Conservación de momentum

Para un volumen de control, la ecuación de conservación de momentum es

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho \underline{u}\, dV}_{\text{tasa de cambio del momentum acumulado en el VC}} + \underbrace{\int_{SC} \rho \underline{u}(\underline{u}_{rel}\cdot\underline{n})\, dA}_{\text{flujo neto de momentum que entra a través de la SC}} = \underline{F}$$

suma de fuerzas externas

- Esta es una ecuación vectorial, es decir podemos reescribirla como un balance separado para cada componente.

- Las fuerzas externas pueden ser fuerzas de cuerpo que actúan distribuidas sobre un volumen o fuerzas de superficie (esfuerzos) que actúan distribuidas sobre superficies.

$$\underline{F} = \int_{VC} \rho \underline{f_b}\, dV + \int_{SC} \underline{f_s}\, dA$$

fuerza de cuerpo — esfuerzo

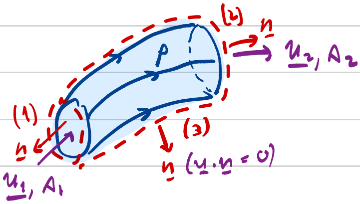
Fuerzas de cuerpo: gravedad $-g\underline{k}$, campo magnético, aceleración aparente en un marco de referencia no inercial.

Esfuerzos: presión $-p\underline{n}$ (normal), esfuerzos de corte viscosos $\tau_w \underline{t}$ (tangencial), arrastre $-D\underline{i}$, sustentación $-L\underline{k}$.

A continuación se muestran algunos ejemplos con diferentes niveles de complejidad.

Tubo de corriente

Calcule la fuerza resultante sobre el VC



Asuma régimen permanente, densidad constante, y velocidades uniformes $\underline{u}_1 = u_1(-\underline{n})$, $\underline{u}_2 = u_2\underline{n}$.

Por conservación de masa, sabemos que $u_1 A_1 = u_2 A_2 = Q$ (flujo volumétrico)

Aplicamos la ec. de conservación de momentum

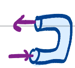
$$\cancelto{0}{\frac{d}{dt}\int_{VC}\rho \underline{u}\, dV} + \int_{SC_1}\rho\underline{u}\underbrace{(\underline{u}\cdot\underline{n})}_{-u_1}dA + \int_{SC_2}\rho\underline{u}\underbrace{(\underline{u}\cdot\underline{n})}_{u_2}dA + \int_{SC_3}\rho\underline{u}\cancelto{0}{(\underline{u}\cdot\underline{n})}\,dA = \underline{F}$$

$$\Rightarrow -\rho\,\underline{u}_1\underbrace{u_1 A_1}_{Q} + \rho\,\underline{u}_2\underbrace{u_2 A_2}_{Q} = \underline{F}$$

$$\therefore \boxed{\underline{F} = \rho Q(\underline{u}_2 - \underline{u}_1)}$$

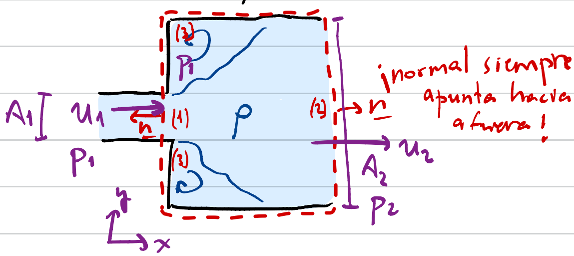
- La fuerza resultante apunta en la dirección de $\underline{u}_2 - \underline{u}_1$.
- Para una tubería, la fricción viscosa, la diferencia de presiones entre la entrada y la salida, y el peso del fluido son parte de $\underline{F}$.
- Para una tubería en "U" de sección constante

$$\underline{u}_2 = -\underline{u}_1 \Rightarrow \underline{F} = 2\rho Q\underline{u}_1$$



Ensanchamiento brusco de una tubería

Encontrar $C_p = (p_1 - p_2)/\frac{1}{2}\rho u_1^2$ en función de A_1, A_2.



Supuestos:

- Régimen permanente
- Esfuerzos viscosos despreciables
- Densidad constante
- Velocidades y presiones uniformes en entrada y salida

Por conservación de masa $u_1 A_1 = u_2 A_2 \Rightarrow u_2 = u_1 A_1 / A_2$

Las fuerzas que actúan sobre el VC son

$$\underline{F} = \int_{SC_1+SC_3} -p \cdot \overset{-\underline{i}}{\underline{n}}\, dA + \int_{SC_2} -p \cdot \overset{+\underline{i}}{\underline{n}}\, dA = (p_1 - p_2) A_2\, \underline{i}$$

Realizamos un balance de momentum en $\underline{i}$

$$\cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC} \rho u\, dV}^{\,0} + \int_{SC_1} \rho u \overbrace{(\underline{u}\cdot\underline{n})}^{-u} dA + \int_{SC_2} \rho u \overbrace{(\underline{u}\cdot\underline{n})}^{u} dA = (p_1 - p_2) A_2$$

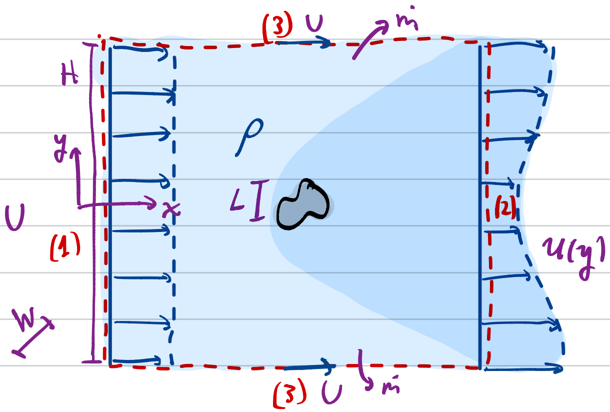
$$\Rightarrow -\rho u_1^2 A_1 + \rho u_2^2 A_2 = (p_1 - p_2) A_2$$

$$\Leftrightarrow -\rho u_1^2 A_1 + \rho u_1^2 A_1^2 / A_2 = (p_1 - p_2) A_2 \Leftrightarrow \rho u_1^2 \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - \frac{A_1}{A_2} \right) = p_1 - p_2$$

$$\Rightarrow \boxed{C_p = 2\frac{A_1}{A_2}\left(\frac{A_1}{A_2} - 1\right)}$$

Estela en el flujo sobre un cuerpo

Calcule la fuerza de arrastre D



Supuestos:

- Régimen permanente
- Densidad constante
- Superficies lo suficientemente lejos para que la p sea cte.
- Flujo uniforme U en (1) y (3)
- H tal que u(H) = U

Primero aplicamos conservación de masa: $-\rho UHW + \rho W\int_{-H/2}^{H/2} u(y)\,dy + 2\dot{m} = 0$

$$\Rightarrow 2\dot{m} = \rho UHW - \rho W\int_{-H/2}^{H/2} u(y)\,dy$$

La única fuerza que actúa es $-D\underline{i}$, luego el balance de momentum en la dirección x es

$$\cancel{\frac{d}{dt}\int_{VC}\rho u\,dV}^{\,0} + \int_{SC_1}\rho u(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA + \int_{SC_2}\rho u(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA + \overbrace{\int_{SC_3}\rho u(\underline{u}\cdot\underline{n})\,dA}^{2\dot{m}U} = -D$$

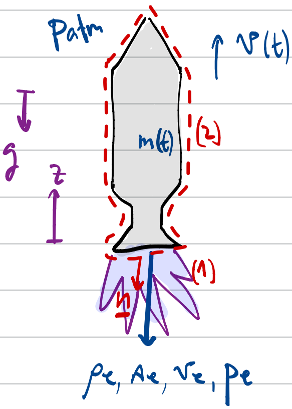
$$\Rightarrow -\cancel{\rho U^2 HW} + \rho W\int_{-H/2}^{H/2} u^2\,dy + \cancel{\rho U^2 HW} - \rho W U\int_{-H/2}^{H/2} u\,dy = -D$$

$$\therefore\ \boxed{D = \rho W\int_{-H/2}^{H/2} u(U-u)\,dy}$$

¡Podemos obtener el arrastre a partir de la dist. de vel. en la estela!

El déficit de momentum en la estela es la huella del arrastre.

La ecuación del cohete



Un cohete asciende a velocidad $v(t)$, llevando una masa de combustible $m(t)$, expulsando gases de escape con densidad ρ_e a una presión p_e y velocidad v_e (relativa al cohete) a través de una tobera con área A_e.

Encuentre una ecuación para determinar la evolución de la posición vertical del cohete.

Comenzamos con un balance de masa

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\int_{VC}\rho\, dV}_{m(t)} + \int_{SC}\rho\, \underbrace{\underline{u}_{rel}}_{-v_e\underline{k}}\cdot\underbrace{\underline{n}}_{-\underline{k}}\, dA = 0 \Rightarrow \frac{dm}{dt} + \underbrace{\rho_e v_e A_e}_{\dot{m}_e} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dm}{dt} = -\dot{m}_e}$$

Las fuerzas que actúan sobre el volumen de control en la dirección z son

$$F = \underbrace{-mg}_{\text{peso}} - \underbrace{D}_{\text{arrastre aerodinámico}} + \underbrace{(p_e - p_{atm})A_e}_{\text{propulsión debido a la presión de los gases de escape}}$$

La velocidad absoluta de los gases de escape es

$$\underline{u}_{rel} = \underline{u} - \underline{u}_{sc} \Rightarrow \underline{u} = \underbrace{\underline{u}_{rel}}_{-v_e\underline{k}} + \underbrace{\underline{u}_{sc}}_{v\underline{k}} \Rightarrow \underline{u} = (v - v_e)\underline{k}$$

Ahora tenemos todo lo que necesitamos para el balance de momentum en z

$$\frac{d}{dt}\int_{VC} \underbrace{\rho u}_{} \, dV + \int_{SC_1} \rho \underbrace{u}_{v - v_e} \underbrace{\underline{u}_{rel}\cdot\underline{n}}_{v_e} \, dA + \int_{SC_2} \rho u \cancel{\underline{u}_{rel}\cdot\underline{n}}^{\,0} \, dA = F$$

asumimos $u = v$ uniforme en el VC

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(v(t)\underbrace{\int_{VC}\rho \, dV}_{m(t)}\Big) + \underbrace{\rho_e A_e v_e}_{\dot{m}_e}(v - v_e) = F$$

$$\Rightarrow v\underbrace{\frac{dm}{dt}}_{-\dot{m}_e} + m\frac{dv}{dt} + \dot{m}_e(v - v_e) = F \Rightarrow m\frac{dv}{dt} - \dot{m}_e v_e = F$$

$$v = \frac{dz}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{d^2z}{dt^2} = \underbrace{\frac{\dot{m}_e v_e}{m}}_{\text{propulsión debido a la descarga de masa}} + \frac{\Delta p_e A_e}{m} - g - \frac{D}{m}}$$

La velocidad v_e es una figura de mérito crucial en la propulsión de cohetes conocida como impulso específico y representa la fuerza de empuje producida por unidad de masa descargada.