Flujo potencial

Vamos a prestar especial atención al caso de flujos que son simultáneamente incompresibles $\nabla \cdot \underline{u} = 0$ e irrotacionales $\nabla \times \underline{u} = 0$.

Estos son conocidos como flujos potenciales y son de gran relevancia en el diseño de superficies aerodinámica y en el estudio de ondas de gravedad.

Descomposición de Helmholtz

Todo campo vectorial puede descomponerse en la suma de un campo irrotacional y uno solenoidal (incompresible).

$$\underline{u} = \underbrace{\nabla \phi}_{\text{irrotacional}} + \underbrace{\nabla \times \underline{A}}_{\text{solenoidal}}$$

Esto se desprende de las identidades $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ y $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0$ que se cumplen para cualquier campo escalar ϕ y campo vectorial $\underline{A}$.

Potencial de velocidad

Si un flujo es irrotacional, puede esribirse de la forma

$$\underline{u} = \nabla \phi ,$$

potencial de velocidad (campo escalar)

En coordenadas cartesianas en 2D esto implica $u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}$, $v = \dfrac{\partial \phi}{\partial y}$,

y en coordenadas polares $u_r = \dfrac{\partial \phi}{\partial r}$, $u_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \phi}{\partial \theta}$.

Además, si el flujo es incompresible se debe cumplir

$$\nabla \cdot \underline{u} = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = 0$$

$\Rightarrow$ ¡el potencial de velocidad debe satisfacer la ecuación de Laplace!

Función corriente

Para un flujo incompresible en 2D, podemos definir un campo escalar ψ cuyas curvas de nivel sean líneas de corriente.

En 2D, tenemos que $\nabla \cdot \underline{u} = \nabla \times (R\underline{u})$ para cualquier $\underline{u}$, donde $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz de rotación de 90° en sentido anti-horario.

Verificamos en coordenadas cartesianas $\underline{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow R\underline{u} = \begin{bmatrix} -v \\ u \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \nabla \times (R\underline{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial (-v)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla \cdot \underline{u} \checkmark$$

Luego, la incompresibilidad implica que

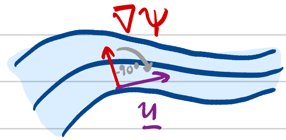
$$\nabla \times (\underbrace{R\underline{u}}_{\text{irrotacional}}) = 0 \Rightarrow R\underline{u} = \nabla \psi \Rightarrow \underline{u} = \underbrace{-R}_{\substack{-R = R^{-1} \\ \text{rotación } -90°}} \nabla \psi.$$

función corriente (campo escalar)

En coordenadas cartesianas esto es $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$

y en coordenadas polares $u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta}$, $u_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r}$

Recordando que las líneas de corriente son las curvas // a $\underline{u}$, y que el gradiente de un campo escalar ψ es $\perp$ a sus curvas de nivel, entonces las curvas de nivel de ψ son líneas de corriente.



Si además el flujo es irrotacional, entonces se debe cumplir

$$\nabla\times\underline{u} \overset{\text{id. del rotor en 2D}}{=} \nabla\cdot(-R\underline{u}) = \nabla\cdot(\overbrace{-RR}^{I}\nabla\psi) = \nabla^2\psi = 0.$$

$\Longrightarrow$ ¡la función corriente debe satisfacer la ecuación de Laplace!

Potencial complejo

En un flujo potencial — incompresible e irrotacional — existen ϕ y ψ y ambos campos deben satisfacer la ec. de Laplace.

Veremos que es conveniente definir una función Φ sobre el plano complejo $z = x + iy = re^{i\theta}$ que llamaremos

Potencial complejo $\quad \Phi(z) = \underbrace{\phi(x,y)}_{\text{potencial de velocidad}} + i\,\underbrace{\psi(x,y)}_{\text{función corriente}}$

La ventaja de trabajar con variables complejas es que si

Φ es una función analítica $\Longleftrightarrow \nabla^2\phi = \nabla^2\psi = 0$ automáticamente.

$$\boxed{\text{Una función es analítica sobre una región del plano complejo si, para todo } z \text{ en la región, la función toma un único valor y su derivada es finita e independiente de la dirección de diferenciación. Ejemplos: } z,\ z^2,\ e^z,\ \cos(z).}$$

Además, si $\Phi = \phi + i\psi$ es analítica, entonces satisface las

condiciones de Cauchy-Riemann $\underbrace{\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}}_{u}$, $\underbrace{\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}}_{v}$,

lo que asegura la igualdad de nuestras definiciones para u y v.

Una vez que tengamos Φ, podemos encontrar el campo de velocidad mediante la

velocidad compleja $\quad \Phi' = \dfrac{d\Phi}{dz} = u - iv$

Luego, si tomamos cualquier función analítica y la derivamos, obtenemos un flujo potencial válido.

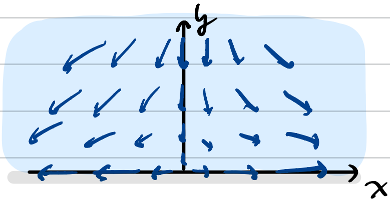
Tomemos como ejemplo $\Phi(z) = z^2$ y calculemos el campo de velocidad asociado a este este potencial complejo.

$$\Phi' = 2z = 2(x+iy) = 2x + i2y \Rightarrow u = 2x, \; v = -2y$$

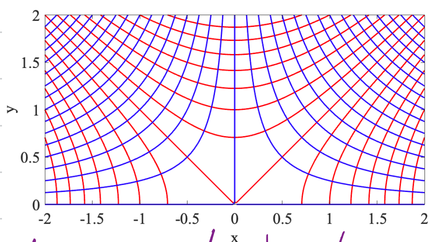
Tambien podemos calcular $\phi = \mathrm{Re}(\Phi)$ y $\psi = \mathrm{Im}(\Phi)$

$$\Phi = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy \Rightarrow \phi = x^2 - y^2, \; \psi = 2xy$$

$\underline{u} = 2x\underline{i} - 2y\underline{j}$ para $y \geq 0$



Contornos de ϕ, ψ

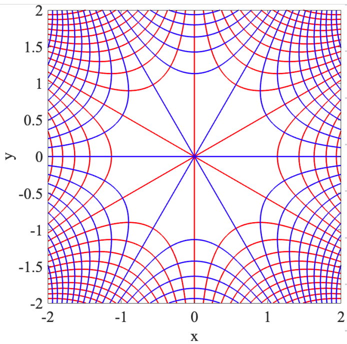


Este campo representa el flujo sobre un punto de estancamiento

Flujos potenciales elementales $\Phi = \phi + \psi$

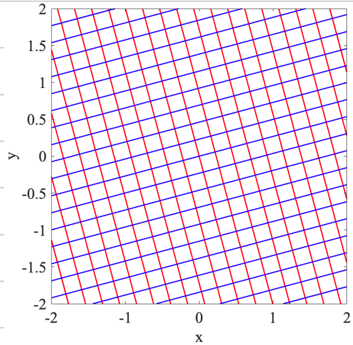
Flujo en una esquina

$$\Phi = U z^n$$



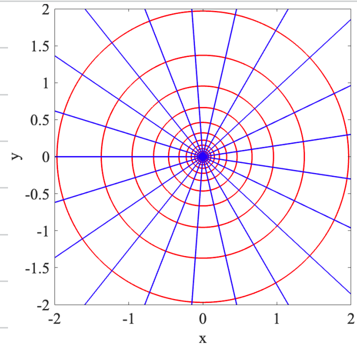
Flujo uniforme

$$\Phi = U z e^{-i\alpha}$$



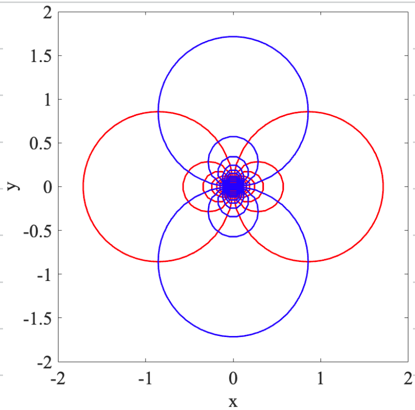
Fuente/sumidero

$$\Phi = \frac{\dot{q}}{2\pi} \ln(z)$$



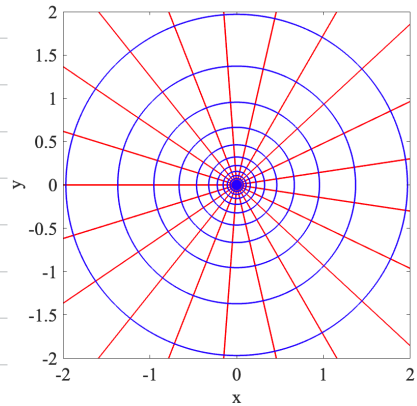
Doblete

$$\Phi = \frac{\mu}{z}$$

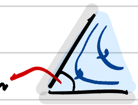


Vórtice potencial

$$\Phi = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z)$$



Flujo en una esquina

Este potencial representa el flujo en une esquina con un ángulo π/n 
Para $n=2$ recuperamos el caso del punto de estancamiento.

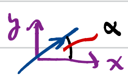
$$\Phi = Uz^n = U(re^{i\theta})^n = Ur^n e^{in\theta} = Ur^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta))$$

$$\Rightarrow \Psi = Ur^n \mathrm{sen}(n\theta) \Rightarrow \Psi = 0 \text{ (cte) si } \theta = \pi/n \Rightarrow \text{líneas de corriente}$$

$$\Phi = Uz^n \Rightarrow \Phi' = nUz^{n-1} = nU(re^{i\theta})^{n-1} = nUr^{n-1}(\cos((n-1)\theta) + i\,\mathrm{sen}((n-1)\theta))$$

$$\Rightarrow u = nUr^{n-1}\cos((n-1)\theta), \quad v = -nUr^{n-1}\mathrm{sen}((n-1)\theta).$$

Flujo uniforme

Este potencial representa un flujo uniforme con velocidad U y que forma un ángulo α con respecto al eje x. 

$$\Phi = Uze^{-i\alpha} = Ure^{i(\theta-\alpha)} = Ur(\cos(\theta-\alpha) + i\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha))$$

$$\Rightarrow \phi = Ur\cos(\theta-\alpha), \quad \Psi = Ur\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha)$$

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \; u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \Rightarrow u_r = U\cos(\theta-\alpha), \quad u_\theta = -U\mathrm{sen}(\theta-\alpha).$$

$$\Phi = Uze^{-i\alpha} \Rightarrow \Phi' = Ue^{-i\alpha} = U(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\alpha)$$

$$\Rightarrow u = U\cos\alpha, \quad v = U\mathrm{sen}\alpha.$$

Fuente/sumidero

Este potencial representa el flujo generado por una inyección o succión de masa en el punto $(0,0)$ a una tasa $\dot{q}$ por unidad de longitud.

$$\Phi = \frac{\dot{q}}{2\pi}\ln(z) = \frac{\dot{q}}{2\pi}\ln(re^{i\theta}) = \frac{\dot{q}}{2\pi}\left[\ln(r) + i\theta\right] \Rightarrow \phi = \frac{\dot{q}}{2\pi}\ln(r),\quad \psi = \frac{\dot{q}}{2\pi}\theta$$

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r},\quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} \Rightarrow u_r = \frac{\dot{q}}{2\pi r},\quad u_\theta = 0.$$

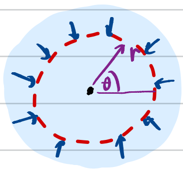
$$\Phi = \frac{\dot{q}}{2\pi}\ln(z) \Rightarrow \Phi' = \frac{\dot{q}}{2\pi z} = \frac{\dot{q}}{2\pi r}e^{-i\theta} = \frac{\dot{q}}{2\pi r}(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\Rightarrow u = \frac{\dot{q}}{2\pi r}\cos\theta,\quad v = \frac{\dot{q}}{2\pi r}\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

De la velocidad en coordenadas polares vemos que el flujo es puramente radial.

El fujo volumétrico que entra/sale en una superficie a una distancia r del origen es

$$\int_0^{2\pi} u_r r\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\dot{q}\,\cancel{r}}{2\pi\cancel{r}}\, d\theta = \dot{q}\,\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}} = \dot{q}$$



Doblete

Un doblete se obtiene al superponer una fuente de fuerza $\dot{q}$ ubicada en $(x,y)=(-\varepsilon,0)$ con un sumidero de fuerza $-\dot{q}$ ubicado en $(\varepsilon,0)$ y tomar el límite $\varepsilon\to 0$, $\dot{q}\to\infty$ de tal manera que $\varepsilon\dot{q}\equiv\pi\mu$ es finito.

$$\Phi_\varepsilon=\frac{\dot{q}}{2\pi}\left(\ln(z+\varepsilon)-\ln(z-\varepsilon)\right)=\frac{\mu}{2}\,\frac{\left(\ln(z+\varepsilon)-\ln(z-\varepsilon)\right)}{\varepsilon}$$

$$\Phi=\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_\varepsilon\underset{\text{l'Hopital}}{=}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mu}{2}\left[\frac{1}{z+\varepsilon}+\frac{1}{z-\varepsilon}\right]=\frac{\mu}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{z}=\frac{\mu}{z}\;//$$

$$\Phi=\frac{\mu}{z}=\frac{\mu}{r}e^{-i\theta}=\frac{\mu}{r}\left(\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta\right)\Rightarrow \phi=\frac{\mu}{r}\cos\theta,\quad \Psi=-\frac{\mu}{r}\operatorname{sen}\theta$$

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r},\quad u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\Rightarrow u_r=-\frac{\mu\cos\theta}{r^2},\quad u_\theta=-\frac{\mu\operatorname{sen}\theta}{r^2}.$$

$$\Phi=\frac{\mu}{z}\Rightarrow\Phi'=-\frac{\mu}{z^2}=-\frac{\mu}{r^2}e^{-i2\theta}=-\frac{\mu}{r^2}\left(\cos 2\theta-i\operatorname{sen}2\theta\right)$$

$$\Rightarrow u=-\frac{\mu\cos(2\theta)}{r^2},\quad v=-\frac{\mu\operatorname{sen}(2\theta)}{r^2}.$$

Vórtice potencial

El último flujo elemental que consideramos es el inducido por una fuente de vorticidad localizada en el origen. Veremos que el resultado es un flujo irrotacional en todas partes a excepción de $z=0$ (singularidad)

$$\Phi=\frac{-i\Gamma}{2\pi}\ln(z)=\frac{-i\Gamma}{2\pi}\ln(re^{i\theta})=\frac{\Gamma}{2\pi}\left(\theta-i\ln(r)\right)\Rightarrow\phi=\frac{\Gamma\theta}{2\pi},\quad\Psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(r)$$

$$u_r=\frac{\partial\phi}{\partial r},\quad u_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\Rightarrow u_r=0,\quad u_\theta=\frac{\Gamma}{2\pi r}$$ ¡Velocidad puramente azimutal!

$$\Phi = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z) \Rightarrow \Phi' = \frac{-i\Gamma}{2\pi z} = \frac{-i\Gamma e^{-i\theta}}{2\pi r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r}e^{i(\pi/2-\theta)}$$

$$\Leftrightarrow \Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\left(\cos(\pi/2-\theta) + i\,\mathrm{sen}(\pi/2-\theta)\right) = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\left(\mathrm{sen}\,\theta + i\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow u = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\mathrm{sen}\,\theta, \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi r}\cos\theta$$

Verifiquemos que este vórtice es irrotacional calculando la vorticidad

$$\omega = \nabla \times \underline{u} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cancel{r}\Gamma}{2\pi \cancel{r}}\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}(0) = 0 \checkmark$$

La rotación de un paquete de fluido delimitado por una curva c se calcula como

$$\underbrace{\oint_c \underline{u}\cdot d\underline{l}}_{\text{integral de línea}} = \underbrace{\int_0^{2\pi} u_\theta\, r\, d\theta}_{\text{tomando una curva con } r \text{ fijo}} = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma \cancel{r}}{2\pi \cancel{r}}\, d\theta = \frac{\cancel{2\pi}\Gamma}{\cancel{2\pi}} \Rightarrow \boxed{\oint_c \underline{u}\cdot d\underline{l} = \Gamma}$$

Esta es la definición de circulación

Vemos que el vórtice potencial tiene circulación Γ para cualquier curva que encierre al origen. Esto se debe a la vorticidad concentrada en la singularidad $r=0$.