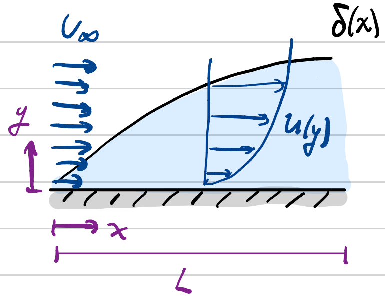
ZPGFPBL

Vamos a analizar el caso particular de una capa límite sobre una placa plana con cero gradiente de presión (zero-pressure gradient-flat-plate boundary layer).

En este escenario, con flujo permanente, el flujo externo es $U_e(x) = U_\infty$ (cte.). Luego, las ecuaciones de capa límite se simplifican a

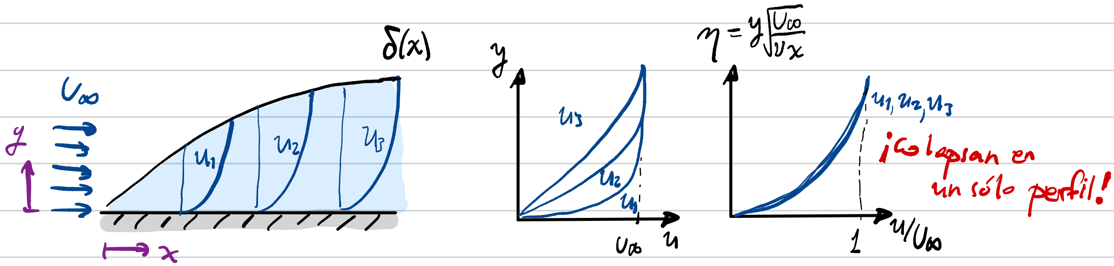
Continuidad $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Momentum-x $$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$



Solución de Blasius

En 1908 Blasius, alumno de Prandtl, encontró una solución exacta (numérica) para estas ecuaciones mediante un ingenioso cambio de variables.



El primer paso es usar la función corriente ψ

tal que $u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$, $v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$.

Notar que si encontramos una solución para $\psi(x,y)$, entonces los campos u, v que respetan esta definición satisfacen automáticamente la ecuación de continuidad.

La ec. de momentum-x queda $\dfrac{\partial \psi}{\partial y}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \dfrac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$,

Luego, la genialidad está en definir una escala de longitud vertical que depende de x, $\Delta = (\nu x / U_\infty)^{1/2}$, e introducir las variables auto-similares

$$\eta = \frac{y}{\Delta} = y\left(\frac{U_\infty}{\nu x}\right)^{1/2}, \quad f'(\eta) = \frac{u}{U_\infty} \quad \Longrightarrow \quad f(\eta) = \frac{\psi \Delta}{U_\infty} = \frac{\psi}{(\nu x U_\infty)^{1/2}},$$

donde $()' = d()/d\eta$ y podemos verificar la última implicancia derivando y aplicando la regla de la cadena para obtener u/U_∞.

El formalismo matemático para encontrar este cambio de variables puede encontrarse, por ejemplo, en el libro de Kundu et al.

Reemplazando ψ en la ec. de momentum y bastante algebra se llega a la ecuación de Blasius para $f(\eta)$

$$2f''' + ff'' = 0 \qquad f'(0) = f(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1,$$

con condiciones de borde vienen de $u = v = 0$ en $y = 0$, $u \to U_\infty$ para $y \to \infty$

El problema se redujo a resolver una EDO no lineal de 3^er orden que puede ser resuelta numéricamente mediante un método de shooting.

Luego, podemos recuperar el campo de velocidad usando

$$u = U_\infty f', \quad v = \frac{1}{2}(\eta f' - f)(\nu U_\infty / x)^{1/2}.$$

De la solución de Blasius se desprenden los siguientes importantes resultados (válidos para flujo laminar)

Coeficiente de fricción $C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_\infty^2} = 0.664\,(Re_x)^{-1/2}$

Coeficiente de arrastre $C_D = \frac{2D}{\rho U_\infty^2 A} = 1.328\,(Re_L)^{-1/2}$

Espesor 99% $\frac{\delta}{x} = 4.92\,(Re_x)^{-1/2}$

Espesor de desplazamiento $\frac{\delta^*}{x} = 1.721\,(Re_x)^{-1/2}$

Espesor de momentum $\frac{\theta}{x} = 0.664\,(Re_x)^{-1/2}$

Factor de forma $H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.59$

Donde se usan las siguientes definiciones.

Números de Reynolds $Re_x = \frac{\rho U_\infty x}{\mu}$, $Re_L = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$.

Esfuerzo de corte en la pared $\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$.

Coeficiente de fricción $c_f = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2/2}$.

Fuerza de arrastre $D = \int_A \tau_w \, dA = \frac{1}{L}\int_0^L C_f(x)\, dx$.