باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده مهندسی برق

گزارش پروژۀ درس محاسبات عددی

نگارنده

بهراد منیری

۹۵۱۰۹۵۶۴

استاد

دکتر ایمان غلام‌پور

بهمن ۱۳۹۶

محاسبه انتگرال

تابع integ عمل محاسبهٔ عددی انتگرال را انجام می‌دهد. این تابع می‌تواند انتگرال را به چهار روش مستطیلی، ذوزنقه‌ای، نقطه میانی و سیمسون محاسبه کند.

```
integ( f, N, lower, upper, method)
```

در این تابع:

f فانکشن هندل تابعی است که می‌خواهیم انتگرال آن را محاسبه کنیم. (برای توان باید از ^. استفاده کرد و الخ.)

N تعداد نقاطی است که در محاسبه انتگرال از آن استفاده می‌کنیم.

Lower کران پایین انتگرال معین است.

Upper کران بالای انتگرال معین است.

Method روش انتگرال گیری است.

Method مقادیر زیر را قبول می‌کند:

عملکرد	Method
محاسبهٔ انتگرال به روش مستطیلی	‘rect’
محاسبهٔ انتگرال به روش نقطه میانی	‘midpoint’
محاسبهٔ انتگرال به روش سیمسون	‘simpson'
محاسبهٔ انتگرال به روش ذوزنقه	‘trapz’

مثال یک: محاسبهٔ $\int_0^1 \sin x \, dx$ با روش سیمسون و استفاده از ۱۰۰ نقطه

```
%% Example One: integ

f = @(x) sin(x);
I = integ(f, 100, 0, 1, 'simpson');
disp(I)
```

خروجی:

$$I = 0.459697694157399$$

مقدار واقعی:

$$I = 0.4596976941$$

در این محاسبه خطا از 10^{-10} کوچکتر است.

محاسبه مشتق

تابع derv عمل محاسبهٔ عددی مشتق را انجام می‌دهد. این تابع می‌تواند از روش‌های دو، سه و چهار نقطه‌ای پیشرو و پسرو و روش دو و چهار نقطه‌ای متقارن مشتق را به صورت عددی به دست بیاورد.

```
derv( f, x0, h, method)
```

در این تابع:

f فانکشن هندل تابعی است که می‌خواهیم مشتق آن را محاسبه کنیم. (برای توان باید از ^. استفاده کرد و الخ.)

X0 نقطه‌ای است که مشتق در آن محاسبه می‌شود.

h طول گام های ما در محاسبه مشتق است.

Method مقادیر زیر را قبول می‌کند:

عملکرد	Method
محاسبه مشتق به روش چهار نقطه‌ای متقارن	‘4sym’
محاسبه مشتق به روش دو نقطه‌ای متقارن	‘2sym’
محاسبه مشتق به روش چهار نقطه‌ای پیشرو	‘4forward’
محاسبه مشتق به روش سه نقطه‌ای پیشرو	‘3forward’
محاسبه مشتق به روش دو نقطه‌ای پیشرو	‘2forward’
محاسبه مشتق به روش چهار نقطه‌ای پسرو	‘4backward’
محاسبه مشتق به روش سه نقطه‌ای پسرو	‘3backward’
محاسبه مشتق به روش دو نقطه‌ای پسرو	‘2backward’

مثال دو: محاسبهٔ $\frac{d}{dx}(\frac{1}{1+x^2})$ در نقطه $x = 1$ با روش مشتق پیشرو چهار نقطه‌ای.

```
%% Example Two: derv

 clear
 disp('Example Two');

f = @(x) 1./(1+x.^2);
D = derv(f, 1, 0.001, '4forward');
disp(D)
```

خروجی:

$$D = \quad -0.500000000745497$$

مقدار واقعی:

$$D = -0.5$$

در این محاسبه خطا از مرتبهٔ 10^{-10} است.

محاسبه چند جمله‌ای درون‌یاب

تابع newton_interpolation چند جمله‌ای درون یاب را به کمک روش نیوتن محاسبه می‌کند.

```
newton_interpolation(x,y,p)
```

در این تابع:
(x, y) نقاطی هستند که به کمک آنها تابع درون‌یابی می‌شود.
P برداری از اعداد است که تابع مقدار چندجمله‌ای درونیاب را در آنها باز می‌گرداند.

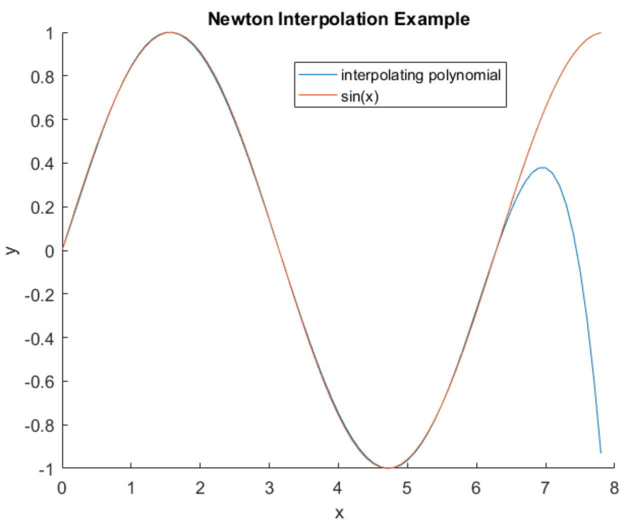
مثال سه: به دست آوردن و رسم چندجمله‌ای درونیاب sin(x) در بازه $[0,2\pi]$ به کمک شش نقطهٔ

[0, pi/4, pi/2, pi, 3*pi/2, 2*pi]

```
%% Example Three : newton_interpolation

t = 0:0.1:2.5*pi;
x1 = [0, pi/4, pi/2, pi, 3*pi/2, 2*pi];
f1 = newton_interpolation(x1, sin(x1), t);
figure
hold on
title('Newton Interpolation Example'); ylabel('y'); xlabel('x');
plot(t,f1);
plot(t, sin(t));
legend('interpolating polynomial','sin(x)');
```

خروجی تابع:



این چندجمله در بازه مورد نظر با دقت بسیار بالایی تابع را تقریب می‌زند ولی همانطور که دیده می‌شود برای برونیابی مناسب نیست.

محاسبه اسپلاین مکعبی طبیعی

تابع newton_interpolation چند جمله‌ای درون یاب را به کمک روش نیوتن محاسبه می‌کند.

```
cubic_spline(x, y, t)
```

در این تابع:

(x, y) نقاطی هستند که به کمک آنها تابع درون‌یابی می‌شود.

P برداری از اعداد است که تابع مقدار اسپلاین در آنها باز می‌گرداند.

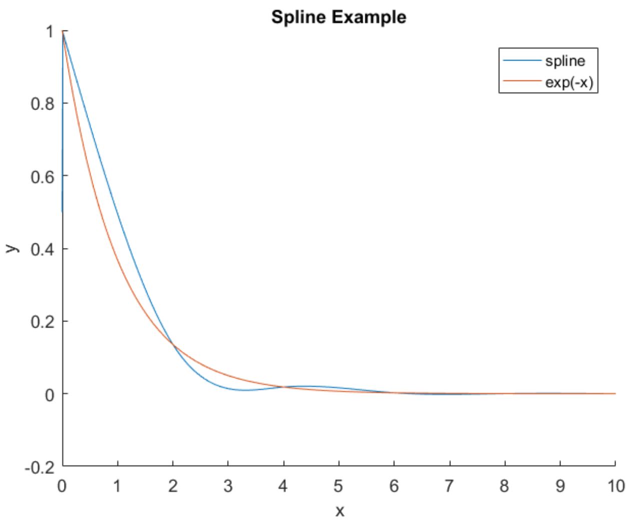
مثال چهار: به دست آوردن و اسپلاین e^{-x} در بازه [0,10] به کمک شش نقطهٔ

[0, 2, 4, 6, 8, 10]

```
%% Example Four: cubic_spline
 clear
t = 0:0.01:10;
x1 = 0:2:10;
y1 = exp(-x1);
f1 = cubic_spline(x1, y1, t);

figure
hold on
title('Spline Example'); ylabel('y'); xlabel('x');
plot(t,f1);
plot(t, exp(-t));
legend('spline','exp(-x)');
```

خروجی تابع:



این چندجمله در بازه مورد نظر با دقت بسیار بالایی تابع را تقریب می‌زند.

حل دستگاه معادلات خطی به روش حذفی گاوس

تابع newton_interpolation چند جمله‌ای درون یاب را به کمک روش نیوتن محاسبه می‌کند.

```
gauss_elimination(A,b)
```

دستور فوق دستگاه ماتریسی $Ax = b$ را حل کرده و x را برمیگرداند. در صورت عدم وجود جواب تابع عبارت `'det(A) = 0'` را چاپ می‌کند.

مثال پنج: حل معادلهٔ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 8 \\ 12 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

```
%% Example Four: gauss_elimination
clear

A = [1 2 3; 4 7 8; 12 0 2];
b = [1; 2; 3];
sol = gauss_elimination(A, b);
```

خروجی تابع:

$$x = \begin{pmatrix} 0.145161290322581 \\ -0.516129032258065 \\ 0.629032258064516 \end{pmatrix}$$

این جواب دقیقا جواب تابع درونی متلب نیز هست.

حل دستگاه معادلات خطی با روش های تکراری ژاکوبی و گاوس-سایدل

تابع newton_interpolation چند جمله‌ای درون یاب را به کمک روش نیوتن محاسبه می‌کند.

```
matiter( A, b, x, N, method )
```

دستور فوق دستگاه ماتریسی $Ay = b$ را حل کرده و y را برمیگرداند. x حدس اولیه ماست.

Method مقادیر زیر را قبول می‌کند:

Method	عملکرد
'jacobi'	حل دستگاه به روش ژاکوبی
'seidel'	حل دستگاه به روش سایدل

مثال شش: حل معادلهٔ

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 4 & 55 & 2 \\ 2 & 10 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

با حدس اولیهٔ صفر، به هر دو روش با صد تکرار.

```
clear
disp('Example Six');
A = [10 1 1; 4 55 2; 2 10 2];
b = [1; 2; 3];
sol1 = matiter(A, b, [0;0;0], 100, 'jacobi');
disp(sol1)

sol2 = matiter(A, b, [0;0;0], 100, 'seidel');
disp(sol2)
```

خروجی تابع برای هر دو روش

$$x = \begin{pmatrix} -0.064164648910412 \\ -0.019370460048426 \\ 1.661016949152542 \end{pmatrix}$$

این جواب دقیقا جواب تابع درونی متلب نیز هست.

به دست آوردن ویژه مقادیر یک ماتریس

تابع eigenval با استفاده از روش توانی بزرگترین مقدار ویژه ماتریس و بردار ویژه متناظر با آن را برمیگرداند.

```
[a,b] = eigenval(A, N)
```

در دستور بالا تابع روش توانی را N بار بر ماتریس A اجرا می‌کند و در خروجی a برابر مقدار ویژه بیشینه و b برابر بردار ویژه متناظر با آن است.

مثال هفت: پیدا کردن مقدار ویژه بیشینهٔ ماتریس زیر

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

```
%% Example Seven: eigenval
A = [7 4 1; 4 4 4; 1 4 7];
[a,b] = eigenval(A, 100);
```

همانطور که انتظار داریم خروجی برابر 12 و $[1,1,1]$ است.

حل معادلات

توابع زیر برای حل معادلات غیرخطی نوشته شده‌اند. به دلیل اینکه برخی از این روش ها تفاوت های اساسی با بقیه دارند، همه روش ها در یک تابع تجمیع نشدند و در عوض در این بخش چندین تابع نوشته شده است.

- روش تنصیف:

تابع bisection معادله را به روش تنصیف با دقت خواسته شده حل می‌کند.

```
bisection(f, a, b, Nmax, error)
```

با کد بالا معادلهٔ $f(x) = 0$ با در نظر رفتن دو نقطه a و b به عنوان نقاط شروع روش تنصیف حل می‌شود.

Nmax بیشترین تعداد تکراری است که می‌خواهیم تابع انجام دهد.

Error اگر تابع به این دقت برسد خروجی را بازگردانده و تکرار را متوقف می‌کند.

مثال هشت: حل معادلهٔ $xsin(x) - 12 = 0$ با دقت 0.01 و حداکثر تکرار ۱۰۰.

```
%% Example Eight: bisection
 clear
bisection(@(x) x*sin(x) - 2 , -227, -225, 100, 0.0001)
```

خروجی تابع 226.2036- است که با دقت داده شده با جواب تابع داخلی متلب یعنی

226.20351276934028495859031358348- همخوانی دارد.

- روش نابجایی:

تابع regulafalsi معادله را به روش نابجایی با دقت خواسته شده حل می‌کند.

```
regulafalsi(f, a, b, Nmax, error)
```

با کد بالا معادلهٔ $f(x) = 0$ با در نظر رفتن دو نقطه a و b به عنوان نقاط شروع روش تنصیف حل می‌شود.

Nmax بیشترین تعداد تکراری است که می‌خواهیم تابع انجام دهد.

Error اگر تابع به این دقت برسد خروجی را بازگردانده و تکرار را متوقف می‌کند.

مثال نه: حل معادلهٔ $x\sin(x) - 12 = 0$ با دقت 0.01 و حداکثر تکرار ۱۰۰.

```
%% Example Nine: regulafalsi
 clear
regulafalsi(@(x) x*sin(x) - 2 , -227, -225, 100, 0.0001)
```

خروجی تابع 226.2035- است که با دقت داده شده با جواب تابع داخلی متلب یعنی

226.20351276934028495859031358348- همخوانی دارد.

- روش نیوتن:

تابع newton معادله را به روش نیوتن با دقت خواسته شده حل می‌کند.

```
newton(f, x0, Nmax, error)
```

با کد بالا معادلهٔ $f(x) = 0$ با در نظر رفتن x0 به عنوان نقاط شروع روش تنصیف حل می‌شود.

Nmax بیشترین تعداد تکراری است که می‌خواهیم تابع انجام دهد.

Error اگر تابع به این دقت برسد خروجی را بازگردانده و تکرار را متوقف می‌کند.

مثال ده: حل معادلهٔ $x\sin(x) - 12 = 0$ با دقت 0.01 و حداکثر تکرار ۱۰۰.

```
%% Example Ten: newton
 clear
newton(@(x) x*sin(x) - 2 , -227, -225, 100, 0.0001)
```

خروجی تابع 226.2035- است که با دقت داده شده با جواب تابع داخلی متلب یعنی

226.20351276934028495859031358348- همخوانی دارد.

- روش وتری:

تابع secant معادله را به روش نیوتن با دقت خواسته شده حل می‌کند.

```
secabt(f, a, b, Nmax, error)
```

با کد بالا معادلهٔ $f(x) = 0$ با در نظر رفتن a و b به عنوان نقاط شروع روش تنصیف حل می‌شود.

Nmax بیشترین تعداد تکراری است که می‌خواهیم تابع انجام دهد.

Error اگر تابع به این دقت برسد خروجی را بازگردانده و تکرار را متوقف می‌کند.

مثال ده: حل معادلهٔ $x\sin(x) - 12 = 0$ با دقت 0.01 و حداکثر تکرار ۱۰۰.

```
%% Example Eleven: Secant
clear
secant(@(x) x.*sin(x) - 2 , -227, -225, 100, 0.0001)
```