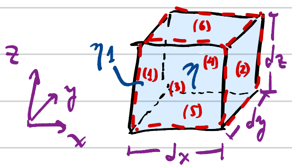
Leyes de conservación diferenciales

Las herramientas de análisis global cubiertas hasta este punto nos permiten entender los efectos integrales en un flujo de fluido. Para describir la evolución del flujo mismo necesitamos ecuaciones diferenciales.

En este capítulo realizaremos un análisis puntual para derivar las leyes de conservación de masa y momentum en su forma diferencial — las ecuaciones de movimiento para un fluido.

Para lograr esto haremos balances integrales sobre un volumen de control que corresponde a un elemento de fluido cúbico e infinitesimal con lados de largo dx, dy, dz.



Dado el valor de una cantidad $\eta(x,y,z)$ en el centro del cubo, aproximaremos su valor sobre las caras usando una expansión en serie de Taylor de 1er orden.

Por ejemplo: $\eta(x+\frac{dx}{2},y,z) \simeq \eta(x,y,z) + \left.\frac{\partial \eta}{\partial x}\right|_{x,y,z} (dx/2)$

Luego, los valores sobre todas las caras son aproximados como

(1) $(x-dx/2, y, z) \rightarrow \eta_1 \simeq \eta - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{dx}{2}$, (2) $(x+dx/2, y, z) \rightarrow \eta_2 \simeq \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{dx}{2}$

(3) $(x, y-dy/2, z) \rightarrow \eta_3 = \eta - \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{dy}{2}$, (4) $(x, y+dy/2, z) \rightarrow \eta_4 \simeq \eta + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{dy}{2}$

(5) $(x, y, z-dz/2) \rightarrow \eta_5 \simeq \eta - \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{dz}{2}$, (6) $(x, y, z+dz/2) \rightarrow \eta_6 \simeq \eta + \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{dz}{2}$

Adicionalmente, consideraremos un campo de velocidad $\underline{u} = u\underline{i} + v\underline{j} + w\underline{k}$

Conservación de masa

El balance integral de masa para el volumen de control es

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\int_{VC} \rho \, dV}_{\rho\, dx\, dy\, dz} + \sum_{i=1}^{6} \int_{SC_i} \rho \underline{u}\cdot\underline{n}\, dA = 0$$

$$\Longleftrightarrow \; dx\,dy\,dz \frac{\partial \rho}{\partial t} + dy\,dz\underbrace{[(\rho u)_2 - (\rho u)_1]}_{\star} + dx\,dz[(\rho v)_4 - (\rho v)_3] + dx\,dy[(\rho w)_6 - (\rho w)_5]$$

$$\star = \cancel{\rho u} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2} - \cancel{\rho u} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{dx}{2} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx$$

Repitiendo de manera análoga en las direcciones y, z, obtenemos

$$dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}_{\nabla\cdot(\rho \underline{u})}\right) = 0$$

Dividiendo por $dx\,dy\,dz$ obtenemos la ecuación de continuidad

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{u}) = 0} \Longleftrightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla\cdot u) = 0$$

Esta ecuación es válida para flujo compresible. Para el caso incompresible la densidad no varía a lo largo de la trayectoria de las partículas de fluido

esto no implica densidad constante, puede haber estratificación por ejemplo.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\nabla\cdot u = 0}$$

Ec. de continuidad incompresible

Conservación de momentum

El balance integral de momentum en el volumen de control es

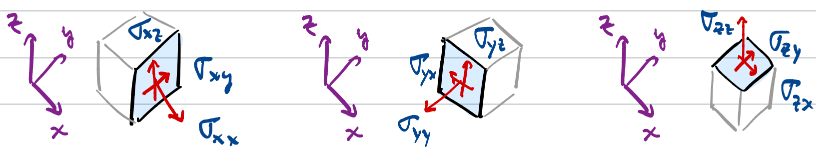
fuerzas de cuerpo $\underline{f}_b = f_x\underline{i} + f_y\underline{j} + f_z\underline{k}$

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \underline{u}\, dV + \int_{SC} \rho \underline{u}(\underline{u}\cdot\underline{n})\, dA = \int_{VC} \rho \underline{f}_b\, dV + \int_{SC} \underline{f}_s\, dA,$$

fuerzas de superficie

Para encontrar una ecuación lo más general posible, vamos a conciderar fuerzas de superficie diferentes en cada cara con componentes en todas las direcciones.

Llamaremos σ_{xy} a un esfuerzo en la dirección y que actúa sobre una cara con normal en la dirección de x.



Estos esfuerzos combinan los efectos de la presión (en las componentes normales a las superficies) con los esfuerzos viscosos relacionados con los gradientes de velocidad. Estos dependen del flujo y, por consecuencia, de la posición.

Por lo tanto, aproximaremos sus valores en las SC usando la serie de Talyor mencionada anteriormente.

Para realizar la derivación de forma cuidadosa, haremos el balance en una componente a la vez.

El balance según x queda

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)\,dx\,dy\,dz + \underbrace{[(\rho u^2)_2-(\rho u^2)_1]}_{\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}dx}dy\,dz + \underbrace{[(\rho uv)_4-(\rho uv)_3]}_{\frac{\partial}{\partial y}(\rho uv)\,dy}dx\,dz + \underbrace{[(\rho uw)_6-(\rho uw)_5]}_{\frac{\partial}{\partial z}(\rho uw)\,dz}dx\,dy$$

$$= \rho f_x\,dx\,dy\,dz + \underbrace{[(\sigma_{xx})_2-(\sigma_{xx})_1]}_{\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dx}dy\,dz + \underbrace{[(\sigma_{yx})_4-(\sigma_{yx})_3]}_{\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yx}\,dy}dx\,dz + \underbrace{[(\sigma_{zx})_6-(\sigma_{zx})_5]}_{\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}dz}$$

Podemos eliminar el factor $dx\,dy\,dz$ a ambos lados. El lado izquierdo se puede simplificar aún más usando la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw)$$

$$= \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \underbrace{u\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + u\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + u\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}_{=0} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \rho w\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \rho w\frac{\partial u}{\partial z} = \rho\frac{Du}{Dt}.$$

Si introducimos la notación $\underline{\sigma_x} = \sigma_{xx}\underline{i} + \sigma_{yx}\underline{j} + \sigma_{zx}\underline{k}$, en el lado derecho de la ecuación obtenemos

$$\rho f_x + \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zx} = \rho f_x + \nabla\cdot\underline{\sigma_x},$$

con lo que llegamos a $\quad \rho\frac{Du}{Dt} = \nabla\cdot\underline{\sigma_x} + \rho f_x,$

y, de manera análoga, en las otras componentes tenemos

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \nabla\cdot\underline{\sigma_y} + \rho f_y\,, \qquad \rho\frac{Dw}{Dt} = \nabla\cdot\underline{\sigma_z} + \rho f_z$$

Podemos unir las tres ecuaciones en una sola ecuación vectorial

divergencia de un tensor

$$\rho \frac{D}{Dt}\underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{\underline{u}} = \rho \underbrace{\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}}_{\underline{f_b}} + \begin{bmatrix} \nabla \cdot \underline{\sigma_x} \\ \nabla \cdot \underline{\sigma_y} \\ \nabla \cdot \underline{\sigma_z} \end{bmatrix} \sim \nabla \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\sigma_x} & \underline{\sigma_y} & \underline{\sigma_z} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{\sigma}}}$$

concatenamos los tres vectores en una matriz o tensor

Este último es conocido como el tensor de esfuerzos

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Finalmente, obtenemos la ecuación conocida como

Ecuación de momentum de Cauchy $\quad \rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{f_b}$

¡Esta ecuación no es cerrada!

No podemos resolver la ecuación en esta forma para encontrar $\underline{u}(t, \underline{x})$.

Necesitamos una ecuación constitutiva que nos diga como depende $\underline{\underline{\sigma}}$ de $\nabla \underline{u}$.