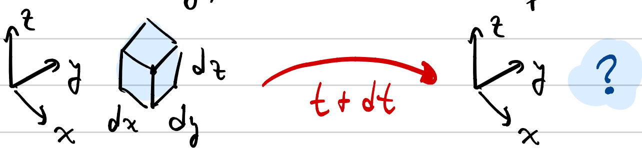
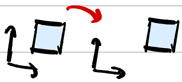
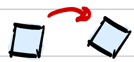
Deformación de un fluido

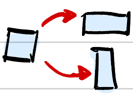
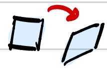
Consideremos un elemento de fluido (incompresible por ahora) con lados dx, dy, dz de tal manera que es un cubo en tiempo t



¿Qué forma tiene el elemento ahora?

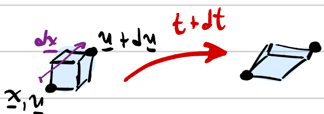
Existen cuatro tipos de movimiento/deformación

Traslación  Rotación 

Deformación lineal  Deformación angular cizalle/corte/shear 

Tensor gradiente de velocidad

Consideremos el movimiento relativo de dos partículas separadas por una distancia infinitesimal $d\underline{x}$.



Si la velocidad de una de las partículas es $\underline{u}(t,\underline{x})$, entonces podemos aproximar la velocidad de la otra usando una expansión en serie de Taylor

$$\underline{u}(t,\underline{x}+d\underline{x}) = \underline{u}(t,\underline{x}) + \nabla\underline{u}\, d\underline{x} + \cancel{O(\|d\underline{x}\|^2)}$$

despreciamos los términos de orden superior

$$\Rightarrow \underline{u}(t,\underline{x}+d\underline{x}) - \underline{u}(t,\underline{x}) = d\underline{u} \approx \nabla\underline{u}\, d\underline{x}$$

el movimiento y deformación de un elemento de fluido son determinados por el gradiente de velocidad.

En coordenadas cartesianas el gradiente de velocidad queda

$$\nabla \underline{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Podemos separar este movimiento relativo en deformación y rotación

$$\nabla \underline{u} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T\right)}_{\underline{\underline{S}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\nabla \underline{u} - (\nabla \underline{u})^T\right)}_{\underline{\underline{\Omega}}}$$

$$\Leftrightarrow \nabla \underline{u} = \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\Omega}} \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{S_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\Omega_{ij}}$$

Tensor de tasa de deformación

Tensor de tasa de rotación

En coordenadas cartesianas

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix}$$

Tensor simétrico

Deformación angular en el plano yz

Deformación lineal en el eje z

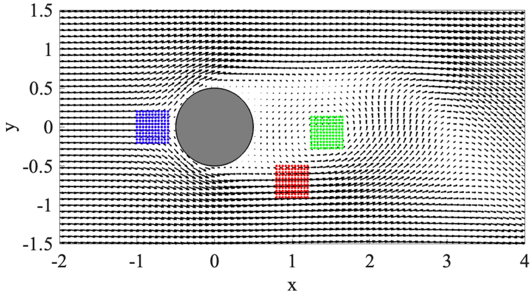
$$\underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{xy} & -\Omega_{xz} \\ \Omega_{xy} & 0 & -\Omega_{yz} \\ \Omega_{xz} & \Omega_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$

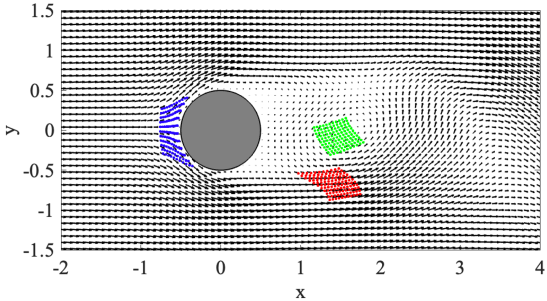
Tensor anti-simétrico

Rotación en el plano yz (eje x)

Ejemplo

t+dt





¿Que entrada domina en los tensores evaluados en el centro de los cuadrados de colores?

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} \\ R_{xy} & R_{yy} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{\Omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{xy} \\ -\Omega_{xy} & 0 \end{bmatrix}$$

Vorticidad

La vorticidad es un campo vectorial que se define como

$$\boxed{\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}}$$

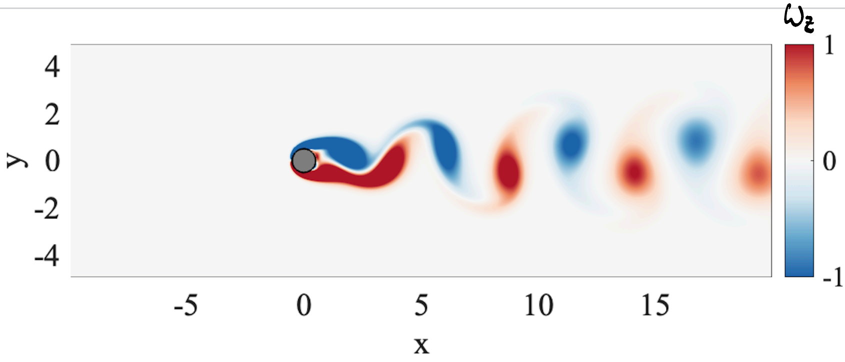
y representa el doble de la velocidad angular local del fluido en cada punto del espacio.

En coordenadas cartesianas $\underline{\omega} = \omega_x \underline{i} + \omega_y \underline{j} + \omega_z \underline{k}$

$$\omega_x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 2\Omega_{yz} \qquad \omega_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 2\Omega_{xz} \qquad \omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\Omega_{xy}$$

Importante: Vorticidad $\not\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$ Vórtices

Un vórtice es un movimiento de una masa de fluido al rededor de un eje



Visualización de vórtices

Existen múltiples técnicas para identificar vórtices en datos de campos de velocidades de manera automática. Uno de los métodos más utilizados es el criterio λ_2.

J. Fluid Mech. (1995), *vol.* 285, *pp.* 69–94 69

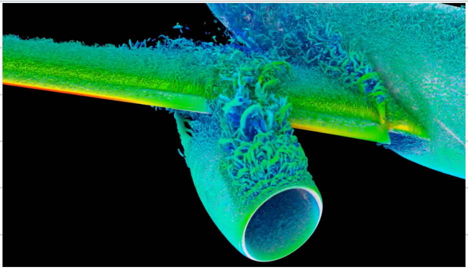
On the identification of a vortex

By JINHEE JEONG AND FAZLE HUSSAIN

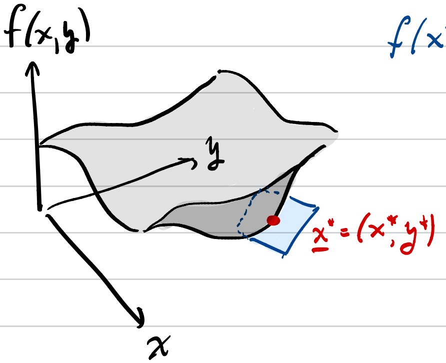
Department of Mechanical Engineering, University of Houston, Houston, TX 77204-4792, USA

(Received 6 December 1993 and in revised form 4 July 1994)

Consiste en calcular los valores propios de $\underline{\underline{S}}^2+\underline{\underline{\Omega}}^2$, λ_1, λ_2 y λ_3 (ordenados tal que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$), e identificar las regiones donde $\lambda_2 < 0$ como pertenecientes a un vórtice.



Serie de Taylor multivariable



$$f(x^*+dx, y^*+dy) \approx f(x^*, y^*) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*,y^*} dx + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x^*,y^*} dy}$$

$$\begin{bmatrix} \left.\partial f/\partial x\right|_{x^*,y^*} & \left.\partial f/\partial y\right|_{x^*,y^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow f(\underline{x}^* + \underline{dx}) \approx f(\underline{x}^*) + \nabla f\Big|_{\underline{x}^*}^{T} \underline{dx}$$