Profesor: Álvaro Saldivia

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma de polinomios

Para sumar dos polinomios se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

$Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$

1. **Ordenamos** los **polinomios**, si no lo están.

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

2. **Agrupamos** los **monomios** del **mismo grado**.

$P(x) + Q(x) = 2x^3 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4x - 3$

3. **Sumamos los monomios semejantes**.

$P(x) + Q(x) = 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$

Resta de polinomios

La resta de polinomios consiste en sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$$P(x) - Q(x) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$$

$$P(x) - Q(x) = 2x^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$$

Multiplicación de un número por un polinomio

Es otro **polinomio** que tiene de **grado** el **mismo** del polinomio y como **coeficientes** el **producto de los coeficientes del polinomio por el número**.

$$3 \cdot (2x^3 - 3 x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

Multiplicación de un monomio por un polinomio

Se **multiplica el monomio** por todos y **cada** uno de los **monomios que forman el polinomio**.

$$3 x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$$

Multiplicación de polinomios

$$P(x) = 2x^2 - 3 \quad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$$

Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos segundo polinomio.

$$P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) =$$

$$= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x =$$

Se suman los monomios del mismo grado.

$$= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$$

Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

También podemos **multiplicar polinomios** de siguiente modo:

$$
\begin{array}{r}
2x^3 - 3x^2 + 4x \\
2x^2 - 3 \\
\hline
-6x^3 + 9x^2 - 12x \\
4x^5 - 6x^4 + 8x^3 \qquad\qquad \\
\hline
4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x
\end{array}
$$

División de polinomios

Resolver la división de polinomios:

P(x) = $x^5 + 2x^3 - x - 8$ Q(x) = $x^2 - 2x + 1$

P(x) : Q(x)

A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio **no es completo** dejamos **huecos** en los lugares que correspondan.

$$
x^5 \qquad +2x^3 \qquad -x-8 \qquad \underline{|\,x^2-2x+1\qquad}
$$

A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$x^5 : x^2 = x^3$

Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

$$
\begin{array}{llll}
x^5 & +2x^3 & -x-8 & \underline{|\,x^2-2x+1} \\
\underline{-x^5+2x^4-x^3} & & & x^3 \\
\qquad 2x^4+x^3 & & -x-8 &
\end{array}
$$

Volvemos a **dividir** el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$2x^4 : x^2 = 2\ x^2$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2 \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & & -x & -8 & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & -8 &
\end{array}
$$

Procedemos igual que antes. $5x^3 : x^2 = 5\ x$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2+5x \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & & -x & -8 & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & -8 & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & -5x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x^2 & -6x & -8 &
\end{array}
$$

Volvemos a hacer las mismas operaciones. $8x^2 : x^2 = 8$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2+5x+8 \\ \cline{1-3}
 & 2x^4 & +x^3 & & & & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^3 & -2x^2 & -x & & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & -5x & & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x^2 & -6x & -8 & \\
 & & & -8x^2 & +16x & -8 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 10x & -16 &
\end{array}
$$

10x − 6 es el **resto**, porque su **grado es menor que el del divisor** y por tanto no se puede continuar dividiendo.

$\mathbf{x^3+2x^2+5x+8}$ es el **cociente**.

DIVISIÓN POR REGLE DE RUFFINI

Si el **divisor es un binomio de la forma x — a**, entonces utilizamos un **método más breve** para hacer la **división**, llamado **regla de Ruffini**.

Resolver por la regla de Ruffini la división:

$(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

1 **Si el polinomio no es completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros.**

2 **Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea.**

3 **Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independendiente del divisor.**

4 **Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente.**

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

5 **Multiplicamos ese coeficiente por el divisor y lo colocamos debajo del siguiente término.**

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

6 **Sumamos los dos coeficientes.**

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & 3 & & & \end{array}$$

7 **Repetimos el proceso anterior.**

	1	0	-3	0	2
3		3	9		
	1	3	6		

Volvemos a repetir el proceso.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	
	1	3	6	18	

Volvemos a repetir.

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

8 El último número obtenido, 56 , es el resto.

9 El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

$x^3 + 3x^2 + 6x + 18$

Ejercicios y problemas resueltos de polinomios

1 Dados los polinomios:

$P(x) = 4x^2 - 1$

$Q(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

$R(x) = 6x^2 + x + 1$

$S(x) = 1/2x^2 + 4$

$T(x) = 3/2x^2 + 5$

$U(x) = x^2 + 2$

Calcular:

1 $P(x) + Q(x) =$

$= (4x^2 - 1) + (x^3 - 3x^2 + 6x - 2) =$

$= x^3 - 3x^2 + 4x^2 + 6x - 2 - 1 =$

$= \mathbf{x^3 + x^2 + 6x - 3}$

2 $P(x) - U(x) =$

$= (4x^2 - 1) - (x^2 + 2) =$

$= 4x^2 - 1 - x^2 - 2 =$

$= \mathbf{3x^2 - 3}$

3 $P(x) + R(x) =$

$= (4x^2 - 1) + (6x^2 + x + 1) =$

$= 4x^2 + 6x^2 + x - 1 + 1 =$

$= \mathbf{10x^2 + x}$

4 $2P(x) - R(x) =$

$= 2(4x^2 - 1) - (6x^2 + x + 1) =$

$= 8x^2 - 2 - 6x^2 - x - 1 =$

$= \mathbf{2x^2 - x - 3}$

5 $S(x) + T(x) + U(x) =$

$= (1/2x^2 + 4) + (3/2x^2 + 5) + (x^2 + 2) =$

$= 1/2\ x^2 + 3/2\ x^2 + x^2 + 4 + 5 + 2 =$

$= \mathbf{3x^2 + 11}$

6 $S(x) - T(x) + U(x) =$

$= (1/2x^2 + 4) - (3/2x^2 + 5) + (x^2 + 2) =$

$= 1/2x^2 + 4 - 3/2x^2 - 5 + x^2 + 2 =$

$= \mathbf{1}$

2 Dados los polinomios:

$P(x) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1$

$Q(x) = x^3 - 6x^2 + 4$

$R(x) = 2x^4 - 2x - 2$

Calcular:

$P(x) + Q(x) - R(x) =$

$= (x^4 - 2x^2 - 6x - 1) + (x^3 - 6x^2 + 4) - (2x^4 - 2x - 2) =$

$= x^4 - 2x^2 - 6x - 1 + x^3 - 6x^2 + 4 - 2x^4 + 2x + 2 =$

$= x^4 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x^2 - 6x + 2x - 1 + 4 + 2 =$

$= \mathbf{-x^4 + x^3 - 8x^2 - 4x + 5}$

$P(x) + 2\,Q(x) - R(x) =$

$=(x^4 - 2x^2 - 6x - 1) + 2(x^3 - 6x^2 + 4) - (2x^4 - 2x - 2) =$

$= x^4 - 2x^2 - 6x - 1 + 2x^3 - 12x^2 + 8 - 2x^4 + 2x + 2 =$

$= x^4 - 2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 12x^2 - 6x + 2x - 1 + 8 + 2 =$

$= \mathbf{-x^4 + 2x^3 - 14x^2 - 4x + 9}$

$Q(x) + R(x) - P(x) =$

$= (x^3 - 6x^2 + 4) + (2x^4 - 2x - 2) - (x^4 - 2x^2 - 6x - 1) =$

$= x^3 - 6x^2 + 4 + 2x^4 - 2x - 2 - x^4 + 2x^2 + 6x + 1 =$

$= 2x^4 - x^4 + x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 2x + 6x + 4 - 2 + 1 =$

$= \mathbf{x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x + 3}$

1 $(x^4 - 2x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$

$= x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 2x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 2x^2 - 4x + 6 =$

$= x^6 - 2x^5 - 2x^4 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 6x^2 - 4x + 6 =$

$= \mathbf{x^6 - 2x^5 + x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 4x + 6}$

2 $(3x^2 - 5x) \cdot (2x^3 + 4x^2 - x + 2) =$

$= 6x^5 + 12x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x^4 - 20x^3 + 5x^2 - 10x =$

$= 6x^5 + 12x^4 - 10x^4 - 3x^3 - 20x^3 + 6x^2 + 5x^2 - 10x =$

$= \mathbf{6x^5 + 2x^4 - 23x^3 + 11x^2 - 10x}$

3 $(2x^2 - 5x + 6) \cdot (3x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 4x - 3) =$

$= 6x^6 - 10x^5 - 12x^4 + 8x^3 - 6x^2 -$

$- 15x^5 + 25x^4 + 30x^3 - 20x^2 + 15x +$

$+18x^4 - 30x^3 - 36x^2 + 24x - 18 =$

$= 6x^6 - 10x^5 - 15x^5 - 12x^4 + 25x^4 + 18x^4 +$

$+8x^3 - 30x^3 + 30x^3 - 6x^2 - 20x^2 - 36x^2 + 15x + 24x - 18 =$

$=$ **$6x^6 - 25x^5 + 31x^4 + 8x^3 - 62x^2 + 39x - 18$**

3 Dividir los polinomios:

1 $(x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20) : (x^2 + 3x - 2)$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -11x^2 & +30x & -20 & x^2+3x-2 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -3x^3 & +2x^2 & & & x^2-5x+6 \\
\cline{1-3}
 & -5x^3 & -9x^2 & +30x & & \\
 & 5x^3 & +15x^2 & -10x & & \\
\cline{2-4}
 & & 6x^2 & +20x & -20 & \\
 & & -6x^2 & -18x & +12 & \\
\cline{3-5}
 & & & 2x & -8 & \\
\end{array}
$$

2 $(x^6 + 5x^4 + 3x^2 - 2x) : (x^2 - x + 3)$

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^6 & & +5x^4 & & +3x^2 & -2x & x^2-x+3 \\
\cline{7-7}
-x^6 & +x^5 & -3x^4 & & & & x^4+x^3+3x^2-6 \\
\cline{1-3}
 & x^5 & +2x^4 & & & & \\
 & -x^5 & +x^4 & -3x^3 & & & \\
\cline{2-4}
 & & 3x^4 & -3x^3 & +3x^2 & & \\
 & & -3x^4 & +3x^3 & -9x^2 & & \\
\cline{3-5}
 & & & & -6x^2 & -2x & \\
 & & & & 6x^2 & -6x & +18 \\
\cline{5-7}
 & & & & & -8x & +18 \\
\end{array}
$$

3 $P(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ $\qquad$ $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

x^5	$+2x^3$	$-x-8$	x^2-2x+1
$-x^5+2x^4-x^3$			x^3+2x^2+5x+8
$2x^4 + x^3$			
$-2x^4+4x^3-2x^2$			
$5x^3-2x^2-x$			
$-5x^3+10x^2-5x$			
$8x^2-6x-8$			
$-8x^2+16x-8$			
$10x-16$			

4 Dividir por Ruffini:

1 $(x^3 + 2x + 70) : (x+4)$

	1	0	2	70
-4		-4	16	-72
	1	-4	18	-2

$C(x) = x^2 - 4x + 18$ $\qquad$ $R(x) = -2$

2 $(x^5 - 32) : (x - 2)$

	1	0	0	0	0	-32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0

$C(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$ $R = 0$

3 $(x^4 - 3x^2 + 2) : (x - 3)$

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

$C(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 18$ $R = 56$