

Conservación de energía

Para un volumen de control, la ecuación de conservación de energía es

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} p e dV + \int_{SC} p e (\underline{M} \cdot \underline{n}) dA = \dot{Q} + \dot{W} \sim \text{trabajo realizado sobre el sistema}$$

tasa de cambio de energía acumulada en el VC flujo neto de energía que entra a través de la SC tasa de transferencia de calor hacia el sistema

La energía total por unidad de masa se puede separar en

$$e = \bar{u} + \frac{1}{2} |\underline{u}|^2$$

/ \sim
energía interna energía cinética
(depende de T)

Tanto la potencia térmica \dot{Q} como el trabajo \dot{W} pueden ser añadidos a través de flujos superficiales o de manera distribuida al interior del volumen.

$$\dot{Q} = \int_{VC} \rho \dot{g} dV + \int_{SC} \dot{q} \cdot \underline{n} dA$$

/ \sim
generación de potencia térmica por unidad de volumen flujo de tasa de transferencia de calor

$$\dot{W} = \int_{VC} \rho f_b \cdot \underline{u} dV + \int_{SC} f_s \cdot \underline{u} dA + W_{shaft}$$

/ \sim
trabajo realizado por fuerzas de campo trabajo realizado por fuerzas de superficie potencia mecánica entregada o extraída (bomba o turbina)

Por su relevancia en aplicaciones de ingeniería, incorporaremos directamente el efecto de la presión y la gravedad

$$f_s = -p \underline{n}, \quad f_b = -g \underline{k} = -\nabla(gz) \quad \text{veremos que es conveniente expresar } f \text{ como el gradiente de un potencial!}$$

Además, despreciaremos el trabajo realizado por los esfuerzos viscosos, y que, debido a la condición de no deslizamiento térmico casi siempre es cero.

Luego, el trabajo añadido al sistema toma la siguiente forma

$$\dot{W} = \int_{VC} -p \nabla(gz) \cdot \underline{u} dV + \int_{SC} -p \underline{n} \cdot \underline{u} dA$$

La primera integral requiere un poco más de trabajo

$$-\int_{VC} p \underline{u} \cdot \nabla(gz) dV = -\int_{VC} \nabla \cdot (pgz \underline{u}) dV + \int_{VC} g z \nabla \cdot (p \underline{u}) dV$$

podemos aplicar el teorema de la divergencia de Gauss

$-\frac{\partial p}{\partial t}$ (continuidad, lo veremos más adelante)

$$\Rightarrow -\int_{VC} p \underline{u} \cdot \nabla(gz) dV = -\int_{SC} pgz(\underline{u} \cdot \underline{n}) dA - \frac{d}{dt} \int_{VC} pgz dV$$

podemos sacar la derivada para un VC fijo.

$$\Rightarrow \dot{W} = -\frac{d}{dt} \int_{VC} pgz dV - \int_{SC} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + gz \right) \rho \underline{u} \cdot \underline{n} dA + \dot{W}_{\text{externo}}$$

Juntando todo, obtenemos la siguiente ecuación de conservación de energía para un volumen de control fijo

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\hat{u} + \frac{1}{2} |u|^2 + gz \right) dV + \int_{SC} \left(\hat{u} + \frac{1}{2} |u|^2 + gz + p/\rho \right) \rho u \cdot n dA = \dot{Q} + \dot{W}_{shaft}$$

Usualmente, en un primer curso de mecánica de fluidos se agrupan los términos de energía interna y transferencia de calor en un solo término de "pérdidas de energía"

$$-loss = \dot{Q} - \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \hat{u} dV - \int_{SC} \rho u \cdot n dA$$

Estas "pérdidas" incluyen el efecto de la disipación viscosa que genera cambios en la energía interna o intercambio térmico debido al roce del fluido con superficies o consigo mismo.

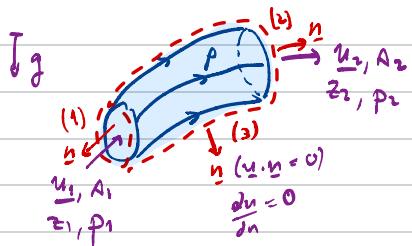
Considerando esto, la versión de la ec. de energía que usaremos en este curso es

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} \rho \left(\frac{1}{2} |u|^2 + gz \right) dV + \int_{SC} \left(\frac{1}{2} |u|^2 + gz + p/\rho \right) \rho u \cdot n dA = \dot{W}_{shaft} - loss$$

A continuación se discuten algunos ejemplos y casos particulares.

Tubo de corriente

Supuestos:



- Flujo permanente
- Flujo 1D (uniforme en las direcciones transversales a las líneas de corriente)
- Flujo incompresible
- Sin trabajo realizado por o sobre el sistema $W_{shaft} = 0$
- Sin pérdidas por fricción

Por conservación de masa $u_1 A_1 = u_2 A_2 = Q$ (Flujo volumétrico)

La ecuación de energía queda

$$\cancel{\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + gz \right) dV}^0 + \int_S \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + gz + \frac{p}{\rho} \right) u \cdot n dA = \cancel{W_{shaft}}^0 - \cancel{loss}^0$$

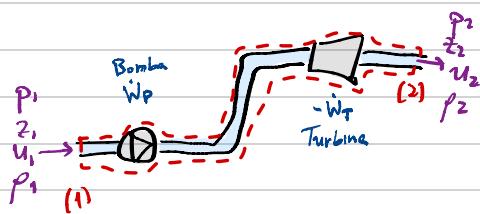
$$\Rightarrow -\rho \underbrace{u_1 A_1}_{\text{pq = m}} \left(\frac{1}{2} u_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} \right) + \rho \underbrace{u_2 A_2}_{n} \left(\frac{1}{2} u_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho} \right) = -loss$$

$$\frac{u_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{u_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}$$

Esta expresión es idéntica a la famosa ecuación de Bernoulli que derivaremos más adelante en un contexto diferente y con otros supuestos.

Tuberías y canales

Supuestos:



- Flujo permanente
- Flujo 1D

Por conservación de masa $\rho_1 A_1 u_1 = \rho_2 A_2 u_2 = \dot{m}$

La ecuación de energía es

$$\frac{d}{dt} \int_{Vc} \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + gz \right) dV + \int_{sc} \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + gz + \frac{p}{\rho g} \right) u \cdot n dA = \dot{W}_{shaft} - \text{loss}$$

$$\Rightarrow -\dot{m} \left(\frac{u_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1 g} \right) + \dot{m} \left(\frac{u_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2 g} \right) = W_p - W_t - \text{loss}$$

Dividimos por $\dot{m} g$, definimos $H_p = W_p / \dot{m} g$, $H_t = W_t / \dot{m} g$, $h_L = \text{loss} / \dot{m} g$, y obtenemos

$$\frac{\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1 g} + z_1 + H_p}{2g} + z_2 + H_t = \frac{\frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2 g} + z_2 + H_t + h_L}{2g}$$

¡Todos los términos tienen unidades de longitud!
(también se pueden expresar en unidades de presión)

A lo largo de una tubería o canal podemos graficar

z : cota o altura geométrica

h_L : pérdida de carga

$u^2/2g$: altura de velocidad

H_t : altura de la turbina

$p/\rho g$: altura de presión

H_p : altura de la bomba

$z + p/\rho g$: altura piezométrica

Hacia el final del curso tendremos más herramientas para estimar h_L y revisitaremos esta aplicación.

Selección de bombas y turbinas

Para seleccionar estos equipos tenemos que tomar en cuenta sus eficiencias η_P y η_T respectivamente.

$$\eta_P = \frac{\dot{W}_P}{\tilde{\dot{W}}_P} \sim \text{potencia entregada al fluido}$$

$\tilde{\dot{W}}_P \sim$ potencia consumida por la bomba

$$\eta_T = \frac{\tilde{\dot{W}}_T}{\dot{W}_T} \sim \text{potencia generada por la turbina}$$

$\dot{W}_T \sim$ potencia extraída del fluido

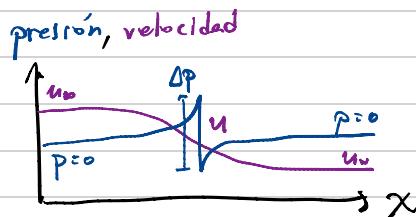
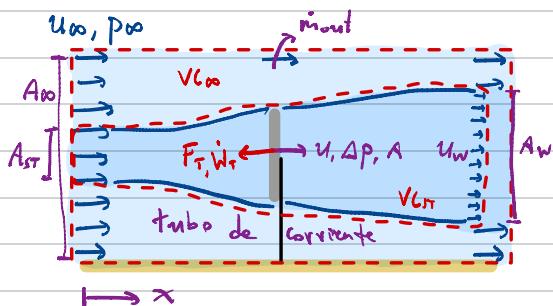
Por lo tanto, si a partir de la ec. de energía calculo \dot{W}_P y \dot{W}_T , entonces necesito una bomba/turbina que consume/gere

$$\tilde{\dot{W}}_P = \frac{\dot{W}_P}{\eta_P}, \quad \tilde{\dot{W}}_T = \eta_T \dot{W}_T$$

Límite teórico para la extracción de potencia del viento

Vamos a calcular la máxima potencia que puede ser extraída del viento con una turbina eólica.

Para esto usaremos las leyes de conservación integrales sobre dos volúmenes de control



Supuestos:

- Flujo permanente
- Flujo 1D
- Flujo incompresible
- Sin pérdidas viscosas (inviscid o irrotacional)
- Turbina modelada como un disco actuador*
- La presión cae de manera discontinua

* La turbina se asume infinitesimalmente delgada, y la fuerza y potencia sobre el rotor constantes y calculadas como

$$F_T = \Delta p A \Rightarrow W_T = F_T u = \Delta p A u$$

Queremos encontrar los coeficientes de empuje (thrust) y de potencia definidos como

$$C_T = \frac{F_T}{\frac{1}{2} \rho A u_{\infty}^2}, \quad C_P = \frac{\dot{W}_T}{\frac{1}{2} \rho A u_{\infty}^3},$$

en función del factor de inducción $a = \frac{u_w - u}{u_{\infty}} \quad (\Rightarrow \frac{u}{u_{\infty}} = 1 - a)$.

Para esto primero realizamos balances de masa y energía en el volumen de control que contiene el tubo de corriente

Masa en VC_{st} $-\rho u_{\infty} A_{\infty} + \rho u_w A_w = 0 \Rightarrow \rho u_{\infty} A_{\infty} = \rho u_w A_w = m \quad (= \rho u A)$

Energía en VC_{st} $-\cancel{\rho u_{\infty} A_{\infty} \left(\frac{u_{\infty}^2}{2} + \frac{p_{\infty}}{\rho} \right)} + \cancel{\rho u_w A_w \left(\frac{u_w^2}{2} + \frac{p_w}{\rho} \right)} = -\dot{W}_T \Leftrightarrow \frac{m}{2} \cancel{(u_{\infty}^2 - u_w^2)} = \dot{W}_T \quad \frac{m}{2} \cancel{(u_{\infty} + u_w)(u_{\infty} - u_w)} = F_T u$

$$\Rightarrow m(u_{\infty} - u_w) \left(\frac{u_{\infty} + u_w}{2} \right) = F_T u \quad \textcircled{1}$$

Ahora realizamos balances de masa y momentum seguidos en el volumen de control grande

Masa en VC_{oo} $-\cancel{\rho u_{\infty} A_{\infty}} + m_{out} + \rho u_{\infty} (A_{\infty} - A_w) + \cancel{\rho u_w A_w} = 0 \Rightarrow m_{out} = \rho u_{\infty} A_w - m$

Momentum-x en VC_{oo} $-\cancel{\rho u_{\infty}^2 A_{\infty}} + \cancel{m_{out} u_{\infty}} + \rho u_{\infty}^2 (A_{\infty} - A_w) + \cancel{\rho u_w^2 A_w} = -F_T + \cancel{\rho A_{\infty} - \rho A_w}$

$$\Rightarrow \cancel{\rho u_{\infty}^2 A_w} - m_{out} - \cancel{\rho u_{\infty}^2 A_w} + m_{out} = -F_T \Rightarrow m(u_{\infty} - u_w) = F_T \quad \textcircled{2}$$

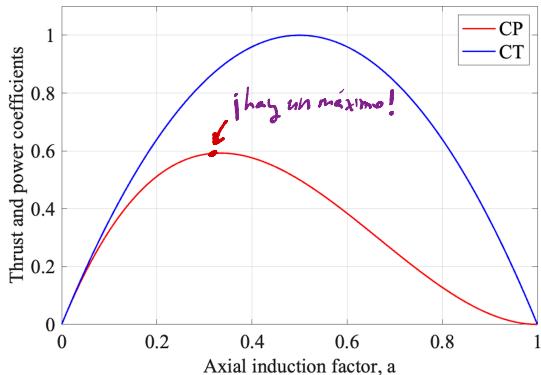
Dividiendo $\textcircled{2}/\textcircled{1}$ obtenemos $u = (u_{\infty} + u_w)/2 \Rightarrow u_w = 2u - u_{\infty}$

Ahora podemos reemplazar u_w en ① $\Rightarrow 2m(u - u_\infty) = F_T$
 y dividimos por $\frac{1}{2} \rho A u_\infty^2$ para obtener C_T

$$C_T = \frac{F_T}{\frac{1}{2} \rho A u_\infty^2} = \frac{2 \cancel{\rho u A} (u - u_\infty)}{\cancel{\frac{1}{2} \rho A u_\infty^2}} = 4 \frac{u}{u_\infty} \frac{(u - u_\infty)}{u_\infty} \Rightarrow C_T = 4a(1-a)$$

Ahora multiplicamos por $\frac{u}{u_\infty}$ para obtener C_P

$$C_P = \frac{W_T}{\frac{1}{2} \rho A u_\infty^3} = \frac{F_T u}{\frac{1}{2} \rho A u_\infty^3} = C_T \frac{u}{u_\infty} = C_T (1-a) \Rightarrow C_P = 4a(1-a)^2$$



Existe un "tradeoff" en la extracción de potencia

$$W_T = F_T u$$

entre la fuerza ejercida sobre el rotor y el flujo másico que pasa por el mismo.

El coeficiente de inducción a determina cuanta velocidad pierde el fluido al llegar al rotor y depende del diseño de la turbina.

¿Cuál es el valor de a que maximiza la potencia extraída del viento?

Busquemos el óptimo a^* tal que $\frac{dC_p}{da} \Big|_{a^*} = 0$
(ya sabemos que hay un máximo)

$$\frac{dC_p}{da} = 4(1-a)^2 - 8a(1-a) = 12a^2 - 16a + 4 \stackrel{!}{=} 0 \quad \begin{matrix} \text{imponemos que} \\ \text{sea } 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow a^2 - \frac{4}{3}a + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow a^* = \frac{1}{3} \Rightarrow C_p^* = \frac{16}{27} \approx 59.3\%$$

Este máximo es conocido como el límite de Betz

La mayoría de los supuestos son conservadores, sin embargo, se cree que es posible superar el límite de Betz con tecnología que aproveche un flujo inestacionario.