira con el neumático. a) Determine la distancia desde el eje de rotación hasta el centro de masa del neumático y los productos de inercia I_{xy} e I_{zx} . b) Si sólo se usan dos masas de corrección para balancear estática y dinámicamente al neumático, ¿cuáles deben ser los valores de estas masas y en cuál de los puntos A, B, D o E deben colocarse?

18.70 Despues de colocar el neumático de 18 kg en la máquina de balanceo y hacerlo girar a 15 rev/s, el mecánico determina que para balancear un neumático tanto estática como dinámicamente debe utilizar dos masas de corrección, una de 170 g situada en B y otra de 56 g ubicada en D. Utilizando un sistema de referencia derecho que gira con la rueda (con el eje z perpendicular al plano de la figura), determine antes de las masas correctivas que se han agregado a) la distancia desde el eje de rotación hasta el centro de masa del neumático y los productos de inercia I_{xy} e I_{zx} , b) el sistema fuerza-par en C equivalente a las fuerzas ejercidas por el neumático sobre la máquina.

18.71 Si se sabe que la placa del problema 18.65 está inicialmente en reposo ($\omega = 0$) cuando se aplica a la placa un par de momento $\mathbf{M}_0 = (0.75 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$, determine a) la aceleración angular resultante de la placa, b) las reacciones dinámicas en los puntos A y B inmediatamente después de que el par se ha aplicado.

18.72 Si se sabe que el ensamble del problema 18.66 está inicialmente en reposo ($\omega = 0$) cuando se aplica a la flecha CD un par de momento $\mathbf{M}_0 = M_0\mathbf{j}$, determine a) la aceleración angular resultante del ensamble, b) las reacciones dinámicas en los puntos C y D inmediatamente después de que el par se ha aplicado.

18.73 El componente de lámina de metal que se muestra en la figura tiene un grosor uniforme y una masa de 600 g. Se conecta a un eje ligero soportado por cojinetes en A y B separados por una distancia de 150 mm. El componente está en reposo cuando se somete a un par \mathbf{M}_0 como se muestra en la figura. Si la aceleración angular resultante es $\boldsymbol{\alpha} = (12 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$, determine a) el par \mathbf{M}_0 , b) las reacciones dinámicas en A y B inmediatamente después de haber aplicado el par.

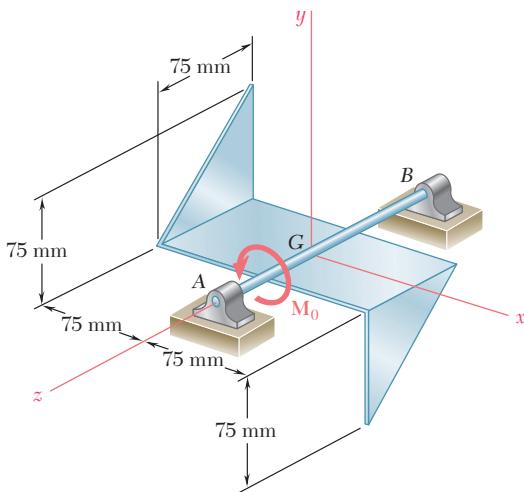


Figura P18.73

18.74 Para el componente de lámina de metal del problema 18.73, determine a) la velocidad angular del componente 0.6 s después de que se le ha aplicado el par \mathbf{M}_0 , b) la magnitud de las reacciones dinámicas en A y B en ese instante.

18.75 La flecha del problema 18.67 se encuentra inicialmente en reposo ($\omega = 0$), cuando se le aplica un par \mathbf{M}_0 . Si la aceleración angular resultante de la flecha es $\boldsymbol{\alpha} = (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$, determine a) el par \mathbf{M}_0 , b) las reacciones dinámicas en A y B inmediatamente después de que se ha aplicado el par.

18.76 El ensamblaje del problema 18.68 se encuentra inicialmente en reposo ($\omega = 0$), cuando se aplica un par \mathbf{M}_0 al eje AB. Si la aceleración angular resultante del ensamblaje es $\boldsymbol{\alpha} = (150 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$, determine a) el par \mathbf{M}_0 , b) las reacciones dinámicas en A y B inmediatamente después de que se ha aplicado el par.

18.77 El ensamblaje que se muestra en la figura pesa 12 lb y está compuesto por cuatro placas semicirculares y delgadas de aluminio de 16 in. de diámetro soldadas a una flecha ligera AB de 40 in. de largo. El ensamblaje se encuentra en reposo ($\omega = 0$) en el instante $t = 0$ cuando un par \mathbf{M}_0 se le aplica en la forma indicada, ocasionando que el ensamblaje realice una revolución completa en 2 s. Determine a) el par \mathbf{M}_0 , b) las reacciones dinámicas en A y B en $t = 0$.

18.78 Para el ensamblaje del problema 18.77, determine las reacciones dinámicas en A y B cuando $t = 2$ s.

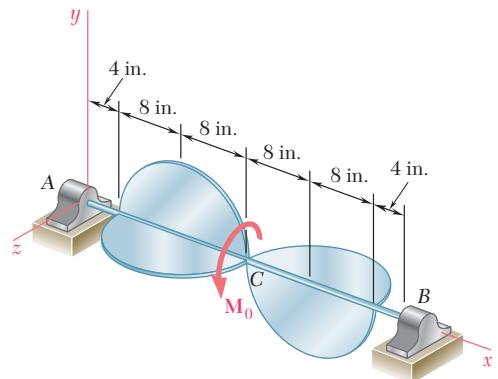


Figura P18.77

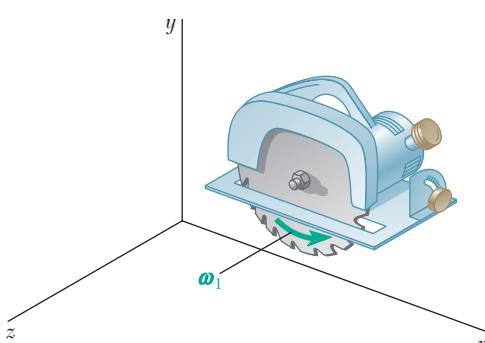


Figura P18.81

18.79 El volante de un motor de automóvil, que está rígidamente unido al cigüeñal, es equivalente a una placa de acero de 400 mm de diámetro y 15 mm de grosor. Determine la magnitud del par que ejerce el volante sobre el cigüeñal horizontal cuando el automóvil recorre una curva sin peralte de 200 m de radio a una velocidad de 90 km/h, con el volante girando a 2 700 rpm. Suponga que el automóvil tiene *a)* tracción trasera con el motor montado longitudinalmente, *b)* tracción delantera con el motor montado de manera transversal. (Densidad del acero = 7 860 kg/m³.)

18.80 La hélice con cuatro aspas de un avión pesa 160 kg y tiene un radio de giro de 800 mm. Si se sabe que la hélice gira a 1 600 rpm cuando el avión viaja en una trayectoria circular vertical de 600 m de radio a 540 km/h, determine la magnitud del par ejercido por la hélice sobre el eje debido a la rotación del avión.

18.81 La hoja de una sierra portátil y el rotor de su motor tienen un peso total de 2.5 lb y un radio de giro combinado de 1.5 in. Si la hoja gira como se indica a la razón $\omega_1 = 1\,500$ rpm, determine la magnitud y dirección del par \mathbf{M} que debe ejercer un trabajador sobre la agarradera de la sierra para girarla con una velocidad angular $\omega_2 = -(2.4 \text{ rad/s})\mathbf{j}$.

18.82 El aspa de un ventilador oscilante y el rotor de su motor tienen un peso total de 8 oz y un radio de giro combinado de 3 in. Se soportan mediante cojinetes en *A* y *B*, separados 5 in. y giran a la velocidad $\omega_1 = 1\,800$ rpm. Determine las reacciones dinámicas en *A* y *B* cuando la carcasa del motor tiene una velocidad angular $\omega_2 = (0.6 \text{ rad/s})\mathbf{j}$.

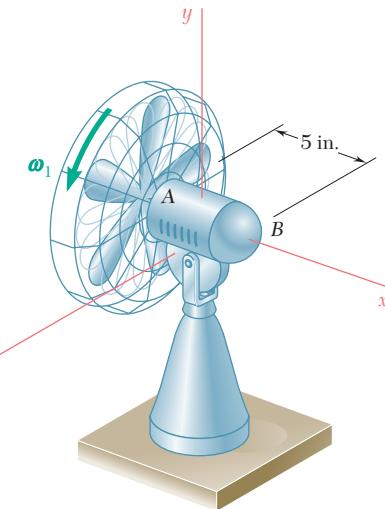


Figura P18.82

18.83 Cada neumático de un automóvil tiene un peso de 22 kg, un diámetro de 575 mm y un radio de giro de 225 mm. El automóvil viaja por una curva sin peralte de 150 m de radio a una velocidad de 95 km/h. Si la distancia transversal entre los neumáticos es de 1.5 m, determine la fuerza normal adicional producida por el movimiento del automóvil y ejercida por el suelo sobre cada uno de los neumáticos externos.

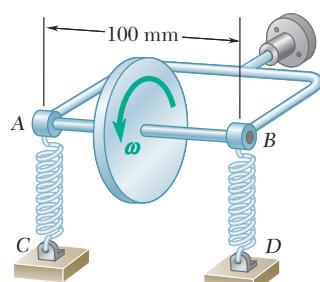


Figura P18.84

18.84 Se muestra la estructura básica de cierto tipo de indicador de viraje de avión. Cada resorte tiene una constante de 500 N/m, y el disco uniforme de 200 g y radio de 40 mm gira a la velocidad de 10 000 rpm. Los resortes se alargan y ejercen fuerzas verticales iguales en la horquilla *AB* cuando el avión viaja en una trayectoria recta. Determine el ángulo que girará la horquilla cuando el piloto ejecute un giro horizontal de 750 m de radio hacia la derecha a una velocidad de 800 km/h. Indique si el punto *A* ascenderá o descenderá.

18.85 Una placa semicircular uniforme de 120 mm de radio se articula en los puntos A y B a una horquilla que gira con una velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical. Determine a) el ángulo β que forma la placa con el eje x horizontal cuando $\omega = 15 \text{ rad/s}$, b) el valor más grande de ω para el cual la placa permanece vertical ($\beta = 90^\circ$).

18.86 Una placa semicircular uniforme de 120 mm de radio se articula en los puntos A y B a una horquilla que gira con una velocidad angular constante ω alrededor del eje vertical. Determine el valor de ω para el cual la placa forma un ángulo constante $\beta = 50^\circ$ con el eje x horizontal.

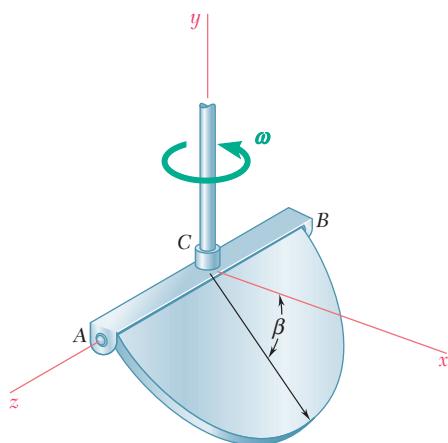


Figura P18.85 y P18.86

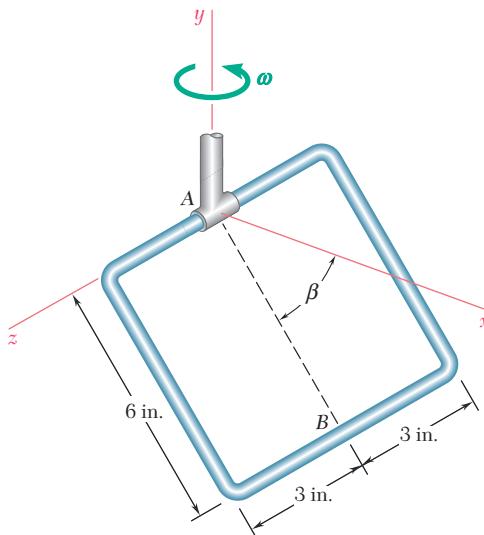


Figura P18.87 y P18.88

18.87 Una barra delgada se dobla para formar un bastidor cuadrado con 6 in. de lado. El bastidor está conectado mediante un collarín en el punto A a una flecha vertical que gira con una velocidad angular constante ω . Determine a) el ángulo constante β que forma la línea AB con el eje horizontal x cuando $\omega = 9.8 \text{ rad/s}$, b) el valor más grande de ω para el cual $\beta = 90^\circ$.

18.88 Una barra delgada se dobla para formar un bastidor cuadrado con 6 in. de lado. El bastidor está conectado mediante un collarín en el punto A a una flecha vertical que gira con una velocidad angular constante ω . Determine el valor de ω para el cual la línea AB forma un ángulo $\beta = 48^\circ$ con el eje horizontal x.

18.89 El engrane A de 950 g está restringido a rodar sobre el engrane fijo B, pero tiene la libertad de girar en torno al eje AD, el cual tiene 400 mm de longitud y una masa despreciable. El eje AD se conecta mediante una horquilla a la flecha vertical DE que gira como se indica en la figura con una velocidad angular constante ω_1 . Si se supone que el engrane A puede aproximarse mediante un disco delgado de 80 mm de radio, determine el valor máximo permisible de ω_1 si el engrane A no pierde contacto con el engrane B.

18.90 Determine la fuerza \mathbf{F} ejercida por el engrane B sobre el engrane A del problema 18.89 cuando el eje DE gira con una velocidad angular constante $\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$. (Sugerencia: La fuerza \mathbf{F} debe ser perpendicular a la línea trazada desde D hasta C.)

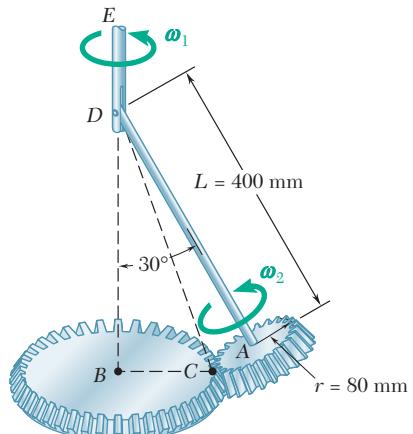


Figura P18.89

18.91 y 18.92 La barra esbelta AB se conecta mediante una horquilla a un brazo BCD que gira con una velocidad angular constante ω alrededor de la línea central de su porción vertical CD . Determine la magnitud de la velocidad angular ω .

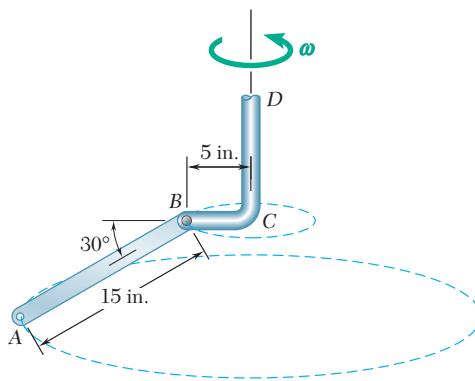


Figura P18.91

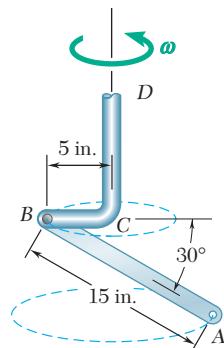


Figura P18.92

18.93 Dos discos, cada uno de 5 kg de masa y 100 mm de radio, giran como se muestra a la razón $\omega_1 = 1500$ rpm alrededor de una barra AB de masa despreciable que gira alrededor de un eje vertical z a la razón $\omega_2 = 45$ rpm. *a)* Determine las reacciones dinámicas en los puntos C y D . *b)* Resuelva el inciso *a*) suponiendo que se invierte la dirección de giro del disco B .

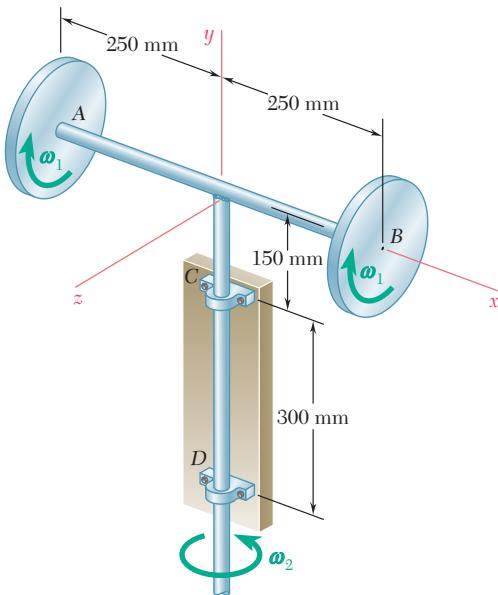


Figura P18.93 y P18.94

18.94 Dos discos, cada uno de 5 kg de masa y 100 mm de radio, giran como se muestra a una velocidad $\omega_1 = 1500$ rpm alrededor de una barra AB de masa despreciable que gira alrededor de un eje vertical a la razón ω_2 . Determine el valor máximo permisible de ω_2 si las reacciones dinámicas en C y D no deben exceder 250 N.

18.95 El disco de 10 oz. que se muestra gira a la razón $\omega_1 = 750$ rpm, mientras el eje AB gira como se muestra con una velocidad angular ω_2 de 6 rad/s. Determine las reacciones dinámicas en A y B .

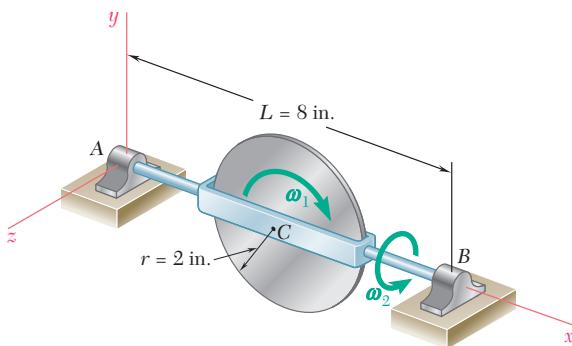


Figura P18.95 y P18.96

18.96 El disco de 10 oz. que se muestra gira a la razón $\omega_1 = 750$ rpm, mientras el eje AB gira como se muestra con una velocidad angular ω_2 . Determine la magnitud máxima permisible de ω_2 si cada una de las reacciones dinámicas en A y B no debe exceder 0.25 lb.

18.97 Un disco delgado de peso $W = 10$ lb gira con una velocidad angular ω_2 con respecto al brazo ABC , el cual gira a su vez con una velocidad angular ω_1 alrededor del eje y . Si se sabe que $\omega_1 = 5$ rad/s, que $\omega_2 = 15$ rad/s y que ambas son constantes, determine el sistema fuerza-par que representa la reacción dinámica en el soporte en A .

18.98 Un disco homogéneo de peso $W = 6$ lb gira a la velocidad constante $\omega_1 = 16$ rad/s con respecto al brazo ABC , el cual está soldado a la flecha DCE que gira a la velocidad constante $\omega_2 = 8$ rad/s. Determine las reacciones dinámicas en D y E .

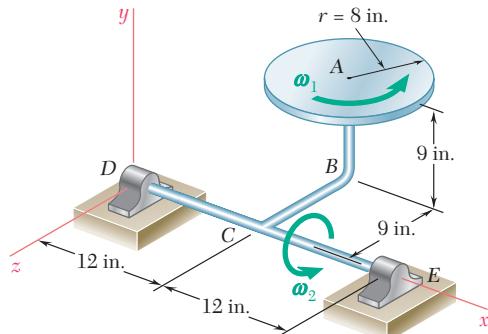


Figura P18.98

***18.99** Un tablero publicitario de 48 kg, longitud $2a = 2.4$ m y ancho $2b = 1.6$ m se mantiene en rotación a una velocidad constante ω_1 alrededor de su eje horizontal mediante un pequeño motor eléctrico unido en A al bastidor ACB . El mismo bastidor se mantiene en rotación a una velocidad constante ω_2 alrededor de un eje vertical por medio de un segundo motor unido en C a la columna CD . Si el tablero y el bastidor realizan una revolución completa en 6 s y 12 s, respectivamente, exprese, como función del ángulo θ , la reacción dinámica ejercida sobre la columna CD por su soporte en D .

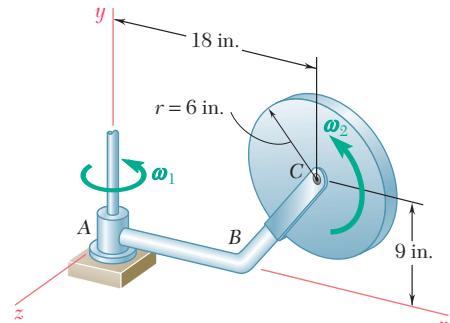


Figura P18.97

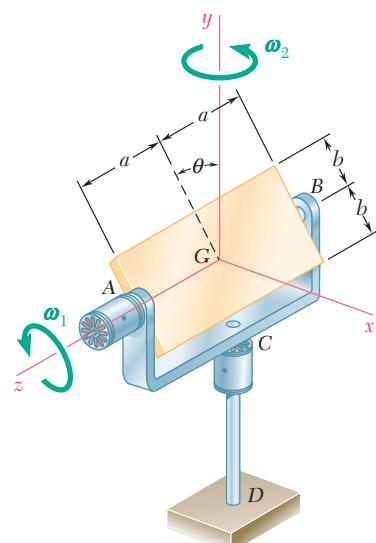


Figura P18.99

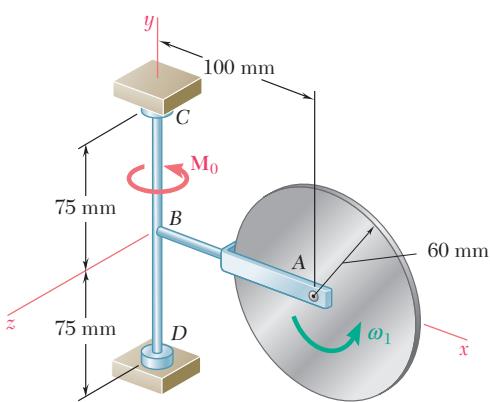


Figura P18.101 y P18.102

***18.100** Para el sistema del problema 18.99, demuestre que *a)* la reacción dinámica en *D* es independiente de la longitud $2a$ del panel, *b)* la relación M_1/M_2 de las magnitudes de los pares ejercidos por los motores en *A* y *C*, respectivamente, es independiente de las dimensiones y masa del tablero y es igual a $\omega_2/2\omega_1$ en cualquier instante determinado.

18.101 Un disco homogéneo de 3 kg y 60 mm de radio gira como se muestra en la figura a la velocidad $\omega_1 = 60 \text{ rad/s}$. El disco se sostiene mediante la varilla *AB* con una horquilla en el extremo, la cual está soldada a la flecha vertical *CBD*. El sistema se encuentra en reposo cuando se aplica un par $\mathbf{M}_0 = (0.40 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$ a la flecha durante 2 s y después se retira. Determine las reacciones dinámicas en *C* y *D* después de haber retirado el par.

18.102 Un disco homogéneo de 3 kg y 60 mm de radio gira como se muestra en la figura a la velocidad $\omega_1 = 60 \text{ rad/s}$. El disco se sostiene mediante la varilla *AB* con una horquilla en el extremo, la cual está soldada a la flecha vertical *CBD*. El sistema se encuentra en reposo cuando se aplica, de la manera mostrada, un par \mathbf{M}_0 a la flecha durante 3 s y después se retira. Si la velocidad angular máxima alcanzada por la flecha es de 18 rad/s, determine *a)* el par \mathbf{M}_0 , *b)* las reacciones dinámicas en *C* y *D* después de haber retirado el par.

18.103 Para el disco del problema 18.97 determine *a)* el par $\mathbf{M}_1\mathbf{j}$ que debe aplicarse al brazo *ABC* para darle una aceleración angular $\alpha_1 = -(7.5 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j}$ cuando $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$, si se sabe que el disco gira a la velocidad constante $\omega_2 = 15 \text{ rad/s}$, *b)* el sistema fuerza-par que representa la reacción dinámica en *A* en ese instante. Suponga que *ABC* tiene una masa insignificante.

18.104 Se supone que en el instante mostrado la flecha *DCE* del problema 18.98 tiene una velocidad angular $\omega_2 = (8 \text{ rad/s})\mathbf{i}$ y una aceleración angular $\alpha_2 = (6 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$. Si se recuerda que el disco gira con una velocidad angular constante $\omega_1 = (16 \text{ rad/s})\mathbf{j}$, determine *a)* el par que debe aplicarse a la flecha *DCE* para producir la aceleración angular dada, *b)* las reacciones dinámicas correspondientes en *D* y *E*.

18.105 Un disco homogéneo de 2.5 kg y 80 mm de radio gira con una velocidad angular ω_1 con respecto al brazo *ABC*, el cual está soldado al eje *DCE* que rota en la forma mostrada a la velocidad constante $\omega_2 = 12 \text{ rad/s}$. La fricción en el cojinete en *A* ocasiona que ω_1 disminuya a una razón de 15 rad/s². Determine las reacciones dinámicas en *D* y *E* en el instante en el que ω_1 ha disminuido hasta 50 rad/s.

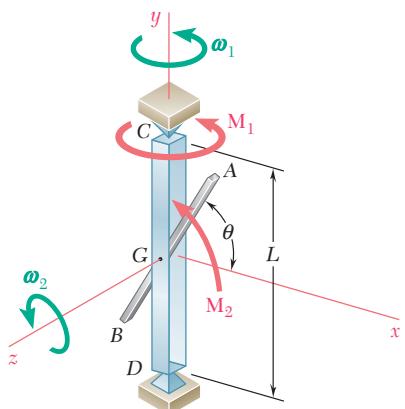


Figura P18.106

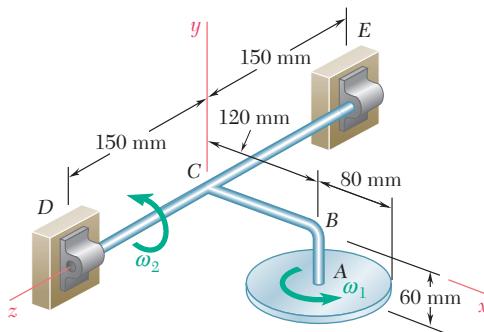


Figura P18.105

***18.106** Una varilla delgada homogénea *AB* de masa *m* y longitud *L* está hecha para girar a una razón constante ω_2 alrededor del eje horizontal *z*, mientras que el bastidor *CD* se construyó para girar a la razón constante ω_1 alrededor del eje *y*. Exprese como una función del ángulo θ *a)* el par \mathbf{M}_1 requerido para mantener la rotación del bastidor, *b)* el par \mathbf{M}_2 requerido para mantener la rotación de la varilla, *c)* las reacciones dinámicas en los soportes *C* y *D*.

*18.9. MOVIMIENTO DE UN GIROSCOPIO. ÁNGULOS DE EULER

18.9. Movimiento de un giroscopio.
Ángulos de Euler

1187

Un giroscopio consiste, esencialmente, en un rotor que puede girar libremente alrededor de su eje geométrico. Cuando está montado en una suspensión de Cardan (figura 18.15), es posible que asuma cualquier orientación, pero su centro de masa debe permanecer fijo en el espacio. Para definir la posición de un giroscopio en un instante dado, se elige un sistema de referencia fijo $OXYZ$, con el origen O localizado en el centro de masa del giroscopio y el eje Z dirigido a lo largo de la línea definida por los cojinetes A y A' del balancín externo. Considérese una posición de referencia del giroscopio en la cual los dos balancines y un diámetro dado DD' del rotor se ubican en el plano fijo YZ (figura 18.15a). El giroscopio puede llevarse de su posición de referencia a cualquier posición arbitraria (figura 18.15b) por medio de los siguientes pasos: (1) una rotación de un ángulo ϕ del balancín exterior alrededor del eje AA' , (2) una rotación θ del balancín interior alrededor de BB' y (3) una rotación ψ del rotor alrededor de CC' . Los ángulos ϕ , θ y ψ reciben el nombre de *ángulos de Euler*; éstos caracterizan por completo la posición del giroscopio en cualquier instante determinado. Sus derivadas $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ y $\dot{\psi}$ definen, de manera respectiva, la velocidad de *precesión*, la velocidad de *nutación* y la velocidad de *giro* del giroscopio en el instante considerado.

Para calcular las componentes de la velocidad angular y de la cantidad de movimiento angular del giroscopio, se usará un sistema de ejes en rotación $Oxyz$ ubicado en el balancín interno, con el eje y a lo largo de BB' y el eje z a lo largo de CC' (figura 18.16). Éstos son los ejes principales de inercia del giroscopio, y aunque siguen su precesión y nutación, sin embargo, no giran; por esa razón, son más convenientes que el uso de ejes montados en verdad en el giroscopio. La velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del giroscopio con respecto al sistema de referencia fijo $OXYZ$ se expresará ahora como la suma de tres velocidades angulares parciales correspondientes, respectivamente, a la precesión, la nutación y el giro del giroscopio. Si se denota por \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} los vectores unitarios a lo largo de los ejes en rotación, y por \mathbf{K} el vector unitario a lo largo del eje fijo Z , se tiene

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{j} + \dot{\psi}\mathbf{k} \quad (18.33)$$

Puesto que las componentes del vector que se obtuvieron para $\boldsymbol{\omega}$ en (18.33) no son ortogonales (figura 18.16), el vector unitario \mathbf{K} se descompondrá en componentes a lo largo de los ejes x y z ; se escribe

$$\mathbf{K} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{k} \quad (18.34)$$

y al sustituir \mathbf{K} en (18.33),

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{k} \quad (18.35)$$

Puesto que los ejes de coordenadas son ejes principales de inercia, las componentes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O pueden obtenerse al multiplicar las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ por los momentos de iner-

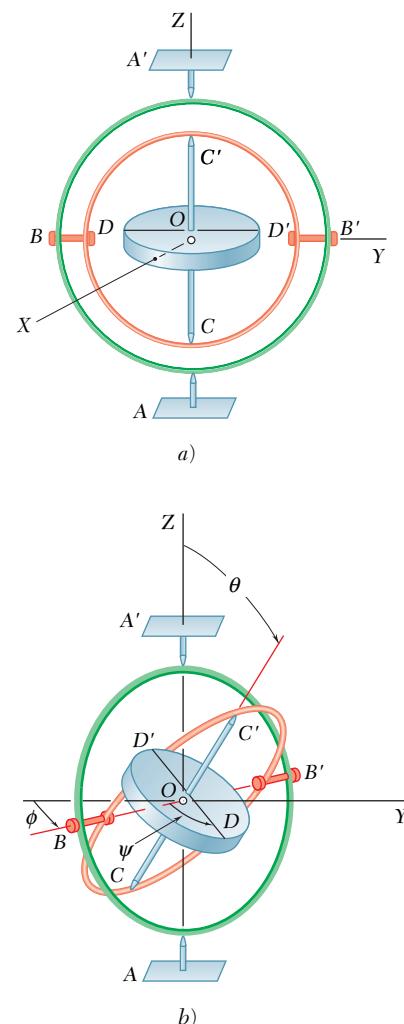


Figura 18.15

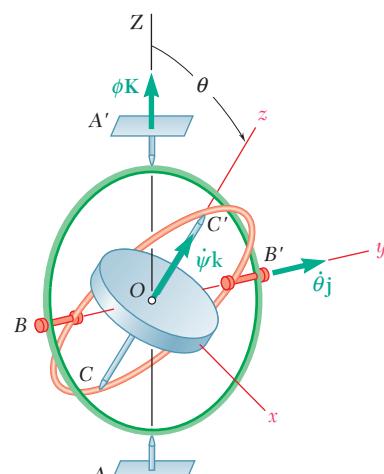


Figura 18.16

cia del rotor alrededor de los ejes x , y y z , respectivamente. Al denotar por I el momento de inercia del rotor alrededor de su eje de giro, por I' su momento de inercia con respecto al eje transversal que pasa por O , e ignorar la masa de los balancines, se escribe

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + I'\dot{\theta} \mathbf{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{k} \quad (18.36)$$

Si se recuerda que los ejes en rotación se asocian al balancín interno y, por ello, se expresa su velocidad angular como la suma

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{j} \quad (18.37)$$

o, al sustituir \mathbf{K} de (18.34),

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{k} \quad (18.38)$$

Al sustituir \mathbf{H}_O y $\boldsymbol{\Omega}$ de (18.36) y (18.38) en la ecuación

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \quad (18.28)$$

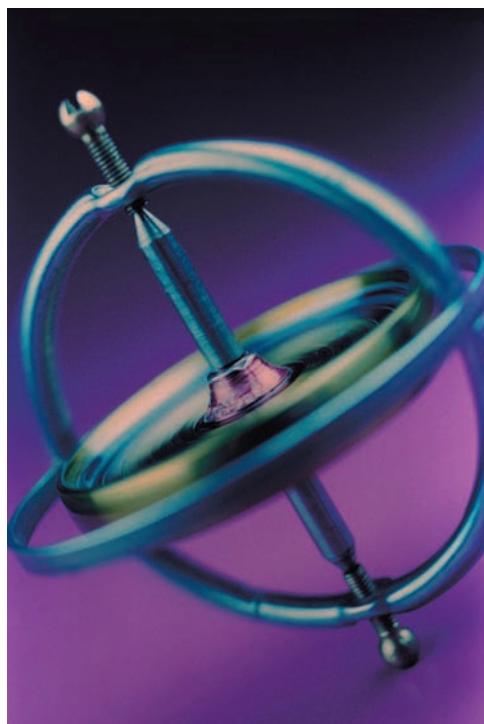
se obtienen las tres ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= -I'(\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta) + I\dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ \Sigma M_y &= I'(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I\dot{\phi} \sin \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{aligned} \quad (18.39)$$

$$\Sigma M_z = I \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)$$

Las ecuaciones (18.39) definen el movimiento de un giroscopio sujeto a un sistema dado de fuerzas cuando se ignoran las masas de sus balancines. También es posible usarlas para definir el movimiento de un cuerpo *simétrico con respecto a un eje* (o cuerpo de revolución) fijo en un punto de su eje de simetría, así como para definir el movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje en relación con su centro de masa. Si bien los balancines del giroscopio nos ayudan a visualizar los ángulos de Euler, es claro que estos ángulos pueden utilizarse para definir la posición de cualquier cuerpo rígido con respecto a los ejes centrados en un punto del cuerpo, independientemente de la manera en la cual se soporte el cuerpo en realidad.

Puesto que las ecuaciones (18.39) son no lineales, no será posible, en general, expresar los ángulos de Euler ϕ , θ y ψ como funciones analíticas del tiempo t , y será necesario recurrir a métodos de solución numéricos. Sin embargo, como se verá en las siguientes secciones, hay varios casos particulares de interés que pueden analizarse con facilidad.



Fotografía 18.5 Un giroscopio puede usarse para medir la orientación y es capaz de mantener la misma dirección absoluta en el espacio.

*18.10. PRECESIÓN ESTABLE DE UN GIROSCOPIO

Se investigará ahora el caso particular de movimiento giroscópico en el cual el ángulo θ , la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ y la velocidad de giro $\dot{\psi}$ permanecen constantes. Se pretende determinar las fuerzas que deben aplicarse al giroscopio para mantener este movimiento, conocido como *precesión estable* de un giroscopio.

En vez de aplicar las ecuaciones generales (18.39), se determina la suma de los momentos de las fuerzas requeridas calculando la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular del giroscopio en el caso particular considerado. Se observa primero que la velocidad angular ω del giroscopio, su momento angular \mathbf{H}_O y la velocidad angular Ω del sistema de referencia en rotación (figura 18.17) se reducen, respectivamente, a

$$\omega = -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \omega_z \mathbf{k} \quad (18.40)$$

$$\mathbf{H}_O = -I' \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + I \omega_z \mathbf{k} \quad (18.41)$$

$$\Omega = -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{k} \quad (18.42)$$

donde $\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \operatorname{cosen} \theta = \operatorname{componente rectangular a lo largo del eje de giro de la velocidad angular total del giroscopio}$.

Puesto que θ , $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes, el vector \mathbf{H}_O es constante en magnitud y dirección con respecto al sistema de referencia en rotación y su razón de cambio $(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ con respecto a ese sistema de referencia es cero. De tal modo la ecuación (18.28) se reduce a

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \Omega \times \mathbf{H}_O \quad (18.43)$$

la cual produce, después de sustituciones de (18.41) y (18.42),

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (I \omega_z - I' \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} \quad (18.44)$$

Puesto que el centro de masa del giroscopio está fijo en el espacio, se tiene, por (18.1), $\Sigma \mathbf{F} = 0$; así, las fuerzas que deben aplicarse al giroscopio para mantener su precesión estable se reducen a un par de momento igual al miembro del lado derecho de la ecuación (18.44). Se puede observar que *este par debe aplicarse alrededor de un eje perpendicular al eje de precesión y al eje de giro del giroscopio* (figura 18.18).

En el caso particular en el que el eje de precesión y el eje de giro forman un ángulo recto entre sí, se tiene que $\theta = 90^\circ$ y la ecuación (18.44) se reduce a

$$\Sigma \mathbf{M}_O = I \dot{\psi} \dot{\phi} \mathbf{j} \quad (18.45)$$

De tal modo, si se aplica al giroscopio un par \mathbf{M}_O alrededor de un eje perpendicular a su eje de giro, el giroscopio precederá alrededor de un eje perpendicular tanto al eje de giro como al eje del par, en un sentido tal que los vectores que representan el giro, el par y la precesión, respectivamente, forman una tríada derecha (figura 18.19).

En vista de los pares relativamente grandes que se requieren para cambiar la orientación de sus ejes, los giroscopios se utilizan como estabilizadores en torpedos y barcos. Las balas y granadas rotatorias permanecen tangentes a su trayectoria debido a la acción giroscópica. Ade-

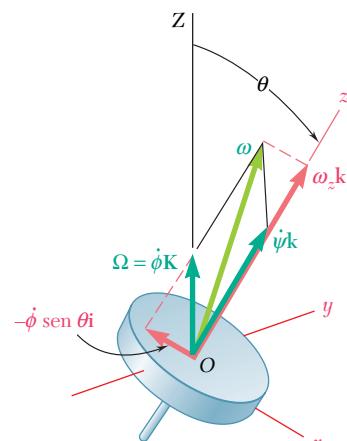


Figura 18.17

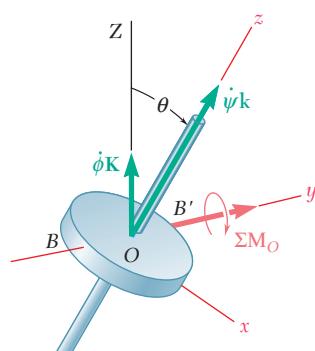


Figura 18.18

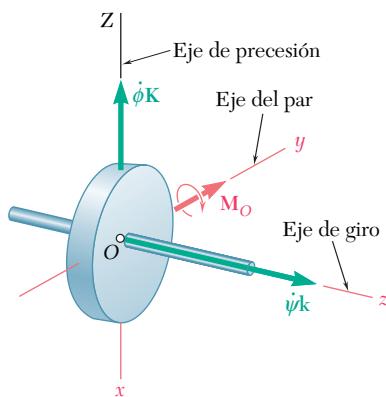


Figura 18.19

más, resulta fácil mantener balanceada una bicicleta a altas velocidades gracias al efecto estabilizador de sus ruedas giratorias. Sin embargo, la acción giroscópica no siempre es pertinente y debe tomarse en cuenta en el diseño de los cojinetes de soporte de flechas giratorias sujetas a precesión forzada. Las reacciones que ejercen las hélices de un aeronave en un cambio de dirección de vuelo también deben considerarse y compensarse siempre que sea posible.

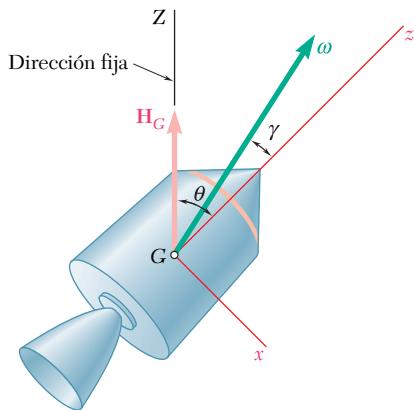


Figura 18.20

*18.11. MOVIMIENTO DE UN CUERPO SIMÉTRICO CON RESPECTO A UN EJE Y QUE NO SE SOMETE A NINGUNA FUERZA

En esta sección se analizará el movimiento alrededor de su centro de masa de un cuerpo con respecto a un eje y que no está sometido a ninguna fuerza excepto su peso. Ejemplos de tal movimiento son los proyectiles, si se ignora la resistencia del aire, y los vehículos artificiales en vehículos espaciales después de que se consumen sus cohetes de lanzamiento.

Puesto que la suma de los momentos de las fuerzas externas alrededor del centro de masa G del cuerpo es cero, la ecuación (18.2) produce $\dot{\mathbf{H}}_G = 0$. Se deduce que la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del cuerpo alrededor de G es constante. De tal manera la dirección de \mathbf{H}_G está fija en el espacio y puede utilizarse para definir el eje Z , o eje de precesión (figura 18.20). Al seleccionar un sistema rotatorio de ejes $Gxyz$ con el eje z a lo largo del eje de simetría del cuerpo, el eje x en el plano definido por los ejes Z y z , y el eje y apuntando en sentido contrario a usted, se tiene

$$H_x = -H_G \sin \theta \quad H_y = 0 \quad H_z = H_G \cos \theta \quad (18.46)$$

donde θ representa el ángulo formado por los ejes Z y z , y H_G denota la magnitud constante de la cantidad de movimiento angular del cuerpo alrededor de G . Puesto que los ejes x , y y z son ejes principales de inercia para el cuerpo considerado, es posible escribir

$$H_x = I' \omega_x \quad H_y = I' \omega_y \quad H_z = I \omega_z \quad (18.47)$$

donde I denota el momento de inercia del cuerpo alrededor de su eje de simetría e I' su momento de inercia alrededor de un eje transversal que pasa a través de G . Se sigue de las ecuaciones (18.46) y (18.47) que

$$\omega_x = -\frac{H_G \sin \theta}{I'} \quad \omega_y = 0 \quad \omega_z = \frac{H_G \cos \theta}{I} \quad (18.48)$$

La segunda de las relaciones obtenidas muestra que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ no tiene componente a lo largo del eje y , esto es, a lo largo de un eje perpendicular al plano Zz . Por consiguiente, el ángulo θ formado por los ejes Z y z permanece constante y *el cuerpo se encuentra en precesión estable con respecto al eje Z*.

Al dividir miembro a miembro la primera y tercera relaciones (18.48), y observando de la figura 18.21 que $-\omega_x/\omega_z = \tan \gamma$, se obtiene la siguiente relación entre los ángulos γ y θ que los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y \mathbf{H}_G forman, respectivamente, con los ejes de simetría del cuerpo;

$$\tan \gamma = \frac{I}{I'} \tan \theta \quad (18.49)$$

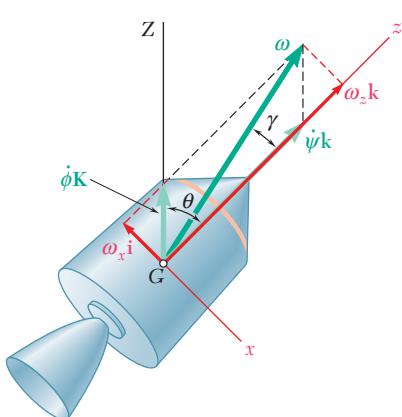


Figura 18.21

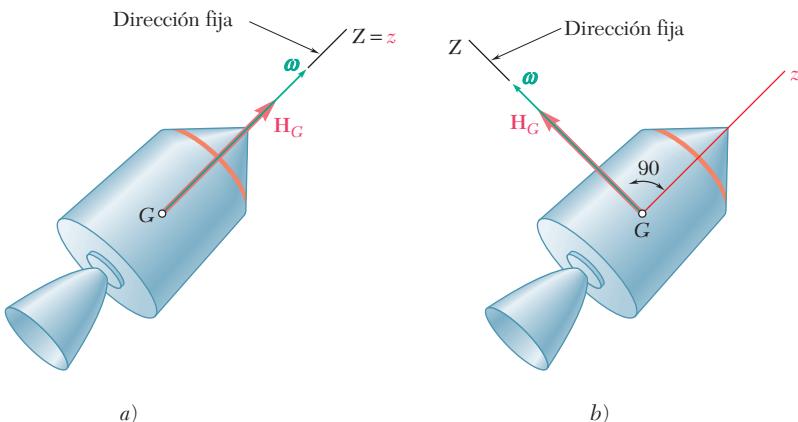


Figura 18.22

Hay dos casos particulares de movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje y no sometido a alguna fuerza que no implican precesión: (1) Si el cuerpo se pone a girar alrededor de su eje de simetría, se tiene $\omega_x = 0$ y, por (18.47), $H_x = 0$; los vectores ω y \mathbf{H}_G tienen la misma orientación y el cuerpo se mantiene girando alrededor de su eje de simetría (figura 18.22a). (2) Si el cuerpo se pone a girar con respecto a su eje transversal, se tiene $\omega_z = 0$ y, por (18.47), $H_z = 0$; también en este caso ω y \mathbf{H}_G tienen la misma orientación y el cuerpo se mantiene girando alrededor de un eje transversal determinado (figura 18.22b).

Considerando ahora el caso general representado en la figura 18.21, recuérdese de la sección 15.12 que el movimiento de un cuerpo alrededor de un punto fijo, con respecto a su centro de masa, pueda representarse mediante el movimiento de un cono corporal que rueda sobre un cono espacial. En el caso de precesión estable, los dos conos son circulares, ya que los ángulos γ y $\theta - \gamma$ que la velocidad angular ω forma, respectivamente, con los ejes de simetría del cuerpo y con los ejes de precesión son constantes. Deben distinguirse dos casos:

1. $I < I'$. Éste es el caso de un cuerpo elongado, tal como el vehículo espacial de la figura 18.23. Por (18.49) se tiene $\gamma < \theta$; el vector ω se encuentra dentro del ángulo ZGz ; el cono espacial y el cono corporal son tangentes externamente; tanto el giro como la precesión se observan en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje z positivo. Se dice que la precesión es *directa*.
2. $I > I'$. Éste es el caso de un cuerpo achataido, como el satélite de la figura 18.24. Por (18.49) se tiene que $\gamma > \theta$; puesto que el vector ω debe estar fuera del ángulo ZGz , el vector $\dot{\psi}\mathbf{k}$ tiene un sentido opuesto al del eje z ; el cono espacial se encuentra dentro del cono corporal; la precesión y el giro tienen sentidos opuestos. Se afirma que la precesión es *retrógrada*.

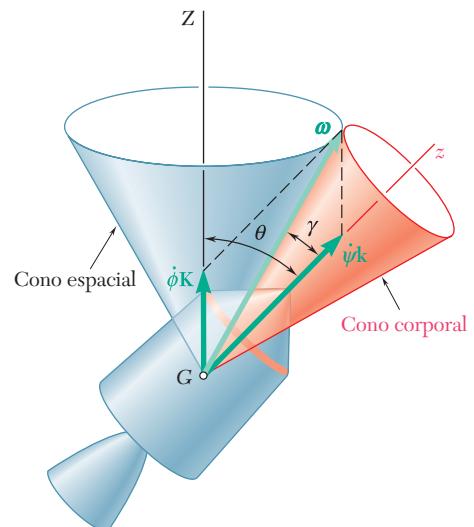


Figura 18.23

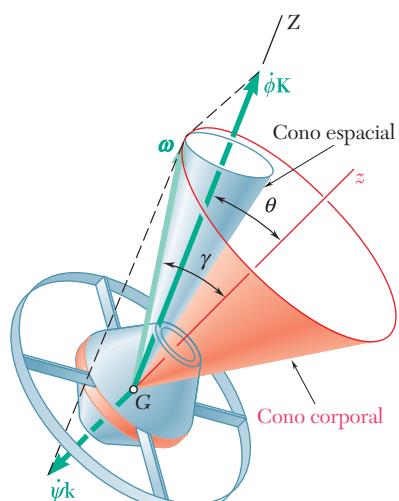
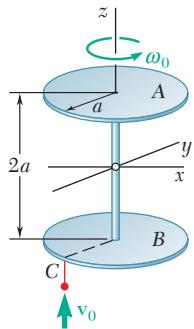


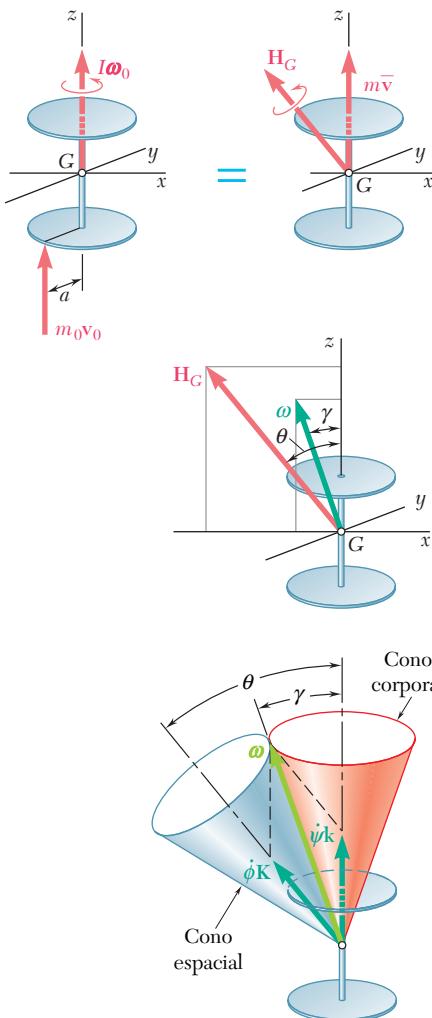
Figura 18.24



PROBLEMA RESUELTO 18.6

Se sabe que un satélite espacial de masa m es dinámicamente equivalente a dos discos delgados de igual masa. Los discos tienen un radio $a = 800$ mm y están rígidamente conectados mediante una barra ligera de longitud $2a$. En un principio, el satélite gira con libertad alrededor de su eje de simetría a la velocidad $\omega_0 = 60$ rpm. Un meteorito, de masa $m_0 = m/1000$ y que viaja con una velocidad v_0 de 2000 m/s relativa al satélite, choca con éste y se incrusta en C . Determine *a)* la velocidad angular del satélite inmediatamente después del impacto, *b)* el eje de precesión del movimiento resultante, *c)* las velocidades de precesión y giro del movimiento subsecuente.

SOLUCIÓN



Momentos de inercia. Se puede observar que los ejes que se muestran son los ejes principales de inercia del satélite y se escribe

$$I = I_z = \frac{1}{2}ma^2 \quad I' = I_x = I_y = 2[\frac{1}{4}(\frac{1}{2}m)a^2 + (\frac{1}{2}m)a^2] = \frac{5}{4}ma^2$$

Principio del impulso y la cantidad de movimiento. Se considera el satélite y el meteorito como un solo sistema. Puesto que no actúa fuerza externa sobre este sistema, las cantidades de movimiento antes y después del impacto son equipolentes. Al considerar los momentos con respecto a G , se escribe

$$\begin{aligned} -aj \times m_0v_0\mathbf{k} + I\omega_0\mathbf{k} &= \mathbf{H}_G \\ \mathbf{H}_G &= -m_0v_0ai + I\omega_0\mathbf{k} \end{aligned} \quad (1)$$

Velocidad angular después del impacto. Al sustituir los valores obtenidos para las componentes de \mathbf{H}_G , y para los momentos de inercia en

$$H_x = I_x\omega_x \quad H_y = I_y\omega_y \quad H_z = I_z\omega_z$$

se escribe

$$\begin{aligned} -m_0v_0a &= I'\omega_x = \frac{5}{4}ma^2\omega_x & 0 &= I'\omega_y & I\omega_0 &= I\omega_z \\ \omega_x &= -\frac{4}{5} \frac{m_0v_0}{ma} & \omega_y &= 0 & \omega_z &= \omega_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Para el satélite considerado se tiene $\omega_0 = 60$ rpm = 6.283 rad/s, $m_0/m = \frac{1}{1000}$, $a = 0.800$ m, y $v_0 = 2000$ m/s; se encuentra

$$\omega_x = -2 \text{ rad/s} \quad \omega_y = 0 \quad \omega_z = 6.283 \text{ rad/s}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 6.594 \text{ rad/s} \quad \tan \gamma = \frac{-\omega_x}{\omega_z} = +0.3183$$

$$\omega = 63.0 \text{ rpm} \quad \gamma = 17.7^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Eje de precesión. Puesto que en el movimiento libre la dirección de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G permanece fija en el espacio, el satélite prececerá con respecto a esta dirección. El ángulo θ formado por el eje de precesión y el eje z es

$$\tan \theta = \frac{-H_x}{H_z} = \frac{m_0v_0a}{I\omega_0} = \frac{2m_0v_0}{ma\omega_0} = 0.796 \quad \theta = 38.5^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Velocidades de precesión y giro. Se dibujan los conos espacial y corporal para el movimiento libre del satélite. Recurriendo a la ley de los senos, se calculan las velocidades de precesión y giro.

$$\frac{\omega}{\sin \theta} = \frac{\dot{\phi}}{\sin \gamma} = \frac{\dot{\psi}}{\sin(\theta - \gamma)}$$

$$\dot{\phi} = 30.8 \text{ rpm} \quad \dot{\psi} = 35.9 \text{ rpm} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se analizó el movimiento de *giroscopios* y de otros *cuerpos simétricos con respecto a un eje* con un punto fijo O . Para definir la posición de estos cuerpos en un instante determinado, se introdujeron los tres *ángulos de Euler* ϕ , θ y ψ (figura 18.15), y se advirtió que sus derivadas con respecto al tiempo definen, respectivamente, la velocidad de *precesión*, la velocidad de *nutación* y la velocidad de *giro* (figura 18.16). Los problemas que se presentarán entran dentro de una de las siguientes categorías.

1. Precesión estable. Éste es el movimiento de un giroscopio u otro cuerpo simétrico con respecto a un eje con un punto fijo ubicado en su eje de simetría, en el cual permanecen constantes el ángulo θ , la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ y la velocidad de giro $\dot{\psi}$.

a) Utilizando el sistema de referencia rotatorio $Oxyz$ que se muestra en la figura 18.17, el cual *precede* con el cuerpo, *pero no gira* con él, se obtuvieron las siguientes expresiones para la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo, su cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O , y la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ del sistema de referencia $Oxyz$:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \omega_z \mathbf{k} \quad (18.40)$$

$$\mathbf{H}_O = -I' \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + I \omega_z \mathbf{k} \quad (18.41)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{k} \quad (18.42)$$

donde I = momento de inercia del cuerpo con respecto a su eje de simetría

I' = momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje transversal que pasa por O

ω_z = componente *rectangular* de $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo del eje $z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$

b) La suma de los momentos alrededor de O de las fuerzas aplicadas al cuerpo es igual a la razón de cambio de su cantidad de movimiento angular, como lo expresa la ecuación (18.28). Pero, puesto que θ y las razones de cambio $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ son constantes, se concluye de las ecuaciones (18.41) que \mathbf{H}_O permanece constante en magnitud y dirección cuando se observa desde el sistema de referencia $Oxyz$. De tal modo, su razón de cambio es cero con respecto al sistema de referencia y es posible escribir

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \quad (18.43)$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ y \mathbf{H}_O se definen, respectivamente, mediante las ecuaciones (18.42) y (18.41). La ecuación que se obtiene muestra que el momento resultante en O en las fuerzas aplicadas al cuerpo es perpendicular tanto al eje de precesión como al eje de giro (figura 18.18).

c) Téngase en cuenta que el método descrito se aplica no sólo a giroscopios, donde el punto fijo O coincide con el centro de masa G , sino también a *cualquier cuerpo simétrico con respecto a un eje con un punto fijo O localizado en su eje de simetría*. Por lo tanto, este método puede utilizarse para analizar la *precesión estable de un trompo* que gira en un suelo irregular.

d) Cuando un cuerpo simétrico con respecto a un eje no tiene un punto fijo, pero se encuentra en precesión estable con respecto a su centro de masa G, es necesario dibujar una *ecuación de diagramas de cuerpo libre* en la que se indique que el sistema de las fuerzas externas ejercidas sobre el cuerpo (incluyendo el peso del mismo) es equivalente al vector $\bar{m}\mathbf{a}$ aplicado en G y al vector par $\dot{\mathbf{H}}_G$. Se pueden utilizar las ecuaciones (18.40) a (18.42), sustituyendo \mathbf{H}_O por \mathbf{H}_G , y expresar el momento del par como

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G$$

Es posible utilizar en ese caso la ecuación de diagramas de cuerpo libre para escribir hasta seis ecuaciones escalares independientes.

(continúa)

2. Movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje que no está sometido a ninguna fuerza, excepto a su propio peso. Se tiene como $\Sigma \mathbf{M}_G = 0$ y, en consecuencia, $\dot{\mathbf{H}}_G = 0$, se sigue que la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G es constante en magnitud y dirección (sección 18.11). El cuerpo está en precesión estable con el eje de precesión GZ dirigido a lo largo de \mathbf{H}_G (figura 18.20). Utilizando el sistema de referencia en rotación Gxyz y denotando por γ el ángulo que $\boldsymbol{\omega}$ forma con el eje de giro Gz (figura 18.21), se obtiene la siguiente relación entre γ y el ángulo θ formado por los ejes de precesión de giro

$$\tan \gamma = \frac{I}{I'} \tan \theta \quad (18.49)$$

Se afirma que la precesión es directa si $I < I'$ (figura 18.23) y retrógrada si $I > I'$ (figura 18.24).

a) **En muchos de los problemas** que tienen que ver con el movimiento de un cuerpo simétrico con respecto a un eje y que no se somete a ninguna fuerza, se pedirá determinar el eje de precesión y las velocidades de precesión y de giro del cuerpo, si se conocen la magnitud de su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el ángulo γ que ésta forma con el eje de simetría Gz (figura 18.21). A partir de la ecuación (18.49) se determinará el ángulo θ que el eje de precesión GZ forma con Gz y se descompondrá $\boldsymbol{\omega}$ en sus dos componentes oblicuas $\dot{\phi} \mathbf{k}$ y $\dot{\psi} \mathbf{k}$. Utilizando la ley de los senos, se determinará la velocidad de precesión $\dot{\phi}$ y la velocidad de giro $\dot{\psi}$.

b) **En otros problemas** el cuerpo estará sujeto a un impulso determinado y se establecerá primero la cantidad de movimiento angular resultante \mathbf{H}_G . Utilizando las ecuaciones (18.10) se calcularán las componentes rectangulares de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, su magnitud ω y el ángulo γ que ésta forma con el eje de simetría. Después se determinará el eje de precesión y las velocidades de precesión y giro como se describió antes [problema resuelto 18.6].

3. Movimiento general de un cuerpo simétrico con respecto a un eje con un punto fijo O localizado en su eje de simetría y sujeto únicamente a su propio peso. Este es un movimiento en el cual se permite la variación del ángulo θ . En cualquier instante dado debe considerarse la velocidad de precesión $\dot{\phi}$, la velocidad de giro $\dot{\psi}$ y la velocidad de nutación $\dot{\theta}$, ninguna de las cuales permanecerá constante. Un ejemplo de movimiento de este tipo es el de un trompo, el cual se analiza en los problemas 18.139 y 18.140. El sistema de referencia rotatorio Oxyz que se usará sigue siendo el que se muestra en la figura 18.18, aunque éste no girará en este caso alrededor del eje y a la velocidad $\dot{\theta}$. Por lo tanto, las ecuaciones (18.40), (18.41) y (18.42) deben sustituirse por las siguientes:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{k} \quad (18.40')$$

$$\mathbf{H}_O = -I' \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + I' \dot{\theta} \mathbf{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{k} \quad (18.41')$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{k} \quad (18.42')$$

Como la sustitución de estas expresiones en la ecuación (18.44) conducirán a ecuaciones diferenciales no lineales, es preferible, siempre que sea factible, aplicar los siguientes principios de conservación:

a) **Conservación de la energía.** Denotando por c la distancia entre el punto fijo O y el centro de masa G del cuerpo, y por E la energía total, se escribirá

$$T + V = E: \quad \frac{1}{2}(I' \omega_x^2 + I' \omega_y^2 + I \omega_z^2) + mgc \cos \theta = E$$

y se sustituyen las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ de la expresión que se obtuvo en la ecuación (18.40'). Advierta que c será positiva o negativa, dependiendo de la posición de G relativa a O. Además, $c = 0$ si G coincide con O; en ese caso la energía cinética se conserva.

b) **Conservación de la cantidad de movimiento angular con respecto al eje de precesión.** Puesto que el soporte en O se ubica en el eje Z y en vista de que el peso del cuerpo y el eje Z son ambos verticales y, por ello, paralelos entre sí, se concluye que $\Sigma M_Z = 0$ y, por consiguiente, que H_Z permanece constante. Esto puede expresarse escribiendo que el producto escalar $\mathbf{K} \cdot \mathbf{H}_O$ es constante, donde \mathbf{K} es el vector unitario a lo largo del eje Z.

c) **Conservación de la cantidad de movimiento angular con respecto al eje de giro.** Puesto que el soporte en O y el centro de gravedad G están localizados ambos en el eje z, se deduce que $\Sigma M_z = 0$ y, por ello, que H_z permanece constante. Esto se expresa escribiendo que el coeficiente del vector unitario \mathbf{k} en la ecuación (18.41') es constante. Advierta que este último principio de conservación no se puede aplicar cuando al cuerpo no se le permite girar alrededor de su eje de simetría, aunque en ese caso las únicas variables son θ y ϕ .

Problemas

18.107 Una esfera de aluminio sólido de 3 in. de radio se suelda al extremo de una varilla AB de 6 in. de largo y masa despreciable que se sostiene mediante una articulación de rótula en A . Si se sabe que la esfera precede con respecto al eje vertical a la razón constante de 60 rpm en el sentido indicado y que la varilla AB forma un ángulo $\beta = 30^\circ$ con la vertical, determine la velocidad de giro de la esfera alrededor de la línea AB .

18.108 Una esfera de aluminio sólido de 3 in. de radio se suelda al extremo de una varilla AB de 6 in. de largo y masa despreciable que se sostiene mediante una articulación de rótula en A . Si la esfera gira como se muestra alrededor de la línea AB y a la razón de 700 rpm, determine el ángulo β para el cual la esfera precederá con respecto al eje vertical a la velocidad constante de 60 rpm en el sentido indicado.

18.109 Un cono sólido de 9 in. de altura, con una base circular de 3 in. de radio se sostiene mediante una articulación de rótula en A . Si se observa que el cono precede con respecto al eje vertical AC a la razón constante de 40 rpm en el sentido indicado, y que su eje de simetría forma un ángulo $\beta = 40^\circ$ con AC , determine la velocidad a la que gira el cono alrededor de su eje AB .

18.110 Un cono sólido de 9 in. de altura, con una base circular de 3 in. de radio se sostiene mediante una articulación de rótula en A . Si el cono gira alrededor de su eje de simetría AB a una razón de 3 000 rpm y AB forma un ángulo $\beta = 60^\circ$ con el eje vertical AC , determine las dos razones posibles de precesión estable del cono alrededor del eje AC .

18.111 El trompo de 85 g que se muestra en la figura se apoya en el punto fijo O . Los radios de giro del trompo con respecto a su eje de simetría y con respecto a su eje transversal que pasa por O son, respectivamente, 21 y 45 mm. Si se sabe que $c = 37.5$ mm y la velocidad de giro del trompo con respecto a su eje de simetría es de 1 800 rpm, determine las dos posibles velocidades de precesión estable correspondientes a $\theta = 30^\circ$.

18.112 El trompo que se muestra en la figura se apoya en el punto fijo O y sus momentos de inercia con respecto a su eje de simetría y con respecto a un eje transversal que pasa por O se denotan, respectivamente, por I e I' . a) Muestre que la condición para la precesión estable del trompo es

$$(I\omega_z - I'\dot{\phi} \cos \theta)\dot{\phi} = Wc$$

donde $\dot{\phi}$ es la razón de precesión y ω_z es la componente rectangular de la velocidad angular a lo largo del eje de simetría del trompo. b) Demuestre que si la razón de giro $\dot{\psi}$ del trompo es muy grande comparada con su razón de precesión $\dot{\phi}$, la condición para precesión estable es $I\dot{\psi}\dot{\phi} \approx Wc$. c) Determine el error porcentual que se presenta cuando se usa la última relación para aproximar la más baja de las dos razones de precesión obtenidas para el trompo del problema 18.111.

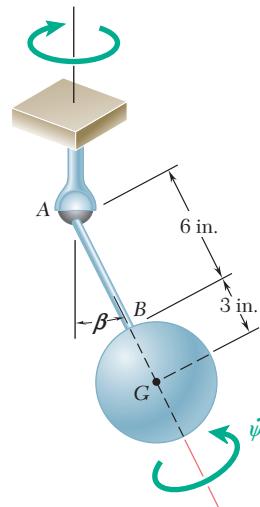


Figura P18.107 y P18.108

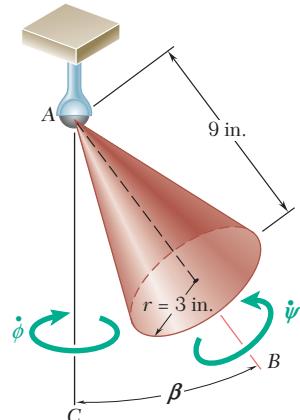


Figura P18.109 y P18.110

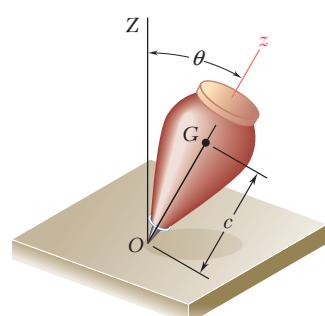


Figura P18.111 y P18.112

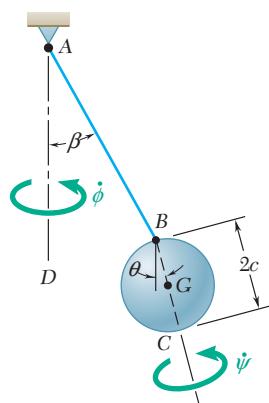


Figura P18.115 y

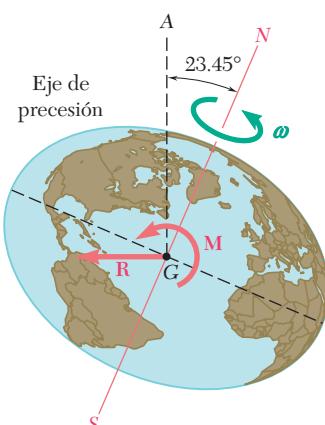


Figura P18.117

18.113 Un cubo sólido de lado $c = 80$ mm se conecta como se muestra a la cuerda AB . Se observa que el cubo gira a la razón $\dot{\psi} = 40$ alrededor de su diagonal BC y precede a la razón constante $\dot{\phi} = 5$ rad/s alrededor del eje vertical AD . Si $\beta = 30^\circ$, determine el ángulo θ que forma la diagonal BC con la vertical. (Sugerencia: El momento de inercia de un cubo alrededor de un eje a través de su centro es independiente de la orientación de ese eje.)

18.114 Un cubo sólido de lado $c = 120$ mm se conecta en la forma mostrada a una cuerda AB de 240 mm de longitud. El cubo gira alrededor de su diagonal BC y precede alrededor del eje vertical AD . Si $\theta = 25^\circ$ y $\beta = 40^\circ$, determine *a)* la velocidad de giro del cubo, *b)* su velocidad de precesión. (Vea la sugerencia del problema 18.113.)

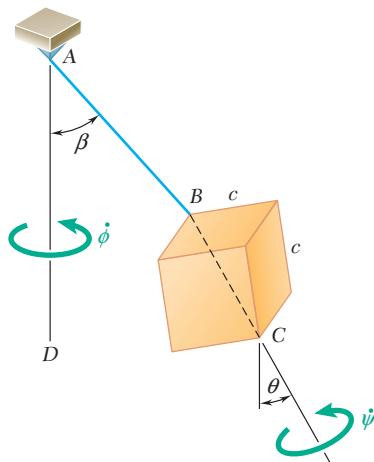


Figura P18.113 y P18.114

18.115 Una esfera sólida de radio $c = 3$ in. se conecta en la forma mostrada a la cuerda AB . Se observa que la esfera precede a la razón constante $\dot{\phi} = 6$ rad/s alrededor del eje vertical AD . Si $\beta = 40^\circ$, determine el ángulo θ que forma el diámetro BC con la vertical cuando la esfera *a)* no gira, *b)* gira alrededor de su diámetro BC a la razón $\dot{\psi} = 50$ rad/s, *c)* gira alrededor de BC a la razón $\dot{\psi} = -50$ rad/s.

18.116 Una esfera sólida de radio $c = 3$ in. se conecta en la forma mostrada a una cuerda AB de 15 in. de longitud. La esfera gira alrededor de su diámetro BC y precede alrededor del eje vertical AD . Si $\theta = 20^\circ$ y $\beta = 35^\circ$, determine *a)* la velocidad de giro de la esfera, *b)* su velocidad de precesión.

18.117 Si la Tierra fuera una esfera, la atracción gravitacional del Sol, la Luna y los planetas siempre sería equivalente a una sola fuerza \mathbf{R} que actúa en el centro de masa de nuestro planeta. En realidad la Tierra es un esferoide achatado y el sistema gravitacional que actúa sobre ella es equivalente a una fuerza \mathbf{R} y un par \mathbf{M} . Si se sabe que el efecto del par \mathbf{M} es causar que el eje terrestre preceda alrededor del eje GA a una velocidad de una revolución en 25 800 años, determine la magnitud promedio del par \mathbf{M} aplicado a la Tierra. Suponga que su densidad promedio es de 5.51 g/cm^3 , que el radio promedio terrestre es de 6 370 km, y que $\bar{I} = \frac{2}{5} mr^2$. (Nota: Esta precesión forzada se conoce como la precesión de los equinoccios y no debe confundirse con la precesión libre que se analiza en el problema 18.123.)

18.118 Un registro fotográfico de alta velocidad muestra que cierto proyectil se lanzó con una velocidad horizontal \bar{v} de 600 m/s y con su eje de simetría formando un ángulo $\beta = 3^\circ$ con la horizontal. La razón de giro $\dot{\psi}$ del proyectil fue de 6 000 rpm y el arrastre atmosférico resultó equivalente a una fuerza \mathbf{D} de 120 N que actuaba en el centro de presión C_p , ubicado a una distancia $c = 150$ mm de G . *a)* Si se sabe que el proyectil tiene una masa de 20 kg y un radio de giro de 50 mm con respecto a su eje de simetría, determine su razón aproximada de precesión estable. *b)* Si se sabe además que el radio de giro del proyectil con respecto al eje transversal que pasa por G es de 200 mm, determine los valores exactos de las dos posibles razones de velocidades de precesión.

18.119 Demuestre que para un cuerpo con simetría respecto a un eje y que no está sujeto a ninguna fuerza, las razones de precesión y giro pueden expresarse, respectivamente, como

$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I'}$$

y

$$\dot{\psi} = \frac{H_G \cos \theta (I' - I)}{II'}$$

donde H_G es el valor constante de la cantidad de movimiento angular del cuerpo.

18.120 *a)* Demuestre que para un cuerpo con simetría respecto a un eje y no sometido a ninguna fuerza, la velocidad de precesión puede expresarse como

$$\dot{\phi} = \frac{I\omega_2}{I' \cos \theta}$$

donde ω_2 es la componente rectangular de $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo del eje de simetría del cuerpo. *b)* Utilice este resultado para verificar que la condición (18.44) para precesión estable se satisface en el caso de un cuerpo con simetría respecto a un eje *y* no sujeto a ninguna fuerza.

18.121 Demuestre que el vector de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de un cuerpo simétrico con respecto a un eje, que no está sometido a una fuerza es visto desde el cuerpo mismo, que gira alrededor del eje de simetría a la razón constante

$$n = \frac{(I' - I)}{I'} \omega_2$$

donde ω_2 es la componente rectangular $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo del eje de simetría del cuerpo.

18.122 Para un cuerpo con simetría respecto a un eje que no está sometido a ninguna fuerza, demuestre *a)* que la razón de la precesión retrógrada nunca puede ser menor que el doble de la razón de giro del cuerpo respecto a su eje de simetría, *b)* que en la figura 18.24 el eje de simetría del cuerpo nunca puede estar dentro del cono espacial.

18.123 Utilizando la relación dada en el problema 18.121, determine el periodo de precesión del polo norte de la Tierra alrededor de su eje de simetría. La Tierra puede aproximarse mediante un asteroide achatado de momento de inercia axial I y un momento de inercia transversal $I' = 0.99671I$. (*Nota:* Las observaciones reales muestran un periodo de precesión del polo norte de aproximadamente 432.5 días solares medios, la diferencia entre los periodos observados y calculados se debe al hecho de que la Tierra no es un cuerpo perfectamente rígido. La precesión libre que se considera aquí no debe confundirse con la precesión mucho más lenta de los equinoccios, que es una precesión forzada. Vea el problema 18.117.)

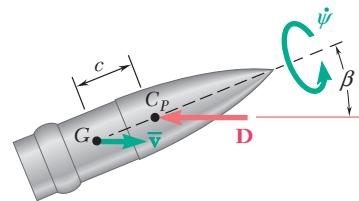


Figura P18.118

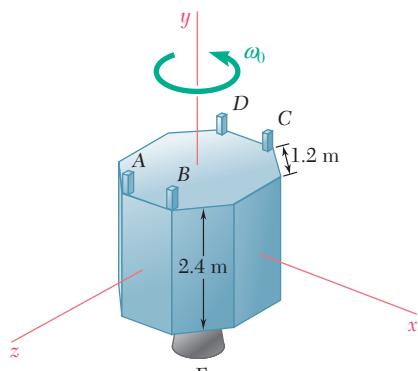


Figura P18.125

18.124 El vector de velocidad angular de una pelota de fútbol americano que acaba de patearse está en posición horizontal y su eje de simetría OC se orienta en la forma mostrada. Si la magnitud de la velocidad angular es de 200 rpm y el cociente entre los momentos de inercia axial y transversal es $I/I' = \frac{1}{3}$, determine *a)* la orientación del eje de precesión OA , *b)* las velocidades de precesión y de giro.

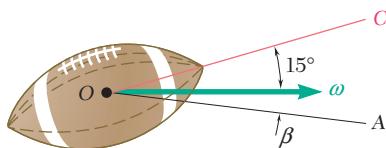


Figura P18.124

18.125 Un satélite de 2 500 kg mide 2.4 m de altura y tiene bases octagonales de 1.2 m de lado. Los ejes de coordenadas mostrados son los principales ejes centroidales de inercia del satélite y sus radios de giro son $k_x = k_z = 0.90$ m y $k_y = 0.98$ m. El satélite está equipado con un propulsor principal E de 500 N y cuatro propulsores A, B, C y D de 20 N, los cuales pueden expeler combustible en la dirección y positiva. El satélite está girando a 36 rev/h alrededor de su eje de simetría Gy , que mantiene una dirección fija en el espacio, cuando los propulsores A y B se activan durante 2 s. Determine *a)* el eje de precesión del satélite, *b)* su velocidad de precesión, *c)* su velocidad de giro.

18.126 Retome el problema 18.125, y ahora suponga que los propulsores A y D (en vez de A y B) se activan durante 2 s.

18.127 Un satélite geoestacionario de 800 lb gira con una velocidad angular $\omega_0 = (1.5 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ cuando es golpeado en B por un meteorito de 6 oz. que viaja con una velocidad relativa al satélite de $\mathbf{v}_0 = -(1600 \text{ ft/s})\mathbf{i} + (1300 \text{ ft/s})\mathbf{j} + (4000 \text{ ft/s})\mathbf{k}$. Si se sabe que $b = 20$ in. y que los radios de giro del satélite son $\bar{k}_x = \bar{k}_z = 28.8$ in. y $\bar{k}_y = 32.4$ in., determine el eje de precesión y las velocidades de precesión y giro del satélite después del impacto.

18.128 Retome el problema 18.127, ahora suponga que el meteorito golpea al satélite en A en vez de en B .

18.129 Una moneda se lanza al aire. Se observa que gira a la velocidad de 600 rpm alrededor de un eje GC perpendicular a la moneda y que precede alrededor de la dirección vertical GD . Si se sabe que GC forma un ángulo de 15° con GD , determine *a)* el ángulo que la velocidad angular ω de la moneda forma con GD , *b)* la velocidad de precesión de la moneda alrededor de GD .

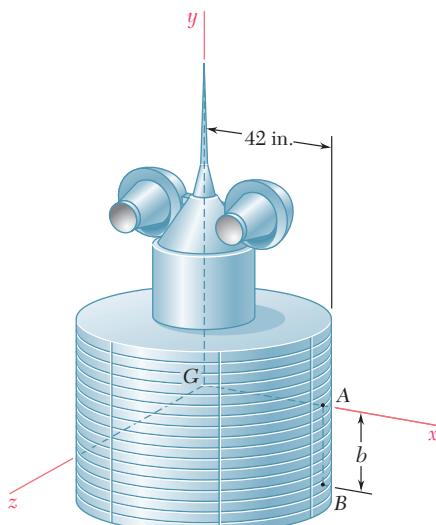


Figura P18.127

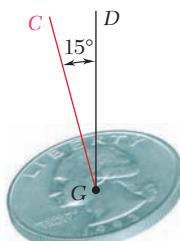


Figura P18.129

- 18.130** Encuentre la solución el problema resuelto 18.6, si se supone que el meteorito golpea al satélite en C con una velocidad $\mathbf{v}_0 = (2\,000 \text{ m/s})\mathbf{i}$.

- 18.131** Un disco homogéneo de masa m se conecta en A y B al extremo en forma de horquilla de una flecha de masa insignificante que se sostiene mediante un cojinete en C . El disco gira libremente alrededor de su diámetro horizontal AB y la flecha tiene la libertad de rotar alrededor del eje vertical que pasa por C . Al inicio el disco yace en el plano vertical ($\theta_0 = 90^\circ$) y la flecha tiene una velocidad angular $\dot{\phi} = 8 \text{ rad/s}$. Si el disco se perturba ligeramente, determine para el movimiento subsecuente *a)* el valor mínimo de $\dot{\phi}$, *b)* el valor máximo de $\dot{\theta}$.

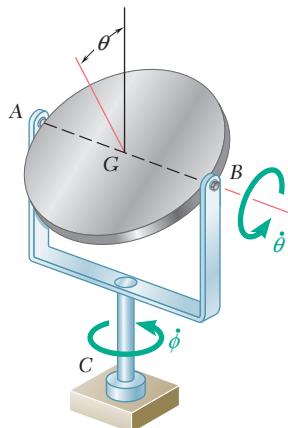


Figura P18.131

- 18.132** Una varilla delgada homogénea AB de masa m y longitud L puede girar libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro de masa G . El eje se sostiene mediante un bastidor de masa despreciable que puede girar libremente alrededor de la vertical CD . Si en un inicio $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ y $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ muestre que la varilla oscilará alrededor del eje horizontal y determine *a)* el rango de valores del ángulo θ durante este movimiento, *b)* el valor máximo de $\dot{\theta}$, *c)* el valor mínimo de $\dot{\phi}$.

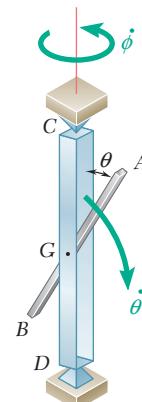


Figura P18.132

- 18.133** Una placa rectangular homogénea de masa m y lados c y $2c$ se sostiene en los puntos A y B mediante una flecha terminada en horquilla de masa despreciable que a su vez está soportada por un cojinete en C . La placa tiene la libertad de girar alrededor de AB , y el marco gira libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por C . Si, al inicio, $\theta_0 = 30^\circ$, $\dot{\theta}_0 = 0$ y $\dot{\phi}_0 = 6 \text{ rad/s}$, determine para el movimiento subsecuente *a)* el intervalo de valores de θ , *b)* el valor mínimo de $\dot{\phi}$, *c)* el valor máximo de $\dot{\theta}$.

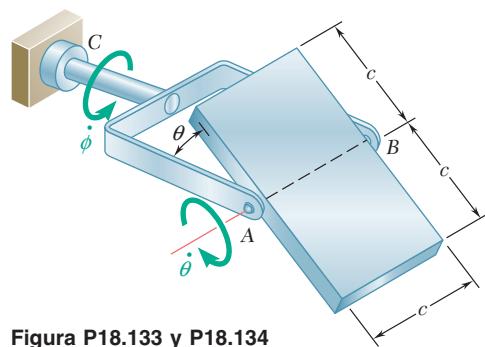


Figura P18.133 y P18.134

- 18.134** Una placa rectangular homogénea de masa m y lados c y $2c$ se sostiene en los puntos A y B mediante una flecha terminada en horquilla de masa despreciable que a su vez está soportada por un cojinete en C . La placa tiene la libertad de girar alrededor de AB , y el marco gira libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por C . Al inicio la placa yace en el plano de la horquilla ($\theta_0 = 0$) y la flecha tiene una velocidad angular $\dot{\phi}_0 = 6 \text{ rad/s}$. Si la placa se perturba ligeramente, determine para el movimiento subsecuente *a)* el valor mínimo de $\dot{\phi}$, *b)* el valor máximo de $\dot{\theta}$.

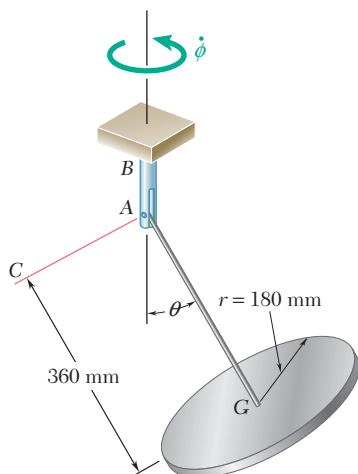


Figura P18.135 y P18.136

18.135 Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra AG de 360 mm de longitud y masa despreciable que se conecta mediante una horquilla a una flecha vertical AB. La barra y el disco pueden girar con libertad alrededor de un eje horizontal AC, y la flecha AB tiene la posibilidad de rotar libremente en torno al eje vertical. En un principio, la barra AG está en posición horizontal ($\theta_0 = 90^\circ$) y no tiene velocidad angular respecto a AC. Si se sabe que el valor máximo $\dot{\phi}_m$ de la velocidad angular de la flecha AB en el movimiento subsecuente es el doble del valor inicial $\dot{\phi}_0$, determine a) el valor mínimo de θ , b) la velocidad angular inicial $\dot{\phi}_0$ de la flecha AB.

18.136 Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra AG de 360 mm de longitud y masa despreciable que se conecta mediante una horquilla a una flecha vertical AB. La barra y el disco pueden girar con libertad alrededor de un eje horizontal AC, y la flecha AB tiene la posibilidad de rotar libremente en torno al eje vertical. Al inicio la barra AC está en posición horizontal ($\theta_0 = 90^\circ$) y no tiene velocidad angular respecto a AC. Si el valor más pequeño de θ en el movimiento subsecuente es de 30° , determine a) la velocidad angular inicial de la flecha AB, b) su velocidad angular máxima.

***18.137** Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra AG de 360 mm de longitud y de masa insignificante que se soporta mediante una articulación de rótula en A. El disco se suelta con una razón de giro $\dot{\psi}_0 = 50 \text{ rad/s}$, con velocidades de precesión y nutación cero y con la barra AG horizontal ($\theta_0 = 90^\circ$). Determine a) el valor más pequeño de θ en el movimiento subsecuente, b) las razones de precesión y de giro cuando el disco pasa por su posición más baja.

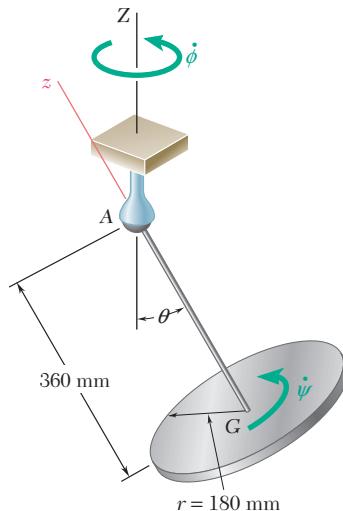


Figura P18.137 y P18.138

***18.138** Un disco homogéneo de 180 mm de radio se suelda a una barra AG de 360 mm de longitud y de masa insignificante que se soporta mediante una articulación de rótula en A. El disco se suelta con una razón de giro $\dot{\psi}_0$, en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se ve desde A, con velocidades de precesión y nutación cero y con la barra AG horizontal ($\theta_0 = 90^\circ$). Si el valor más pequeño de θ en el movimiento subsecuente es de 30° , determine a) la razón de giro $\dot{\psi}_0$ del disco en la posición inicial, b) las razones de precesión y de giro cuando el disco pasa por su posición más baja.

***18.139** El trompo que se muestra se sostiene en el punto fijo O . Si se denota con ϕ , θ y ψ los ángulos de Euler que definen la posición del trompo con respecto a un sistema de referencia fijo, considere el movimiento general del trompo en el cual varían todos los ángulos de Euler.

a) Si se observa que $\Sigma M_Z = 0$ y $\Sigma M_z = 0$ y se denota con I e I' , respectivamente, los momentos de inercia del trompo respecto a su eje de simetría y de su eje transversal que pasa por O , deduzca las dos ecuaciones diferenciales de primer orden para el movimiento

$$I' \dot{\phi} \sin^2 \theta + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = \alpha$$

$$I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \beta$$

donde α y β son constantes que dependen de las condiciones iniciales. Estas ecuaciones expresan que la cantidad de movimiento angular del trompo se conserva con respecto tanto del eje Z como del z , esto es, que la componente rectangular de \mathbf{H}_O a lo largo de cada uno de estos ejes es constante.

b) Utilice las ecuaciones (1) y (2) para demostrar que la componente rectangular ω_z de la velocidad angular del trompo es constante y que la razón de precesión $\dot{\phi}$ depende del valor del ángulo de nutación θ .

***18.140** a) Mediante la aplicación del principio de la conservación de la energía, deduzca una tercera ecuación diferencial para el movimiento general del trompo del problema 18.139.

b) Eliminando las derivadas $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ de la ecuación que se obtuvo y de las dos ecuaciones del problema 18.139, demuestre que la razón de nutación $\dot{\theta}$ se define mediante la ecuación diferencial $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$, donde

$$f(\theta) = \frac{1}{I'} \left(2E - \frac{\beta^2}{I} - 2mgc \cos \theta \right) - \left(\frac{\alpha - \beta \cos \theta}{I' \sin \theta} \right)^2$$

c) Demuestre también, introduciendo la variable auxiliar $x = \cos \theta$, que los valores máximo y mínimo de θ pueden obtenerse al resolver respecto a x la ecuación cúbica

$$\left(2E - \frac{\beta^2}{I} - 2mgcx \right)(1 - x^2) - \frac{1}{I'} (\alpha - \beta x)^2 = 0$$

18.141 Una esfera homogénea de masa m y radio a está soldada a una varilla AB de masa insignificante, la cual se sostiene mediante un soporte de rótula en A . La esfera se suelta en la posición $\beta = 0$ con una razón de precesión $\dot{\phi}_0 = \sqrt{17g/11a}$ sin giro o nutación. Determine el valor máximo de β en el movimiento subsecuente.

18.142 Una esfera homogénea de masa m y radio a está soldada a una varilla AB de masa insignificante, la cual se sostiene mediante un soporte de rótula en A . La esfera se suelta en la posición $\beta = 0$ con una razón de precesión $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ sin giro o nutación. Si el valor máximo de β en el movimiento subsecuente es de 30° , determine a) la razón de precesión $\dot{\phi}_0$ de la esfera en su posición inicial, b) las razones de precesión y de giro cuando $\beta = 30^\circ$.

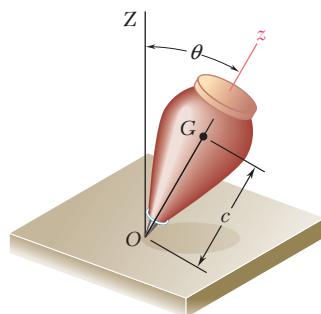


Figura P18.139 y P18.140

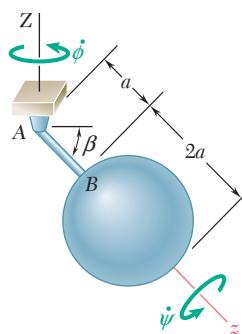


Figura P18.141 y P18.142

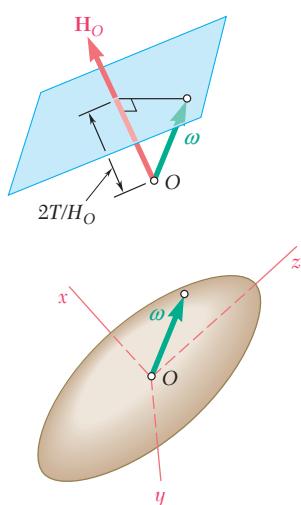


Figura P18.143

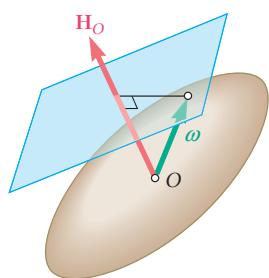


Figura P18.144

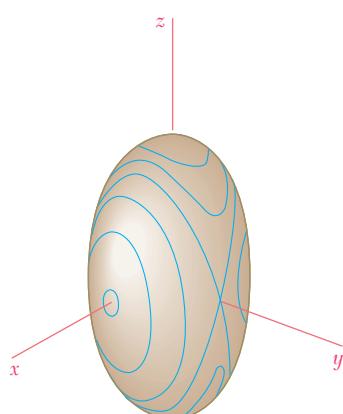


Figura P18.146

***18.143** Considere un cuerpo rígido de forma arbitraria que está fijo en su centro de masa O y que sólo se somete a la fuerza de su peso y a la reacción en el apoyo O .

a) Demuestre que la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del cuerpo alrededor del punto fijo O es constante en magnitud y dirección, que la energía cinética T del cuerpo es constante y que la proyección a lo largo de \mathbf{H}_O de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo es constante.

b) Demuestre que la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$ describe una curva sobre un plano fijo en el espacio (llamado *plano invariable*), el cual es perpendicular a \mathbf{H}_O y se encuentra a una distancia $2T/\mathbf{H}_O$ desde O .

c) Muestre que con respecto al sistema de referencia asociado al cuerpo y que coincide con sus ejes principales de inercia, la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$ parece describir una curva sobre un elipsoide de ecuación

$$I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 = 2T = \text{constante}$$

El elipsoide (denominado *elipsoide de Poinsot*) está rígidamente unido al cuerpo y es de la misma forma que el elipsoide de inercia, pero de tamaño diferente.

***18.144** Con referencia al problema 18.143, a) demuestre que el elipsoide de Poinsot es tangente al plano invariable, b) demuestre que el movimiento del cuerpo rígido debe ser tal que el elipsoide de Poinsot parece rodar sobre el plano invariable. [Sugerencia: En el inciso a) muestre que la normal al elipsoide de Poinsot en la punta de $\boldsymbol{\omega}$ es paralela a) \mathbf{H}_O . Se recuerda que la dirección de la normal a la superficie de ecuación $F(x, y, z) = \text{constante}$ en un punto P es la misma que la del gradiente de la función F en el punto P ($\mathbf{grad} F$).]

***18.145** Utilizando los resultados que se obtuvieron en los problemas 18.143 y 18.144, muestre que para un cuerpo simétrico con respecto a un eje asociado a su centro de masa O y que no se somete a ninguna fuerza que no sea su peso o la reacción en O , el elipsoide de Poinsot es un elipsoide de revolución y los conos espacial y corporal son circulares y tangentes entre sí. Demuestre además que a) los dos conos son tangentes externamente y que la precesión es directa, cuando $I < I'$, donde I e I' denotan, respectivamente, los momentos de inercia axial y transversal del cuerpo, b) el cono espacial está dentro del cono corporal, y la precesión es retrógrada, cuando $I > I'$.

***18.146** Con referencia a los problemas 18.143 y 18.144.

a) Demuestre que la curva (llamada *polhodo*) que describe la punta del vector $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a un sistema de referencia que coincide con los ejes principales de inercia de un cuerpo rígido está definida por las ecuaciones

$$I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 = 2T = \text{constante} \quad (1)$$

$$I_x^2 \omega_x^2 + I_y^2 \omega_y^2 + I_z^2 \omega_z^2 = H_O^2 = \text{constante} \quad (2)$$

y que la curva puede, por tanto, obtenerse al intersecar el elipsoide de Poinsot con el elipsoide definido por la ecuación (2).

b) Además, suponiendo que $I_x > I_y > I_z$, demuestre que los polhodos obtenidos para diversos valores de H_O tienen las formas indicadas en la figura.

c) Utilizando el resultado obtenido en el inciso b) demuestre que un cuerpo rígido que no está sometido a ninguna fuerza puede girar alrededor de un eje centroidal fijo si y sólo si, ese eje coincide con uno de los ejes principales de inercia del cuerpo, y que el movimiento será estable si el eje de rotación coincide con el eje mayor o menor de la elipsoide de Poinsot (eje z o x en la figura) e inestable si coincide con el eje intermedio (eje y).

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 18

Este capítulo se dedicó al análisis cinético de movimiento de cuerpos rígidos en tres dimensiones.

Se pudo observar primero [sección 18.1] que las dos ecuaciones fundamentales que se obtuvieron en el capítulo 14 para el movimiento de un sistema de partículas

$$\sum \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \quad (18.1)$$

$$\sum \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \quad (18.2)$$

proporcionan el fundamento del análisis, justo como ocurrió en el capítulo 16 en el caso del movimiento plano de cuerpos rígidos. El cálculo de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del cuerpo y de su derivada $\dot{\mathbf{H}}_G$, sin embargo, revisten ahora una importancia considerable.

En la sección 18.2 se vio que las componentes rectangulares de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G de un cuerpo rígido pueden expresarse en términos de las componentes de su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y de sus momentos y productos centroidales de inercia de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} H_x &= +\bar{I}_x\omega_x - \bar{I}_{xy}\omega_y - \bar{I}_{xz}\omega_z \\ H_y &= -\bar{I}_{yx}\omega_x + \bar{I}_y\omega_y - \bar{I}_{yz}\omega_z \\ H_z &= -\bar{I}_{zx}\omega_x - \bar{I}_{zy}\omega_y + \bar{I}_z\omega_z \end{aligned} \quad (18.7)$$

Si se usan los *ejes principales de inercia* $Cx'y'z'$, estas relaciones se reducen a

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \quad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \quad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \quad (18.10)$$

Se observó que, en general, *la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ no tienen la misma dirección* (figura 18.25). Sin embargo, la tendrán si $\boldsymbol{\omega}$ está dirigida a lo largo de uno de los ejes principales de inercia del cuerpo.

Ecuaciones fundamentales del movimiento de un cuerpo rígido

Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido en tres dimensiones

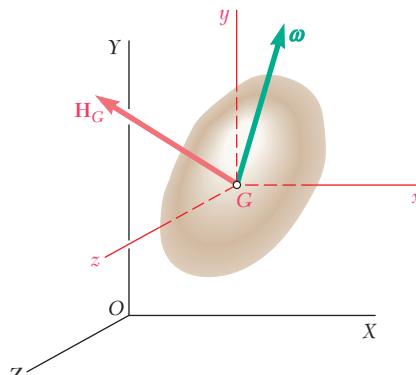


Figura 18.25

Cantidad de movimiento angular alrededor de un punto dado

Cuerpo rígido con un punto fijo

Principio del impulso y la cantidad de movimiento

Energía cinética de un cuerpo rígido en tres dimensiones

Como el sistema de cantidades de movimiento de las partículas que forman a un cuerpo rígido puede reducirse al vector $m\bar{v}$ asociado a G y al par \mathbf{H}_G (figura 18.26), se advirtió que, una vez que se ha determinado la cantidad de movimiento lineal $m\bar{v}$ y la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_G del cuerpo rígido, la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del cuerpo alrededor de cualquier punto O puede obtenerse al escribir

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{v} + \mathbf{H}_G \quad (18.11)$$

En el caso particular de un cuerpo rígido *restringido a girar alrededor de un punto fijo O*, las componentes de la cantidad de movimiento angular \mathbf{H}_O del cuerpo alrededor de O se obtienen directamente de las componentes de su velocidad angular y de sus momentos y productos de inercia con respecto a los ejes que pasan por O . Se escribió

$$\begin{aligned} H_x &= +I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\omega_z \end{aligned} \quad (18.13)$$

El *principio del impulso y la cantidad de movimiento* para un cuerpo rígido en movimiento tridimensional [sección 18.3] se expresa mediante la misma fórmula fundamental que se utilizó en el capítulo 17 para un cuerpo rígido en movimiento plano,

$$\text{Cant. Mov. Sist.}_1 + \text{Imp. Ext. Sis.}_{1 \rightarrow 2} = \text{Cant. Mov. Sist.}_2 \quad (17.4)$$

aunque los sistemas de la cantidad de movimiento inicial y final ahora deben representarse como se indica en la figura 18.26, y es necesario calcular \mathbf{H}_G a partir de las relaciones (18.7) o (18.10) [problemas resueltos 18.1 y 18.2].

La *energía cinética* de un cuerpo rígido en movimiento tridimensional puede dividirse en dos partes [sección 18.4], una asociada con el movimiento de su centro de masa G y la otra con su movimiento con respecto a G . Utilizando los ejes centroidales principales x' , y' , z' , se escribió

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}(\bar{I}_{x'}\omega_{x'}^2 + \bar{I}_{y'}\omega_{y'}^2 + \bar{I}_{z'}\omega_{z'}^2) \quad (18.17)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ = velocidad del centro de masa

$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular

m = masa del cuerpo rígido

$\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{z'}$ = momentos de inercia centroidales principales

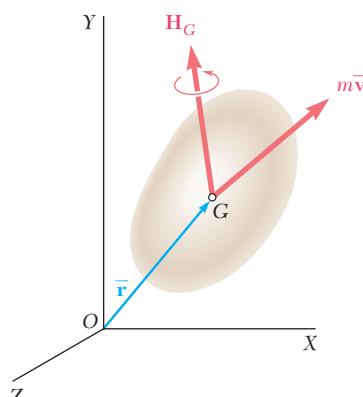


Figura 18.26