Estática de fluidos

Vamos a considerar fluidos en equilibrio estático, es decir, fluidos que están en reposo o moviéndose de tal manera que no hay movimiento relativo entre partículas de fluido adyacentes. Por lo tanto:

- No hay gradientes de velocidad $\left(\frac{\partial u}{\partial y} = 0\right)$
- No hay esfuerzos viscosos
- Sólo actúan la presión,
- el peso propio del fluido
- y fuerzas de cuerpo (de volumen) externas

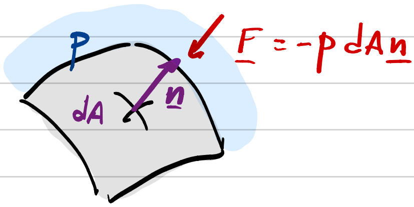
En general, para un fluido (o cualquier cuerpo) en equilibrio estático

$$\sum \underline{F} = 0 \ , \quad \sum \underline{M} = 0.$$

El caso más simple es el de un fluido en reposo, pero un fluido en equilibrio estático también puede estar en movimiento, siempre y cuando se mueva como un sólido rígido.

Fuerzas debido a la presión

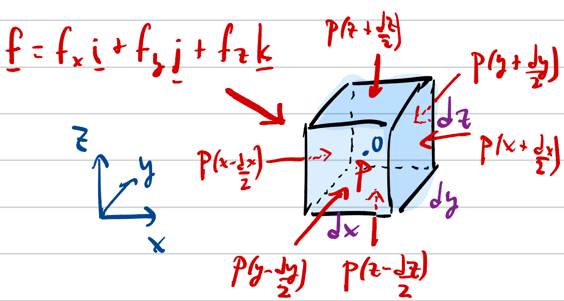
La presión es una fuerza por unidad de área que siempre apunta en la dirección contraria a la normal a la superficie sobre la cual actúa.



Balance de momentum hidrostático

Consideremos un elemento de fluido en equilibrio estático. El elemento tiene dimensiones dx, dy, dz, la presión en su centro es p, y sobre él actúa una fuerza externa $\underline{f}$.

Queremos derivar una ecuación que, dado $\underline{f}$, nos permita calcular la distribución espacial de presión $p(x,y,z)$ en el fluido. Para esto, realizaremos un balance de momentum $\sum \underline{F} = \underline{0}$



$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum F_z = 0$$

El balance de momentum en el eje x es

$$\sum F_x = 0 \iff p(x-\tfrac{dx}{2})\underbrace{dy\,dz}_{\text{área donde actúa } p} - p(x+\tfrac{dx}{2})\,\underbrace{dy\,dz} + f_x \underbrace{dx\,dy\,dz}_{\text{actúa sobre el volumen}} = 0$$

Podemos usar una serie de Taylor para calcular las presiones en las caras del elemento

$$p(x+\tfrac{dx}{2}) = p(x) + \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_x \frac{dx}{2} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_x \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + O\left(\left(\frac{dx}{2}\right)^3\right)$$

$$p(x-\tfrac{dx}{2}) = p(x) - \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_x \frac{dx}{2} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right|_x \left(\frac{dx}{2}\right)^2 + O\left(\left(\frac{dx}{2}\right)^3\right)$$

Al hacer la diferencia de presiones, los términos cuadráticos se cancelan y, para $dx \to 0$, los términos cúbicos y de orden superior son despreciables

$$\Rightarrow \Delta p_x = p\left(x-\frac{dx}{2}\right) - p\left(x+\frac{dx}{2}\right) \approx -\frac{\partial p}{\partial x}\, dx .$$

Luego, el balance de momentum queda

$$\sum F_x = 0 \iff \Delta p_x \, dy\, dz + f_x\, dx\, dy\, dz = 0$$

$$\iff -\frac{\partial p}{\partial x}\, dx\, dy\, dz + f_x\, dx\, dy\, dz = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z = 0 \iff -\nabla p + \underline{f} = \underline{0}$$

calculadas de manera análoga

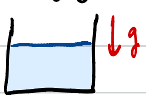
Ley hidrostática

Densidad constante y aceleración de cuerpo rígido

Consideraremos tres casos simples donde $\underline{f}(\underline{x}) = \rho\, \underline{a}(\underline{x})$.

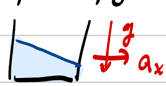
Estanque en reposo

$$\underline{f} = -\rho g \underline{k}$$



Estanque acelerado linealmente

$$\underline{f} = \rho a \underline{i} - \rho g \underline{k}$$

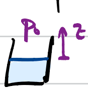


Estanque en rotación

$$\underline{f} = \rho \omega^2 r \underline{i} - \rho g \underline{k}$$

Estanque en reposo

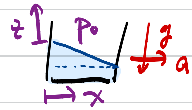
$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow p(z) = -\rho g z + C$$



$$p(z=0) = p_0 \Rightarrow C = p_0 \quad \therefore\ p(z) = p_0 - \rho g z$$

presión aumenta con la profundidad ($z<0$)

Estanque acelerado linealmente



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho a \Rightarrow p(x,z) = \rho a x + C_1(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow p(x,z) = -\rho g z + C_2(x)$$

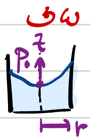
$$\rho a x - C_2(x) = -\rho g z - C_1(z) = K$$

$$\Rightarrow C_1(z) = -\rho g z - K$$

$$\Rightarrow p(x,z) = \rho a x - \rho g z - K$$

$$p(0,0) = p_0 \Rightarrow K = -p_0 \quad \therefore \; p(x,z) = p_0 + \rho(ax - gz)$$

Estanque en rotación



$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r \Rightarrow p(r,z) = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} + C_1(z)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow p(r,z) = -\rho g z + C_2(r)$$

$$\frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - C_2(r) = -\rho g z - C_1(z) = K$$

$$\Rightarrow C_1(z) = -\rho g z - K$$

$$\Rightarrow p(r,z) = \frac{\rho \omega^2 r^2}{2} - \rho g z - K$$

$$p(0,0) = p_0 \Rightarrow K = -p_0 \quad \therefore \; p(r,z) = p_0 + \rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz\right)$$

Variación de presión en la atmósfera

Podemos pensar en la presión como el peso (por unidad de área) de todo el aire que está sobre nuestro punto de medición. Sin embargo, no la podemos calcular como $\rho g h$, donde h es la altura de la columna de aire, porque la densidad no es constante: $\underline{f}(z) = -\rho(z) g \underline{k}$

Usando la ley de gas ideal, obtenemos una expresión para la densidad en función de la presión y temperatura.

$$p = \rho RT \Rightarrow \rho = P/RT.$$

Dentro de la tropósfera ($z < 10km$) la variación de la temperatura del aire con la altura es bien aproximada por una función lineal

$$T(z) = T_0 + mz \Rightarrow \rho = p/[R(T_0 + mz)]$$

donde $T_0 = 288.2K$, $m = -0.0065 K/m$ y $z = 0$ corresponde a la altura al nivel del mar.

Sustituyendo en la ley hidrostática obtenemos

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{R}\frac{p}{T_0 + mz} \Leftrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{mR}\frac{m\,dz}{T_0 + mz}$$

$$\Rightarrow \ln(p) = -\frac{g}{mR}\ln\left(\frac{T_0 + mz}{m}\right) + \tilde{c} \Rightarrow p(z) = c\left(\frac{T_0 + mz}{m}\right)^{-g/mR}$$

Presión conocida en $z = 0$ $\rightarrow p(z=0) = p_0 = c\left(\frac{T_0}{m}\right)^{-g/mR} \Rightarrow c = p_0\left(\frac{m}{T_0}\right)^{-g/mR}$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_0\left(\frac{T_0 + mz}{T_0}\right)^{-g/mR}}$$

La presión disminuye un 11% a 1000m de altura

Definiciones

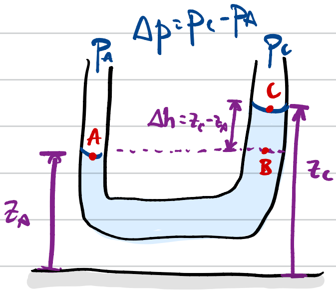
Peso específico: es la relación entre el peso y el volumen de un fluido $\gamma = \rho g$

Presión absoluta: es la presión medida usando el vacío absoluto como referencia y, por lo tanto, $p > 0$ siempre.

Presión relativa: es la presión calculada relativo a una referencia diferente, como $p - p_0$, y si puede ser negativa.

Manómetros

Son dispositivos que se usa para medir presión relativa entre dos puntos en un fluido. Un diseño simple consiste en un tubo en forma de U lleno de un líquido como agua o alcohol.



La presión en dos puntos que se encuentran a la misma altura y conectados por un único fluido es la misma $\Rightarrow p_A = p_B$

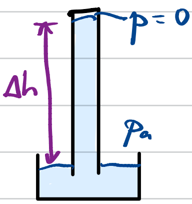
Usando la ley hidrostática $p_C = p_B - \underbrace{\rho g}_{\gamma} \Delta h$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta p = -\gamma \Delta h}$$

Mientras más diferencia de altura gana el punto C con respecto al punto A, menor es la presión en C relativa a la presión en A.

Barómetros

Son dispositivos que miden la presión atmosférica absoluta. Usualmente consisten en un tubo que tiene un extremo cerrado con una presión cercana a la de un vacío completo ($p \approx 0$) y está lleno de un fluido que está en contacto con la atmósfera en el extremo abierto.



$$p_a = \gamma \Delta h$$

el peso específico del fluido determina el tamaño necesario del barómetro para medir una determinada presión.

Para medir la presión atmosférica usando agua, necesitaríamos $\Delta h \approx 10$ m. Con mercurio $\Delta h = 0.76$ m

La paradoja hidrostática

La presión hidrostática generada por una columna de fluido sólo depende de la altura de la columna y no de la cantidad de fluido.

El barril de Pascal

video en youtube