

Teoría de capa límite

La aproximación de flujo inviscido no es capaz de respetar la condición de no deslizamiento en una superficie sólida. Si estamos lo suficientemente cerca de una pared, los efectos viscosos siempre son importantes.



Una capa límite (boundary layer) es una capa delgada de fluido donde se concentran los efectos viscosos debido a la presencia de una pared sólida para $Re \gg 1$.

• la capa no es delgada

Escalas de longitud integrales

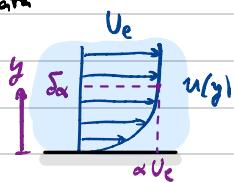
Comenzaremos con distintas definiciones del espesor $\delta(x)$ de una capa límite para cuantificar su tamaño.

Espesor 99%, δ

Dado que esto es una cantidad que evoluciona a lo largo de la superficie, es natural pensar en una definición en términos de la altura sobre la pared para la cual la velocidad alcanza un determinado valor.

Se define el espesor 99%, $\delta(0)\delta_{99}$, como la altura para la cual la velocidad local alcanza $u(y=\delta_{99}) = 0.99 U_e$.

En ocasiones también se usa δ_{95} o, de manera más general, δ_α tal que $u(y=\delta_\alpha) = \alpha U_e$.



Espesor de desplazamiento, δ^*

El espesor de desplazamiento se define en términos del flujo másico que lleva la capa límite comparado con el de un flujo inviscido. Es la altura por la cual debemos subir la pared para tener el mismo flujo másico con un perfil uniforme que con la capa límite.

Igualamos los
flujos másicos
(por unidad de ancho)



$$\int_{\delta^*}^{\infty} \rho u(y) dy = \int_{0}^{\infty} \rho U_e dy$$

$$\int_{\delta^*}^{\infty} \rho U_e dy = \int_0^{\infty} \rho U_e dy - \int_0^{\delta^*} \rho U_e dy \Rightarrow \rho U_e \delta^* = \rho \int_0^{\delta^*} (U_e - u) dy \Rightarrow \delta^* = \int_0^{\infty} (1 - \frac{u}{U_e}) dy$$

$\rho U_e \delta^*$ defecto de flujo másico de la capa límite c/r a un flujo inviscido

Espesor de momentum, Θ

Este espesor se define en términos de la pérdida de momentum en la capa límite relativa al flujo inviscido exterior.

$$\rho U_e^2 \Theta = \int_0^{\infty} \rho u (U_e - u) dy \Rightarrow \Theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_e} (1 - \frac{u}{U_e}) dy$$

deficit de momentum por arrastre viscoso

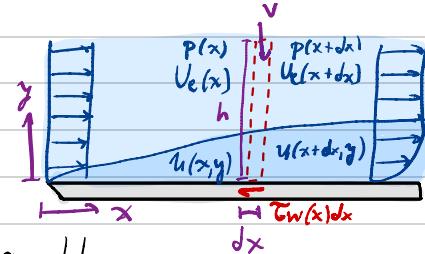
Usualmente δ, δ^*, Θ son todas funciones de x .

Factor de forma, H

Por definición, $\Theta < \delta^*$, luego la razón $H = \delta^*/\Theta$, llamada factor de forma, siempre es mayor a uno.

Ecuación integral de von Karman

Consideramos un volumen de control en una sección del perfil de altura $h \gg \delta$.



Asumimos flujo permanente e incompresible.

Además, asumimos que la presión no varía considerablemente en "y" y que afuera de la capa límite el flujo es irrotacional.

Queremos una expresión para T_w en términos de δ^* , θ , U_e .

El balance de masa es

$$-\int_0^h \rho u(x, y) dy + \int_0^h \rho u(x+dx, y) dy - \rho V dx = 0$$

$\underbrace{\rho U_e(x)(h - \delta^*(x))}_{\rho U_e(x)\delta^*(x)}$ $\underbrace{\rho U_e(x+dx)(\delta^*(x+dx) - h)}_{\rho U_e(x+dx)\delta^*(x+dx)}$

$$\Rightarrow \rho V dx = \rho(U_e(x+dx)\delta^*(x+dx) - U_e(x)\delta^*(x)) + \rho(U_e(x+dx) - U_e(x))h$$

$$\Rightarrow V = \frac{d(U_e \delta^*)}{dx} - \frac{dU_e}{dx} h$$

El balance de momentum queda

$$-\int_0^h \rho u^2(x, y) dy - \rho V U_e dx + \int_0^h \rho u^2(x+dx, y) dy = p(x)h - p(x+dx)h - T_w(x)dx$$

$\underbrace{\rho U_e^2(x)\theta(x)}_{\rho U_e^2(x)\delta^*(x)} - \underbrace{\int_0^h \rho u(x, y) U_e(x) dy}_{\int_0^h \rho u(x+dx, y) U_e(x+dx) dy} \quad \underbrace{\int_0^h \rho u(x+dx, y) U_e(x+dx) dy - \rho U_e^2(x+dx)\theta(x+dx)}$

Fuera de la capa límite podemos usar Bernoulli (irrotacional)

$$\Rightarrow p(x) + \frac{\rho U_e(x)^2}{2} = p(x+dx) + \rho \frac{U_e(x+dx)^2}{2} \Rightarrow p(x) - p(x+dx) = \frac{\rho}{2}(U_e^2(x+dx) - U_e^2(x))$$

Dividiendo la ec. de momentum por ρdx para formar derivadas obtenemos

$$-\frac{d}{dx}(U_e^2 \Theta) + \frac{d}{dx} \int_0^h U_e dy - VU_e = \frac{h d(U_e^2)}{2 dx} - \frac{\tau_w}{\rho}$$

~~$-U_e \frac{d(U_e \delta^+)}{dx} + h U_e \frac{dU_e}{dx}$~~

$$\frac{d(U_e^2(h - \delta^+))}{dx} = \frac{d(U_e^2 \delta^+)}{dx}$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dx}(U_e^2 \Theta) + \frac{d}{dx}(U_e^2 \delta^+) - U_e \frac{d}{dx}(U_e \delta^+) = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\Rightarrow -U_e^2 \frac{d\Theta}{dx} - 2\Theta U_e \frac{dU_e}{dx} + U_e^2 \frac{d\delta^+}{dx} + 2\delta^+ U_e \frac{dU_e}{dx} - U_e^2 \frac{d\delta^+}{dx} - \delta^+ U_e \frac{dU_e}{dx} = -\frac{\tau_w}{\rho}$$

Reordenando obtenemos la ecuación integral de von Karman

$$\frac{\tau_w}{\rho} = U_e^2 \frac{d\Theta}{dx} + U_e \frac{dU_e}{dx} (2\Theta - \delta^+)$$

efecto del gradiente de presión externo

Si dividimos por $U_e^2/2$ obtenemos la versión adimensional para el coeficiente de fricción $C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_e^2}$

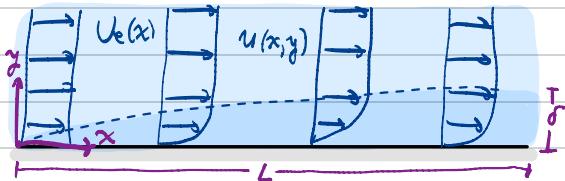
$$\Rightarrow C_f = 2 \frac{d\Theta}{dx} + 2 U_e \frac{dU_e}{dx} (2 - H) , \text{ donde } H = \delta^+ / U_e$$

Luego, podemos calcular el esfuerzo de corte en la pared en cualquier ubicación x si conocemos el flujo externo y los esp�os de la capa límite.

Aproximación de capa límite



Ahora derivaremos las ecuaciones diferenciales de capa límite formuladas por Ludwig Prandtl en 1904.



Nuestro punto de partida son las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad para un flujo incompresible y de viscosidad constante. En 2D y en coordenadas cartesianas estas son

$$\text{Continuidad} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{Momentum - } x \quad \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{Momentum - } y \quad \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Cuando la capa límite es delgada, $\delta/L \ll 1$, donde δ y L son las escalas de longitud características en las direcciones normal y paralelas a la pared. Sin embargo, este no es un flujo paralelo.

Adimensionalizamos todas las variables

$$\tilde{x} = x/L, \tilde{y} = y/\delta, \tilde{u} = u/U, \tilde{v} = v/U, \tilde{t} = tU/L, \tilde{p} = \frac{p - p_0}{\rho U^2}, \tilde{\tau}_{Re} = \tau_{Re}/UL$$

La ecuación de continuidad adimensional queda

$$\left(\frac{U}{L}\right) \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} + \left(\frac{V}{\delta}\right) \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{y}} = 0 \iff \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{L}{\delta}\right) \left(\frac{V}{U}\right) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0$$

y si las escalas que escogemos son representativas, entonces todas las derivadas adimensionales son del mismo orden de magnitud, luego

$$\frac{V}{U} \sim O\left(\frac{\delta}{L}\right) \Rightarrow \nu \ll u$$

Ahora examinemos la ecuación adimensional de momentum en x

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{V}{U}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

$\sim O(1)$

Dentro de la capa límite, los efectos meridionales y viscosos son del mismo orden, luego el término de esfuerzos viscosos debe ser del mismo orden que el lado izquierdo de la ecuación.

$$\Rightarrow \frac{1}{Re} \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \sim O(1) \Rightarrow \frac{1}{Re} \sim O\left(\frac{\delta}{L}\right)^2$$

Seguimos con la ecuación de momentum en y

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \left(\frac{V}{U}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right) \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = - \left(\frac{U}{V}\right) \left(\frac{L}{\delta}\right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} \right)$$

$\sim O(1)$ $\sim O\left(\frac{L}{\delta}\right)^2$ $\sim O\left(\frac{\delta}{L}\right)^2$
 domina sobre el resto $\sim O(1)$

Luego, podemos aproximar la ec. como $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0 \Rightarrow p = p(x)$.

Fuera de la capa límite, $U(x,y) = U_e(x)$, luego la ec. de momentum en x queda

$$\star \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{y para flujo permanente} \quad U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Finalmente, volviendo a variables dimensionales, las ecuaciones de capa límite de Prandtl son

Continuidad $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$

Momentum-x $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + V \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$

con condiciones de borde

$$u = v = 0 \quad \text{para } y = 0, \quad u \rightarrow U_e \quad \text{para } y \rightarrow \infty.$$

Ahora tenemos solo dos ecuaciones para dos incógnitas u, v . La presión se puede obtener de \star donde $U_e(x)$ se asume conocido.

Estas ecuaciones son muchísimo más simples de resolver ya que, debido a su naturaleza, las condiciones del flujo en una posición x sólo dependen de la información aguas arriba ($< x$).

Efecto del gradiente de presión

De la ecuación de momentum-x para flujo permanente y las condiciones de borde obtenemos que en la pared,

$$\text{para } y=0, \quad \frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2u}{dy^2}.$$

Luego, veremos que la curvatura del perfil de velocidad queda determinada por el gradiente de presión.

gradiente de presión favorable

$$\frac{dp}{dx} < 0$$



cero gradiente de presión

$$\frac{dp}{dx} = 0$$



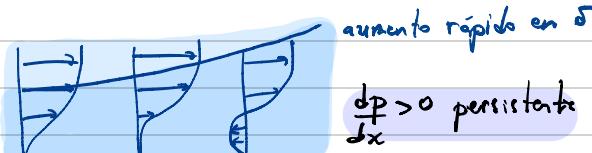
gradiente de presión adverso

$$\frac{dp}{dx} > 0$$



Un gradiente de presión favorable acelera el flujo mientras que uno adverso lo retrasa.

Bajo el efecto de un grad. de presión adverso persistente, el flujo se "separa", esto es, se forma una región de flujo reverso.



$$\left. \frac{du}{dy} \right|_0 > 0 \quad \left. \frac{du}{dy} \right|_0 = 0 \quad \left. \frac{du}{dy} \right|_0 < 0$$