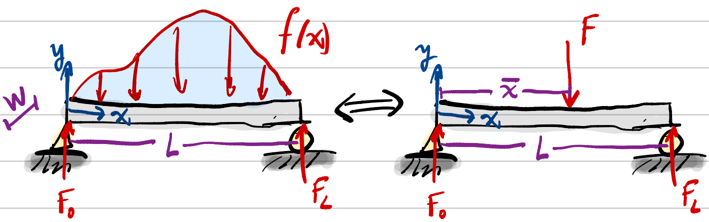
Distribución de presión sobre superficies

Mecánica estática y fuerzas distribuidas

La hidrostática es un caso particular de la mecánica estática donde estudiamos la acción de fuerzas sobre cuerpos para el caso donde las fuerzas son generadas por la distribución de presión en un fluido.

Para un cuerpo estático $\Sigma \underline{F} = \underline{0}$, $\Sigma \underline{M} = \underline{0}$. Un caso de análsis clásico es el de una viga rígida, simplemente apoyada, de largo L y ancho W, que se encuentra sometida a una fuerza distribuida $-f(x)\underline{j}$.



$\Sigma F_y = 0$:

$$F_0 + F_L - F = 0$$

$\Sigma M_z = 0$:

$$F_0 \cdot 0 + F_L \cdot L - F\bar{x} = 0$$

Una fuerza distribuida tiene unidades de [fuerza/área], $[N/m^2] = [Pa]$ en SI.

Podemos reemplazar una fuerza distribuida por una fuerza puntual de magnitud F aplicada en $\bar{x}$ tal que no se altere el balance estático.

Para no alterar la suma de fuerzas, $F = \int_0^L f(x) W dx$.

Para no alterar la suma de momentos (torques), $\bar{x} = \frac{1}{F}\int_0^L x f(x) W dx$.

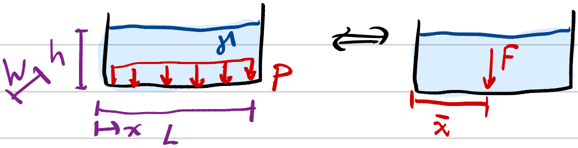
Ahora pasamos a casos específicos de hidrostática, donde $F = -\int p \underline{n}\, dA$ y llamaremos centro de presión a $\bar{x} = x_{cp}$

Superficies de ancho constante

Superficie horizontal

relativo a la superficie

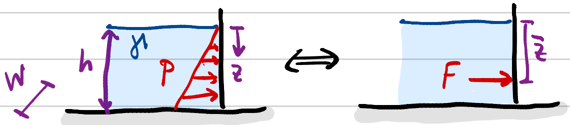
$$p = \gamma h \Rightarrow F = \int_0^L \gamma h W\,dx \Rightarrow \boxed{F = \gamma h W L}$$



$$\bar{x} = \frac{1}{F}\int_0^L x\gamma h W\,dx = \frac{\cancel{\gamma h W} L^{\cancel{2}}/2}{\cancel{\gamma h W L}} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{L}{2}}$$

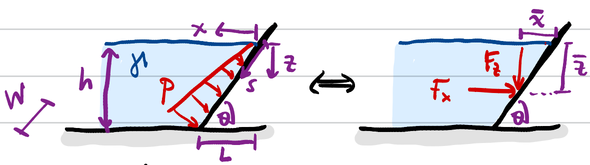
Superficie vertical

$$p = \gamma z \Rightarrow F = \int_0^h \gamma z W\,dz \Rightarrow \boxed{F = \gamma W h^2/2}$$



$$\bar{z} = \frac{1}{F}\int_0^h z(\gamma z W)\,dz = \frac{\cancel{\gamma W} h^{\cancel{3}}/3}{\cancel{\gamma W h^2}/2} \Rightarrow \boxed{\bar{z} = \frac{2h}{3}}$$

Superficie inclinada



La presión actúa normal a la pared, por lo que la fuerza resultante va a tener componentes horizontal y vertical.

$$\underline{F} = \int p\,\underline{n}\,dA, \quad p = \gamma z, \quad \underline{n} = \operatorname{sen}\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{k}, \quad dA = W\,ds = W\,dz/\operatorname{sen}\theta = W\,dx/\cos\theta$$

coordenada a lo largo de la superficie

Calculemos la magnitud de la fuerza

$$\Rightarrow F_x = \int_0^h \gamma z \cancel{\operatorname{sen}\theta}\, \frac{W\,dz}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}} = \int_0^h \gamma z W\,dz \Rightarrow \boxed{F_x = \frac{\gamma W h^2}{2}}$$

$$\Rightarrow F_z = \int_0^h \gamma z \cos\theta\, \frac{W\,dz}{\operatorname{sen}\theta} = \int_0^h \gamma z \frac{W\,dz}{\tan\theta} \Rightarrow \boxed{F_z = \frac{\gamma W h L}{2}}$$

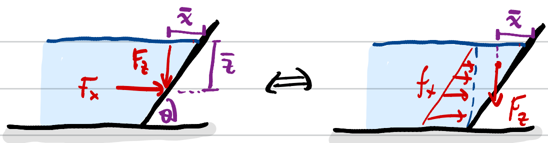
$(L = h/\tan\theta)$

Ahora calculemos el punto de aplicación de la fuerza

$$\bar{x} = \frac{1}{F_x}\int_0^h \overset{z/\tan\theta}{x}\,\gamma z \cancel{\operatorname{sen}\theta}\,\frac{W\,dz}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}} = \frac{1}{F_x}\int_0^h \gamma z^2 \frac{W\,dz}{\tan\theta} = \frac{\cancel{\gamma W} h^{\cancel{3}}/3}{\cancel{\gamma W h^2}/2}\,\frac{1}{\tan\theta} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{2}{3}L}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{F_z}\int_0^h z\,\gamma z\cos\theta\,\frac{W\,dz}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{F_z}\int_0^h \gamma z^2 \frac{W\,dz}{\tan\theta} = \frac{\cancel{\gamma W} h^{\cancel{3}}/3\cancel{\tan\theta}}{\cancel{\gamma W h^2}/2\cancel{\tan\theta}} \Rightarrow \boxed{\bar{z} = \frac{2h}{3}}$$

Desde otra perspectiva



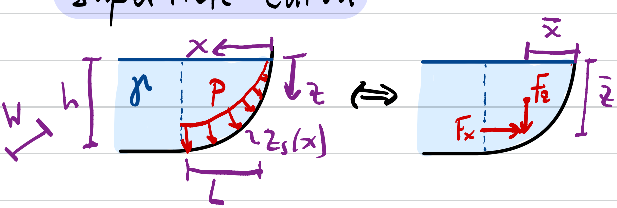
- ¡ F_x es igual al que obtuvimos para una pared vertical !
- ¡ F_z es igual al peso del volumen de fluido sobre la pared !

- La componente horizontal actúa a 2/3 de la profundidad máxima.

- La línea de acción de la componente vertical pasa por el centroide del volumen de fluido.

Estos resultados son generales y se mantienen para el caso de una superficie curva.

Superficie curva



$$F_x = \frac{\gamma W h^2}{2}, \quad \bar{z} = \frac{2h}{3}$$

$$F_z = \underbrace{\int_0^L \gamma W z_s(x)\,dx}_{\text{peso del volumen de fluido}}, \quad \bar{x} = \underbrace{x_{CG}}_{\text{centroide del volumen de fluido}}$$

Superficies de ancho variable

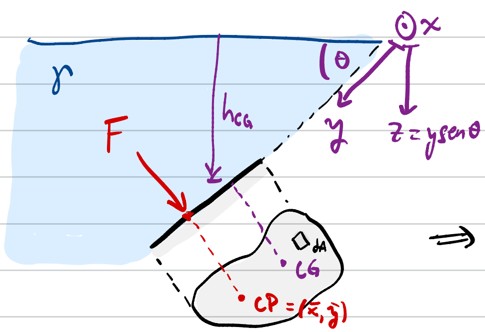
El siguiente paso en complejidad es considerar superficies con ancho variable $W(s)$.

En este escenario el elemento diferencial de área dependerá de la profundidad $dA(s) = W(s)ds$ y se hace relevante la ubicación de la fuerza resultante en la 3ra dimensión.

Este caso sigue siendo simple de abordar con las herramientas entregadas en este capítulo, incluso si la superficie es curva (en una dirección).

Para superficies más complejas podemos usar el computador para integrar.

Superficie plana de ancho variable



$$p = \gamma z = \gamma y \operatorname{sen}\theta$$

1er momento de área c/r a x

$$F = \int_A \gamma y \operatorname{sen}\theta \, dA = \gamma \operatorname{sen}\theta \underbrace{\int_A y \, dA}_{y_{CG} A}$$

$$\Rightarrow F = \underbrace{\gamma y_{CG} \operatorname{sen}\theta}_{p_{CG}} A \Rightarrow \boxed{F = p_{CG} A}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{F}\int_A y \, \gamma y \operatorname{sen}\theta \, dA = \frac{\cancel{\gamma \operatorname{sen}\theta}}{\cancel{\gamma \operatorname{sen}\theta}\, y_{CG} A} \underbrace{\int_A y^2 dA}_{\tilde{I}_{xx}} \Rightarrow \bar{y} = \frac{\tilde{I}_{xx}}{y_{CG} A}$$

momento de inercia c/r a x

Usando el teorema de los ejes paralelos podemos trasladar el momento de inercia a uno que pase por el CG.

$$\tilde{I}_{xx} = I_{xx} + A y_{CG}^2 \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{I_{xx}}{y_{CG} A} + y_{CG}} \quad (\bar{y} > y_{CG})$$

De manera similar,

$$\tilde{I}_{xy} = I_{xy} + A y_{CG}^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{F} \int_A x \, \rho g \sin\theta \, y \, dA = \frac{\cancel{\rho g \sin\theta}}{\cancel{\rho g \sin\theta} \, y_{CG} A} \underbrace{\int_A xy \, dA} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{I_{xy}}{y_{CG} A} + x_{CG}}$$

I_{xx} e I_{xy} son conocidos para geometrías simples.