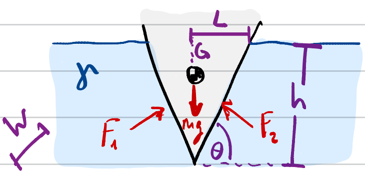
Cuerpos sumergidos y flotantes

Principio de Arquímides

Vimos anteriormente que la fuerza vertical que actúa sobre una pared inclinada o curva es igual al peso del volumen de agua soportado y que esta fuerza actúa a lo largo del centroide de este volumen.

Consideremos un bote con forma de "V" que pesa mg y que flota en agua.



En cada lado tenemos una fuerza resultante debido a la presión: $\underline{F_1} = F_x \underline{i} + F_y \underline{k}$, $\underline{F_2} = -F_x \underline{i} + F_y \underline{k}$

$$F_x = \gamma \frac{h^2}{2}, \quad F_y = \gamma W h^2 / 2\tan\theta = \gamma W \frac{hL}{2}$$

La suma de ambas contribuciones es la fuerza de empuje

$$\underline{E} = \underline{F_1} + \underline{F_2} = (F_x - F_x)\underline{i} + (F_y + F_y)\underline{k} \Rightarrow \underline{E} = 2F_y \underline{k} = \gamma \underbrace{WhL}_{V} \Rightarrow E = \gamma V$$

La fuerza de empuje es igual al peso del volumen de fluido desplazado y actúa a través del centroide del mismo volumen.

Si el barco está en equilibrio estático $E = mg \Rightarrow$

Un cuerpo en flotación (sumergido o semi-sumergido) pesa lo mismo que el volumen de fluido que desplaza.

Este es el principio de Arquímides.

Estabilidad de cuerpos flotantes

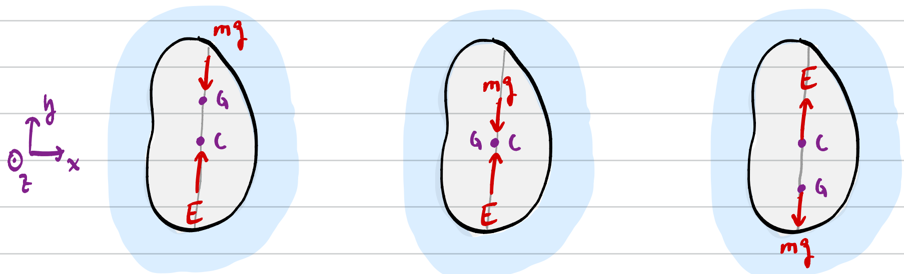
Analizaremos bajo qué condiciones el balance estático es robusto frente a pequeñas perturbaciones en la orientación del cuerpo.

Solo hay dos fuerzas que actúan sobre el cuerpo: mg en C, E en G

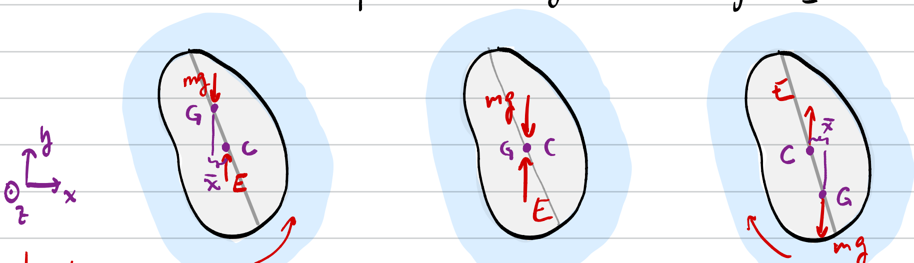
G: Centro de gravedad (o de masa) del cuerpo

C: Centroide (centro geométrico) del volumen de fluido desplazado.

Cuerpos sumergidos



Consideremos una perturbación angular en el eje $z\underline{k}$.

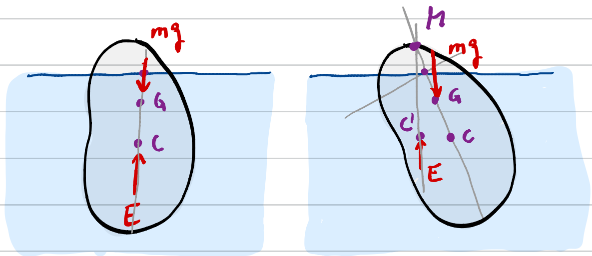


Momento c/r a z en G	$M_G = \bar{x}E\underline{k}$	$M_G = 0$	$M_G = -\bar{x}E\underline{k}$
perturbación	crece	se mantiene	decrece
configuración	inestable	neutral	estable

$\therefore$ el equilibrio es estable $\Longleftrightarrow$ G está abajo de C

Cuerpos semi-sumergidos

Un cuerpo que flota estando parcialmente sumergido puede estar en un equilibrio estable incluso si G está arriba de C.



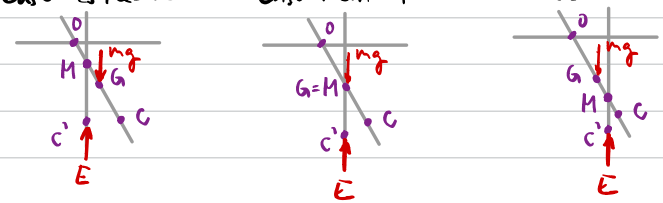
¡Cambia el centroide del volumen desplazado!

M : metacentro

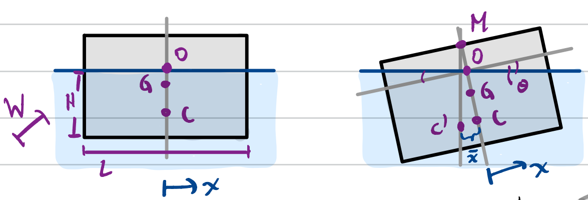
$\overline{GM} = \overline{CM} - \overline{CG}$ altura metacéntrica

El equilibrio será estable si $\overline{CG} < \overline{CM} \iff \overline{GM} > 0$

Caso estable | Caso neutral | Caso inestable



Para un cuerpo simétrico c/r al eje z, cuya forma varía suavemente



Aumenta el área sumergida a un lado y disminuye en la misma cantidad al otro.

Calculemos $\bar{x}$:
$$\bar{x}V = \int_V x\,dV = \int_{-L/2}^{L/2} WLx\,dx + \int_{-L/2}^{0} Wx^2\tan\theta\,dx - \int_{0}^{L/2} Wx^2\tan\theta\,dx$$

$$\Rightarrow \bar{x}V = 0 + \tan\theta \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} x^2 W\,dx} = \tan\theta\, I_0 \Rightarrow \overline{CM} = \frac{\bar{x}}{\tan\theta} = \frac{I_0}{V} \Rightarrow \boxed{\overline{GM} = \frac{I_0}{V} - \overline{CG}}$$

I_0, momento de inercia c/r a O de la huella de la línea de flotación