Flujo invíscido

La viscosidad solo es cercana a cero $\mu \simeq 0$ para algunos fluidos exóticos, como helio criogénico. Sin embargo, en ocasiones los fenómenos en un flujo pueden comportarse de manera inviscida.

Es decir, es posible tener un **flujo inviscido de fluido viscoso.**

Para discernir estos escenarios usamos el

Número de Reynolds

densidad

velocidad característica

longitud característica

$$\boxed{Re = \rho \frac{UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu}}$$

viscosidad dinámica

viscosidad cinemática

Este número adimensional cuantifica la importancia de los efectos viscosos relativo a los efectos inerciales y emerge al adimensionalizar la ec. de N-S.

Para adimensionalizar la ecuación, necesitamos una densidad, longitud y velocidad características ρ, L y U, respectivamente. Luego definimos las cantidades adimensionales $()^*$

$$t^* = tU/L, \quad \underline{x}^* = \underline{x}/L, \quad \underline{u}^* = \underline{u}/U, \quad p^* = P/\rho U^2, \quad \underline{f}^* = \underline{f}/LU^2, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\rho UL} = \frac{1}{Re}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{L}{U}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^*} = L\frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla^* = L\nabla, \quad \nabla^{2*} = L^2\nabla^2$$

Una vez reemplazadas estas variables y operadores en la ec. de N-S vamos a dejar de usar $()^*$ por simplicidad de notación.

Con un poco de algebra y paciencia podemos obtener la ecuación de Navier-Stokes adimensional

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = -\nabla p + \underbrace{\frac{1}{Re}\nabla^2 \underline{u}}_{\text{esfuerzos viscosos adimensionales}} + \underline{f}$$

Ahora es fácil ver que, podemos despreciar los esfuerzos viscosos si

$$\underset{\text{(fluido invíscido)}}{\mu \longrightarrow 0} \quad \text{ó si} \quad \underset{\text{(flujo invíscido)}}{Re \longrightarrow \infty}$$

Ecuación de Euler

En cualquiera de estos dos escenarios el efecto es el mismo — podemos eliminar el término asociado a los esfuerzos viscosos, con lo que obtenemos

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u}\right) = -\nabla p + \rho \underline{f}$$

Acá volvimos a adoptar variables dimensionales. Esta ecuación gobierna el balance de momentum para un flujo invíscido. Esta es válida incluso si el flujo es compresible.

Ecuación de Bernoulli

Tomamos como punto de partida la ecuación de Euler y usamos la siguiente identidad

$$(\underline{u} \cdot \nabla)\underline{u} = \nabla\left(\tfrac{1}{2}|\underline{u}|^2\right) - \underline{u} \times \underbrace{(\nabla \times \underline{u})}_{\underline{\omega}}.$$

Reemplazando obtenemos

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{1}{2}|\underline{u}|^2\right)-\underline{u}\times\underline{\omega}\right)=-\nabla p+\rho \underline{f}$$

Si la fuerza de cuerpo es $\underline{f}=-g\underline{k}=-\nabla(gz)$, y el flujo es incompresible $\Rightarrow \frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla(p/\rho)$, podemos reunir todos los gradientes

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{u}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{1}{2}|\underline{u}|^2+\frac{p}{\rho}+gz\right)=\underline{u}\times\underline{\omega} \quad \star$$

Este todavía es la ecuación de Euler, sólo agregamos el supuesto de incompresibilidad.

El término en el lado derecho es cero en dos escenarios

1. Si nos movemos a lo largo de una línea de corriente
2. Si el flujo es irrotacional $\Leftrightarrow \underline{\omega}=\nabla\times\underline{u}=0$

En el primer caso si hacemos el producto punto de $\star$ con un vector unitario que apunte en la dirección de $\underline{u}$: $\underline{s}=\underline{u}/|\underline{u}|$

Tenemos que $(\underbrace{\underline{u}\times\underline{\omega}}_{\perp \underline{u}})\cdot\underline{s}=0$, $\underline{u}\cdot\underline{s}=\underline{u}\cdot\frac{\underline{u}}{|\underline{u}|}=\frac{|\underline{u}|^{\cancel{2}}}{\cancel{|\underline{u}|}}=|\underline{u}|$, $\nabla()\cdot\underline{s}=d()$ (diferencial en la dir de $\underline{s}$)

$$\Rightarrow \frac{\partial|\underline{u}|}{\partial t}+d\left(\frac{1}{2}|\underline{u}|^2+\frac{p}{\rho}+gz\right)=0$$ (a lo largo de una línea de corriente)

Luego, en régimen permanente obtenemos que

$$d\left(\frac{1}{2}|\underline{u}|^2+\frac{p}{\rho}+gz\right)=0$$

Finalmente, si integramos entre dos puntos a lo largo de una línea de corriente

$$\int_1^2 d() = ()|_2 - ()|_1 \Rightarrow ()|_2 = ()|_1$$

Como los límites de integración son completamente arbitrarios, esto se debe cumplir para cualquier par de puntos sobre la misma línea de corriente.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}|\underline{u}|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = cte}$$ Ecuación de Bernoulli

Esta es válida para puntos sobre la misma línea de corriente en un flujo permanente, inviscido e incompresible. El valor de la constante constante será distinto entre líneas de corriente.

En el segundo caso, el lado derecho de ☆ es directamente cero por definición. Además, veremos más adelante que, si el flujo es irrotacional, la velocidad se puede escribir como

$$\nabla \times \underline{u} = 0 \Longrightarrow \underline{u} = \nabla \phi$$

(flujo irrotacional) potencial de velocidad

Con lo que $\partial \underline{u}/\partial t = \partial(\nabla\phi)/\partial t$ y lo podemos agrupar con los otros gradientes en ☆ para obtener

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\underline{u}|^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

Si el gradiente de un campo es cero para cualquier $\underline{x}$, entonces el campo debe ser constante sobre todo el espacio

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\underline{u}|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = cte$$ Ecuación de Bernoulli

Esta es válida sobre todo el espacio para un flujo irrotacional e incompresible.

Si el flujo es permanente, obtenemos la misma expresión que para el caso anterior, pero ahora es válida entre distintas líneas de corriente.

Nota sobre flujo irrotacional

En un flujo irrotacional, el término de los esfuerzos viscosos desaparece idénticamente. Luego, el flujo se comportará de manera invíscida sin importar cuál sea su viscosidad.

irrotacional $\Rightarrow$ invíscido (la irrotacionalidad es mucho más restrictiva)

Un flujo irrotacional e incompresible se conoce como un flujo potencial. En este caso tenemos

identidad del Laplaciano vectorial

$$\nabla^2 \underline{u} = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \underline{u}}_{\substack{=0 \\ \text{incompresibilidad}}}) - \nabla \times (\underbrace{\nabla \times \underline{u}}_{\substack{=0 \\ \text{irrotacionalidad}}}) \Rightarrow \underline{\underline{\tau}} = \mu \nabla^2 \underline{u} = 0$$

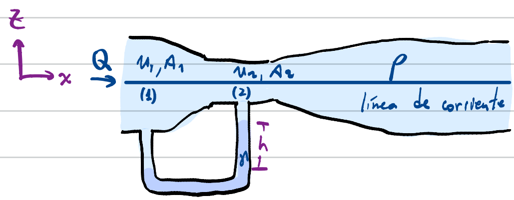
Ejemplos de Bernoulli en una línea de corriente

En ocasiones el requerimiento de flujo irrotacional resulta demasiado restrictivo. Sin embargo, podemos usar la ec. de Bernoulli que es válida a lo largo de una línea de corriente.

Esta ecuación es probablemente la más usada en aplicaciones de ingeniería y, sin duda alguna, la más abusada.

Acá se desarrollan algunos ejemplos para mostrar como se usa correctamente.

Tubo de Venturi



Se usa una medición de diferencia de presión en un cambio de sección para estimar el caudal Q en un flujo incompresible

Haciendo un balance global de masa (aproximación) tenemos que

$$Q = u_1 A_1 = u_2 A_2 \Rightarrow u_2 = \frac{Q}{A_2}, \quad u_1 = \frac{Q}{A_1}$$

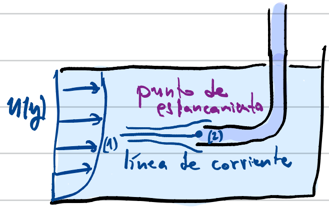
Usando la ec. de Bernoulli a lo largo de la línea de corriente indicada

$$\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{p_1}{\rho} + \cancel{g z_1} = \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{p_2}{\rho} + \cancel{g z_2} \Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2}$$

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) \Rightarrow \boxed{Q = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{A_2^2 - A_1^2}}}$$

Asumimos que la presión no cambia en la sección y $p_2 - p_1$ es la lectura del manómetro.

Tubo de Pitot



Este dispositivo permite medir presión dinámica y, si lo combinamos con una medición de la presión estática, podemos estimar la velocidad local.

Escogemos la línea de corriente que termina en el punto de estancamiento para aplicar la ec. de Bernoulli.

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g\cancel{z_1} = \frac{\overset{u_2=0}{\cancel{u_2^2}}}{\cancel{2}} + \frac{p_2}{\rho} + \overset{(z_2=z_1)}{\cancel{g z_2}} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\frac{u_1^2}{2}}_{\text{presión dinámica}} + \frac{p_1}{\rho}}_{\text{presión total}} = \underbrace{\frac{p_2}{\rho}}_{\text{presión estática}}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}}}$$

Ecuaciones de movimiento en mecánica de fluidos

Cauchy

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}\right) = \nabla\cdot\underline{\underline{T}} + \rho\underline{f}$$

$\downarrow$ fluido Newtoniano

Navier-Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\left[\mu\left((\nabla\underline{u}) + (\nabla\underline{u})^T - \frac{2}{3}(\nabla\cdot\underline{u})\underline{\underline{I}}\right)\right] + \rho\underline{f}$$

$\downarrow$ incompresible $\nabla\cdot\underline{u} = 0$

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\left[\mu\left((\nabla\underline{u}) + (\nabla\underline{u})^T\right)\right] + \rho\underline{f}$$

$\downarrow$ viscosidad constante $\nabla\mu = 0$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\underline{u} + \rho\underline{f}}$$

$\downarrow$ invíscido $\mu \to 0$ / $Re \to \infty$

Euler

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}\right) = -\nabla p + \rho\underline{f}$$

$\downarrow$ permanente $\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = 0$ + $\underline{f} = -g\nabla z$ + regla del producto

$$\nabla\left(\frac{1}{2}|\underline{u}|^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) = -\underline{u}\times(\nabla\times\underline{u})$$

irrotacional $\nabla\times\underline{u} = 0$ ó sobre una línea de corriente

Bernoulli

$$\boxed{\frac{1}{2}|\underline{u}|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = cte}$$