

Flujo potencial en aerodinámica

Flujo sobre cuerpos

Sobre una superficie sólida se debe cumplir la condición de no penetración

$$\underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \Rightarrow \nabla \phi \cdot \underline{n} = 0, \quad \nabla \psi \cdot \underline{t} = 0,$$

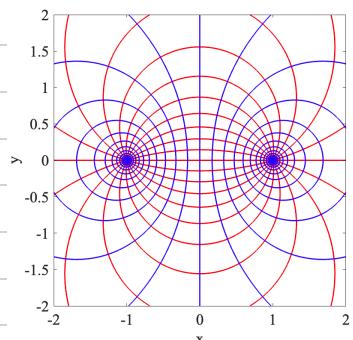
es decir, las líneas equipotenciales deben ser perpendiculares a la superficie y una línea de corriente debe coincidir con ésta.

Como la ec. de Laplace es una EDP lineal, podemos construir nuevas soluciones combinando soluciones conocidas. Este es el principio de superposición.

Luego, podemos buscar una combinación que entregue un potencial que cumpla con las condiciones de borde que queremos.

+ Podemos incorporar el efecto de una pared simplemente reflejando un flujo potencial con respecto a un plano, dado que ambas reflexiones se cancelarán en el plano de simetría. Este truco es conocido como el método de las imágenes.

Por ejemplo, un par de vórtices con signo opuesto (dipolo) separados por una distancia d es equivalente a un vórtice interactuando con una pared a una distancia $d/2$.



¿Qué pasa si dejamos que los vórtices se muevan con el flujo?

Fuerza sobre cuerpos

Para flujo potencial, las suposiciones son tan fuertes que el campo de velocidad queda completamente determinado por las restricciones impuestas, sin necesidad de recurrir a la ecuación de momentum (Bernoulli).

Sin embargo, si queremos calcular fuerzas sobre cuerpos, necesitamos la presión. Recordamos que, si el flujo es estacionario y no consideramos la gravedad, la ecuación de Bernoulli queda de la forma

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |u|^2 = \text{cte},$$

y es válida sobre todo el espacio. Luego, si consideramos un cuerpo inmerso en un flujo uniforme con velocidad de magnitud U y presión p_∞ , entonces

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |u|^2 = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 \Rightarrow p = p_\infty + \frac{1}{2} \rho (U^2 - |u|^2)$$

Una vez que tenemos la presión, podemos evaluarla sobre la superficie del cuerpo e integrar para calcular la fuerza resultante sobre el cuerpo.

$$F = D_i + L_j$$

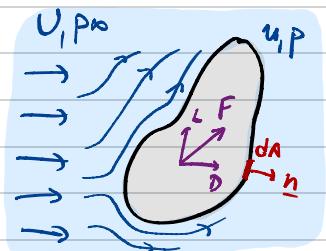
arrastre (drag) sustentación (lift)

Como el cuerpo está en equilibrio, F debe balancear a las fuerzas ejercidas por el fluido. En un flujo potencial no hay esfuerzos viscosos, solo de presión

$$\Rightarrow 0 = - \int_A p n_x dA - F \Rightarrow D = - \int_A p n_x dA, L = - \int_A p n_y dA$$

actúa sobre el fluido

(para flujo potencial)



Usando herramientas de teoría de variable compleja que escapan los alcances de este curso, es posible demostrar que, para cualquier cuerpo inmerso en un flujo potencial se cumple

$$D = 0 \quad \text{paradoja de d'Alembert}$$

$$L = \rho U^2 \Gamma \quad \text{teorema de Kutta-Joukowski}$$

Estos resultados son muy importantes y nos dicen que no hay arrastre aerodinámico en un flujo potencial y que la sustentación está íntimamente relacionada a la circulación del flujo alrededor del cuerpo.

La demostración de estos resultados para el caso general se puede encontrar, por ejemplo, en el libro P.K. Kundu et al., Fluid mechanics, Elsevier, 2024.

Analizaremos el caso particular del flujo sobre un cilindro rotando veremos que esto se cumple.

Flujo sobre un cilindro rotando

$$\bar{\Phi} = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z/a)$$

Generamos el flujo sobre un cilindro que rota mediante la superposición de un flujo uniforme, un oblate y un vórtice potencial.

El flujo uniforme tiene velocidad U , el cilindro tiene radio a , y el vórtice introduce una circulación Γ .

Calculemos la velocidad en coordenadas polares

$$\Phi = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z/a) = U \left(r e^{i\theta} + \frac{a^2 e^{-i\theta}}{r} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r/a)$$

$$= U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos\theta + i U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin\theta + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r/a) - \frac{\Gamma \theta}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \phi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos\theta - \frac{\Gamma \theta}{2\pi}, \quad \psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r/a)$$

Verifiquemos que modelamos correctamente la superficie del cilindro

$$\psi(r=a) = U \left(a - \frac{a^2}{a} \right) \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(a/a) = 0 \quad \checkmark \text{ es una línea de corriente}$$

Continuemos con $u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$

$$\Rightarrow u_r = U \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos\theta, \quad u_\theta = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Sobre la superficie del cilindro $u_r(r=a, \theta) = 0 \quad \checkmark$

$$\Rightarrow |u(r=a, \theta)|^2 = |u_\theta(r=a, \theta)|^2 = |(-2U \sin\theta - \Gamma/2\pi a)|^2$$

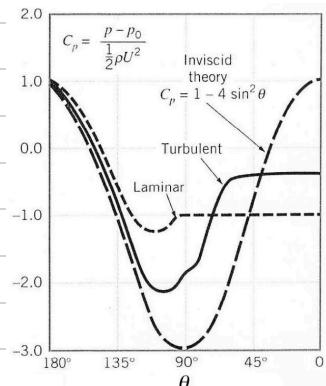
$$\Rightarrow |u|^2 = 4U^2 \sin^2\theta + 2U\Gamma \sin\theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2}$$

$$\Rightarrow p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho \left(U^2 (1 - 4 \sin^2\theta) - 2U\Gamma \sin\theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} \right)$$

Para $\Gamma=0 \Rightarrow (p-p_{\infty}) / (\frac{1}{2} \rho U^2) \equiv C_p = 1 - 4 \sin^2\theta$

Calculemos el arrastre y la sustentación

$$h = \underline{e}_r = \cos\theta \underline{i} + \sin\theta \underline{j}, \quad dA = ad\theta$$



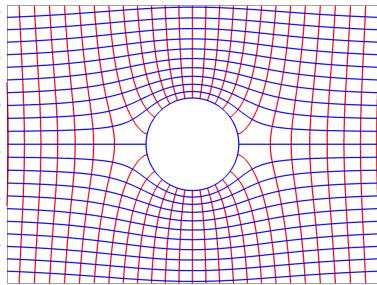
$$\Rightarrow D = - \int_A p n_x dA = \int_0^{2\pi} p \cos \theta a d\theta, \quad L = - \int_A p n_y dA = \int_0^{2\pi} p \sin \theta a d\theta$$

Ignoraremos la parte de p que no depende de θ (se cancela)

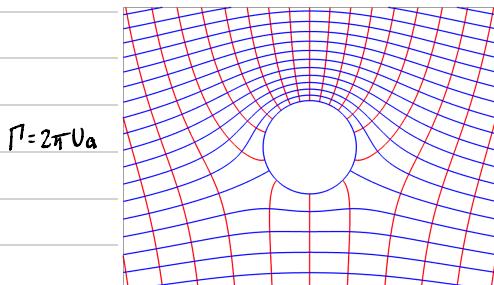
$$\tilde{p} = \frac{1}{2} p \left(-4U^2 \sin^2 \theta - \frac{2U\Gamma}{\pi a} \sin \theta \right) = -pU \left(2U \sin^2 \theta + \frac{\Gamma}{\pi a} \sin \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D &= pU \int_0^{2\pi} \left(2U \sin^2 \theta + \frac{\Gamma}{\pi a} \sin \theta \right) a \cos \theta d\theta \\ &= pU \left[2U a \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 \theta \cos \theta d\theta}_0 + \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin \theta \cos \theta d\theta}_0 \right] \Rightarrow D = 0 \end{aligned}$$

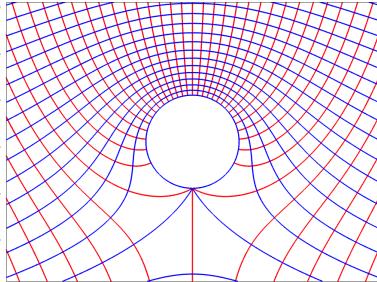
$$\begin{aligned} \Rightarrow L &= pU \int_0^{2\pi} \left(2U \sin^2 \theta + \frac{\Gamma}{\pi a} \sin \theta \right) a \sin \theta d\theta \\ &= pU \left[2U a \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 \theta}_0 + \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 \theta d\theta}_{\pi} \right] \Rightarrow L = \rho U \Gamma \end{aligned}$$



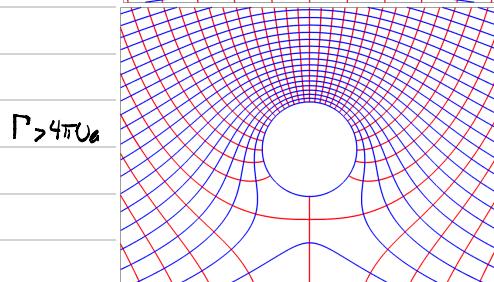
$$\Gamma = 0$$



$$\Gamma = 2\pi U_a$$



$$\Gamma = 4\pi U_a$$



$$\Gamma > 4\pi U_a$$

En un fluido real, la circulación será inducida por los esfuerzos viscosos debido a la fricción en la superficie del cuerpo rotando que arrastra una pequeña película (o capa) de fluido.

La generación de sustentación mediante este mecanismo se conoce como el efecto Magnus, el cual es comúnmente observado en deportes de pelota.

Video.

Mapeo conforme

Introduciremos una técnica de la teoría de variable compleja que nos permite transformar patrones de flujo simples en otros más complicados.

Un mapeo conforme en el plano complejo es una función analítica $\tilde{z} = f(z)$, tal que a cada punto z le corresponde un \tilde{z} y existe una transformación inversa $z = f^{-1}(\tilde{z})$.

La propiedad más importante del mapeo conforme es que es una transformación que preserva ángulos entre la imagen y la pre-imagen.

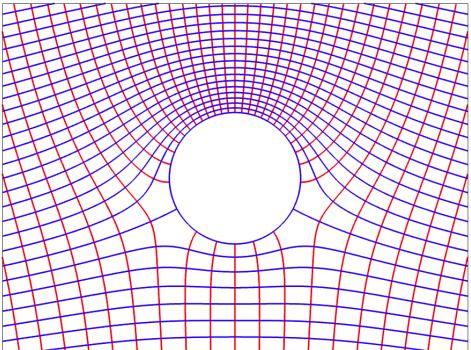
Luego, si $\Phi(\tilde{z}) = \phi(z) + i\psi(z)$ es un potencial complejo tenemos que

$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}(f^{-1}(\tilde{z})) = (\tilde{\Phi} \circ f^{-1})(\tilde{z}) = \tilde{\Phi}(\tilde{z}) = \tilde{\phi}(\tilde{z}) + i\tilde{\psi}(\tilde{z}).$$

Dado que f es un mapeo conforme, $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\psi}$ también satisfacen la ecuación de Laplace y las líneas de corriente son perpendiculares a las equipotenciales en el plano transformado $\Rightarrow \tilde{\Phi}$ es un potencial válido

Como ejemplo, tomaremos el flujo sobre un cilindro y aplicaremos una secuencia de mapeos conformes comunes.

Flujo libre + doblete + vórtice

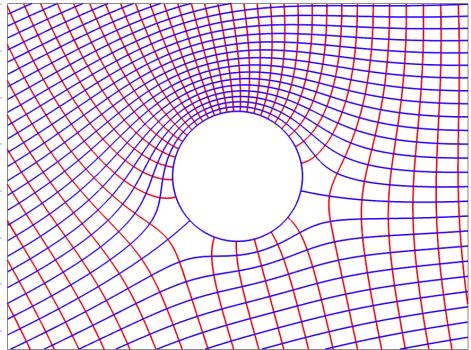
$$\tilde{\Phi}(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z/a)$$


Rotar el flujo libre

$$f_1(z) = e^{i\alpha} z$$

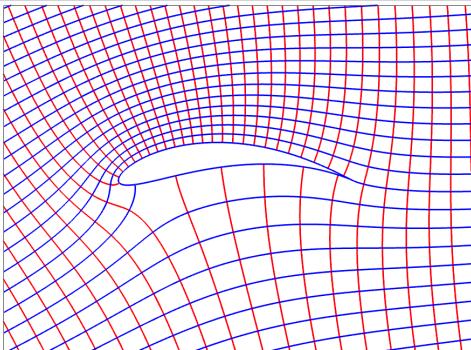
Desplazar el cuerpo

$$f_2(z) = z + z_0$$

$$\tilde{z} = f_2 \circ f_1(z), \quad \tilde{\Phi}(\tilde{z}) = \Phi(z)$$


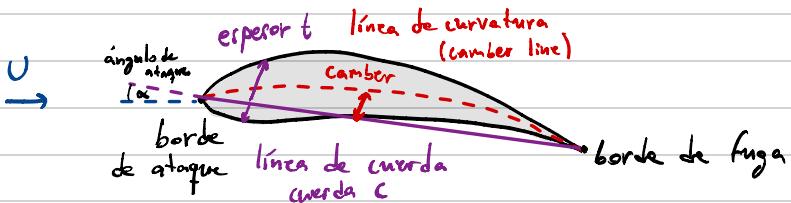
Transformación de Joukowski

$$f_3(z) = z + \frac{1}{z}$$

$$\tilde{z} = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z), \quad \tilde{\Phi}(\tilde{z}) = \Phi(z)$$


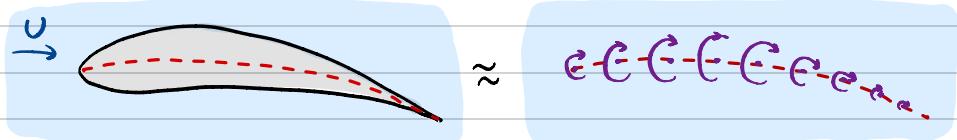
Perfil alar de Joukowski

Perfiles alares



Para calcular el desempeño aerodinámico de perfiles alares se usa, como primera aproximación, la teoría de flujo potencial.

Se modelan los perfiles como láminas de vórtices en un flujo uniforme



El problema se reduce a encontrar la distribución de circulación por unidad de línea tal que se respete la condición de borde de no penetración donde estaría la superficie del perfil alar.

Para superficies genéricas esto se resuelve numéricamente mediante el método de paneles, que está implementado en varios códigos de acceso abierto, como por ejemplo XFOIL.

Estos códigos, además, introducen correcciones para incorporar los efectos viscoso mediante la teoría de capa límite que veremos más adelante.

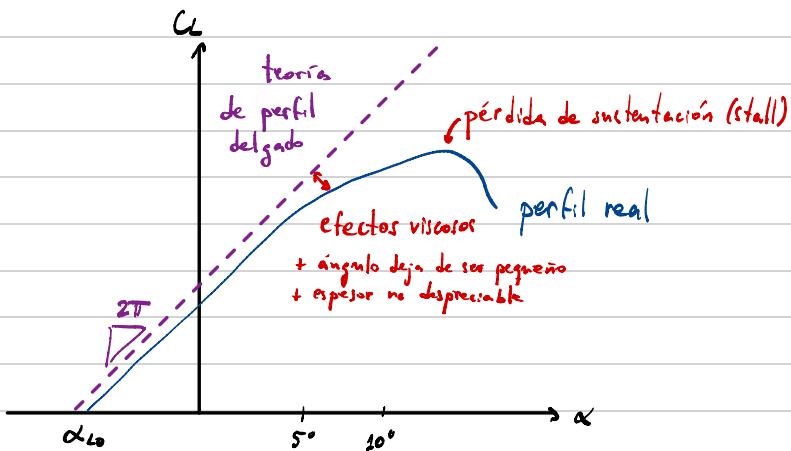
Para el caso de perfiles delgados con un ángulo de ataque pequeño, se pueden obtener expresiones analíticas para el coeficiente de sustentación y el centro aerodinámico

$$C_L = 2\pi(\alpha + \alpha_{L0}), \quad x_{AC} = C/4, \quad \text{para } t \ll c, \alpha \approx 0.$$

ángulo de cero sustentación
(debido a la curvatura)

punto c/r al cual el momento
no depende de α

Estos son los importantísimos resultados de la
teoría de perfil delgado (thin airfoil theory)



La derivación de estos resultados se puede encontrar en textos más avanzados de aerodinámica, como

J. Katz and A. Plotkin, Low-speed aerodynamics, Cambridge University Press, 2001.

J. D. Anderson, Fundamentals of aerodynamics, McGraw Hill, 2016.