Análisis dimensional y semejanza

Semejanza geométrica / cinemática / dinámica

- Al universo no le importa nuestro sistema de unidades.

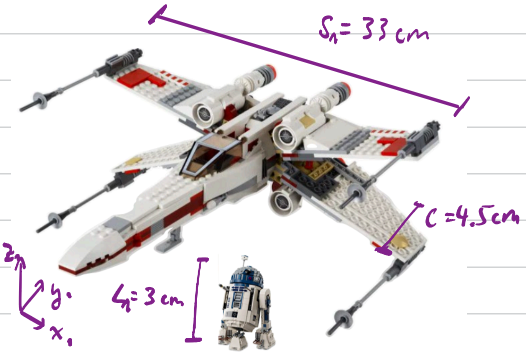
- No tiene sentido referirse a cantidades físicas como "grandes" o "pequeñas", a menos que se especifique en relación a qué.

- El "tamaño" de una cantidad física debe definirse en relación a otra cantidad física con las mismas dimensiones.

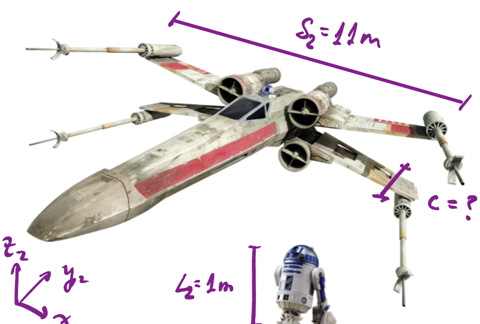
Semejanza geométrica

- Dos sistemas son geométricamente semejantes si, frente a un cambio de unidades, se ven iguales.

Modelo (Lego)



Prototipo (Película)



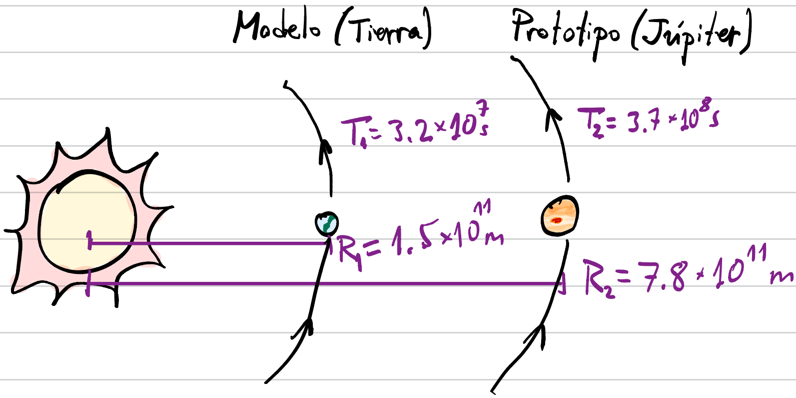
- Si definimos L como nuestra escala de longitud característica, entonces todas las longitudes en ambos X-Wing son iguales medidas en unidades de R2-D2.

$\Rightarrow$ longitudes adimensionales $s^* = \frac{s}{L}$, $c^* = \frac{c}{L}$, $\vec{x}^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/L \\ y/L \\ z/L \end{pmatrix} = \frac{\vec{x}}{L}$

son iguales entre el modelo y el prototipo (si son semejantes).

Semejanza cinemática

- Dos sistemas son cinemáticamente semejantes si, frente a un cambio de unidades, se ven y se mueven igual.



- Necesitamos una escala de longitud y una de tiempo. Usamos las respectivas distancias al sol R y los periodos orbitales T (año) como escalas características.

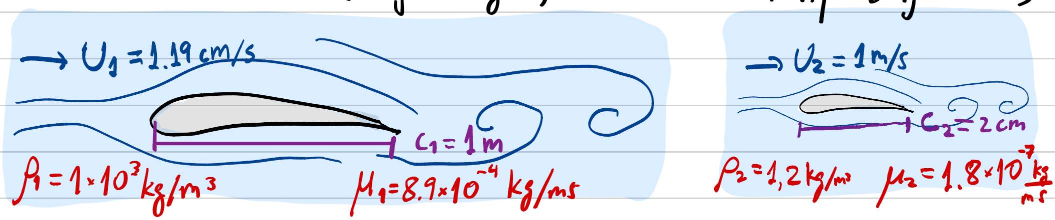
$\Rightarrow$ longitudes y tiempos adimensionales $t^* = \frac{t}{T}$ y $\vec{x}^* = \frac{\vec{x}}{R}$

son equivalentes entre modelo y prototipo (si son semejantes).

Semejanza dinámica

- Dos sistemas son dinámicamente semejantes si, frente a un cambio de unidades, se ven, se mueven y se sienten igual. (mismas fuerzas)
- Para tener semejanza dinámica entre un modelo y un prototipo, necesitamos incorporar una escala característica de masa o de fuerza (causa del movimiento).

Modelo (flujo de agua) Prototipo (flujo de aire)



El flujo, y su efecto sobre el perfil alar, dependen de la velocidad del fluido lejos del perfil U, del tamaño del perfil c, y de la densidad y viscosidad dinámica del fluido ρ y μ, respectivamente.

- Definimos las siguientes escalas características

longitud c, tiempo c/U, masa ρc^3

y adimensionalizamos $\vec{x}^* = \dfrac{\vec{x}}{c}$, $t^* = \dfrac{tc}{U}$, $m^* = \dfrac{m}{\rho c^3}$

$\Rightarrow$ todas las cantidades físicas en ambos sistemas son iguales en estas unidades (si son semejantes).

• La viscosidad es la única variable que no aparece directamente en las escalas que escogimos. Si la adimensionalizamos obtenemos.

$$\mu^* = \frac{\mu}{(\rho c^{\cancel{3}})} (\cancel{c})(\cancel{c}/U) = \frac{\mu}{\rho U c} \equiv \frac{1}{Re}$$

Número de Reynolds

• En este ejemplo, si ambos flujos tienen el mismo Re, entonces son dinámicamente similares y, por lo tanto, se ven iguales, evolucionan a la misma tasa, y generan las mismas fuerzas (todo en cantidades adimensionales).

• No importan los valores de U, c, μ y ρ por si solos, sólo importa el valor de su agrupación en $Re = \rho U c/\mu$ para cambiar el flujo.

$\Rightarrow$ Reducción drástica en la cantidad de parámetros que determinan el problema.

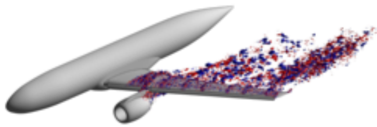
$\Longleftrightarrow$ No hay tantos flujos diferentes como podríamos haber pensado en un comienzo.

El concepto de semejanza es sumamente poderoso y se explota rutinariamente en simulaciones numéricas y experimentos de laboratorio.

Ejemplo: NASA Common Research Model

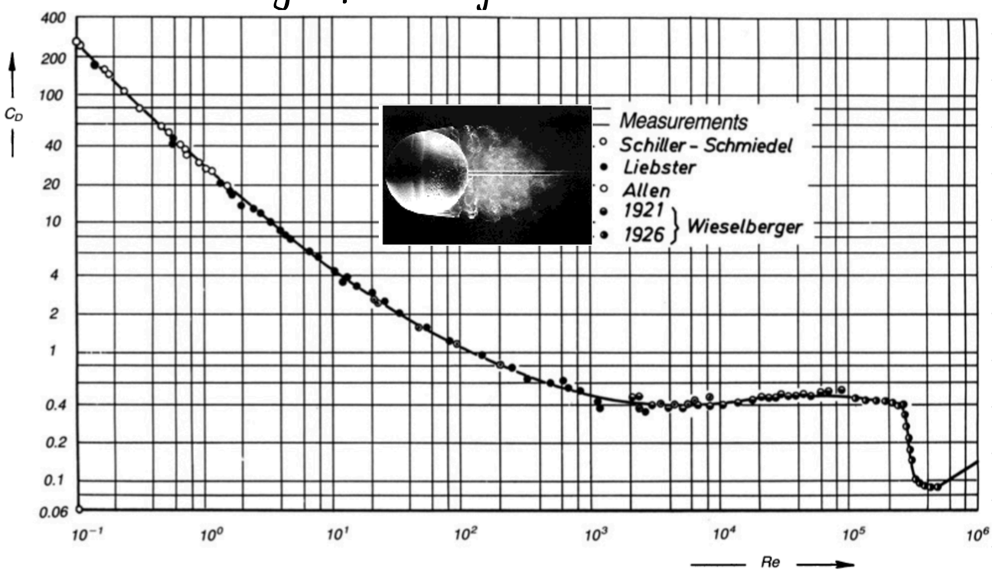
Modelo experimental

Modelo computacional



Prototipo

Ejemplo: Flujo sobre una esfera



¡Valores del coeficiente de arrastre obtenidos a partir de experimentos y simulaciones con modelos de distintos tamaños, fluidos diferentes y medidos a otras velocidades colapsan sobre una sola curva!

Análisis dimensional

- El análisis dimensional consiste en un procedimiento para identificar los números (o grupos) adimensionales relevantes en un sistema.

- Dada una cantidad de interes v_1 en un sistema, y todas las cantidades físicas que influyen sobre esta $\{v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, asumimos que existe una relación de la forma

$$\underset{\text{cantidad de interés}}{v_1} = f(\underbrace{v_2, v_3, \ldots, v_n}_{\text{parámetros del problema}}), \quad \text{por ejemplo} \quad \underset{\text{fuerza de sustentación en un perfil alar}}{F_L} = f(\rho, \mu, U, c)$$

- Buscamos una expresión más concisa que aproveche el concepto de semejanza para reducir la cantidad de parámetros mediante una adimensionalización adecuada

$$\underset{\text{cantidad de interés adimensional}}{\Pi_1} = f(\underbrace{\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_m}_{\text{parámetros adimensionales}}), \text{ con } m < n, \quad \text{por ejemplo} \quad \underset{\text{coeficiente de sustentación}}{C_L} = f(Re)$$

¿Cómo pasamos de $\{v_1, \ldots, v_n\} \rightarrow \{\Pi_1, \ldots, \Pi_m\}$?

¿Cuántos grupos adimensionales buscamos?

- Para esto aprovechamos la información de las dimensiones de las cantidades físicas.

Teorema Π de Buckingham

- Si el conjunto de n variables $\{v_1, \dots, v_n\}$ involucra r dimensiones básicas, entonces, existen $m = n - r$ grupos adimensionales.

- En sistemas mecánicos (sin transferencia de calor) usualmente tenemos $r = 3$ dimensiones básicas: masa M, longitud L y tiempo T.

- Las dimensiones de cualquier variable pueden expresarse en término de estas dimensiones básicas

$$v_j \rightarrow M^{d_{1j}} L^{d_{2j}} T^{d_{3j}}, \quad \text{y en el ejemplo } F_L \rightarrow M^1 L^1 T^{-2}$$

- Cuando adimensionalizamos una variable v_j, multiplicamos potencias de otras variables buscando un resultado con dimensiones consistentes.

$$v_1^{x_1} v_2^{x_2} v_3^{x_3} \longrightarrow M^{(d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3)} L^{(d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + d_{23}x_3)} T^{(d_{31}x_1 + d_{32}x_2 + d_{33}x_3)} \stackrel{!}{=} M^{b_1} L^{b_2} T^{b_3}$$

d_{ij} y b_i son conocidos, buscamos x_j ~ potencias de vars. de adim.

exponentes de vars. escogidas para adimensionalizar

exponentes de variable adimensionalizada

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{b}$$

Sistema de ecuaciones lineales que podemos resolver a mano o en el computador

```
>> x = D\b;
```

- La matriz D es invertible cuando las dimensiones de las variables involucradas son linealmente independientes.

En el ejemplo anterior

$$
\begin{array}{ccc} c & U & \rho \end{array}
\qquad\qquad F_L \qquad\qquad \mu
$$

$$
D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \qquad \Pi_1 = \frac{F_L}{\rho c^2 U^2} = C_L, \qquad \Pi_2 = \frac{\mu}{\rho c U} = \frac{1}{Re}
$$

Entonces $F_L = f(\rho, \mu, U, c) \longrightarrow \Pi_1 = f(\Pi_2) \Leftrightarrow C_L = f(Re)$.

Pasos para realizar análisis dimensional

1) Identificar n variables relevantes para el problema.

2) Calcular exponentes de las r dimensiones de cada variable.

3) Escoger r variables (con dimensiones independientes) como base para adimensionalizar y construir la matriz D con sus exponentes.

4) Construir un vector b_j con los exponentes de cada una de las $m = n - r$ variables restantes.

5) Calcular los m vectores de potencias $x_j = D^{-1} b_j$

6) Componer los m grupos adimensionales $\tilde{\Pi}_j$

Comentarios

- El paso 1) requiere intuición física acerca del problema. Este es el paso más importante.

- El paso 3) es equivalente a definir las escalas características del problema.

Ejemplos en matlab