Código NS2D

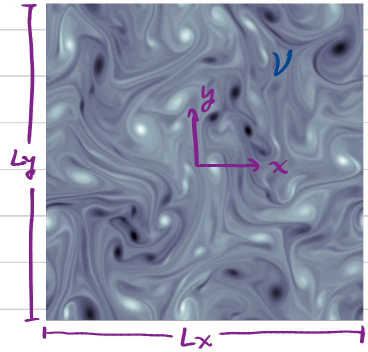
Problema continuo

Este código resuelve la ecuación de Navier-Stokes incompresible en un dominio doblemente periódico en 2D usando la formulación de vorticidad-función corriente.

$$\nabla^2 \psi = \omega,$$

$$\underline{u} = -R\nabla\psi,$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(\underline{u}\cdot\nabla)\omega + \nu\nabla^2\omega.$$



Las condiciones de borde e inicial son

$$\omega(0,x,y) = \omega_0(x,y), \quad \omega(t,-L_x/2,y) = \omega(t,L_x/2,y), \quad \omega(t,x,-L_y/2) = \omega(t,x,L_y/2).$$

Representación espectral

Como las funciones son periódicas en el espacio, las podemos expresar como en términos de una serie de Fourier

$$\omega(t,x,y) = \sum_{n_x=-\infty}^{\infty}\sum_{n_y=-\infty}^{\infty}\left(\hat{\omega}(t,k_x,k_y)\, e^{i\left(\frac{2\pi}{L_x}n_x + \frac{2\pi}{L_y}n_y\right)} + c.c.\right),$$

donde $\hat{\omega}(t,k_x,k_y)$ es el coeficiente de Fourier para los números de onda (frecuencia espacial) $k_x = 2\pi n_x/L_x$, $k_y = 2\pi n_y/L_y$.

En el dominio de Fourier, las derivadas espaciales se transforman en multiplicaciones

$$\frac{\partial}{\partial x}() \rightarrow ik_x(), \quad \frac{\partial}{\partial y}() \rightarrow ik_y(), \quad \nabla^2() \rightarrow -\underbrace{(k_x^2+k_y^2)}_{K^2}()$$

Luego, en el dominio de Fourier, las ecuaciones quedan

$$-K^2\hat{\psi} = \hat{\omega}, \quad \hat{u} = ik_y\hat{\psi}, \quad \hat{v} = -ik_x\hat{\psi}$$

$$\frac{\partial\hat{\omega}}{\partial t} = -\widehat{(\underline{u}\cdot\nabla)\omega} + \nu K^2\hat{\omega}$$

debemos calcular el término advectivo en espacio físico y luego transformar al dominio de Fourier.

Para aproximar la solución a este problema continuo, truncamos la serie de Fourier para lidiar con una cantidad finita de números de onda. Esto es equivalente a discretizar el espacio físico.

Luego escribimos una función que, dado $\hat{\omega}$, nos entregue $\partial\hat{\omega}/\partial t$ para integrar en el tiempo usando, por ej. ode45, que usa un método de Runge-Kutta adaptativo de orden 4 y 5.

Pseudocódigo NS2D

input: $\hat{\omega}$, output: $\partial\hat{\omega}/\partial t$

1. $\hat{\psi} \leftarrow -\hat{\omega}/K^2$ (función corriente, cuidado con $K=0$)
2. $\hat{u} \leftarrow ik_y\hat{\psi}$, $\hat{v} \leftarrow -ik_x\psi$ (velocidades en espacio espectral)
3. $u \leftarrow \mathcal{F}^{-1}(\hat{u})$, $v \leftarrow \mathcal{F}^{-1}(\hat{v})$, (velocidades en espacio físico)
4. $\partial\omega/\partial x \leftarrow \mathcal{F}^{-1}(ik_x\hat{\omega})$, $\partial\omega/\partial y \leftarrow \mathcal{F}^{-1}(ik_y\hat{\omega})$ (grad. de vort. en espacio físico)
5. $\widehat{adv} \leftarrow \mathcal{F}(u\,\partial\omega/\partial x + v\,\partial\omega/\partial y)$ * (término advectivo en espacio espectral)
6. $\partial\hat{\omega}/\partial t \leftarrow -\widehat{adv} + \nu K^2\hat{\omega}$ (lado derecho de la ec. de vorticidad)

* El término no lineal introduce números de onda fuera de nuestra discretización. Para evitar los problemas que esto ocasione necesitamos realizar un tratamiento especial de dealiasing.

Ecuación de transporte de vorticidad

Consideremos la ecuación de Navier-Stokes incompresible como punto de partida

$$\underbrace{\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}}_{(2)} = \underbrace{-\frac{\nabla p}{\rho}}_{(3)} + \underbrace{\nu\nabla^2\underline{u}}_{(4)} \, . \qquad (N\text{-}S)$$

Para derivar una ecuación que describa la evolución de la vorticidad $\underline{\omega} = \nabla\times\underline{u}$ usaremos las siguientes propiedades

$$\nabla\times(\nabla\phi) = 0, \qquad (\mathrm{I})$$
$$(\underline{a}\cdot\nabla)\underline{a} = \tfrac{1}{2}\nabla|\underline{a}|^2 - \underline{a}\times(\nabla\times\underline{a}), \qquad (\mathrm{II})$$
$$\nabla\times(\underline{a}\times\underline{b}) = (\underline{b}\cdot\nabla)\underline{a} - (\underline{a}\cdot\nabla)\underline{b} - \underline{b}(\nabla\cdot\underline{a}) + \underline{a}(\nabla\cdot\underline{b}), \qquad (\mathrm{III})$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\underline{a}) = 0, \qquad (\mathrm{IV})$$

para cualquier campo escalar ϕ y campos vectoriales $\underline{a}$ y $\underline{b}$.

Si tomamos $\nabla\times(N\text{-}S)$ obtenemos para cada término

(1) $\nabla\times(\partial\underline{u}/\partial t) = \partial(\nabla\times\underline{u})/\partial t = \partial\underline{\omega}/\partial t,$

(2) $\nabla\times((\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}) \overset{\mathrm{II}}{=} \overbrace{\nabla\times(\tfrac{1}{2}\nabla|\underline{u}|^2)}^{=0\,(\mathrm{I})} - \nabla\times(\underline{u}\times\underline{\omega}) = \nabla\times(\underline{\omega}\times\underline{u})$

$\overset{\mathrm{III}}{=} (\underline{u}\cdot\nabla)\underline{\omega} - (\underline{\omega}\cdot\nabla)\underline{u} - \underline{u}\underbrace{(\nabla\cdot\underline{\omega})}_{=0\,(\mathrm{IV})} + \underline{\omega}\underbrace{(\nabla\cdot\underline{u})}_{=0\text{ (incompresible)}}$

(3) $\nabla\times(\nabla p/\rho) = 0 \ (\mathrm{I})$

(4) $\nabla\times(\nu\nabla^2\underline{u}) = \nu\nabla^2(\nabla\times\underline{u}) = \nu\nabla^2\underline{\omega}$

Uniendo todo obtenemos la ecuación de transporte de vorticidad

$$\underbrace{\frac{\partial\underline{\omega}}{\partial t}}_{\text{aceleración angular}} + \underbrace{(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{\omega}}_{\text{advección de vorticidad}} = \underbrace{(\underline{\omega}\cdot\nabla)\underline{u}}_{\text{"vortex stretching"}} + \underbrace{\nu\nabla^2\underline{\omega}}_{\text{difusión de vorticidad}}$$

Formulación vorticidad-función corriente

En 2D, la vorticidad es perpendicular a los gradientes de velocidad $\Rightarrow (\underline{\omega}\cdot\nabla)\underline{u} = 0$, por lo que no está presente el mecanismo de "vortex-stretching" y la ecuación de vorticidad se simplifica a

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} = -(\underline{u}\cdot\nabla)\,\omega + \nu\nabla^2\omega}$$

Notar que ahora ω es un escalar (en realidad $\underline{\omega} = \omega\underline{k}$ si $\underline{u} = u\underline{i} + v\underline{j}$).

Además, podemos definir la función corriente mediante

$$\boxed{\underline{u} = -R\nabla\psi}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{(rotación de 90° anti-horaria)}$$

la cual se relaciona con la vorticidad mediante

$$\omega = \nabla\times\underline{u} = \nabla\times(-R\nabla\psi) \underset{\nabla\times\underline{a} = \nabla\cdot(R\underline{a})\ \text{(en 2D)}}{=} \nabla\cdot\big(\overset{-R^2 = I}{\cancel{R}(-\cancel{R}}\nabla\psi)\big) \underset{\nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi}{=} \nabla^2\psi$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \nabla^2\psi}.$$

En ocasiones es más simple resolver las ecuaciones para para esta formulación de vorticidad-función corriente en términos de (ω, ψ) que las ecuaciones originales en términos de las variables primitivas (u, v, p).

Sin embargo, ambas formulaciones son equivalentes y entregan la misma información acerca del flujo.

Ecuación de Poisson para la presión

Derivaremos una ecuación para calcular la presión a partir del campo de velocidad de un flujo incompresible y viscoso.

Consideremos la ec. de Navier-Stokes incompresible como punto de partida

$$\overset{(1)}{\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}} + \overset{(2)}{(\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}} = \overset{(3)}{-\frac{\nabla p}{\rho}} + \overset{(4)}{\nu \nabla^2 \underline{u}}, \quad (N\text{-}S)$$

y tomamos su divergencia $\nabla\cdot(N\text{-}S)$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla\cdot\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}\right)}_{=\frac{\partial}{\partial t}(\cancel{\nabla\cdot\underline{u}}_{0}) = 0} + \nabla\cdot((\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}) = -\underbrace{\nabla\cdot\left(\frac{\nabla p}{\rho}\right)}_{=\frac{1}{\rho}\nabla^2 p} + \nu \underbrace{\nabla\cdot\nabla^2 \underline{u}}_{=\nabla^2(\cancel{\nabla\cdot\underline{u}}_{0}) = 0}.$$

Con lo que obtenemos

$$\nabla^2 p = -\rho\, \nabla\cdot((\underline{u}\cdot\nabla)\underline{u}).$$

que es conocida como la ecuación de Poisson para la presión