Conservación de masa

Para un volumen de control, la ecuación de continuidad en su forma integral es

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \, dV}_{\text{tasa de cambio de la masa acumulada en el VC}} + \underbrace{\int_{SC} \rho \underline{u}_{rel} \cdot \underline{n} \, dA}_{\text{flujo neto de masa que entra a través de la SC}} = 0$$

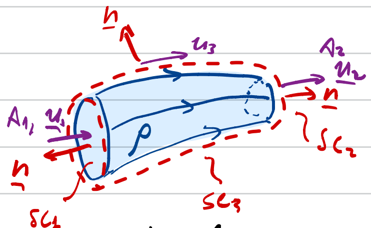
- La primera integral es cero si estamos en régimen permanente.
- La segunda integral puede separarse en una suma de integrales sobre las caras que componen la SC.
- Si por algunas caras de la SC entra fluido ($\underline{u}_{rel} \cdot \underline{n} < 0$) y por otras sale fluido ($\underline{u}_{rel} \cdot \underline{n} > 0$) podemos interpretar la ecuación como

Lo que se acumula es igual a lo que entra menos lo que sale.

A continuación se muestran algunos ejemplos con diferentes niveles de complejidad.

Tubo de corriente

- Tubo formado por líneas de corriente
- Regimen permanente
- Densidad constante ρ
- Volumen de control fijo
- Velocidad uniforme en SC_1 y SC_2



no hay flujo a través de las líneas de corriente ($\underline{u}_3 \cdot \underline{n} = 0$)

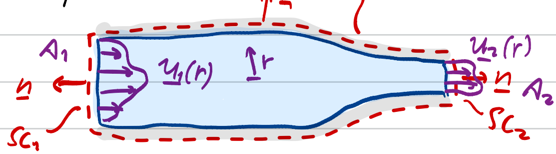
$$\frac{d}{dt}\cancelto{0}{\int_{VC}\rho\, dV} + \int_{SC_1}\rho\, \overbrace{\underline{u}_1\cdot\underline{n}}^{-u_1}\, dA + \int_{SC_2}\rho\, \overbrace{\underline{u}_2\cdot\underline{n}}^{u_2}\, dA + \cancelto{0}{\int_{SC_3}\rho\, \underline{u}_3\cdot\underline{n}\, dA} = 0$$

$$\Rightarrow \rho u_1 \overbrace{\int_{SC_1} dA}^{A_1} = \rho u_2 \overbrace{\int_{SC_2} dA}^{A_2} \Rightarrow \boxed{u_1 A_1 = u_2 A_2} \equiv Q \text{ (flujo volumétrico)}$$

∴ El flujo volumétrico es constante para flujo permanente incompresible en un tubo de corriente. Esta relación fue derivada por Leonardo da Vinci en 1500.

Flujo no uniforme en una tubería

- Flujo no uniforme en entrada y salida
- Sin penetración ni deslizamiento en las paredes
- Flujo permanente
- Densidad constante ρ
- Volumen de control fijo



Este caso es muy similar al anterior

$$\frac{d}{dt}\cancelto{0}{\int_{VC}\rho\, dV} + \int_{SC_1}\rho\, \overbrace{\underline{u}_1\cdot\underline{n}}^{-u_1}\, dA + \int_{SC_2}\rho\, \overbrace{\underline{u}_2\cdot\underline{n}}^{u_2}\, dA + \int_{SC_3}\rho\, \cancelto{0}{\underline{u}_3}\cdot\underline{n}\, dA = 0$$

$$\Rightarrow \int_{SC_1} u_1\, dA_1 = \int_{SC_2} u_2\, dA_2 \equiv Q \text{ conservación de flujo volumétrico}$$

Si usamos las velocidades promedio en las secciones respectivas

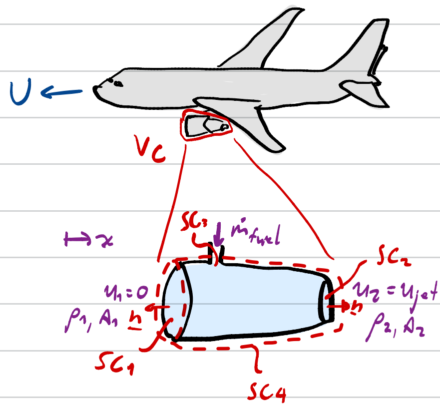
$$\overline{u_i} = \frac{1}{A_i}\int_{SC_i} u_i\, dA, \quad i\in\{1,2\} \Rightarrow \boxed{\overline{u_1} A_1 = \overline{u_2} A_2} = Q$$

si la tubería no cambia de sección $\Rightarrow \overline{u_1} = \overline{u_2}$

Volumen de control móvil

Dado $U, \rho_1, A_1, \rho_2, A_2, \dot{m}_{fuel}$, encontrar u_{jet}

- Régimen permanente
- VC se mueve a velocidad constante $\underline{U} = -U\underline{i}$
- Velocidades y densidades uniformes en SC



Necesitamos velocidades relativas

$$\underline{u}_{rel} = \underline{u} - \underline{U}$$

Solo tenemos componentes en el eje x

$$u_{rel_1} = \overbrace{u_1}^{0} - (-U) \Rightarrow u_{rel_1} = U \,, \quad u_{rel_2} = \overbrace{u_2}^{u_{jet}} - (-U) \Rightarrow u_{rel_2} = u_{jet} + U$$

Aplicamos el TTR

$$\cancelto{0}{\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \, dV} + \int_{SC_1} \rho_1 (\underline{u}_{rel_1} \cdot \underline{n}) \, dA + \int_{SC_2} \rho_2 (\underline{u}_{rel_2} \cdot \underline{n}) \, dA + \overbrace{\int_{SC_3} \rho_3 (\underline{u}_{rel_3} \cdot \underline{n}) \, dA}^{-\dot{m}_{fuel}} + \cancelto{0}{\int_{SC_4} \rho_4 (\underline{u}_{rel_4} \cdot \underline{n}) \, dA} = 0$$

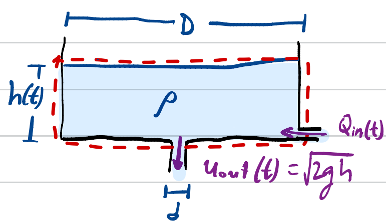
$$\Rightarrow -\int_{SC_1} \rho_1 U \, dA + \int_{SC_2} \rho_2 (u_{jet} + U) \, dA - \dot{m}_{fuel} = 0$$

$$\Rightarrow -\rho_1 U A_1 + \rho_2 (u_{jet} + U) A_2 - \dot{m}_{fuel} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{jet} = \frac{\dot{m}_{fuel}}{\rho_2 A_2} + U \left(\frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2} - 1 \right)$$

Volumen de control deformable

Encontrar $h(t)$ dado $h(0), d, D, Q_{in}(t)$

- Flujo impermanente
- VC deformable
- Densidad constante ρ
- Asumimos $u_{out} = \sqrt{2gh}$, esto viene de la conservación de momentum con una serie de supuestos



Aplicamos el TTR

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{Vc}\rho\, dV}_{\rho \frac{d}{dt}V(t)=\rho\frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt}} + \underbrace{\int_{SC_{in}}\rho(\underline{u}_{in}\cdot\underline{n})\,dA}_{-\rho Q_{in}} + \underbrace{\int_{SC_{out}}\rho(\underline{u}_{out}\cdot\underline{n})\,dA}_{\rho\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh}} = 0$$

$$\Rightarrow \rho\frac{\pi D^2}{4}\frac{dh}{dt} - \rho Q_{in} + \rho\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gh} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh} + \frac{Q_{in}(t)}{\pi D^2/4}}$$

EDO no lineal inhomogénea para $h(t)$

Para Q_{in} constante, $\frac{dh}{dt}\to 0$ cuando $t\to\infty$ y se llega a un equilibrio (régimen permanente)

$$h_\infty = \frac{8Q_{in}^2}{g\pi^2 d^4}$$

obviamente, si $Q_{in}=0 \Rightarrow h\to 0$ el tanque se vacía.