

# ME6020

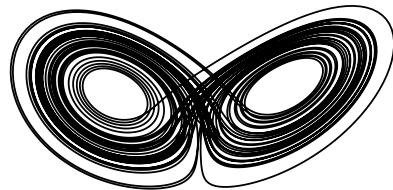
## Introducción a la dinámica no lineal

Benjamin Herrmann

Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Chile,  
Beauchef 851, Santiago, Chile

### Resumen

La capacidad de describir el *cambio* en un sistema nos permite predecir, controlar y entender su comportamiento. La teoría de sistemas dinámicos entrega herramientas para describir y analizar una variedad de fenómenos no lineales en ingeniería, física, química y biología. Este curso introduce el tema desde una perspectiva práctica, entrelazando métodos analíticos, herramientas computacionales, y técnicas de ciencia de datos, para abordar desafíos modernos en aplicaciones de ciencia e ingeniería.



# Índice

<b>1. Introducción a los sistemas dinámicos</b>	<b>1</b>
1.1. Perspectiva histórica . . . . .	1
1.2. ¿Qué es un sistema dinámico? . . . . .	4
1.3. ¿Por qué sistemas no lineales? . . . . .	5
1.4. ¿Cómo se estudian? . . . . .	6
<b>2. Sistemas unidimensionales</b>	<b>8</b>
2.1. Equilibrios y estabilidad . . . . .	8
2.1.1. Método gráfico . . . . .	8
2.1.2. Análisis de estabilidad lineal . . . . .	9
2.1.3. Velocidad terminal . . . . .	10
2.1.4. Crecimiento poblacional . . . . .	12
2.2. Bifurcaciones elementales . . . . .	13
2.2.1. Bifurcación silla-nodo . . . . .	13
2.2.2. Sincronización vía silla-nodo en el círculo . . . . .	13
2.2.3. Bifurcación transcritica . . . . .	13
2.2.4. Umbral de láser . . . . .	13
2.2.5. Bifurcación de tridente . . . . .	13
2.2.6. Pérdida de simetría . . . . .	13
<b>3. Sistemas de dos o más dimensiones</b>	<b>14</b>
3.1. Sistemas lineales . . . . .	14
3.1.1. Matriz exponencial . . . . .	14
3.1.2. Valores y vectores propios . . . . .	14
3.1.3. Clasificación de equilibrios en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	14
3.1.4. Romeo y Julieta . . . . .	14
3.1.5. Vectores, coordenadas y patrones . . . . .	14
3.2. Plano de fase . . . . .	14
3.2.1. Equilibrios y linealización . . . . .	14
3.2.2. Teorema de Hartman-Grobman . . . . .	14
3.2.3. Ovejas y conejos . . . . .	14
3.2.4. Péndulo . . . . .	14
3.2.5. Doble pozo de potencial . . . . .	14
3.2.6. Ciclos límite . . . . .	14
3.2.7. Sección de Poincaré . . . . .	15
3.3. Bifurcaciones otra vez . . . . .	15
<b>4. Caos</b>	<b>16</b>
4.1. Sistema de Lorenz . . . . .	16
4.2. Mapa logístico . . . . .	16

<b>5. Modelamiento basado en datos</b>	<b>17</b>
5.1. Fundamentos de álgebra lineal . . . . .	17
5.2. Identificación de sistemas . . . . .	17
5.3. Reducción de dimensionalidad . . . . .	17

# 1. Introducción a los sistemas dinámicos

Este capítulo introduce la dinámica no lineal desde una mirada amplia, resaltando el interés científico, la relevancia práctica y los grandes desafíos modernos del área.

## 1.1. Perspectiva histórica

Esta sección presenta una breve reseña histórica de la teoría de sistemas dinámicos, considerando desde su origen hasta avances recientes. El texto a continuación está basado en traducciones de los capítulos 1.1 del libro de Strogatz [1] y 7 del libro de Brunton & Kutz [2].

Aunque hoy en día la dinámica es un campo multidisciplinario, originalmente era una rama de la física. Su estudio comienza a mediados de los 1600, cuando Newton inventa las ecuaciones diferenciales, descubre sus leyes del movimiento y de gravitación universal, y las combina para explicar las leyes de movimiento planetario de Kepler. Específicamente, Newton resuelve el problema de dos cuerpos—el problema de calcular el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, dada la ley cuadrática inversa de atracción gravitacional entre ellos. Generaciones posteriores de matemáticos y físicos intentaron extender los métodos analíticos de Newton al problema de los tres cuerpos (por ejemplo la Tierra, el Sol y la Luna) pero curiosamente este problema resultó ser mucho más difícil de abordar. Después de décadas de esfuerzo, eventualmente se llega a la conclusión de que el problema de los tres cuerpos es esencialmente *imposible* de resolver, en el sentido de obtener una fórmula explícita para el movimiento de los tres cuerpos. En ese momento la situación parecía no tener remedio.

El progreso llega con el trabajo de Poincaré a finales de los 1800s. Él introduce un nuevo punto de vista que se enfocaba en preguntas cualitativas en vez de cuantitativas. Por ejemplo, en lugar de preguntar por las posiciones exactas de los planetas para todos los tiempos, preguntó ¿es el sistema solar estable para siempre, o eventualmente algunos planetas saldrán volando hacia el infinito? Poincaré desarrolló un potente enfoque *geométrico* para analizar estas preguntas. Ese enfoque floreció en el campo moderno de la dinámica, con aplicaciones que abarcan mucho más que la mecánica de cuerpos celestes. Poincaré fue la primera persona en acercarse al concepto de **caos**, donde un sistema determinista exhibe un comportamiento aperiódico que tiene una dependencia sensible a las condiciones iniciales, haciendo imposible las predicciones a largo plazo.

Pero el caos se mantuvo escondido durante toda la primera mitad del siglo veinte; en su lugar, la dinámica se preocupó de osciladores no lineales y sus aplicaciones en física e ingeniería. Los osciladores no lineales jugaron un rol fundamental en el desarrollo de tecnologías como la radio, el radar y el láser. Desde la perspectiva teórica, los osciladores no lineales estimularon la invención de nuevas técnicas ma-

temáticas—pioneros en esta área incluyen a Van der Pol, Andronov, Littlewood, Cartwright, Levinson y Smale. Mientras tanto, en un desarrollo separado, los métodos geométricos de Poincaré estaban siendo extendidos para entregar un entendimiento mucho más profundo de la mecánica clásica, gracias al trabajo de Birkhoff y luego Kolmogorov, Arnol'd y Moser.

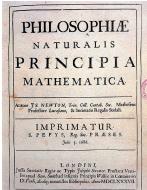
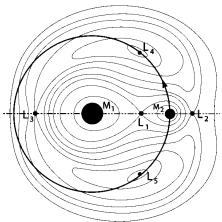
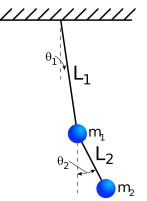
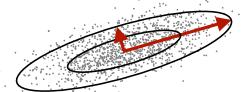
1666–1800s	Cálculo Mecánica clásica Movimiento planetario		
1890s	Perspectiva geométrica		
1920–1950	Osciladores no lineales		
1920–1960	Mecánica Hamiltoniana		
1960s	Dinámica computacional		
1970s	Teoría del caos		
>1980s	Amplio interés en teoría y aplicaciones		
Presente	Dinámica basada en datos		

Figura 1: Resumen de la historia de la dinámica

La invención del computador en los 1950s fue un punto de inflexión en la historia de la dinámica. El computador permitió experimentar con las ecuaciones en formas que antes eran imposibles, y por lo tanto desarrollar intuición sobre sistemas no lineales. Este tipo de experimentos numéricos llevaron a Lorenz, Fetter y

Hamilton a descubrir el movimiento caótico en un atractor extraño en 1963 [3]. Estudiaron un modelo simplificado de las celdas de convección en la atmósfera para aprender sobre la impredecibilidad notoria del tiempo meteorológico. Lorenz, Fetter y Hamilton encontraron que la solución a su ecuación nunca tendía a un equilibrio o a un estado periódico—en lugar de eso, continuaba oscilando de manera irregular y aperiódica. Es más, si comenzaban sus simulaciones desde dos condiciones iniciales ligeramente diferentes, los comportamientos resultantes pronto se volvían completamente diferentes. La implicancia fue que el sistema era *inherentemente* impredecible—pequeños errores en la medición del estado actual de la atmósfera (o cualquier otro sistema caótico) serían rápidamente amplificados, eventualmente resultando en predicciones vergonzosas.

El trabajo liderado por Lorenz tuvo poco impacto hasta finales de los 1970s, los años de auge de la teoría del caos. Acá hay algunos de los principales desarrollos de esta gloriosa década. En 1971, Ruelle y Takens propusieron una nueva teoría sobre el comienzo de la turbulencia en flujos de fluido [4], basada en consideraciones abstractas acerca de atractores extraños. Unos años más tarde, May encontró ejemplos de caos en mapas iterados que surgen en biología de poblaciones, y escribió un influyente artículo de revisión donde recalca la importancia pedagógica de estudiar sistemas no lineales simples, para contrarrestar la frecuentemente engañosa intuición lineal que es fomentada por la educación tradicional [5]. Luego vino el descubrimiento más sorprendente de todos, debido al físico Feigenbaum. Él descubrió que existen ciertas leyes universales que gobiernan la transición de un comportamiento regular a uno caótico; en pocas palabras, sistemas completamente diferentes pueden volverse caóticos de la misma manera [6]. Su trabajo estableció una conexión entre el caos y las transiciones de fase, y tentaron a una generación de físicos a estudiar sistemas dinámicos. Finalmente, experimentalistas como Gollub, Libchaber, Swinney, Lindsay, Moon y Westervelt probaron nuevas ideas acerca del caos en experimentos de fluidos, reacciones químicas, circuitos electrónicos, osciladores mecánicos y semiconductores.

Aunque el caos se robó el centro de atención, hubo dos grandes avances en sistemas dinámicos durante los 1970s. Primero, Mandelbrot codificó y popularizó los fractales, generó magníficos gráficos de computador de estos, y demostró como se podían aplicar en una variedad de campos de estudio. Segundo, en el área emergente de la biología matemática, Winfree aplicó los métodos geométricos de la dinámica a oscilaciones biológicas, especialmente al ciclo circadiano y ritmos cardíacos. Ya en los 1980s muchas personas estaban trabajando en sistemas dinámicos, con contribuciones demasiado numerosas para ser listadas. La fig. 1 presenta un resumen de esta historia.

Los sistemas dinámicos modernos están experimentando un renacimiento, con derivaciones analíticas y modelos a partir de primeros principios abriendo el paso a enfoques basados en datos. La confluencia de *big data* y *machine learning* está conduciendo a un cambio de paradigma en el análisis y el estudio de los sistemas

dinámicos en ciencia e ingeniería. Los datos abundan, mientras que las leyes físicas o ecuaciones gobernantes se mantienen esquivas, como ocurre en problemas en ciencia del clima, finanzas, epidemiología y neurociencia. Incluso en campos clásicos como en óptica y turbulencia, donde las ecuaciones gobernantes existen, investigadores están recurriendo cada vez más al análisis basado en datos. Muchos problemas críticos relacionados con datos están listos para aprovechar el progreso en el descubrimiento de sistemas dinámicos basado en datos, como la predicción del cambio climático, el entender la cognición a partir de registros neuronales, la predicción y supresión de la propagación de enfermedades, o el controlar la turbulencia para un transporte y producción de potencia energéticamente eficientes.

## 1.2. ¿Qué es un sistema dinámico?

Un sistema dinámico es *cualquier sistema donde hay movimiento o cambios que son gobernados por ciertas leyes o reglas*. Matemáticamente, estas leyes o reglas son expresadas mediante una ecuación diferencial. En este curso estudiaremos sistemas dinámicos de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \equiv \mathbf{f}^{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

donde el punto denota diferenciación temporal. Los términos en la ec. (1) se describen en detalle a continuación.

### Vector de estado

El vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  es conocido como el *vector de estado*. Este contiene la colección de todas las variables necesarias para caracterizar la condición del sistema en cada instante de tiempo. Algunos ejemplos incluyen, la posición y velocidad de cuerpos moviéndose en el espacio, la concentración de especies en reacciones químicas, la corriente que pasa por un circuito eléctrico y el campo de velocidades en un flujo de fluido. El espacio de todos los posibles estados del sistema—genéricamente  $\mathbb{R}^n$ —se conoce como el *espacio de estados* o *espacio de fase*.

### Parámetros

El vector  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^T \in \mathbb{R}^p$  contiene todos los *parámetros* que no cambian en el tiempo, o lo hacen a una tasa despreciable, e influyen en la dinámica del sistema. Por ejemplo, las propiedades físicas de un material, la geometría de un cuerpo, la aceleración de gravedad o la temperatura ambiente.

### Dinámica

La función  $\mathbf{f}^{\boldsymbol{\mu}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , gobierna la *dinámica* del sistema y es la que describe como el estado actual del sistema  $\mathbf{x}(t)$  afecta su propia tasa de cambio  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$  en cada instante de tiempo  $t$ . Esta función parametrizada por  $\boldsymbol{\mu}$  es un campo vectorial, es decir, mapea un vector a otro en un espacio de igual dimensión  $n$ . Expandiendo la ec. 1 por componentes, y omitiendo la dependencia

paramétrica por simplicidad, la dinámica se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2)$$

Diremos que un sistema dinámico gobernado por el campo vectorial (2) es *lineal* cuando todas las funciones  $f_i$  sólo contienen combinaciones lineales de las variables de estado  $x_i$ , por ejemplo  $2x_1 + 5x_2 - x_4$ . En este caso el sistema se puede escribir como  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz de coeficientes constantes. Por el contrario, el sistema es *no lineal* cuando las  $f_i$  contienen productos o funciones de los estados  $x_i$ , como por ejemplo  $x_1^2, x_2x_3, \sin(x_4)$  o  $e^{x_5}$ . En este curso, restringiremos nuestra atención a la clase de sistemas dinámicos denominados *autónomos*, para los cuales la dinámica no depende explícitamente del tiempo.

### 1.3. ¿Por qué sistemas no lineales?

Número de variables				
	$n = 1$	$n = 2$	$n \geq 3$	$n \gg 1$
Lineal	Crecimiento, atenuación, equilibrio	Oscilaciones		Comportamiento colectivo
	Decaimiento radioactivo	Masa resorte	Osciladores harmónicos acoplados	Vibraciones estructurales
	Enfriamiento de Newton	Círculo RLC		Redes de potencia
	Círculo RC			Dinámica molecular
				Elasticidad lineal
				Conducción de calor
No lineal	Bifurcaciones	Ciclos límite	Caos	Patrones y ondas
	Crecimiento poblacional	Péndulo	Atractor de Lorenz	Ecuación de onda
	Paracaísta	Presa-depredador	Problema de los 3 cuerpos	Electromagnetismo
		Células cardíacas, neuronas	Cinética química	Mecánica cuántica
			Robótica	
				Ondas no lineales, de choque, solitones
				Turbulencia
				Terremotos
				Relatividad general
				La vida misma

Figura 2: Clasificación de sistemas dinámicos según dimensión del estado y grado de no-linealidad.

Para sistemas dinámicos lineales tenemos soluciones analíticas, por lo que podemos conocer el estado del sistema  $\mathbf{x}(t)$  para todo tiempo  $t$ . Gracias a esto, tenemos un arsenal de herramientas que nos permiten realizar predicción, control, optimización e identificación de sistemas lineales de manera robusta y eficiente [7]. Sin embargo, los fenómenos no lineales abundan en sistemas de ingeniería y en el mundo natural, y para estos típicamente no existen soluciones analíticas y, por lo tanto, se pierde todo tipo de garantías al momento de realizar tareas prácticas. Lo que facilita el estudio de sistemas lineales es que estos pueden descomponerse en partes simples, estas partes pueden resolverse de manera independiente y luego las soluciones pueden ser combinadas para producir la solución al problema completo. En el caso de sistemas no lineales, las partes del sistema pueden interferir, cooperar o competir entre ellas, y el principio de superposición falla de manera espectacular. La fig. 2 muestra algunos ejemplos de sistemas dinámicos clasificados según la dimensión del vector de estado  $n$  y la relevancia de la no-linealidad en su comportamiento.

#### 1.4. ¿Cómo se estudian?

En un sistema dinámico autónomo, la dinámica no depende explícitamente del tiempo, es decir  $f = f(\mathbf{x}, \mu) \neq f(t, \mathbf{x}, \mu)$ . En esta situación, la evolución del sistema es gobernada por un campo vectorial que se mantiene congelado en el tiempo. En otras palabras, la dinámica le asigna un único vector  $\dot{\mathbf{x}}$  a cada punto  $\mathbf{x}$  en el espacio de estados, lo que nos permite adoptar la perspectiva geométrica de Poincaré.

Consideremos el péndulo simple con roce lineal como nuestro primer ejemplo de sistema dinámico a estudiar. La ecuación de movimiento para un péndulo de masa  $m$  y largo  $\ell$  es

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell \sin(\theta) + b\dot{\theta} = 0, \quad (3)$$

donde  $\theta$  es el ángulo definido desde la posición vertical hacia abajo,  $g$  es la aceleración de gravedad y  $b$  es el coeficiente de roce lineal. Agrupando las constantes físicas, y escalando el tiempo con la frecuencia característica del péndulo  $t \rightarrow t\sqrt{g/\ell}$ , obtenemos un sistema que depende de un único parámetro  $\mu = b/(m\ell\sqrt{g\ell})$ . Definiendo el vector de estado como  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T, (\theta, \dot{\theta})^T$ , la ec. 3 se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1) - \mu x_2 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

A pesar de lo simple que parece esta ecuación, encontrar una solución analítica es sumamente difícil. Sin embargo, podemos aprender mucho sobre el sistema sin necesidad de resolver la la ec. 4. Desde un punto de vista geométrico, una *trayectoria* del sistema dinámico se refiere a una solución a la ecuación diferencial comenzando desde una condición inicial  $\mathbf{x}(t=0)$ . Visualizando el campo vectorial sobre el espacio de estados, definido por el lado derecho de la ec. 4, es posible adquirir intuición sobre las posibles trayectorias—los posibles comportamientos—del sistema.

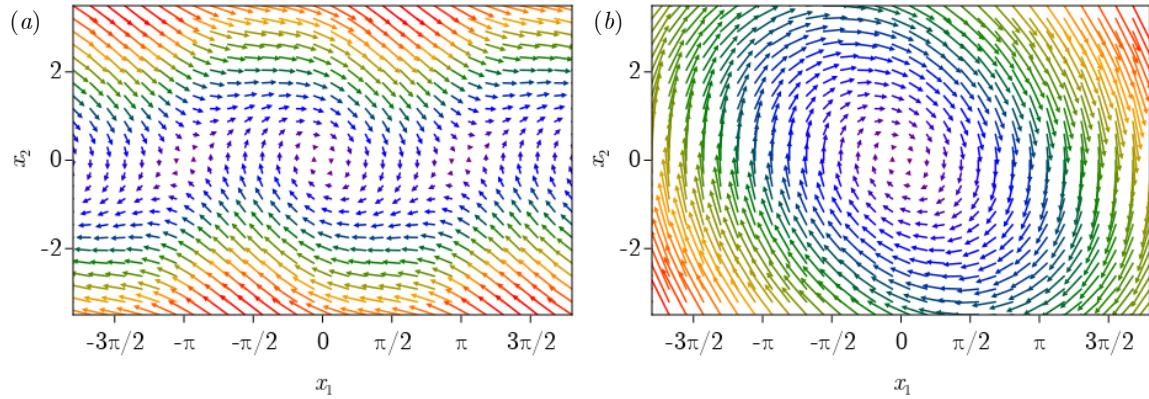


Figura 3: Campos vectoriales para el péndulo simple con roce lineal para  $\mu = 0,5$ .  
(a) Sistema no lineal. (b) Sistema linealizado en torno al equilibrio estable  $\mathbf{x} = (0, 0)$ .

La fig. 3 compara los campos vectoriales obtenidos para el péndulo usando  $\mu = 0,5$  y su versión linealizada con respecto al equilibrio estable (péndulo hacia abajo sin velocidad).

## 2. Sistemas unidimensionales

En este capítulo se introducen las primeras herramientas formales para el análisis de dinámica no lineal, comenzando por sistemas de una sola variable.

### 2.1. Equilibrios y estabilidad

#### 2.1.1. Método gráfico

Las figuras suelen ser más útiles que las formulas a la hora de analizar sistemas no lineales. Como se mencionó en el capítulo introductorio, una de las técnicas más básicas de la teoría de sistemas dinámicos consiste en interpretar las ecuaciones diferenciales como campos vectoriales. A continuación se ilustra este punto en un ejemplo simple.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial no lineal

$$\dot{x} = \sin(x), \quad (5)$$

donde  $x \in \mathbb{R}$ , por lo que el sistema es unidimensional. Esta es una de las pocas ecuaciones diferenciales no lineales que tiene una solución analítica. Usando separación de variables se obtiene la siguiente expresión

$$dt = \frac{dx}{\sin(x)},$$

que puede ser integrada por ambos lados entre un tiempo inicial  $t = 0$  donde  $x = x_0$  y un tiempo final  $t$  asociado a un estado  $x$ , para entregar la solución

$$t = \ln \left| \frac{\csc(x_0) + \cot(x_0)}{\csc(x) + \cot(x)} \right|. \quad (6)$$

Este resultado es exacto, pero es muy difícil de interpretar. Por ejemplo, ¿podrías responder las siguientes preguntas?

1. ¿Cómo se comporta una trayectoria que comienza en  $x_0 = \pi/4$ ?
2. ¿Cuál es el destino asintótico de una condición inicial arbitraria cuando  $t \rightarrow \infty$ ?

Es fácil darse cuenta que la ec. 6 no es de mucha ayuda para responder estas preguntas cualitativas. Por el contrario, un análisis gráfico del sistema es claro y simple, como se muestra en la Fig. 4. Pensamos en  $x$  como la posición de una partícula virtual sobre la línea de los reales, moviéndose con velocidad  $\dot{x}$ . Luego, la ecuación diferencial  $\dot{x} = \sin(x)$  representa un *campo vectorial* que nos dice la velocidad de esta partícula en función de su posición. Para bosquejar el campo vectorial, es conveniente graficar  $\dot{x}$  versus  $x$ , y dibujar flechas en el eje- $x$ , indicando el sentido de la velocidad  $\dot{x}$  para cada posición  $x$ . En puntos donde  $\dot{x} = 0$  no hay velocidad y por lo tanto no hay cambio de posición y la dinámica se detiene, y por lo tanto son denominados **puntos de equilibrio** del sistema. Un esquema como la

Fig. 4(a) se conoce como el **retrato de fase** del sistema. En este retrato de fase, los colores distinguen dos tipos de puntos de equilibrio: **estables** e **inestables**, que atraen y repelen *trayectorias* en el espacio de estados, respectivamente. En la Fig. 4(b) se muestra la trayectoria que comienza en  $x_0 = \pi/4$ , donde el estado evoluciona acercándose asintóticamente al equilibrio estable  $x^* = \pi$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ .

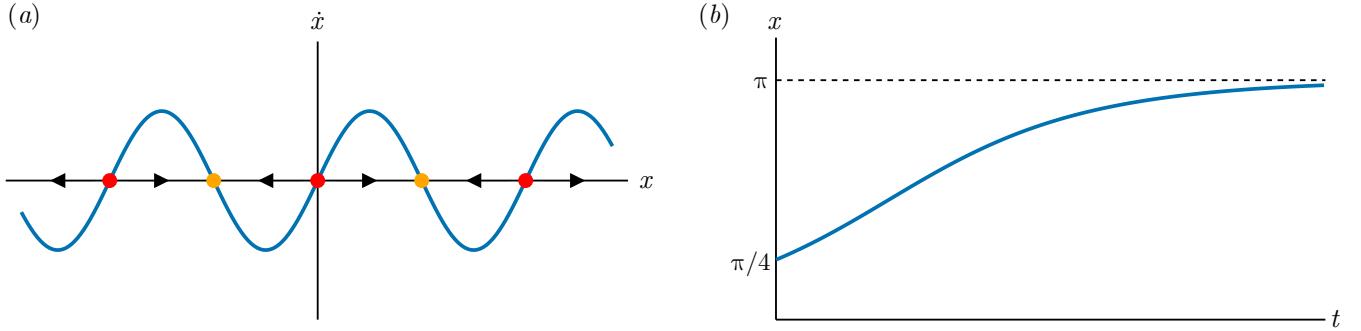


Figura 4: Análisis gráfico del campo vectorial inducido por  $\dot{x} = \sin(x)$ . (a) Retrato de fase (b) Trayectoria con condición inicial  $x_0 = \pi/4$ .

### 2.1.2. Análisis de estabilidad lineal

El análisis de estabilidad lineal es una herramienta fundamental para el estudio de sistemas dinámicos no lineales. Dado un sistema gobernado por  $\dot{x} = f(x)$ , los puntos de equilibrio  $x^*$  corresponden a las soluciones de la ecuación no lineal

$$f(x^*) = 0. \quad (7)$$

Dependiendo de la complejidad de la dinámica, estas soluciones pueden ser encontradas de manera analítica o usando rutinas de optimización computacional. Conocer la estabilidad de estos puntos de equilibrio es fundamental para determinar el destino de trayectorias cercanas.

Si bien para sistemas unidimensionales el método gráfico basta para determinar la estabilidad, un análisis de estabilidad lineal nos entrega información cuantitativa acerca de que tan *débil* o *fuerte* es la atracción o repulsión de trayectorias hacia o desde el punto de equilibrio. Matemáticamente, definimos una perturbación infinitesimal alrededor del equilibrio  $x^*$  como  $\eta(t) = x(t) - x^*$ . Entonces, buscamos la ecuación que gobierna la evolución de esta perturbación. Tomando la derivada temporal, tenemos que

$$\dot{\eta} = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x},$$

dado que  $x^*$  es constante. Por lo tanto, reemplazando en la ecuación diferencial original  $\dot{x} = f(x)$  se obtiene

$$\dot{\eta} = f(x) = f(x^* + \eta),$$

y usando una expansión en serie de Taylor se obtiene

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + f'(x^*)\eta + O(\eta^2),$$

donde  $f' = df/dx$  y donde  $O(\eta^2)$  denota términos de orden cuadrático o superior en  $\eta$ . Finalmente, notando que  $f(x^*) = 0$  dado que  $x^*$  es un punto de equilibrio y despreciando los términos  $O(\eta^2)$ , en el caso en que  $\eta f'(x^*) \neq 0$ , podemos escribir la aproximación

$$\dot{\eta} = f'(x^*)\eta. \quad (8)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal para  $\eta$ , llamada la **linealización** del sistema alrededor del equilibrio  $x^*$ . La evolución temporal de una perturbación inicial  $\eta_0$  viene dada por la solución a (8) de la forma

$$\eta(t) = \exp(f'(x^*)t)\eta_0, \quad (9)$$

donde  $f'(x^*)$  es una constante cuyo signo determina si la perturbación crece o decae exponencialmente. Por lo tanto, diremos que el equilibrio  $x^*$  es linealmente *estable* si  $f'(x^*) < 0$ , o, por el contrario, que es linealmente *inestable* si  $f'(x^*) > 0$ . En el caso en que  $f'(x^*) = 0$  se requiere un análisis no lineal donde no se desprecien los términos de orden superior en la serie de Taylor. Además de determinar la estabilidad del equilibrio, la cantidad  $f'(x^*)$  representa la tasa de crecimiento o atenuación exponencial que experimenta el sistema cerca de este punto, proporcionando una escala de tiempo característica de la dinámica.

### 2.1.3. Velocidad terminal

Como ejemplo, realizaremos un análisis de estabilidad lineal de un modelo para la caída de un paracaidista, de la forma

$$\dot{v} = f(v) = -\mu - v|v|, \quad (10)$$

donde una velocidad positiva denota ascenso y negativa descenso. El parámetro  $\mu > 0$  representa la aceleración debido al peso del cuerpo, y el término  $v|v|$  modela la aceleración debido al arrastre aerodinámico cuadrático, cuyo signo siempre se opone al movimiento del cuerpo.

El análisis de estabilidad comienza con la búsqueda de puntos de equilibrio  $v^*$  tal que  $\dot{v} = 0$ , es decir debemos resolver la ecuación

$$0 = -\mu - v|v| = \begin{cases} -\mu + v^2, & \text{si } v < 0, \\ -\mu - v^2, & \text{si } v > 0. \end{cases}$$

Para el primer caso, las raíces de la función vienen dadas por  $\pm\sqrt{\mu}$ , donde sólo la solución  $v^* = -\sqrt{\mu}$  es consistente con la condición  $v < 0$ . En el segundo caso, para  $v > 0$ , la ecuación tiene dos soluciones imaginarias dado que  $\mu > 0$ . Por lo tanto, el único punto de equilibrio es  $v^* = -\sqrt{\mu}$ . Un bosquejo del retrato de fase del sistema, como el que se muestra en la Fig. 5(a), rápidamente revela que este equilibrio es estable.

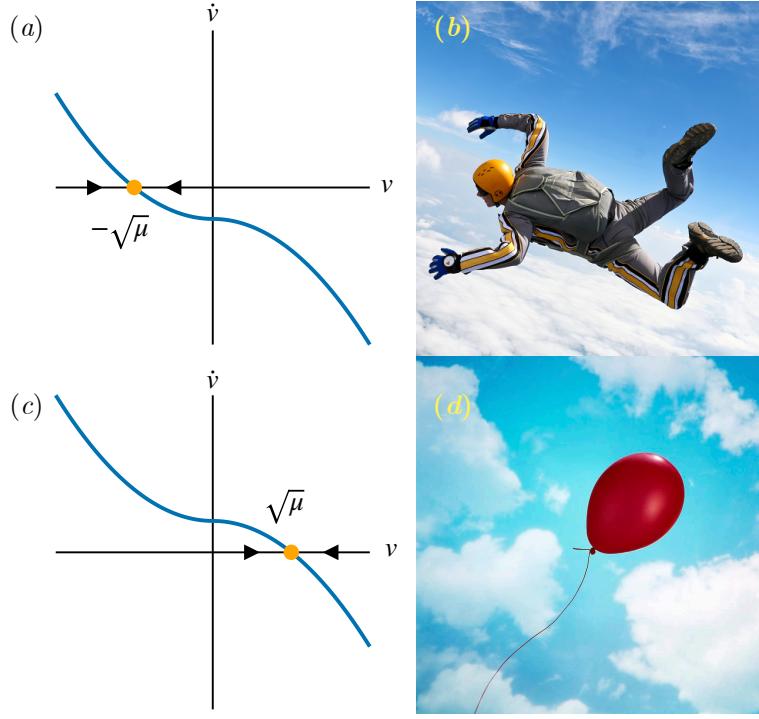


Figura 5: (a) Retrato de fase para la caída de un paracaidista. (b) Imagen de la caída de un paracaidista. (c) Retrato de fase para el ascenso de un globo de helio. (d) Imagen del ascenso de un globo de helio.

Para cuantificar la tasa de decaimiento exponencial de la velocidad del paracaidista es necesario completar el análisis de estabilidad. Linealizando el sistema 10 alrededor del punto de equilibrio tenemos que esta tasa corresponde a

$$f'(v) = \begin{cases} 2v, & \text{si } v < 0, \\ -2v, & \text{si } v > 0, \end{cases} \implies f'(v^*) = -2\sqrt{\mu} < 0.$$

Por lo tanto, el paracaidista se acercará a la velocidad terminal de descenso  $v^* = -\sqrt{\mu}$  siguiendo una evolución temporal  $\sim \exp(-2\sqrt{\mu}t)$ .

De manera análoga, es posible analizar la dinámica del ascenso de un cuerpo boyante, como el globo de helio mostrado en la Fig. 5(d), cambiando el signo que acompaña a  $\mu$  en (10). El análisis de estabilidad para este caso queda como ejercicio para el lector. Este modelo no considera el aumento de volumen del globo debido a la reducción de presión hidrostática con la altura que a su vez aumenta la fuerza de empuje, ¿cómo se podría modelar de mejor manera el fenómeno?

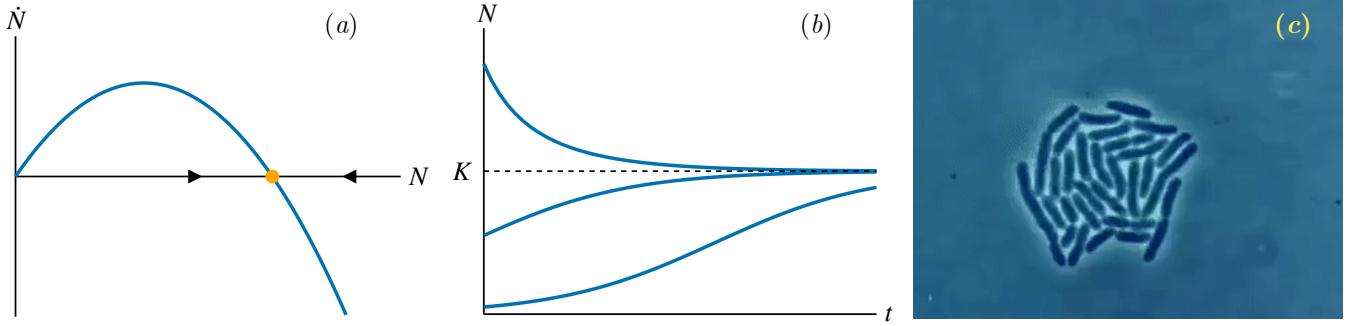


Figura 6: Ecuación logística para el crecimiento poblacional  $\dot{N} = \mu(1 - N/K)N$ .  
(a) Retrato de fase. (b) Serie de tiempo de tres trayectorias. (c) Población de una colonia de bacterias  $N(t)$ .

#### 2.1.4. Crecimiento poblacional

El modelo más simple para el crecimiento de una población de organismos es  $\dot{N} = \mu N$ , donde  $N(t)$  es el tamaño de la población en el tiempo  $t$ , y  $\mu > 0$  es la tasa de crecimiento. Este modelo predice crecimiento exponencial  $N(t) = \exp(\mu t)N_0$  de una población inicial  $N_0$ . Obviamente este crecimiento no puede seguir indefinidamente, eventualmente ocurriendo una sobre población debido a que los recursos del ecosistema son finitos, provocando una disminución en la tasa de crecimiento. Una forma de modelar estos efectos es asumir que, en lugar de tener una tasa de crecimiento constante  $\mu$ , esta depende de la población actual de la forma  $\tilde{\mu}(N) = \mu(1 - N/K)$ , donde  $K$  es la *capacidad de carga* del ecosistema. Por lo tanto, cuando  $N$  es cercano a 0, la población crece exponencialmente a una tasa  $\mu$ , y cuando  $N \rightarrow K$  el crecimiento se satura. Reemplazando esta tasa de crecimiento modificada  $\tilde{\mu}$  en el modelo original, se obtiene la **ecuación logística**

$$\dot{N} = \mu \left(1 - \frac{N}{K}\right) N \quad (11)$$

sugerida por primera vez por Verhulst en 1838 para modelar el crecimiento de poblaciones humanas. Esta ecuación tiene dos puntos de equilibrio  $N^* = 0$  y  $N^* = K$ . El retrato de fase, como el que se muestra en la Fig. 6(a), nos permite bosquejar las trayectorias del sistema comenzando desde distintas condiciones iniciales, como se muestra en la Fig. 6(b).

Un análisis de estabilidad lineal entrega información cuantitativa acerca del comportamiento de las soluciones cerca de los equilibrios. Linealizando la dinámica en (11) se obtiene

$$\dot{\eta} = \mu \left(1 - \frac{2N^*}{K}\right) \eta.$$

Evaluando esta expresión para ambos puntos de equilibrio, se obtiene un interesante resultado: las trayectorias se alejan del equilibrio inestable  $N^* = 0$  a una tasa  $\mu$  y

son atraídas por el equilibrio estable  $N^* = K$  a una tasa de igual magnitud pero con el signo opuesto  $-\mu$ .

¿Cómo se podría modelar el crecimiento poblacional de organismos que necesitan un tamaño mínimo de población  $N_{\min}$  para reproducirse?

## 2.2. Bifurcaciones elementales

### Definición

#### 2.2.1. Bifurcación silla-nodo

$$\dot{x} = \mu + x^2$$

#### 2.2.2. Sincronización via silla-nodo en el círculo

Ecuación de Adler  $\dot{x} = \mu + \varepsilon \sin(x)$ .

#### 2.2.3. Bifurcación transcírtica

$$\dot{x} = \mu x - x^2$$

#### 2.2.4. Umbral de láser

#### 2.2.5. Bifurcación de tridente

$$\dot{x} = \mu x - x^3$$

#### 2.2.6. Pérdida de simetría

Pandeo de una viga

### **3. Sistemas de dos o más dimensiones**

#### **3.1. Sistemas lineales**

$$\dot{x} = Ax$$

##### **3.1.1. Matriz exponencial**

##### **3.1.2. Valores y vectores propios**

##### **3.1.3. Clasificación de equilibrios en $\mathbb{R}^2$**

##### **3.1.4. Romeo y Julieta**

##### **3.1.5. Vectores, coordenadas y patrones**

Ejemplos transferencia de calor y estabilidad hidrodinámica

Modos lentos

#### **3.2. Plano de fase**

Existencia y unicidad. pplane?

##### **3.2.1. Equilibrios y linealización**

Jacobiano

##### **3.2.2. Teorema de Hartman-Grobman**

Manifolds

Regiones de atracción

##### **3.2.3. Ovejas y conejos**

Ecuación de Lotka-Volterra

##### **3.2.4. Péndulo**

Conexiones heteroclínicas y homoclínicas.

##### **3.2.5. Doble pozo de potencial**

Oscilador de Duffing

$$\ddot{x} = x - x^3$$

##### **3.2.6. Ciclos límite**

Oscilador de van der Pol

### **3.2.7. Sección de Poincaré**

Mapas iterados.

## **3.3. Bifurcaciones otra vez**

Bifurcación de Hopf  
Flujo sobre un cilindro

## **4. Caos**

### **4.1. Sistema de Lorenz**

### **4.2. Mapa logístico**

## **5. Modelamiento basado en datos**

### **5.1. Fundamentos de álgebra lineal**

$$Ax = b$$

### **5.2. Identificación de sistemas**

Regresión

### **5.3. Reducción de dimensionalidad**

Descomposición en valores singulares

## Referencias

- [1] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press, 2015.
- [2] Steven L. Brunton and J. Nathan Kutz. *Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge University Press, 2019.
- [3] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [4] David Ruelle and Floris Takens. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*, 20:167–192, 1971.
- [5] Robert M May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:85–93, 1976.
- [6] Mitchell J Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19:25–52, 1978.
- [7] Karl J. Åström and Richard M. Murray. *Feedback systems: An introduction for scientists and engineers*. Princeton university press, 2010.