Leyes de conservación integrales

Las leyes de conservación son reglas que describen la tasa de cambio de cantidades físicas de interés.

Para un medio contínuo, estas leyes pueden ser expresadas en términos de variables extensivas N, o de variables intensivas η, resultando en leyes integrales o diferenciales mediante balances de conservación global o puntual, respectivamente.

Las variables extensivas son aquellas que dependen de la cantidad de materia y las intensivas son aquellas que no lo hacen, de tal manera que

$$\underbrace{N}_{\text{variable extensiva}} = \int_{\underbrace{MC}_{\text{masa de control}}} \underbrace{\eta}_{\text{variable intensiva}} \, dm = \int_{CV} \rho \eta \, dV$$

Las variables extensivas e intensivas que nos interesan en mecánica de fluidos son

	N	η
Masa	m	1
Momentum	$\underline{P}$	$\underline{u}$
Momento angular	$\underline{H}$	$\underline{r} \times \underline{u}$
Energía	E	$e = \underbrace{\hat{u}}_{\text{energía interna}} + \underbrace{\frac{1}{2}\lvert\underline{u}\rvert^2}_{\text{energía cinética}}$

Para un sistema cerrado, siguiendo el movimiento de una masa de control, la evolución de estas variables está gobernada por las siguientes leyes de conservación integrales:

Conservación de masa
(ecuación de continuidad)

$$\left[\frac{dm}{dt}\right]_{MC} = 0$$

Conservación de momentum
(2da ley de Newton)

$$\left[\frac{d\underline{P}}{dt}\right]_{MC} = \underline{F}$$

suma de fuerzas externas que actúan sobre el sistema

Conservación de momento angular
(ec. de dinámica rotacional)

$$\left[\frac{d\underline{H}}{dt}\right]_{MC} = \underline{M}$$

suma de momentos externos que actúan sobre el sistema

Conservación de energía
(1ra ley de la termodinámica)

$$\left[\frac{dE}{dt}\right]_{MC} = \dot{Q} + \dot{W}$$

trabajo ejercido sobre el sistema

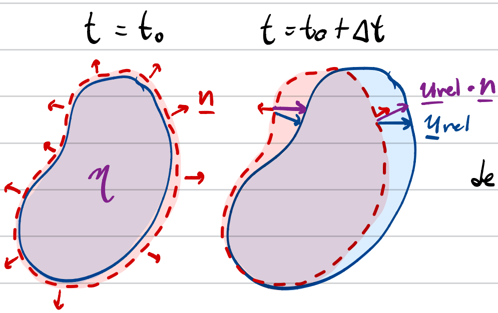
calor transferido al sistema

Estas leyes son válidas para un sistema cerrado, es decir, consideran balances de cantidades sobre las trayectorias de una cantidad fija de partículas y, por lo tanto, corresponden a una descripción desde el punto de vista de Lagrange.

En mecánica de fluidos es más cómodo adoptar el punto de vista de Euler y trabajar con un sistema abierto o volumen de control.

MC —
Masa de control

VC - -
Volumen de control



$$N = \int_{MC} \rho \eta \, dV$$

Flujo neto de N a través de la superficie de control SC

$$\int_{SC} \rho \eta \, \underline{u}_{rel} \cdot \underline{n} \, dA$$

Teorema de transporte de Reynolds

El TTR nos permite expresar la tasa de cambio de N en una masa de control, $\frac{d}{dt}[\,]_{MC}$, a partir de η en el respectivo volumen de control, VC, y $\underline{u}_{rel}$ en la superficie de dicho volumen, SC.

La velocidad $\underline{u}_{rel}$ corresponde a la velocidad relativa entre la velocidad del fluido $\underline{u}$ y la de la SC en el caso en que el VC se mueve o se deforma.

$$\underbrace{\left[\frac{dN}{dt}\right]_{MC}}_{\substack{\text{tasa de cambio}\\ \text{de } N \text{ en la MC}\\ \text{(leyes de conservación)}}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho\eta\, dV}_{\substack{\text{tasa de cambio}\\ \text{de } N \text{ en el VC}}} + \underbrace{\int_{SC} \rho\eta\, \underline{u}_{rel}\cdot\underline{n}\, dA}_{\substack{\text{flujo neto de } N\\ \text{a través de la SC}}}$$

Ahora podemos reemplazar $\left[\frac{dN}{dt}\right]_{MC}$ en nuestras leyes de conservación y expresarlas en términos de cantidades en un volumen de control:

Conservación de masa
(ecuación de continuidad)

$$\frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\, dV + \int_{SC} \rho\, \underline{u}_{rel}\cdot\underline{n}\, dA = 0$$

Conservación de momentum
(2da ley de Newton)

$$\frac{d}{dt}\int_{CV} \rho\underline{u}\, dV + \int_{SC} \rho\underline{u}\, \underline{u}_{rel}\cdot\underline{n}\, dA = \underline{F}$$

Conservación de momento angular
(ec. de dinámica rotacional)

$$\frac{d}{dt}\int_{CV} \rho(\underline{r}\times\underline{u})\, dV + \int_{SC} \rho(\underline{r}\times\underline{u})\, \underline{u}_{rel}\cdot\underline{n}\, dA = \underline{H}$$

Conservación de energía
(1ra ley de la termodinámica)

$$\frac{d}{dt}\int_{CV} \rho e\, dV + \int_{SC} \rho e\, \underline{u}_{rel}\cdot\underline{n}\, dA = \dot{Q} + \dot{W}$$

Conexión con la derivada material

Si el volumen de control está fijo ($\underline{u}_{rel} = \underline{u}$) y coincide con la posición inicial de la masa de control, entonces para un fluido incompresible ($\nabla \cdot \underline{u} = 0$) se tiene que

¡obtenemos el TTR!

$$\left[\frac{dN}{dt}\right]_{MC} = \int_{VC} \underbrace{\frac{D}{Dt}(\rho\eta)}_{} \, dV = \int_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\eta) + \underbrace{(\underline{u}\cdot\nabla)(\rho\eta)}_{}\right] dV = \overbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} \rho\eta \, dV + \int_{SC} \rho\eta\,\underline{u}\cdot\underline{n}\, dA}$$

tasa de cambio de $\rho\eta$ para partículas que inicialmente están en el VC

acá usamos $(\underline{u}\cdot\nabla)(\rho\eta) = \nabla\cdot(\rho\eta\underline{u}) - \rho\eta(\cancel{\nabla\cdot\underline{u}})$ y el teorema de la divergencia de Gauss

$$\int_{VC} \nabla\cdot f \, dV = \int_{SC} f\cdot\underline{n}\, dA$$