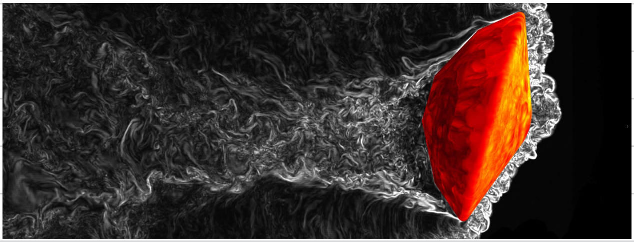
Mecánica de fluidos computacional



Flujo hipersónico sobre vehículo de entrada, descenso y aterrizaje en Marte.

Simulación realizada por A.A. Alvarez y A. Lozano-Durán de MIT y Caltech.

Si un problema de mecánica de fluidos no es tratable analíticamente podemos simularlo, es decir, usar un computador para resolver una versión discreta del problema continuo usando métodos numéricos.

Para esto, debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones generales.

- **Definición del problema:** claridad de objetivo, física dominante y escalas espaciales y temporales relevantes.

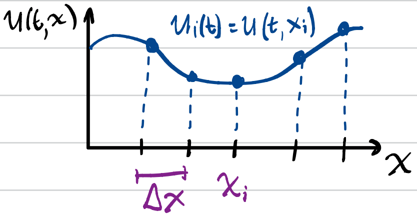
- **Representación continua:** ecuaciones gobernantes, dominio de solución, condiciones de borde e inicial, parámetros, cantidades de interés

- **Representación discreta:** método de discretización espacial y temporal, requerimientos de resolución Δt y Δx, algoritmo de solución, precisión, estabilidad y eficiencia.

- **Resultados de simulación:** verificación de convergencia, validación de realismo físico, cuantificación de incertidumbre, postprocesamiento y análisis de datos, y visualización y comunicación de resultados.

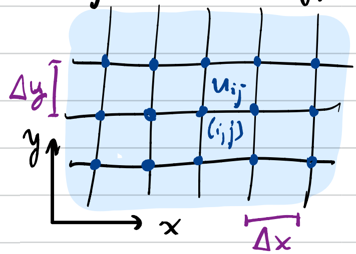
Representación discreta

Discretización espacial



en 2D

$u_{ij}(t) = u(t, x_i, y_j)$



Al discretizar el espacio: $x \to \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $u(t,x) \to \underline{q}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$,

Problema continuo (EDP) $\qquad$ Problema semi-discreto (EDO)

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) \longrightarrow \frac{d\underline{q}}{dt} = \underline{f}(t, \underline{q})$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ f_n(t, u_1, \dots, u_n) \end{bmatrix}$$

Intercambiamos una EDP en un sistema de n EDOs.

Para pasar de $F \to \underline{f}$ tenemos que poder representar las derivadas de u en los x_i en términos de los u_i. Existe una una gran variedad de métodos para lograr esto.

Luego, si estamos interesados en el caso de flujo permanente, buscamos $\underline{q}^*$ tal que $\underline{f}(\underline{q}^*) = \underline{0}$, que podemos resolver usando métodos iterativos. Para el caso impermanente, donde nos interesa la evolución temporal del flujo, debemos resolver la EDO con algún método de discretización temporal.

Por ejemplo en Matlab $\quad$ `>> q* = fsolve(f, q0);` $\quad$ `>> q(t) = ode45(f, t, q0);`

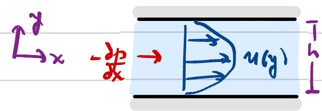
flujo permanente $\qquad$ evolución temporal

Las derivadas son operadores lineales, por lo que su representación discreta corresponde a una matriz. Un operador, por ej. $\frac{\partial}{\partial x}()$, actúa sobre una función $u(x)$. Una matriz actúa sobre un vector $\underline{q}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\partial u/\partial x)_1 \\ \vdots \\ (\partial u/\partial x)_n \end{bmatrix}}_{\partial u/\partial x} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}}_{D,\ \text{entradas dependen del método numérico}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}}_{\underline{q}}, \quad \text{con } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_i}$$

Distintos métodos de dicretización tienen formas distintas de aproximar derivadas en función de los valores locales y vecinos de u.

Ejemplo: flujo de Pouiseuille



Vamos a considerar el flujo paralelo y permanente gobernado por el siguiente problema continuo

$$0 = -\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\mu K \text{ (constante)}} + \mu \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\partial \tau/\partial y}, \quad u(-h/2) = u(h/2) = 0$$

La solución analítica para este caso es

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \mu K \Rightarrow \tau = \mu \frac{du}{dy} = \mu K y + \tilde{a} \Rightarrow u(y) = \frac{Ky^2}{2} + ay + b$$

$$u(-h/2) = \frac{Kh^2}{8} - \frac{ah}{2} + b, \quad u(h/2) = \frac{Kh^2}{8} + \frac{ah}{2} + b \Rightarrow a = 0, \ b = -\frac{K}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$\therefore \boxed{u(y) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{h}{2}\right)^2\left(1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right)}$$

Ahora, si discretizamos el espacio

$$y \in [0,h] \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad u(t,y) \longrightarrow \underline{q}(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \longrightarrow D_2 = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

obtenemos el siguiente problema discreto $D_2 \underline{q} = \mu K$, $u_1 = u_n = 0$,

donde tenemos una ecuación matricial para los puntos interiores del dominio $u_2, \ldots, u_{n-1}$, y las condiciones de borde para los puntos extremos u_1 y u_n.

Luego, el problema se puede reescribir de la forma

incógnitas

$$A\underline{q} = \underline{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & & d_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & d_{n-1,2} & & d_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu K \\ \vdots \\ \mu K \\ 0 \end{bmatrix}$$

contiene info de c.b.s y términos fuente

La ec. en la fila i corresponde a la ec. gobernante evaluada en x_i (balance de momentum para u_i)

La solución al problema discreto es

$$\underline{q} = A^{-1}\underline{b},$$

y la podemos obtener en Matlab mediante

```
>> q = A\b;
```

Diferencias finitas

Definición de derivada $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

La aproximación de $f(x+\Delta x)$ usando una serie de Taylor nos entrega esquemas de diferencia finitas.

La derivada en x_i depende de $u(x_i)$ y sus vecinos

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} = F(\ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots)$$

Existen muchísimas variantes. Nos vamos a enfocar en

- espaciado uniforme $\Rightarrow$ $x_{i+1} - x_i = \Delta x \quad \forall i$
- esquemas de 2do orden $\Rightarrow$ error $\sim O(\Delta x^2)$

esquema central

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \qquad \left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2}$$

hacia adelante

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} \approx \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2\Delta x} \qquad \left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i} \approx \frac{2u_i - 5u_{i+1} + 4u_{i+2} - u_{i+3}}{\Delta x^2}$$

hacia atrás

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x_i} \approx \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 3u_i}{2\Delta x} \qquad \left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x_i} \approx \frac{-u_{i-3} + 4u_{i-2} - 5u_{i-1} + 2u_i}{\Delta x^2}$$