Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de movimiento para un medio continuo descrito desde un punto de vista Euleriano son

Continuidad
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

Momentum (Cauchy)
$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f}$$

Para cerrar el problema necesitamos una relación constitutiva.

Ecuación constitutiva para fluido Newtoniano

Para un fluido Newtoniano, buscamos una relación lineal entre los esfuerzos a los que esté sometido un elemento de fluido y la tasa a la cual este sufre deformaciones.

Cuando el fluido está en reposo, los únicos esfuerzos presentes son aquellos debidos a la presión. Luego, los esfuerzos causados exclusivamente por el movimiento vienen dados por la siguiente descomposición

$$\underbrace{\underline{\underline{\sigma}}}_{\text{tensor de esfuerzos}} = \underbrace{-p\underline{\underline{I}}}_{\text{esfuerzos normales debidos a la presión}} + \underbrace{\underline{\underline{\tau}}}_{\text{tensor de esfuerzos deviatórico (causado por el movimiento)}}$$

Recordando que la tasa de deformación debido al movimiento relativo entre partículas de fluido es descrita por

$$\underbrace{\underline{\underline{S}}}_{\text{tensor de tasa de deformación}} = \frac{1}{2}\left[(\underbrace{\nabla \underline{u}}_{\text{tensor gradiente de velocidad}}) + (\nabla \underline{u})^T\right],$$

entonces, sólo necesitamos una relación entre $\underline{\underline{\tau}}$ y $\underline{\underline{S}}$ que son las partes conectadas al movimiento.

Tensores

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}$$

$$\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

(en coordenadas cartesianas)

Sabemos que $\underline{\underline{\tau}}$ no debe cambiar si permutamos o rotamos los ejes de nuestro sistema de coordenadas, es decir, debe ser un tensor simétrico e isótropo.

$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}^T$ $\qquad$ $\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}\,\underline{\underline{R}}$ para cualquier $\underline{\underline{R}}$ tal que $\underline{\underline{R}}^T\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}}$ (rotación)

Dadas estas restricciones, la expresión que buscamos debe ser de la forma

$$\underline{\underline{\tau}} = -\lambda(\nabla\cdot\underline{u})\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{S}}$$

viscosidad dinámica

viscosidad de bulto

El último paso consiste en asumir la hipótesis de Stokes $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, que es una buena aproximación bajo una gran variedad de condiciones.

Reemplazando obtenemos la relación constitutiva para un fluido Newtoniano

$$\underline{\underline{\tau}} = -\frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\underline{u})\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{S}} \implies \underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{I}} - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\underline{u})\underline{\underline{I}} + 2\mu\underline{\underline{S}}$$

Ecuación de Navier-Stokes para flujo compresible

Sustituyendo la relación constitutiva en la ecuación de momentum de Cauchy obtenemos

$$\rho\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}+\rho(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}=-\nabla p+\nabla\cdot\left[\mu\left(\nabla\underline{u}+(\nabla\underline{u})^{T}-\frac{2}{3}(\nabla\cdot\underline{u})\right)\right]+\rho\underline{f}$$

Ecuación de Navier-Stokes para flujo incompresible

Para un flujo incompresible, la ecuación de continuidad toma la forma

$$\nabla\cdot\underline{u}=0,$$

con lo que la ecuación de Navier-Stokes se simplifica a

$$\rho\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}+\rho(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}=-\nabla p+\nabla\cdot\left[\mu\left((\nabla\underline{u})+(\nabla\underline{u})^{T}\right)\right]+\rho\underline{f}.$$

Además, si la viscosidad es constante, la podemos sacar de las derivadas $\Rightarrow \nabla\cdot(\mu(\,))=\mu\nabla\cdot(\,)$. Luego podemos usar la siguiente identidad de los operadores diferenciales

$$\nabla\cdot\left[\nabla\underline{u}+(\nabla\underline{u})^{T}\right]=\nabla^{2}\underline{u}-\nabla(\cancelto{0}{\nabla\cdot\underline{u}})$$

Con lo que obtenemos la versión más utilizada de la ecuación de

Navier-Stokes

$$\underbrace{\rho\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}}_{\text{aceleración local}}+\underbrace{\rho(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}}_{\text{aceleración advectiva}}=\underbrace{-\nabla p}_{\text{gradiente de presión}}+\underbrace{\mu\nabla^{2}\underline{u}}_{\text{esfuerzos viscosos}}+\underbrace{\rho\underline{f}}_{\text{fuerzas de cuerpo}}$$

Ecuación de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas

$$\underline{x} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \quad , \quad \underline{u} = u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k} \quad , \quad \underline{f} = f_x\underline{i} + f_y\underline{j} + f_z\underline{k}$$

Las tres componentes de la ecuación de Navier-Stokes para el caso incompresible con viscosidad constante quedan

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \rho f_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \rho f_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \rho f_z$$

Flujo paralelo

Existen una cantidad muy limitada de casos para los cuales contamos con soluciones analíticas exactas de la ecuación de de Navier-Stokes.

La gran mayoría de estas soluciones se obtienen para casos de flujo paralelo, es decir, escenarios donde las línea de corriente son todas paralelas entre sí y, por lo tanto le el vector velocidad es perpendicular a su gradiente

$$\Rightarrow (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u} = 0 \quad \text{(en todo el campo)}$$

Esto simplifica drásticamente las ecuaciones porque se elimina el término advectivo no lineal, y las ecuaciones quedan de la forma

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \rho \underline{f}.$$ (Ecuación de Stokes)

esta ec. también se usa en el límite $Re \to 0$

Esto ocurre si, por ejemplo $\underline{u}(t,x,y,z) = u(t,y)\,\underline{i}$.
Si examinamos el término advectivo para este caso (vemos solo la componente según x, porque $v = w = 0$)

$$u \cancelto{0}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \cancelto{0}{v} \frac{\partial u}{\partial y} + \cancelto{0}{w} \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Además, el Laplaciano también se simplifica

$$\nabla^2 u = \cancelto{0}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

con lo que el balance de momentum según x queda

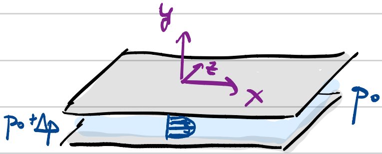
$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho f_x.$$

Esta es una EDP lineal con coeficientes constantes que podemos resolver para encontrar $u(t,y)$ si dp/dx y f_x son especificados y contamos con una condición inicial $u(0,y)$ y dos condiciones de borde en las paredes $y = \pm h$.

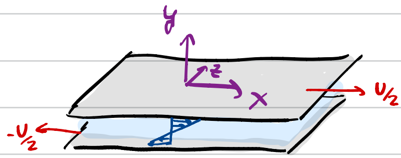
Luego, para flujo permanente obtenemos $\mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial p}{\partial x} - \rho f_x$

Algunos ejemplos canónicos

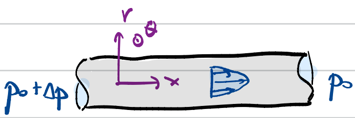
$$\mu \frac{\partial^2 u_\parallel}{\partial^2 x_\perp} = \frac{\partial p}{\partial x_\parallel} - \rho f_\parallel$$



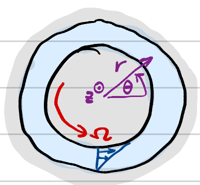
Flujo de Poiseuille
(flujo en un canal plano)



Flujo de Couette
(flujo entre superficies móviles)

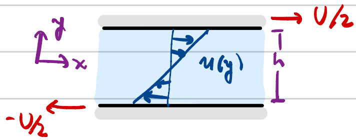


Flujo de Hagen-Poiseuille
(flujo en una tubería)



Flujo de Taylor-Couette
(flujo entre cilíndros concéntricos rotando)

Flujo de Couette



Flujo paralelo y permanente impulsado por esfuerzos de corte $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $f_x = 0$

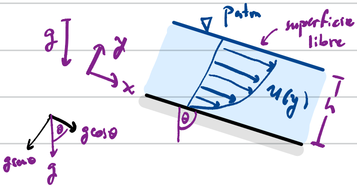
El balance de momentum según x se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = a \Rightarrow u(y) = ay + b$$

La condición de no deslizamiento en las paredes implica $u(y = \pm h/2) = \pm U/2$

Luego, $\frac{ah}{2} + b = \frac{U}{2}$, $-\frac{ah}{2} + b = -\frac{U}{2} \Rightarrow a = U,\ b = 0,\ \therefore\ \boxed{u(y) = Uy}$

Flujo en un canal abierto



Flujo paralelo y permanente impulsado por la gravedad $\Rightarrow f_x = g\cos\theta,\ \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

El balance de momentum según x se reduce a

$$\underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial y}}_{\tau = \mu \frac{du}{dy}} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \underbrace{\rho g \cos\theta}_{K} \Rightarrow \tau(y) = -Ky + a \Rightarrow u(y) = \frac{-K}{\mu}\frac{y^2}{2} + \frac{ay}{\mu} + b$$

En la pared sólida tenemos la condición de no deslizamiento y en la superficie libre impondremos que el esfuerzo de corte es despreciable

Luego, $u(0) = 0 \Rightarrow b = 0, \quad \tau(h) = 0 \Leftrightarrow -Kh + a = 0 \Rightarrow a = Kh$

$$\therefore \boxed{u(y) = \frac{\rho g \cos\theta}{\mu} h^2 \left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2\right)}$$

La conservación de momentum en y se reduce a un balance hidrostático

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g\,\text{sen}\,\theta = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \boxed{p(y) = p_{atm} - \rho g \underbrace{y\,\text{sen}\,\theta}_{\text{altura}}}$$