Cinemática: descripción del movimiento

Punto de vista Euleriano

Describimos el flujo mediante campos en una región del espacio.

Posición $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3 = x_i \underline{e}_i$

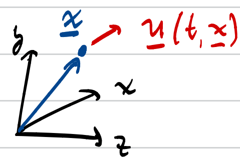
Suma de Einstein

Velocidad $\underline{u}(t, \underline{x}) = (u_1(t, \underline{x}), u_2(t, \underline{x}), u_3(t, \underline{x}))$

$$= u_1(t, \underline{x})\underline{e}_1 + u_2(t, \underline{x})\underline{e}_2 + u_3(t, \underline{x})\underline{e}_3 = u_i(t, \underline{x_i})\underline{e}_i$$

Otras notaciones $\vec{r} = \vec{x} = \underline{x}$, $\vec{V} = \vec{u} = \underline{u}$

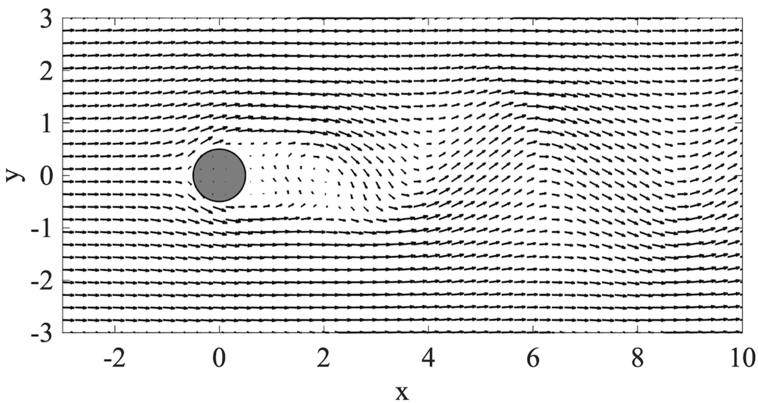
Coordenadas cartesianas



$e_1 = \underline{i}$ $\quad e_2 = \underline{j}$ $\quad e_3 = \underline{k}$

$x_1 = x$ $\quad x_2 = y$ $\quad x_3 = z$ $\quad \Rightarrow \quad \underline{x} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

$u_1 = u_x = u$ $\quad u_2 = u_y = v$ $\quad u_3 = u_z = w$ $\quad \underline{u} = u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k}$

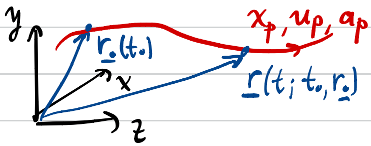


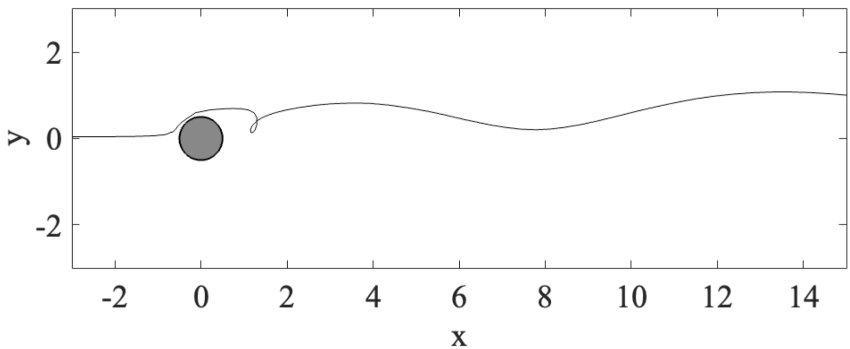
Punto de vista Lagrangiano

Describimos el flujo siguiendo partículas.

$\underline{x}_p(t) = \underline{r}(t; t_0, \underline{r}_0)$ Posición actual de partícula que en t_0 estaba en $\underline{r}_0$.

$\underline{u}_p(t) = \frac{d\underline{r}}{dt}$, $\underline{a}_p(t) = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2}$ Velocidad y aceleración de partícula a lo largo de su trayectoria.





Derivada material y aceleración

Las cantidades del flujo calculadas desde ambos puntos de vista deben ser equivalentes.

Trayectoria $\underline{x} = \underline{x}_p(t) = x_p(t)\underline{i} + y_p(t)\underline{j} + z_p(t)\underline{k}$

Consideremos una propiedad del fluido $\phi(t, \underline{x}) \Longrightarrow \phi_p(t) = \phi(t, \underline{x})$

para $\underline{x}(t)$ sobre la trayectoria

Calculemos la tasa de cambio de ϕ a lo largo de la trayectoria

$$\frac{d\phi_p}{dt} = \frac{d}{dt}\phi(t, \underline{x}(t)) = \frac{d}{dt}\phi(t, x(t), y(t), z(t))$$

Tenemos que aplicar la regla de la cadena

$$\rightarrow \frac{d\phi_p}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\overbrace{\frac{dx}{dt}}^{u} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\overbrace{\frac{dy}{dt}}^{v} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\overbrace{\frac{dw}{dt}}^{w} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\phi \equiv \frac{D\phi}{Dt}$$

Derivada convectiva/sustantiva/material/total: es la tasa de cambio de una propiedad del fluido siguiendo una partícula de fluido

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u\frac{\partial\phi}{\partial x} + v\frac{\partial\phi}{\partial y} + w\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Tasa de cambio local

Tasa de cambio debido al movimiento de partículas de un lugar a otro

Nos referiremos a este transporte debido al movimiento de partículas como advección y reservaremos el término convección para el caso de transporte de calor.

$$\boxed{\text{Operador gradiente} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}\underline{e_i} = \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k}}$$

Para el caso donde $\phi = \underline{u}$ obtenemos una expresión para la aceleración de una partícula desde la perspectiva Euleriana

$$\underline{a_p}(t) = \frac{D\underline{u}}{Dt} = \frac{\partial\underline{u}}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}$$

aceleración local

aceleración advectiva/convectiva

Aceleración en coordenadas cartesianas

$$\underline{a} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \underline{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \underline{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \underline{u}}{\partial z}$$

Separando las componentes $\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

Clasificación de flujos

Flujo permanente/estacionario: $\partial \underline{u}/\partial t = 0$

Flujo impermanente/inestacionario: $\partial \underline{u}/\partial t \neq 0$

Flujo uniforme: $\underline{u}(t, \underline{x}) = \underline{u}(t) \Rightarrow \nabla \underline{u} = 0$

Flujo paralelo: $\underline{u} \perp \nabla \underline{u} \Leftrightarrow (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = 0$

Ejemplo: $\underline{u}(\underline{x}) = u(y)\underline{i} \Rightarrow \nabla u = \frac{\partial u}{\partial y}\underline{j} \quad (\underline{i} \cdot \underline{j} = 0)$

En un flujo permanente y paralelo $\frac{D\underline{u}}{Dt} = 0$