Polinomios: cálculo de raíces

Cálculo de raíces

Veremos cómo obtener las raíces en algunas casos especiales.

Polinomio de grado 1 $p(x) = ax + b$.

La raíz r de este polinomio es:

$$r = -\frac{b}{a}$$

pues ese es el valor real en que se anula el polinomio.

Ejemplo: Halla la raíz de $p(x) = 2x + 3$.
En este caso la raíz es:

$$r = -\frac{3}{2}$$

Polinomio de grado 2: $p(x) = ax^2 + bx + c$.

Se utiliza la **fórmula de resolución cuadrática**:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El número $D = b^2 - 4ac$ se llama "discriminante":

- Si $D > 0$, el polinomio tiene **dos raíces reales**.

- Si $D = 0$, el polinomio tiene **una raíz real de orden dos**.

- Si $D < 0$, el polinomio tiene **dos raíces complejas**.

Ejemplos:

1. Halla las raíces del polinomio $p(x) = 3x^2 + 3x - 6$.
   Por fórmula de resolución cuadrática ($a = 3$, $b = 3$ y $c = -6$):

$$r_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} \frac{-3+\sqrt{81}}{6} = 1 \\ \frac{-3-\sqrt{81}}{6} = -2 \end{cases}.$$

   Las raíces del polinomio son $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$.

2. Halla las raíces del polinomio $p(x) = x^2 + 2x + 1$.
   Por fórmula de resolución cuadrática ($a = 1$, $b = 2$ y $c = 1$):

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

   La única raíz (doble) del polinomio es $r_1 = -1$.

3. Halla las raíces del polinomio $p(x) = x^2 - 4x + 5$.
Por fórmula de resolución cuadrática ($a = 1$, $b = -4$ y $c = 5$):

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm 2i.$$

Las raíces del polinomio son $r_1 = 2 + i$ y $r_2 = 2 - i$.

Polinomio bicuadrado: $p(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

1. Se sustituye $t = x^2$ en $p(x)$: $p(t) = at^2 + bt + c$.

2. Se obtiene las raíces (t_1 y t_2) del polinomio $p(t) = at^2+bt+c$ con la fórmula de resolución cuadrática.

3. Se usa nuevamente la sustitución $t = x^2$ para hallar las raíces:

   - $x^2 = t_1$ entonces: $x = \pm\sqrt{t_1}$.
   - $x^2 = t_2$ entonces: $x = \pm\sqrt{t_2}$.

   Las raíces de $p(x)$ son $x = \sqrt{t_1}$, $x = -\sqrt{t_1}$, $x = \sqrt{t_2}$ y $x = -\sqrt{t_2}$.

Ejemplo: Halla las raíces del polinomio $p(x) = 3x^4 + 3x^2 - 6$.
Usando la sustitución $t = x^2$ obtenemos el polinomio: $p(t) = 3t^2 + 3t - 6$.
Las raíces de este polinomio son $t_1 = 1$ y $t_2 = -2$. Usando nuevamente la sustitución $t = x^2$ se obtienen las raíces:

- $x^2 = t_1 = 1$ entonces: $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$.

- $x^2 = t_2 = -2$ entonces: $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$.

Luego el polinomio tiene dos raíces reales ($r_1 = 1$ y $r_2 = -1$), y dos raíces complejas ($r_3 = \sqrt{2}i$ y $r_2 = -\sqrt{2}i$).

Raíces racionales

Teorema de Gauss: *Si el número racional* $r = \dfrac{a}{b}$ *es raíz del polinomio* $p(x)$ *con* **coeficientes enteros**, *entonces* a *debe ser un divisor del término independiente y* b *debe ser divisor del coeficiente principal.*

Este resultado puese utilizarse de la siguiente manera:

1. Se verifica que el polinomio tenga coeficientes enteros.

2. Se obtienen las posibles raíces racionales: numerador divisor del término independiente y denominador divisor del coeficiente principal.

3. Se comprueba (por regla de Ruffini o teorema del resto) si alguna de las posibles raíces es efectivamente raíz del polinomio.

Ejemplo: Halla las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 3$.
Aplicaremos el teorema de Gauss:

1. Como el polinomio NO tiene coeficientes enteros, se extrae como factor común la fracción $\frac{1}{2}$ y se obtiene un polinomio con coefientes enteros, es decir, $p(x)$ se puede escribir como:
$p(x) = \frac{1}{2}\left(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6\right)$

2. Vamos a obtener las posibles raíces racionales del polinomio $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$:

   - Divisores del término independiente (6): $a = 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

   - Divisores del coeficiente principal (2): $b = 1, -1, 2, -2$.

   - Entonces las posibles raíces racionales son:

     $$r = \frac{a}{b} = 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 6,\ -6,\ 1/2,\ -1/2,\ 3/2,\ -3/2$$

3. Comprobando (resto 0 con regla de Ruffini o teorema del resto) se verifica que -2, 3 y $1/2$ son raíces.

Luego, las raíces de $p(x)$ son -2, 3 y $1/2$ y puede factorizarse:

$$p(x) = (x+2)(x-3)(x-1/2)$$

Observación: El teorema permite hallar **posibles raíces**, puede ser que ninguna de ellas lo sea, pero en ese caso sabemos que el polinomio NO tiene raíces racionales, podrían ser raíces irracionales o complejas, y debemos hallarlas por algún otro método.

Polinomio factorizado: Si un polinomio se encuentra factorizado, las raíces del mismo serán las raíces correspondientes a cada uno de los factores.

1. **Si se puede aplicar algún caso de factorización:** se factoriza el polinomio y luego se hallan las raíces de los factores.

   Ejemplo: Halla las raíces de $p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 15$.
   Por factor común por grupos y diferencia de cuadrados:

   $$p(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 15 = x^2(2x-5) - 3(2x-5) =$$

   $$= (x^2 - 3)(2x-5) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(2x - 5).$$

   Luego, las raíces de $p(x)$ son las raíces de cada factor: $r_1 = \sqrt{3}$, $r_2 = -\sqrt{3}$ y $r_3 = 5/2$.

2. **Si el polinomio tiene término independiente nulo:** se extrae la variable como factor común, con la menor potencia k que aparece en el polinomio: $p(x) = x^k.c(x)$. Una raíz de este polinomio es $r = 0$, con orden de multiplicidad k.

<u>Ejemplo</u>: Halla las raíces de $p(x) = x^5 - 6x^4 + 9x^3$.
Puede extraerse x^3 como factor común y luego aplicar trinomio cuadrado perfecto:

$$p(x) = x^3(x^2 - 6x + 9) = x^3(x - 3)^2.$$

Las raíces de $p(x)$ son: $r_1 = 0$ (raíz triple) y $r_2 = 3$ (raíz doble).

3. **Si se conoce una raíz r del polinomio $p(x)$:** se halla el orden de multiplicidad k de la raíz, y se expresa al polinomio factorizado: $p(x) = (x-r)^k.c(x)$.
Luego se hallan las raíces del cociente $c(x)$.

<u>Ejemplo</u>: Halla todas las raíces de $p(x) = 3x^4 - 16x^3 + 29x^2 - 20x + 4$, sabiendo que 2 es raíz.
Aplicamos Regla de Ruffini:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & -16 & 29 & -20 & 4 \\
2 & & 6 & -20 & 18 & -4 \\
\hline
 & 3 & -10 & 9 & -2 & \boxed{0} \\
2 & & 6 & -8 & 2 & \\
\hline
 & 3 & -4 & 1 & \boxed{0} & \\
2 & & 6 & 4 & & \\
\hline
 & 3 & 2 & \boxed{5} & &
\end{array}
$$

Por lo tanto, $r = 2$ es raíz doble de $p(x)$:

$$p(x) = (x-2)^2(3x^2 - 4x + 1)$$

Las restantes raíces de $p(x)$ son las raíces del cociente $c(x) = 3x^2 - 4x + 1$ que se obtienen aplicando la fórmula de resolución cuadrática $r_1 = 1$ y $r_2 = 1/3$.
Por lo tanto las raíces de $p(x)$ son $r = 2$ (doble), $r_1 = 1$ (simple) y $r_2 = 1/3$ (simple). El polinomio puede expresarse factorizado en forma completa:

$$p(x) = 3(x-2)^2(x-1)(x-1/3).$$

4. **Si se sabe que el polinomio $p(x)$ es divisible por otro polinomio $q(x)$:** se efectúa la división y se expresa $p(x)$ factorizado como:

$$p(x) = q(x).c(x).$$

Luego se hallan las raíces de los factores $q(x)$ y $c(x)$.

Ejemplo: Halla todas las raíces del polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ sabiendo que es divisible por $q(x) = x^2 - 3x + 2$. Si se efectúa la división:

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
 & x^3 & -2x^2 & -x & +2 & x^2 & -3x & +2 \\ \cline{6-8}
- & x^3 & -3x^2 & +2x & & x & +1 & \\ \cline{2-5}
 & 0x^3 & x^2 & -3x & +2 & & & \\
- & & x^2 & -3x & +2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & 0x^2 & +0x & +0 & & &
\end{array}$$

Se obtiene como cociente $c(x) = x + 1$ (y resto nulo). Por lo tanto la factorización de $p(x)$ es:

$$p(x) = (x^2 - 3x + 2)(x + 1).$$

Luego las raíces de $p(x)$ son las raíces de: $q(x) = x^2 - 3x + 2$ y de $c(x) = x - 1$.
Las raíces de $q(x) = x^2 - 3x + 2$ son $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$ (se obtienen por fórmula de resolución cuadrática).
La raíz de $c(x) = x - 1$ es $r = -1$.
Por lo tanto las raíces de $p(x)$ son $r_1 = 2$ $r_2 = 1$ y $r_3 = -1$ (todas raíces simples).