VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Magistro baigiamasis darbas

Parametrų funkcinių apribojimų testavimas integruotų skirtingo dažnio duomenų regresiniuose modeliuose

Testing the Functional Constraints on Parameters in Regression Models with Integrated Variables of Different Frequency

Benediktas Bilinskas

VILNIUS 2013

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
EKONOMETRINĖS ANALIZĖS KATEDRA

Darbo vadovas doc. Virmantas Kvedaras ____________________

Darbo recenzentas Dr. Vaidotas Zemlys ____________________

Darbas apgintas 2013 01 11

Darbas įvertintas 10

Registravimo NR. _______________

Darbas atiduotas į katedrą 2013 01 03

Turinys

Parametrų funkcinių apribojimų testavimas integruotų skirtingo dažnio duomenų regresiniuose modeliuose

Santrauka

Kvedaras ir Zemlys (2012) pristatė statistinį testą funkciniams parametrų apribojimams tikrinti stacionarių skirtingo dažnio kintamųjų regresiniame modelyje. Šiame darbe testas pritaikomas integruotų skirtingo dažnio kintamųjų regresiniam modeliui. Dviejų kintamųjų regresinis modelis praplečiamas įtraukiant papildomus stacionarius ir integruotus paaiškinančiuosius kintamuosius. Apibrėžiamos kelios testo statistikos ir nustatomas jų asimptotinis elgesys nulinės ir alternatyvios hipotezių atvejais. Taip pat palyginami nagrinėjamo ir Miller (2011) pristatyto testų reikšmingumas ir galia.

Raktiniai žodžiai: parametrų apribojimas, integruoti kintamieji, kointegruoti kintamieji, regresinis modelis, skirtingo dažnio, statistinis testas.

Testing the Functional Constraints on Parameters in Regression Models with Integrated Variables of Different Frequency

Abstract

Recently, Kvedaras and Zemlys (2012) proposed a statistical test of acceptability of imposed functional constraint on parameters in mixed frequency data regression model with stationary variables. In this paper the test is adapted for the mixed frequency data regression model with integrated variables. Regression model of two variables is extended by inclusion of additional stationary and integrated explanatory variables. Several test statistics are defined and their asymptotic behaviour is characterized under null and alternative hypotheses. Moreover, a comparison of size and power of the investigated test and the test, presented by Miller (2011), is made.

Key words: parameter constraint, integrated variables, cointegrated variables, regression model, different frequency, mixed frequency, statistical test.

1 Įvadas

Tipiniai laiko eilučių regresiniai modeliai naudoja vienodo dažnio duomenis. Norėdami sudaryti regresinį modelį, turėdami žemo dažnio priklausomąjį kintamąjį ir aukštesnio dažnio paaiškinantįjį kintamąjį, įprastai pastarąjį tradiciniais būdais agreguojame laike. Įprastas agregavimas dažniausiai yra aukštesnio dažnio duomenų vidurkio ar paskutinės reikšmės ėmimas laiko periode. Taip gali būti prarandama dalis informacijos, slypinčios aukšto dažnio duomenų dinamikoje. Be to, kaip parodoma [1], gali būti gaunami nesuderinti parametrų įvertiniai. Vienas iš būdų šią informaciją panaudoti yra atsisakyti išankstinio agregavimo ir agregavimo funkcijos parametrus vertinti jų neapribojant. Tačiau tokiu atveju iškyla didelio parametrų skaičiaus problema, kada visų jų vertinimas yra neefektyvus ta prasme, kad prarandamas modelio prognozių tikslumas. Kitas būdas panaudoti informaciją, esančią aukšto dažnio duomenyse, siūlomas straipsniuose [4], [5], [6]. Juose pristatyti MIDAS regresiniai modeliai, kuriuose tariama, kad agregavimo funkcijos parametrai yra reikšmės apribojimo funkcijos, priklausančios nuo nedidelio skaičiaus hiper-paramerų. Parinkus teisingą apribojimo funkciją, gaunamos tikslesnės priklausomo kintamojo prognozės.

Realybėje tikroji parametrų apribojimo funkcija yra nežinoma, todėl iškyla jos parinkimo problema. Straipsnyje [1] pristatytas testas, kuriuo tikrinama hipotezė, kad aukšto dažnio duomenų agregavimas, kai imamas jų vidurkis laiko periode, yra tinkamas prieš bendresnio agregavimo alternatyvą. Tačiau toks testas neatsako į klausimą, ar pasirinkta apribojimo funkcija yra tinkama naudoti, jei tikrieji agregavimo funkcijos parametrai nėra lygūs tarpusavyje. Taigi reikalingi statistiniai testai, skirti tikrinti hipotezę, kad apribojimo funkcija yra parinkta teisingai, t.y., agregavimo funkcijos parametrai gali būti aprašomi pasirinkta apribojimo funkcija. Pastaruoju metu pristatyti du skirtingi testai, skirti tikrinti šią hipotezę. Straipsnyje [12] pateiktas testas, kai aukšto dažnio kintamasis yra stacionarus arba pirmos eilės integruotas procesas. Straipsnyje [8] pasiūlytas kitoks testas, tačiau daroma prielaida, kad modelio kintamieji yra stacionarūs.

Pirmasis šio darbo tikslas yra pritaikyti [8] pristatytą testą atvejui, kai modelio kintamieji yra pirmos eilės integruoti procesai. Nagrinėjamas modelis perrašomas į parametrų vertinimo formą, kada priklausomą kintamąjį aprašo aukšto dažnio proceso stacionarūs skirtumai ir vienas liekamasis integruotas narys. Parodoma, kad [8] testo statistika, pritaikyta šiam modeliui, asimptotiškai tebeturi χ^2 atsitiktinio dydžio skirstinį, jei nulinė hipotezė yra teisinga, ir diverguoja kitu atveju.

Antrasis tikslas yra apibendrinti [8] pristatytą statistinį testą skirtingo dažnio duomenų regresiniam modeliui, į kurį įtraukiami papildomi paaiškinantieji kintamieji, o aukšto dažnio procesas lieka integruotas. Toks apibendrinimas reikalingas dėl galimos praleistų kintamųjų problemos, kada modelio liekanos būtų gaunamos nestacionarios ar koreliuotos su paaiškinančiaisiais kintamaisiais. Apibrėžiama statistika, į kurią simetriškai įeina ir integruoti, ir stacionarūs paaiškinantieji kintamieji, ir kuri, be to, yra paprastas [8] pateiktos statistikos apibendrinimas. Įrodoma, kad statistika pagal pasiskirstymą konverguoja į χ^2 atsitiktinį dydį, jei apribojimo funkcija yra parinkta teisingai, ir diverguoja kitu atveju.

Straipsnyje [12] pateiktas kitas apribojimo funkcijos adekvatumo statistinis testas. Trečiasis darbo tikslas yra konkretiems duomenis generuojantiems procesams palyginti nagrinėjamą ir [12] pritatytą testus. Jei nulinė hipotezės teisinga, Monte Carlo metodu įvertinami testo statistikų empirinių ir teorinių asimptotinių pasiskirstymų skirtumai. Neteisingos nulinės hipotezės atveju palyginama abiejų testų galia, kuri įvertinama naudojantis Monte Carlo metodu.

Toliau darbas išdėstytas tokiu būdu. Antrame skyriuje [8] pristatytas testas pritaikomas integruotų kintamųjų regresiniam modeliui. Trečiame skyriuje modelis praplečiamas, įtraukiant papildomus paaiškinančiuosius kintamuosius. Apibrėžiamos kelios testo statistikos bei nustatomas jų asimptotinis elgesys. Ketvirtame skyriuje atliekama imitacinė analizė. Penktame skyriuje gauti rezultatai apibendrinami. Ilgesni teiginių įrodymai, didesnės lentelės bei grafikai pateikiami prieduose.

2 Parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo testavimas integruotų skirtingo dažnio duomenų regresiniame modelyje

Šiame skyriuje parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo statistinis testas, aprašytas straipsnyje [8], pritaikomas dviejų integruotų skirtingo dažnio kintamamųjų regresiniam modeliui. Skyrelyje 2.1 nagrinėjamas modelis pristatomas ir perrašomas į parametrų vertinimo formą. Taip pat suformuluojamos nulinė ir alternatyvi hipotezės. Skyrelyje 2.2 modelis užrašomas matriciniu pavidalu ir aprašomi du parametrų vertinimo metodai. Pirma, jei nėra naudojama jokia parametrų apribojimo funkcija, parametrus vertiname mažiausių kvadratų metodu (toliau – MKM). Jei parametrus norima apriboti netiesine funkcija, jos parametrai vertinami netiesiniu mažiausių kvadratų metodu (toliau – NMKM). Parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo testas aprašomas 2.3 skyrelyje. Jame pateikiamos dvi testo statistikos ir suformuluojami teiginiai apie statistikų asimptotinį elgesį nulinės ir alternatyvios hipotezės atvejais. Šių teiginių įrodymai nukeliami į priedus.

2.1 Nagrinėjami regresiniai modeliai

Tegu yra turimi du diskretaus laiko procesai $y = \{y_t \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{N}\}$ ir $x = \{x_\tau \in \mathbb{R},\, \tau \in \mathbb{N}\}$. Procesai y ir x yra tokie, kad laiko momentu t įvyksta vienas y stebėjimas y_t, o tarp $t-1$ ir t įvyksta m proceso x stebėjimų $x_{(t-1)m+1}, \ldots, x_{tm}$. Procesą y vadinsime žemo dažnio, o x – aukšto dažnio procesu. Tariame, kad m yra fiksuotas ir žinomas. Laikome, kad x yra toks pirmos eilės integruotas procesas:

$$x_\tau = x_{\tau-1} + v_\tau, \quad x_0 = 0, \quad \tau \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

kur $v = \{v_\tau \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionarus procesas, $\mathrm{E}v_\tau = 0$. Reikia pastebėti, kad jei stebimas procesas x, tai stebimas ir procesas v. Šiame skyriuje nagrinėjamas toks bazinis regresinis modelis:

$$y_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_i x_{tm-i} + u_t, \quad t \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Dėl apibrėžtumo, tegu $x_\tau = 0$, kai $\tau < 0$. Tariame, kad parametrų $\boldsymbol{\theta} := (\theta_0, \ldots, \theta_d)'$ skaičius $d+1$ yra žinomas. Parametrai $\boldsymbol{\theta}$ atitinka gana bendrą aukšto dažnio proceso agregavimą, kada įprastas agregavimo formas galima užrašyti kaip atskirus $\boldsymbol{\theta}$ įgyjamų reikšmių atvejus. Pavyzdžiui, atveju $d+1 = m$ vidurkio agregavimą periode atitinka $\theta_i = \theta_j$ atvejis, $i, j = 1, \ldots, m$.

Modelio (2.2) liekanos tenkina tokią prielaidą.

Prielaida P1. $\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *yra n.v.p. atsitiktiniai dydžiai,* $\mathrm{E}u_t = 0$, $\mathrm{E}u_t^2 = \sigma_u^2$, $\mathrm{E}u_t^4 < \infty$, $\forall t \in \mathbb{Z}$. *Be to, procesai u ir v yra nepriklausomi.*

Čia n.v.p. – nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę. Prielaida P1 bus naudojama, ieškant toliau šiame skyriuje apibrėžtų testo statistikų asimptotinio elgesio.

Kadangi procesas x laikomas integruotu, (2.2) modelio paaiškinantieji kintamieji yra stipriai koreliuoti. Perrašykime modelį į tokią formą, kad tarp paaiškinančiųjų kintamųjų būtų tik vienas integruotas narys. Pasinaudojus (2.1) ir (2.2), gauname, kad

$$\begin{aligned} y_t &= \left(\sum_{i=0}^{d}\theta_i\right)x_{tm-d} + \theta_0\sum_{j=0}^{d-1}v_{tm-j} + \theta_1\sum_{j=1}^{d-1}v_{tm-j} + \cdots + \theta_{d-1}v_{tm-(d-1)} + u_t \\ &= \left(\sum_{i=0}^{d}\theta_i\right)x_{tm-d} + \theta_0 v_{tm} + (\theta_0+\theta_1)\,v_{tm-1} + \cdots + (\theta_0+\theta_1+\cdots+\theta_{d-1})\,v_{tm-(d-1)} + u_t. \end{aligned}$$

Taigi (2.2) modelį galima užrašyti taip:

$$y_t = \sum_{i=0}^{d-1}\beta_i v_{tm-i} + \beta_d x_{tm-d} + u_t, \tag{2.3}$$

kur

$$\beta_i := \sum_{j=0}^{i}\theta_j, \quad i = 0,\ldots,d.$$

Dar kartą pasinaudojus (2.1), turime, kad $\beta_d x_{tm-d} = \beta_d x_{tm-d-1} + \beta_d v_{tm-d}$. Taigi (2.3) modelį užrašome taip:

$$y_t = \sum_{i=0}^{d}\beta_i v_{tm-i} + \beta_d x_{tm-d-1} + u_t, \tag{2.4}$$

Nors parametrai $\beta_0,\ldots,\beta_d$ gali būti vertinami MKM, esant dideliam parametrų skaičiui $d+1$, MKM įvertinių dispersija gali būti didelė. MIDAS regresijoje tariama, kad (2.2) modelio parametrai $\boldsymbol{\theta}$ yra parametrinės funkcijos $g:\Lambda_g\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $\Lambda_g\subset\mathbb{R}^q$, reikšmės, t.y.,

$$\theta_i = g(\boldsymbol{\lambda}, i), \quad i=0,\ldots,d, \quad \boldsymbol{\lambda}\in\Lambda_g. \tag{2.5}$$

Funkciją g vadinsime parametrų apribojimo funkcija. Paprastai tariama, kad parametrų $\boldsymbol{\lambda}$ skaičius q yra žymiai mažesnis nei $d+1$. Pavyzdžiui, literatūroje dažnai naudojama vadinama „Almon lag" apribojimo funkcija, turinti tokią formą:

$$g(\boldsymbol{\lambda}, i) = \lambda_1\frac{\exp\left(\lambda_2 i^1 + \ldots + \lambda_q i^{q-1}\right)}{\sum_{j=0}^{d}\exp\left(\lambda_2 j^1 + \ldots + \lambda_q j^{q-1}\right)}, \quad i\in\mathbb{N}.$$

Natūralu laikyti, kad tikroji parametrų $\boldsymbol{\theta}$ apribojimo funkcija g nėra žinoma. Gali būti, kad $\boldsymbol{\theta}$ apskritai negali būti aprašomi mažai parametrų turinčia funkcija. Tegu yra pasirenkama parametrų apribojimo funkcija $h:\Lambda\times\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, kur $\Lambda\subset\mathbb{R}^r$. Formaliai užrašykime nulinę hipotezę H_0 ir jos alternatyvą H_1.

$$H_0: \exists\boldsymbol{\gamma}\in\Lambda,\ \text{kad}\ \theta_i = h(\boldsymbol{\gamma}, i), \forall i\in\{0,\ldots,d\}; \tag{2.6}$$

$$H_1: \exists i\in\{0,\ldots,d\},\ \text{kad}\ \theta_i \neq h(\boldsymbol{\gamma}, i), \forall\boldsymbol{\gamma}\in\Lambda. \tag{2.7}$$

Straipsnyje [8] pristatytas apribojimo funkcijos h adekvatumo testas, kuriuo tikrinama H_0 prieš alternatyvą H_1, kai modelyje (2.2) aukšto dažnio procesas x yra stacionarus. Šio skyriaus tikslas yra pritaikyti [8] testą, kai x yra pirmos eilės integruotas procesas.

Tegu $f : \Lambda \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^r$, yra spėjama parametrų $\beta_0, \ldots, \beta_d$ apribojimo funkcija. Tuo atveju, kai manoma, kad h yra parametrų $\theta_0, \ldots, \theta_d$ apribojimo funkcija, imame $f(\boldsymbol{\gamma}, i) = \sum_{j=0}^{i} h(\boldsymbol{\gamma}, j)$, $i = 0, \ldots, d$. Modelis (2.4) su spėjama parametrų $\beta_0, \ldots, \beta_d$ apribojimo funkcija f užrašomas taip:

$$y_t = \sum_{i=0}^{d} f(\boldsymbol{\gamma}, i)\, v_{tm-i} + \beta_d x_{tm-d-1} + e_t, \tag{2.8}$$

$$e_t := u_t + \sum_{i=0}^{d} \big(\beta_i - f(\boldsymbol{\gamma}, i)\big) v_{tm-i}. \tag{2.9}$$

Jeigu funkcija f yra pasirinkta teisingai[1], (2.8) modelyje liekanos e_t tampa u_t, jei $\boldsymbol{\gamma} \in \Lambda$ yra toks, kad $\beta_i = f(\boldsymbol{\gamma}, i)$, $i = 0, \ldots, d$.

2.2 Parametrų vertinimas

Šiame skyrelyje aprašomi (2.4) ir (2.8) modelių parametrų vertinimo metodai. Iš pradžių (2.4) modelis užrašomas matriciniu pavidalu, apibrėžiami parametrų MKM įvertiniai. Antroje skyrelio dalyje apibrėžiami (2.8) modelio parametrų NMKM įvertiniai.

Tegu yra turimi procesų y ir x stebėjimai $\{y_t\}_{t=1}^{n}$ ir $\{x_\tau\}_{\tau=1}^{nm}$. Panašiai kaip [8], perrašykime (2.4) modelį matriciniu pavidalu. Dėl modelyje esančių proceso x vėlavimų, pirmas efektyvus y stebėjimas įvyksta laiko momentu t_1:

$$t_1 = \begin{cases} \lfloor d/m \rfloor + 2, & \text{jei } d+1 = mj \text{ kažkuriam } j \in \mathbb{N}; \\ \lfloor d/m \rfloor + 1, & \text{kitu atveju.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Įveskime tokius pažymėjimus:

$$\boldsymbol{y} := (y_{t_1}, y_{t_1+1}, \ldots, y_n)', \quad \boldsymbol{u} := (u_{t_1}, u_{t_1+1}, \ldots, u_n)', \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{X} := \big(x_{t_1 m-d-1}, x_{(t_1+1)m-d-1}, \ldots, x_{nm-d-1}\big)', \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{V} := \begin{bmatrix} v_{t_1 m} & v_{t_1 m-1} & \cdots & v_{t_1 m-d} \\ v_{(t_1+1)m} & v_{(t_1+1)m-1} & \cdots & v_{(t_1+1)m-d} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{nm} & v_{nm-1} & \cdots & v_{nm-d} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Z} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} & \boldsymbol{X} \end{bmatrix}, \tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{0,d} := (\beta_0, \ldots, \beta_d)', \quad \boldsymbol{\beta} := \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d}', \beta_d\big)'. \tag{2.14}$$

Pažymėkime vektorių $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{u}$ ilgį ir matricos $\boldsymbol{Z}$ eilučių skaičių $n_d := n - t_1 + 1$. Apibrėžtiems

[1] Vietoje „galioja H_0" dažnai sakysime „apribojimo funkcija parinkta teisingai". Panašiai, „apribojimo funkcija parinkta neteisingai" reikš „galioja H_1", „negalioja H_0" ir pan.

duomenims (2.4) modelis matriciniu pavidalu užrašomas taip:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta}_{0,d} + \boldsymbol{X}\beta_d + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}. \tag{2.15}$$

Parametrų $\boldsymbol{\beta}$ MKM įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ yra:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} := \underset{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^{d+2}}{\arg\min} \left[n_d^{-1} \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\beta}\right)' \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\beta}\right) \right] = \left(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\right)^{-1} \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}. \tag{2.16}$$

Kadangi parametrų $\boldsymbol{\beta}$ skaičius yra $d+2$, liekanų dispersijos σ_u^2 įprastinis įvertinys $\hat{\sigma}_u^2$ yra:

$$\hat{\sigma}_u^2 := \frac{1}{n_d - d - 2} \big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\beta}}\big)' \big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{\beta}}\big).$$

Užrašykime (2.8) modelį matriciniu pavidalu. Panašiai kaip ir [8], tegu $\boldsymbol{f} : \Lambda \to \mathbb{R}^{d+1}$ yra tokia vektorinė funkcija:

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\gamma}\right) := \big(f(\boldsymbol{\gamma}, 0), f(\boldsymbol{\gamma}, 1), \ldots, f(\boldsymbol{\gamma}, d)\big)'. \tag{2.17}$$

Hiper-parametrų $\boldsymbol{\gamma}$ vektorių papildykime koeficientu β_d ir naują $r+1$ ilgio vektorių pažymėkime $\boldsymbol{\psi}$, t.y., $\boldsymbol{\psi} := (\boldsymbol{\gamma}', \beta_d)'$. Funkciją $\tilde{\boldsymbol{f}} : \Lambda \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d+2}$ apibrėžkime taip:

$$\tilde{\boldsymbol{f}}\left(\boldsymbol{\psi}\right) := \big(\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\gamma}\right)', \beta_d\big)'.$$

Naudojantis įvestais pažymėjimais, (2.8) modelį galima užrašyti matriciniu pavidalu:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\gamma}\right) + \boldsymbol{X}\beta_d + \boldsymbol{e} = \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{f}}\left(\boldsymbol{\psi}\right) + \boldsymbol{e}, \tag{2.18}$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{V}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma})\big). \tag{2.19}$$

Reikia pastebėti, kad lygybė (2.18) su (2.19) apibrėžtomis liekanomis teisinga $\forall\boldsymbol{\gamma} \in \Lambda$. Jeigu egzistuoja toks $\boldsymbol{\gamma} \in \Lambda$, kad $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\gamma}\right) = \boldsymbol{\beta}_{0,d}$, tuomet šiam $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{u}$. Modelis (2.18) bendru atveju yra netiesinis parametrų $\boldsymbol{\gamma}$ atžvilgiu. Parametras β_d prie $\tilde{\boldsymbol{X}}$ vertinamas kaip neapribotas. Kadangi spėjama, kad $f\left(\boldsymbol{\gamma}, d\right) = \beta_d$, kitu atveju β_d galima būtų vertinti kaip apribotą. Toks atvejis šiame darbe nenagrinėjamas.

Toliau bus apibrėžti parametrų $\boldsymbol{\gamma}$ ir β_d NMKM įvertiniai. Tariame, kad apribojimo funkcija f tenkina sekančią prielaidą.

Prielaida P2. *Apribojimo funkcija $f : \Lambda \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ yra tolydi ir du kartus diferencijuojama parametrų $\boldsymbol{\gamma} \in \Lambda$ atžvilgiu.*

Tegu $(d+1) \times r$ matrica $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}$ žymi funkcijos $\boldsymbol{f}$ Jakobiano matricą taške $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)'$:

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma} := \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\gamma}'}\left(\boldsymbol{\gamma}\right) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \gamma_1}\left(\boldsymbol{\gamma}\right), \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \gamma_r}\left(\boldsymbol{\gamma}\right)\right]. \tag{2.20}$$

Darbe funkcijos Jakobiano matricą vadinsime tiesiog Jakobianu. Kadangi funkcija f yra du kartus diferencijuojama, tai matricos $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}$ elementai yra diferencijuojamos funkcijos. Kadangi diferencijuojama funkcija turi būti tolydi, tai $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}$ elementai yra tolydžios funkcijos. Šis faktas bus reikalingas kitame skyrelyje. Panašiai, $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\psi}$ pažymėkime funkcijos $\tilde{\boldsymbol{f}}$ Jakobianą taške $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\gamma}', \beta_d)'$:

$$\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\psi} := \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}}{\partial \boldsymbol{\psi}'}(\boldsymbol{\psi}) = \left[\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}}{\partial \gamma_1}(\boldsymbol{\psi}), \ldots, \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}}{\partial \gamma_r}(\boldsymbol{\psi}), \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{f}}}{\partial \beta_d}(\boldsymbol{\psi})\right].$$

Kadangi $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \beta_d}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{0}$, $\frac{\partial \beta_d}{\partial \boldsymbol{\gamma}'}(\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{0}$, $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{\gamma}'}(\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}$, $\frac{\partial \beta_d}{\partial \beta_d}(\boldsymbol{\psi}) = 1$, tai $(d+2)\times(r+1)$ matricą $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\psi}$ galima suskaidyti į keturias dalis taip:

$$\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\psi} = \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Tariame, kad apribojimo funkcija $\boldsymbol{f}$ yra sudaryta taip, kad jos parametrai $\boldsymbol{\gamma}$ yra identifikuojami, kas šiame darbe ekvivalentu sąlygai, kad $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}$ yra pilno rango, t.y., $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}$ rangas lygus jos stulpelių skaičiui r. Taip pat tariame, kad $d+1 > r$. Kitu atveju koeficientus $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ apriboti nebūtų prasmės.

NMKM įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\psi}} := \left(\hat{\boldsymbol{\gamma}}', \hat{\beta}_d^{nls}\right)'$, pagal metodo apibrėžimą, randami minimizuojant modelio liekanų kvadratų vidurkį:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\psi}} &:= \operatorname*{arg\,min}_{\gamma\in\Lambda,\, \beta_d\in\mathbb{R}} \left[n_d^{-1}\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\gamma) - \boldsymbol{X}\beta_d\big)'\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\gamma) - \boldsymbol{X}\beta_d\big)\right] \\ &= \operatorname*{arg\,min}_{\psi\in(\Lambda\times\mathbb{R})} \left[n_d^{-1}\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi})\big)'\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi})\big)\right]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

NMKM įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\psi}}$, kaip ir [8], tenkina tokią pirmos eilės sąlygą:

$$\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\big) = \mathbf{0}. \tag{2.23}$$

Prielaida P3. $\exists$ *plim*$\hat{\boldsymbol{\psi}}$*, kai* $n_d \to \infty$*, kur* $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ *yra* (2.18) *modelio NMKM įvertiniai, apibrėžti* (2.22) *ir tenkinantys sąlygą* (2.23).[2]

Remiantis prielaida P3, lengviau parodyti, kad, pasirinkus tikrą apribojimo funkciją f, parametrai $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ yra suderinti. Kaip teigiama [3] (p. 216), prielaida P3 yra būtina tam, kad

---

[2] Žymėjimas $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$ arba $\boldsymbol{\gamma} = \text{plim}\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, kai $n_d \to \infty$, šiame darbe reiškia, kad atsitiktinių vektorių $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}(n_d) = \hat{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{y}(n_d), \boldsymbol{Z}(n_d))$ seka $\{\hat{\boldsymbol{\gamma}}(n_d)\}_{n_d=1}^{\infty}$ konverguoja į neatsitiktinį vektorių $\boldsymbol{\gamma}$ pagal tikimybę, kai $n_d \to \infty$, o tai savo ruožtu reiškia, kad $\forall i \in \{1, \ldots, r\}$, seka $\{\hat{\gamma}_i(n_d)\}_{n_d=1}^{\infty}$ konverguoja į skaičių γ_i pagal tikimybę, kai $n_d \to \infty$. Pagal apibrėžimą, $\hat{\gamma}_i \xrightarrow{p} \gamma_i$, kai $n_d \to \infty$, jei $\forall \varepsilon > 0$ ir $\forall \delta > 0$ $\exists N$ toks, kad $\mathrm{P}(|\hat{\gamma}_i(n_d) - \gamma_i| > \delta) < \varepsilon$, $\forall n_d > N$.
Žymėjimas $X = X(n_d) \xrightarrow{d} Y$ arba $Y = \text{dlim}X(n_d)$, kai $n_d \to \infty$, šiame darbe reiškia, kad atsitiktinių dydžių seka $\{X(n_d)\}_{n_d=1}^{\infty}$ konverguoja pagal pasiskirstymą į atsitiktinį dydį Y, t.y., $\{X(n_d)\}_{n_d=1}^{\infty}$ pasiskirstymo funkcijų seka konverguoja į Y pasiskirstymo funkciją kiekviename tolydumo taške, kai $n_d \to \infty$. Lygiai taip pat apibrėžiamas atsitiktinių vektorių ar matricų sekų konvergavimas pagal pasiskirstymą. Apibrėžimai paimti iš [7]. Teiginių įrodymuose sąlygą $n_d \to \infty$ praleisime kaip savaime aiškią.

NMKM įvertiniai būtų suderinti, tačiau jos įrodymas yra gana sudėtingas net laiko atžvilgiu nepriklausomų kintamųjų atveju. Pagal šią prielaidą, net ir neteisingai pasirinkus apribojimo funkciją, įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ pagal tikimybę konverguoja į kažkokį neatsitiktinį vektorių. Šis faktas bus naudingas nustatant kitame skyrelyje apibrėžtų testo statistikų asimptotinį elgesį alternatyvios hipotezės atveju.

2.3 Parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo testavimas

Šiame skyrelyje aprašomas parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo statistinis testas. Hipotezėms H_0 ir H_1 iš (2.6) ir (2.7) suformuluojamos ekvivalenčios hipotezės, kurioms tiesiogiai tikrinti ir konstruojamas testas. Apibrėžiamos dvi statistikos ir nustatomas jų asimptotinis elgesys H_0 ir H_1 atvejais.

Tegu $h : \Lambda \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ yra spėjama parametrų $\theta_0, \ldots, \theta_d$ apribojimo funkcija (2.2) modelyje. Pažymėkime $f(\boldsymbol{\gamma}, i) = \sum_{j=0}^{i} h(\boldsymbol{\gamma}, j)$, $i = 0, \ldots, d$. Suformuluokime ekvivalenčias hipotezes $\tilde{H}_0$ ir $\tilde{H}_1$ hipotezėms H_0 ir H_1, kurios apibrėžtos atitinkamai (2.6) ir (2.7).

$$\tilde{H}_0 : \exists \boldsymbol{\gamma} \in \Lambda, \text{ kad } \beta_i = f(\boldsymbol{\gamma}, i), \forall i \in \{0, \ldots, d\}; \tag{2.24}$$

$$\tilde{H}_1 : \exists i \in \{0, \ldots, d\}, \text{ kad } \beta_i \neq f(\boldsymbol{\gamma}, i), \forall \boldsymbol{\gamma} \in \Lambda. \tag{2.25}$$

Čia $\beta_0, \ldots, \beta_d$ yra (2.4) modelio parametrai. Tuomet galioja toks teiginys.

Teiginys 2.1 *Jei* $f(\boldsymbol{\gamma}, i) = \sum_{j=0}^{i} h(\boldsymbol{\gamma}, j)$, $i = 0, \ldots, d$, *tai* $H_0 \Longleftrightarrow \tilde{H}_0$, $H_1 \Longleftrightarrow \tilde{H}_1$.

Įrodymas.

Tegu teisinga H_0. Fiksuokime $\boldsymbol{\gamma} \in \Lambda$ tokį, kad $\theta_i = h(\boldsymbol{\gamma}, i)$, $i = 0, \ldots, d$. Tada $f(\boldsymbol{\gamma}, i) = \sum_{j=0}^{i} h(\boldsymbol{\gamma}, j) = \sum_{j=0}^{i} \theta_i = \beta_i$, $\forall i \in \{0, \ldots, d\}$. Taigi $H_0 \Longrightarrow \tilde{H}_0$.

Tegu teisinga $\tilde{H}_0$. Fiksuokime $\boldsymbol{\gamma} \in \Lambda$ tokį, kad $\beta_i = f(\boldsymbol{\gamma}, i)$, $i = 0, \ldots, d$. Tada $h(\boldsymbol{\gamma}, i) = f(\boldsymbol{\gamma}, i) - f(\boldsymbol{\gamma}, i-1) = \beta_i - \beta_{i-1} = \theta_i$, $\forall i \in \{1, \ldots, d\}$. $i = 0$ atveju $h(\boldsymbol{\gamma}, 0) = f(\boldsymbol{\gamma}, 0) = \beta_0 = \theta_0$. Taigi $\tilde{H}_0 \Longrightarrow H_0$.

Tegu teisinga H_1. Fiksuokime bet kurį $\boldsymbol{\gamma} \in \Lambda$. Jeigu $h(\boldsymbol{\gamma}, 0) \neq \theta_0$, tai $f(\boldsymbol{\gamma}, 0) = h(\boldsymbol{\gamma}, 0) \neq \theta_0 = \beta_0$. Jeigu $h(\boldsymbol{\gamma}, 0) = \theta_0$, imame pirmą aibės $\{1, \ldots, d\}$ narį i tokį, kad $h(\boldsymbol{\gamma}, i) \neq \theta_i$. Kadangi $f(\boldsymbol{\gamma}, i-1) = \beta_{i-1}$, tai $f(\boldsymbol{\gamma}, i) = f(\boldsymbol{\gamma}, i-1) + h(\boldsymbol{\gamma}, i) \neq \beta_i$. Taigi $H_1 \Longrightarrow \tilde{H}_1$.

Tegu teisinga $\tilde{H}_1$. Fiksuokime bet kurį $\boldsymbol{\gamma} \in \Lambda$. Jeigu $f(\boldsymbol{\gamma}, 0) \neq \beta_0$, tai $h(\boldsymbol{\gamma}, 0) = f(\boldsymbol{\gamma}, 0) \neq \beta_0 = \theta_0$. Jeigu $f(\boldsymbol{\gamma}, 0) = \beta_0$, imame pirmą aibės $\{1, \ldots, d\}$ narį i tokį, kad $f(\boldsymbol{\gamma}, i) \neq \beta_i$. Tada $h(\boldsymbol{\gamma}, i) = f(\boldsymbol{\gamma}, i) - f(\boldsymbol{\gamma}, i-1) \neq \beta_i - \beta_{i-1} = \theta_i$. Taigi $\tilde{H}_1 \Longrightarrow H_1$. $\square$

Iš teiginio (2.1) išplaukia, kad (2.6) apibrėžtą hipotezę H_0 galima patikrinti, sukonstravus statistinį testą parametrų $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ apribojimo funkcijos f adekvatumui tikrinti. Taigi, nors testas konstruojamas hipotezei $\tilde{H}_0$ tikrinti, jos atmetimas (neatmetimas) reiškia ir hipotezės H_0 atmetimą (neatmetimą). Pastebėkime, kad į (2.15) modelį parametras β_d įeina du kartus. Vienu atveju jis yra prie stacionaraus kintamojo, kitu atveju – prie integruoto kintamojo. Vadinasi, yra gaunami du parametro β_d įverčiai. Taip yra daroma dėl to, kad galiotų 2.1

teiginys. Kitu atveju gali būti iškart manoma, kad pasirinkta funkcija $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma})$ yra parametrų $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ apribojimo funkcija. Tada $h(\boldsymbol{\gamma}, i) := f(\boldsymbol{\gamma}, i) - f(\boldsymbol{\gamma}, i-1)$ yra parametrų $\boldsymbol{\theta}$ apribojimo funkcija (2.2) modelyje.

Tam, kad vėliau būtų galima pasinaudoti iš funkcinės centrinės ribinės teoremos išvestais rezultatais, įveskime papildomą prielaidą. Sudarykime procesą $\tilde{\boldsymbol{v}} = \{\tilde{\boldsymbol{v}}_t \in \mathbb{R}^{d+1}, t \in \mathbb{Z}\}$ taip:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_t := (v_{tm}, v_{tm-1}, \ldots, v_{tm-d})'. \tag{2.26}$$

Prielaida P4. $\tilde{\boldsymbol{v}}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{W}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$*, kur* $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *yra n.v.p. atsitiktiniai vektoriai, turintys baigtinius ketvirtus momentus*[3], $\mathrm{E}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{0}$*, kovariacijų matrica* $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t'\right)$ *yra simetrinė ir teigiamai apibrėžta. Matricų seka* $\{j\boldsymbol{W}_j\}_{j=0}^{\infty}$ *yra absoliučiai sumuojama, t.y., jei* $W_{j,kl}$ *pažymėsime matricos* $\boldsymbol{W}_j$ *k-osios eilutės ir l-ojo stulpelio narį, tai* $\sum_{j=0}^{\infty} j|W_{j,kl}| < \infty$, $\forall k, l = 1, \ldots, d+1$. *Be to, matrica* $\boldsymbol{Q} := \mathrm{E}\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_t\tilde{\boldsymbol{v}}_t'\right)$ *yra teigiamai apibrėžta.*

Kaip ir straipsnyje [12], kuriame pristatomas kitas apribojimo funkcijos adekvatumo testas, prielaida P4 nusako jau agreguotų žemo dažnio procesų, įeinančių į duomenų matricos $\boldsymbol{Z}$ eilutes, struktūrą. Tačiau, kaip teigiama [12], prielaida P4 gali būti išvesta iš panašios aukšto dažnio proceso struktūros[4]. Ši prielaida reikalinga tam, kad būtų galima rasti sumų $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}$ ir $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}$ konvergavimo pagal pasiskirstymą greičius, pasiremiant [7] teiginiu 18.1 (p. 547).

Testo statistikos pagrindą sudaro skirtumas tarp MKM įverčių $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}$ ir NMKM įverčių $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$. Pagal [8] idėją, esant parinktai teisingai apribojimo funkcijai, tiek MKM įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}$, tiek NMKM įvertiniai $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$, augant imties dydžiui n_d, pagal tikimybę turi artėti į tą patį tikrųjų parametrų vektorių $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$. Jeigu apribojimo funkcija yra pasirenkama neteisingai, tuomet, MKM įvertiniams $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}$ liekant suderintais, $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$ negali pagal tikimybę artėti į $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$.

Toliau įveskime pažymėjimus, reikalingus testo statistikai apibrėžti. Simboliu $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}$ Pažymėkime tokią $(d+1) \times (d+1)$ matricą:

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}} := \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}' n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'.$$

Tegu $\boldsymbol{F_V}$ yra matrica, gauta taikant Cholesky dekompoziciją matricai $n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}$, tai yra, $n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F_V}\boldsymbol{F_V}'$.[5] Apibrėžkime tokį atsitiktinį vektorių $\boldsymbol{h}_1$:

$$\boldsymbol{h}_1 := \frac{\sqrt{n_d}}{\hat{\sigma}_u}\boldsymbol{F_V}'\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big).$$

---

[3] $\mathrm{E}|\varepsilon_{t,k_1}\varepsilon_{t,k_2}\varepsilon_{t,k_3}\varepsilon_{t,k_4}| < \infty$, $\forall k_1, k_2, k_3, k_4 = 1, \ldots, d+1$, kur $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{t,1}, \ldots, \varepsilon_{t,d+1})'$.

[4] Tarkime $x_\tau = \sum_{j=0}^{\infty} w_j\varepsilon_{\tau-j}$, $\sum_{j=0}^{\infty} j|w_j| < \infty$ ir $\{\varepsilon_\tau, \tau \in \mathbb{Z}\}$ yra n.v.p.a.d. Nesunkiai galima parodyti, kad procesą $\tilde{\boldsymbol{v}}$ galima užrašyti prielaidoje P4 nurodytu būdu (sunkiau būtų įrodyti, kad $\boldsymbol{Q}$ yra teigiamai apibrėžta). Vadinasi, tokia prielaida būtų tik stipresnė už prielaidą P4.

[5] Kadangi $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}$ yra atsitiktinė matrica, tai ji yra teigiamai apibrėžta beveik tikrai. Sąlygą „beveik tikrai", kai kalbėsime apie atsitiktinių matricų rangą, praleisime.

Imkime tokį $\boldsymbol{h}_1$ kovariacijų matricos įvertinį $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}$:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1} := \boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}' \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}. \tag{2.27}$$

Testo statistika T_1 apibrėžiama taip:

$$T_1 := \boldsymbol{h}_1' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1} \boldsymbol{h}_1.$$

Teiginys 2.2 *Jei galioja prielaidos P1-P4, tai:*

- *jei* $\tilde{H}_0$ *teisinga, tai* $T_1 \xrightarrow{d} \chi^2(d+1-r)$, *kai* $n_d \to \infty$;
- *jei* $\tilde{H}_1$ *teisinga, tai* $T_1 \xrightarrow{p} \infty$, *kai* $n_d \to \infty$.

Teiginio 2.2 įrodymas nukeltas į priedą A. $\tilde{H}_0$ atveju bendras įrodymo planas atitinka [8] teoremos 1 įrodymo planą. Parodoma, kad $\boldsymbol{h}_1$ yra asimptotiškai pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį su nuliniu vidurkių vektoriumi ir kovariacijų matrica, pažymėkime, $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}$. Tada parodoma, kad $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}$, kai $n_d \to \infty$. Galiausiai įrodoma, kad $\operatorname{rank}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}) = d+1-r$. Įrodžius paminėtus faktus, galima pasiremti [2] teorema 1, kurioje teigiama, kad $\boldsymbol{h}_1 \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}^{-} \boldsymbol{h}_1 \xrightarrow{d} \chi^2(d+1-r)$, kur $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}^{-}$ yra matricos $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}$ apibendrinta atvirkštinė matrica[6]. Matrica $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}$ yra idempotentinė[7] ir simetrinė, todėl, remiantis [10], jos apibendrinta atvirkštinė matrica lygi jai pačiai. Jei galioja $\tilde{H}_1$, parodoma, kad $n_d^{-1} T_1$ pagal tikimybę artėja į teigiamą skaičių. Tuo remiantis daroma išvada, kad $T_1 \xrightarrow{p} \infty$, kai $n_d \to \infty$.

Statistika T_1 niekuo nesiskiria nuo [8] pristatyto testo statistikos, jei atsitiktinį vektorių $\boldsymbol{y}$ generuotų modelis $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta}_{0,d} + \boldsymbol{u}$. Tuomet (2.15) modelis nuo šio savo forma skiriasi tik tuo, kad (2.15) modelyje tiesiškai įeina narys $\boldsymbol{X}\beta_d$. Kai parametras β_d vertinamas kaip neapribotas, iš teiginio 2.1 išplaukia, kad uždavinys yra tiesiog patikrinti [8] teoremos 1 rezultato galiojimą šiame skyriuje nagrinėjamam modeliui.

Galima pateikti kitą testo statistikos variantą. Įveskime tokius pažymėjimus:

$$\boldsymbol{L} := \begin{bmatrix} \sqrt{n_d}\boldsymbol{I}_{d+1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & n_d \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{d+1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{(d+1)\times(d+2)}.$$

$\boldsymbol{L}$ yra normavimo matrica, o $\boldsymbol{P}$ yra išrinkimo matrica, kuri išrenka iš $d+2$ ilgio vektoriaus pirmuosius $d+1$ narius. Likę pažymėjimai, reikalingi statistikai apibrėžti, yra:

$$\boldsymbol{h}_2 := \frac{\sqrt{n_d}}{\hat{\sigma}_u}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\right), \quad \boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}} := \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\left(\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}' \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\right)^{-1} \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}',$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2} := \boldsymbol{P}\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\right)^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P}\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}'.$$

[6] Šiame darbe apibendrinta atvirkštinė matrica vadinama Moore–Penrose tipo apibendrinta atvirkštinė matrica. Kvadratinė matrica $\boldsymbol{A}^-$ yra Moore–Penrose tipo apibendrinta atvirkštinė kvadratinei (realiųjų skaičių) matricai $\boldsymbol{A}$, jei yra tenkinamos šios keturios sąlygos: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}^-$; $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$; $(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})' = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$.

[7] Matrica $\boldsymbol{A}$ vadinama idempotentine, jei $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}$ yra $\boldsymbol{h}_2$ kovariacijų matricos įvertinys. Jis, galima sakyti, yra „artimesnis" tikrąjai baigtinės imties atsitiktinio vektoriaus $\boldsymbol{h}_2$ kovariacijų matricai nei įvertinys $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}$ atsitiktinio vektoriaus $\boldsymbol{h}_1$ tikrąjai kovariacijų matricai. Tačiau $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}$ nėra idempotentinė ir neartėja į idempotentinę matricą. $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-}_{\boldsymbol{h}_2}$ tegu žymi $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}$ apibendrintą atvirkštinę matricą. Apibrėžkime tokią testo statistiką T_2:

$$T_2 := \boldsymbol{h}_2' \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-}_{\boldsymbol{h}_2} \boldsymbol{h}_2.$$

Norint nusakyti statistikos T_2 asimptotinį elgesį $\tilde{H}_1$ atveju, reikia įvesti papildomus pažymėjimus. Tegu $\boldsymbol{\gamma}_0 := \mathrm{plim}\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ ir

$$\boldsymbol{\Delta} := \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0} \left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0} \right)^{-1} \boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0} := \boldsymbol{Q}^{-1} - \boldsymbol{\Delta}.$$

Čia $\boldsymbol{Q}$ apibrėžta prielaidoje P4.

Teiginys 2.3 *Jei galioja prielaidos P1-P4, tai:*

- *jei $\tilde{H}_0$ teisinga, tai $T_2 \xrightarrow{d} \chi^2 (d + 1 - r)$, kai $n_d \to \infty$;*
- *jei $\tilde{H}_1$ teisinga, tai $n_d^{-1} \hat{\sigma}_u^2 T_2 \xrightarrow{p} \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)' \boldsymbol{\Sigma}^{-}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0} \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) \geq 0$, kai $n_d \to \infty$.*

Teiginio 2.3 įrodymas pateiktas priede B.

Skirtumus tarp teiginio 2.2 ir teiginio 2.3 įrodymų reikia pakomentuoti plačiau. Pastebėkime, kad $\boldsymbol{h}_2$ apibrėžime skirtumas $\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)$ nepadaugintas iš matricos $\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{V}}$. Dėl to $\boldsymbol{h}_2$ asimptotinė kovariacijų matrica $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2}$ ir jos įvertinys $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}$ nėra idempotentinės. Tai pasunkina įrodymą, kad jų rangai yra lygūs $d + 1 - r$. Visgi rangų sąlygą įrodžius, iš 2.2 teiginio $\tilde{H}_0$ dalies rezultato išplaukia 2.3 teiginio $\tilde{H}_0$ dalies rezultatas. $\tilde{H}_1$ atveju nepavyko įrodyti, kad $T_2 \xrightarrow{p} \infty$, kai $n_d \to \infty$. Čia problemų kyla ne dėl to, kad reikia skaičiuoti $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}$ apibendrintą atvirkštinę matricą, bet todėl, kad $\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)$ nėra padaugintas iš $\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{V}}$.

Teiginio $\tilde{H}_1$ dalis taip pat nusako liekanų dispersijos ir testo galios sąryšį. Kuo σ_u^2 yra mažesnė, tuo į didesnį skaičių artės $n_d^{-1} T_1$. Taigi galima spėti, kad testo galia atvirkščiai proporcinga liekanų dispersijos σ_u^2 dydžiui, esant fiksuotam duomenų imties dydžiui.

Teiginys 2.2 yra pagrindinis šiame skyriuje pateiktas rezultatas. Kai integruotų dviejų skirtingo dažnio kintamųjų modelis (2.2) perrašomas į (2.4) formą, kada y_t aprašo aukšto dažnio proceso x stacionarūs skirtumai ir vienas liekamasis integruotas narys, [8] apibrėžta testo statistika tinka tikrinti hipotezę, kad (2.4) modelio parametrai tenkina pasirinktą funkcinį apribojimą.

3 Parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo testavimas integruotų kintamųjų regresiniame modelyje su papildomais paaiškinančiaisiais kintamaisiais

Šiame skyriuje apribojimo funkcijos adekvatumo testas apibendrinamas, kai į praeitame skyriuje nagrinėtą dviejų kintamųjų regresinį modelį įtraukiami papildomi paaiškinantieji kintamieji. Toks modelio praplėtimas reikalingas dėl kelių priežasčių. Pirma, dviejų kintamųjų modelio parametrų MKM ir NMKM įvertinių suderinamumas remiasi prielaida, kad modelio liekanos ir paaiškinantysis kintamasis yra nepriklausomi. Viena iš priežasčių, kodėl ši prielaida gali negalioti, yra praleisti paaiškinantieji kintamieji. Antra, gali būti, kad žemo ir aukšto dažnio procesai nėra kointegruoti, bet yra kointegruoti kartu su turimais papildomais integruotais kintamaisiais. Šiuos kintamuosius būtina įtraukti į modelį, kitaip būtų gaunamos integruotos modelio liekanos. Trečia, papildomų kintamųjų įtraukimas į modelį gali sąlygoti mažesnę liekanų dispersiją, kas, tikėtina, padidintų testo galią.

Šį skyrių sudaro dvi dalys. Skyrelyje 3.1 apibrėžiamas modelis ir jo parametrų MKM ir NMKM įvertiniai. Skyrelyje 3.2 apibrėžiamos kelios testo statistikos, suformuluojami bei įrodomi teiginiai apie jų asimptotinį elgesį nulinės ir alternatyvios hipotezių atvejais.

3.1 Nagrinėjami regresiniai modeliai ir jų parametrų vertinimas

Modelį (2.4) galima praplėsti įtraukiant laisvąjį narį ir daugiau paaiškinančiųjų kintamųjų:

$$y_t = \sum_{i=0}^{d} \beta_i v_{tm-i} + \beta_d x_{tm-d-1} + \alpha + \boldsymbol{\xi}_t' \boldsymbol{\eta} + u_t, \quad t \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Kintamuosius $\boldsymbol{\xi}$ suskaidykime į stacionarius ir integruotus. Papildomą stacionarių procesų vektorių pažymėkime $\boldsymbol{\xi}_0 = \{\boldsymbol{\xi}_{0,t} \in \mathbb{R}^{d_0}, t \in \mathbb{Z}\}$, o pirma eile integruotų procesų vektorių pažymėkime $\boldsymbol{\xi}_1 = \{\boldsymbol{\xi}_{1,t} \in \mathbb{R}^{d_1}, t \in \mathbb{N}\}$. Tariame, kad procesas $\boldsymbol{\xi}_1$ yra toks, kad $\boldsymbol{\xi}_{1,t} = \sum_{j=1}^{t} \Delta\boldsymbol{\xi}_{1,j}$, kur $\{\Delta\boldsymbol{\xi}_{1,t} \in \mathbb{R}^{d_1}, t \in \mathbb{Z}\}$ yra stacionarus procesas[8], ir $\boldsymbol{\xi}_{1,0} = \mathbf{0}$. Užrašykime modelį (3.1) matriciniu pavidalu. Ξ_0 ir Ξ_1 pažymėkime matricas, atitinkancias $\boldsymbol{\xi}_0$ ir $\boldsymbol{\xi}_1$ stebėjimus:

$$\Xi_0 := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{0,t_1}' \\ \boldsymbol{\xi}_{0,t_1+1}' \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{0,n}' \end{bmatrix}, \quad \Xi_1 := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}_{1,t_1}' \\ \boldsymbol{\xi}_{1,t_1+1}' \\ \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{1,n}' \end{bmatrix}.$$

Čia t_1 apibrėžtas (2.10). Tegu $\mathbf{1}$ žymi n_d ilgio vienetų vektorių. Imkime matricą $\boldsymbol{V}$ ir vektorius $\boldsymbol{y}$ ir $\boldsymbol{X}$ tokius, kaip apibrėžta atitinkamai (2.13), (2.11) ir (2.12). Tada (2.15)

[8] Tiksliau proceso $\Delta\boldsymbol{\xi}_1$ struktūra bus apibrėžta skyrelyje 3.2, prielaidoje N4.

modelis su tiesiškai įeinančiais papildomais kintamaisiais matriciniu pavidalu užrašomas taip:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta}_{0,d} + \Xi_0\boldsymbol{\eta}_0 + \mathbf{1}\alpha + \beta_d\boldsymbol{X} + \Xi_1\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{u} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{u}. \tag{3.2}$$

Čia $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ yra bendra duomenų matrica, $\boldsymbol{\Gamma}$ yra bendras vertinamų parametrų vektorius, kurių nariai, nemažinant bendrumo, išdėstyti tokia tvarka:

$$\tilde{\boldsymbol{Z}} := \begin{bmatrix}\boldsymbol{V} & \Xi_0 & \mathbf{1} & \boldsymbol{X} & \Xi_1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Gamma} := \left(\boldsymbol{\beta}_{0,d}', \boldsymbol{\eta}_0', \alpha, \beta_d, \boldsymbol{\eta}_1'\right)'.$$

Parametrų $\boldsymbol{\Gamma}$ skaičių pažymėkime $\tilde{d} := d + 1 + d_0 + 1 + 1 + d_1$.

Parametrų $\boldsymbol{\Gamma}$ MKM įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$, minimizuojantys liekanų kvadratų sumą modelyje (3.2), yra:

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \left(\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{y}.$$

Likučių dispersijos σ_u^2 įvertinys $\hat{\sigma}_u^2$ šiuo atveju yra:

$$\hat{\sigma}_u^2 := \frac{1}{n_d - \tilde{d}}\left(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{Z}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\right)'\left(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{Z}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}\right). \tag{3.3}$$

Tegu funkcija $f : \Lambda \times N \to \mathbb{R}$, $\Lambda \subset \mathbb{R}^r$, yra parametrų $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ apribojimų funkcija, kuriai norima patikrinti hipotezę $\tilde{H}_0$ prieš alternatyvą $\tilde{H}_1$, apibrėžtas atitinkamai (2.24) ir (2.25). Vektorinis jos variantas $\tilde{\boldsymbol{f}} : \Lambda \times \mathbb{R}^{d_0+d_1+2} \to \mathbb{R}^{\tilde{d}}$, kai likusių parametrų vertinimas nėra apribojamas, yra:

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi}) = \left(\boldsymbol{f}(\gamma)', \boldsymbol{\eta}_0', \alpha, \beta_d, \boldsymbol{\eta}_1'\right)', \quad \boldsymbol{\psi} := \left(\gamma', \boldsymbol{\eta}_0', \alpha, \beta_d, \boldsymbol{\eta}_1'\right)'.$$

Funkcija $\boldsymbol{f}$ apibrėžta (2.17). Vertinamų parametrų $\boldsymbol{\psi}$ skaičių pažymėkime $\tilde{r} := r + d_0 + 1 + 1 + d_1$. Tada MIDAS modelis matriciniu pavidalu užrašomas taip:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\gamma) + \Xi_0\boldsymbol{\eta}_0 + \mathbf{1}\alpha + \boldsymbol{X}\beta_d + \Xi_1\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{e} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{e}, \tag{3.4}$$

kur $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{u} + \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\gamma)\right)$. Funkcijos $\tilde{\boldsymbol{f}}$ Jakobianas $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\psi}$ taške $\boldsymbol{\psi}$ šiuo atveju yra tokia blokinė $\tilde{d} \times \tilde{r}$ matrica:

$$\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\psi} = \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{d_0+d_1+2}\end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Jakobianas $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}$ apibrėžtas (2.20). NMKM įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\psi}} := \left(\hat{\gamma}', \hat{\boldsymbol{\eta}}_0'^{nls}, \hat{\alpha}^{nls}, \hat{\beta}_d^{nls}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_1'^{nls}\right)'$ randami minimizuojant (3.4) modelio liekanų kvadratų vidurkį:

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} := \underset{\psi \in \Lambda \times \mathbb{R}^{d_0+d_1+2}}{\arg\min}\left[n_d^{-1}\left(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{Z}}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi})\right)'\left(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{Z}}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi})\right)\right]. \tag{3.6}$$

NMKM įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ tenkina tokią pirmos eilės sąlygą:

$$\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}'\left(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{Z}}\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\right) = \mathbf{0}. \tag{3.7}$$

3.2 Parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo testavimas

Šio skyriaus modelis nuo 2 skyriaus modelio skiriasi tuo, kad įtraukiami trijų tipų papildomi kintamieji – stacionarūs, laisvasis narys, pirmos eilės integruoti kintamieji. 2 skyriuje matėme, kad į testo statistiką neįtraukus integruoto kintamojo duomenų, vienas integruotas kintamasis niekaip nepakeičia testo statistikos asimptotinio elgesio palyginus su tuo, koks gautas [8], kai į modelį įeina tik stacionarūs aukšto dažnio proceso nariai. Todėl galima spėti, kad daugiau nei vienas integruotas kintamasis taip pat niekaip nepaveiks $\sqrt{n_d}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)$ asimptotinio elgesio. Tačiau nėra aišku, ar $\sqrt{n_d}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)$ asimptotinis skirstinys nepasikeis, kai į modelį įtraukiami kiti stacionarūs kintamieji ir laisvasis narys. Galima spėti, kad nulinės hipotezės galiojimo atveju šis asimptotinis skirstinys bus normalusis su nuliniu vidurkių vektoriumi, tačiau neaišku, ar su tokia pačia kovariacijų matrica. Todėl reikia išsiaiškinti, ar reikia (ir jei reikia, tai kaip) kaip nors keisti 2 skyriuje apibrėžtas testo statistikas, kad jos turėtų χ^2 asimptotinį skirstinį su žinomu laisvės laipsnių skaičiumi, kai nulinė hipotezė teisinga.

Įveskime prielaidas N1-N4, analogiškas 2 skyriaus prielaidoms P1-P4.

Prielaida N1. *Modelio* (3.1) *liekanos* $\{u_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *yra n.v.p. atsitiktiniai dydžiai,* $\mathrm{E}u_t = 0$, $\mathrm{E}u_t^2 = \sigma_u^2$, $\mathrm{E}u_t^4 < \infty$, $\forall t \in \mathbb{Z}$. *Be to, u nepriplauso nuo procesų v ir* $\boldsymbol{\xi}_0$.

Prielaida N1 nereikalauja, kad integruoti kintamieji $\boldsymbol{\xi}_1$ ir liekanos būtų nepriklausomi. Gerai žinoma, kad kointegravimo vektoriaus parametrų įvertiniai yra suderinti, kai integruoti kintamieji yra koreliuoti su liekanomis.

Prielaida N2. *Apribojimo funkcija* $f : \Lambda \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *yra tolydi ir du kartus diferencijuojama parametrų* $\boldsymbol{\gamma} \in \Lambda$ *atžvilgiu.*

Prielaida N3. $\exists\, \mathrm{plim}\hat{\boldsymbol{\psi}}$, *kai* $n_d \to \infty$, *kur* $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ *yra* (3.4) *modelio NMKM įvertiniai, apibrėžti* (3.6) *ir tenkinantys lygybes* (3.7).

Reikia padaryti prielaidą, kad proceso, sudaryto iš stacionarių kintamųjų ir integruotų kintamųjų skirtumų, $\mathrm{MA}\,(\infty)$ forma turėtų greitai gęstančias koeficientų matricas. Tokios prielaidos reikia tam, kad būtų galima naudotis iš funkcinės centrinės ribinės teoremos gautais rezultatais, suformuluotais [7] teiginyje 18.1 (p. 547). Formaliau, sudarykime procesą $\tilde{\boldsymbol{v}} := \{\tilde{\boldsymbol{v}}_t \in \mathbb{R}^{\tilde{d}-2}, t \in \mathbb{Z}\}$ taip:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_t := \big(v_{tm}, v_{tm-1}, \ldots, v_{tm-d}, \boldsymbol{\xi}_{0,t}', \Delta\boldsymbol{\xi}_{1,t}'\big)', \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Prielaida N4. $\tilde{\boldsymbol{v}}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{W}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$, *kur* $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ *yra n.v.p. atsitiktiniai vektoriai, turintys baigtinius ketvirtus momentus,* $\mathrm{E}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{0}$, *kovariacijų matrica* $\mathrm{E}\,(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t')$ *yra teigiamai apibrėžta. Seka* $\{j\boldsymbol{W}_j\}_{j=0}^{\infty}$ *yra absoliučiai sumuojama. Be to, matrica* $\mathrm{E}\,(\tilde{\boldsymbol{v}}_t\tilde{\boldsymbol{v}}_t')$ *yra teigiamai apibrėžta.*

Prielaida N4 nenorima uždrausti atvejo, kada į modelį įtraukiamas integruotas kintamasis kartu su savo skirtumais. Tuomet vektorių $\tilde{\boldsymbol{v}}_t$ tiesiog reikia apibrėžti taip, kad nebūtų du kartus įtrauktas tas pats kintamasis.

Išskirsime dar vieną prielaidą, kurios nereikėjo 2 skyriuje.

Prielaida N5. *Tegu* $\tilde{\boldsymbol{x}}_t := \left(x_{tm-d-1}, \boldsymbol{\xi}'_{1,t}\right)'$. *Imkime* $\tilde{\boldsymbol{x}}_t$ *realizaciją* $\{\tilde{\boldsymbol{x}}_t\}_{t=t_1}^{\infty}$. *Tada* $n_d^{-2}\sum_{t=t_1}^{n} \tilde{\boldsymbol{x}}_t\tilde{\boldsymbol{x}}'_t$ *konverguoja į teigiamai apibrėžtą matricą, kai* $n \to \infty$.

Prielaida N5 užtikrina, kad tarp integruotų kintamųjų nėra „asimptotiškai multikolinearių". Taip būtų, jei, pavyzdžiui, vienas iš $\boldsymbol{\xi}_{1,t}$ narių būtų x_{tm-d-2}. Nesunku įsitikinti, kad sumos $n_d^{-2}\sum_{t=t_1}^{n}(x_{tm-d-i}x_{tm-d-j})$ konkrečiai duomenų sekai artėja į tą patį skaičių $\forall i, j = 1, 2$ (pagal pasiskirstymą konverguoja į atsitiktinius dydžius, kurių tarpusavio koreliacija yra vienetas).

Apibrėžkime pirmąją šio skyriaus testo statistiką. Apibrėžkime tokią $(d+1)\times(d+1)$ matricą $\hat{\boldsymbol{A}}$:

$$\hat{\boldsymbol{A}} := n_d^{-1}\big(\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}'\Xi_0\left(\Xi'_0\Xi_0\right)^{-1}\Xi'_0\boldsymbol{V}\big). \tag{3.8}$$

Toliau esančio teiginio įrodyme pagrįsta, kad $\hat{\boldsymbol{A}}$ yra teigiamai apibrėžta matrica. Pagal Cholesky dekompoziciją išskaidykime matricą $\hat{\boldsymbol{A}}$: $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}$. Kaip ir 2.3 skyrelyje, testo statistikos pagrindą sudaro skirtumas tarp MKM įverčių $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}$ ir NMKM įverčių $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$:

$$\boldsymbol{h}_3 := \frac{\sqrt{n_d}}{\hat{\sigma}_u}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big).$$

Atsitiktinio vektoriaus $\boldsymbol{h}_3$ kovariacijų matricos įvertinį $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}$ apibrėžkime taip:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3} := \boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\big(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}. \tag{3.9}$$

$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}$ yra simetrinė ir idempotentinė kvadratinė matrica, taigi jos apibendrinta atvirkštinė matrica yra lygi jai pačiai. Testo statistika T_3 skaičiuojama pagal tokią formulę:

$$T_3 = \boldsymbol{h}'_3\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}\boldsymbol{h}_3. \tag{3.10}$$

Teiginys 3.1 *Jei galioja prielaidos N1-N5, tai:*

- *jei* $\tilde{H}_0$ *teisinga, tai* $T_3 \xrightarrow{d} \chi^2(d+1-r)$, *kai* $n_d \to \infty$;
- *jei* $\tilde{H}_1$ *teisinga, tai* $T_3 \xrightarrow{p} \infty$, *kai* $n_d \to \infty$.

Teiginio 3.1 įrodymas pateiktas priede C. Kadangi 2 skyriaus regresinis modelis nedaug skiriasi nuo šiame skyriuje nagrinėjamo, tai atskiros teiginių 2.2 ir 3.1 įrodymų dalys keliose vietose sutampa.

Gavome, kad į statistikos T_3 formulę apibrėžtu būdu reikia įtraukti papildomų stacionarių kintamųjų duomenis. Pastebėkime, kad jeigu į (3.4) modelį nėra įtraukta papildomų stacionarių kintamųjų, tai matricos $\hat{\boldsymbol{A}}$ apibrėžime nėra dalies $\boldsymbol{V}'\Xi_0\left(\Xi'_0\Xi_0\right)^{-1}\Xi'_0\boldsymbol{V}$. Tokiu atveju $\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}$, taigi statistika T_3 tampa 2.3 skyrelyje apibrėžta statistika T_1.

Teiginio 3.1 įrodyme gavome, kad, jei $\tilde{H}_0$ neteisinga, prie papildomų stacionarių kintamųjų esantys įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\eta}}_0^{nls}$ yra nesuderinti, jei narys $n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_0$ pagal tikimybę neartėja į nulinę matricą. Jei $\tilde{H}_0$ yra teisinga, įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\eta}}_0^{nls}$ yra suderinti. Vadinasi, testas su panašia į T_3

statistika, tačiau į kurią būtų įtrauktas parametrų $\boldsymbol{\eta}_0$ MKM ir NMKM įvertinių skirtumas, galbūt būtų didesnės galios. Įveskime keletą pažymėjimų, kad apibrėžtume tokią statistiką. Tegu $\tilde{\boldsymbol{V}}$ yra bendra stacionarių kintamųjų duomenų matrica, t.y.:

$$\tilde{\boldsymbol{V}} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} & \Xi_0 \end{bmatrix}.$$

Pagal Cholesky dekompoziciją, tegu $\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}$ yra tokia, kad: $\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{V}}} = n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}$. Tegu $\hat{\boldsymbol{\psi}}_0 := \left(\hat{\gamma}', \hat{\boldsymbol{\eta}}_0'^{nls}\right)'$. Pažymėkime funkciją $\boldsymbol{f}_0 : \Lambda \times \mathbb{R}^{d_0} \to \mathbb{R}^{d+1+d_0}$ tokią, kad $\boldsymbol{f}_0(\hat{\boldsymbol{\psi}}_0) := \left(\boldsymbol{f}\left(\hat{\gamma}\right)', \hat{\boldsymbol{\eta}}_0'^{nls}\right)'$. Apibrėžkime atsitiktinį vektorių $\boldsymbol{h}_4$ taip:

$$\boldsymbol{h}_4 := \frac{\sqrt{n_d}}{\hat{\sigma}_u}\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{V}}}\Big(\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{0,d}, \hat{\boldsymbol{\eta}}'_0\big)' - \boldsymbol{f}_0\big(\hat{\boldsymbol{\psi}}_0\big)\Big).$$

$\boldsymbol{h}_4$ kovariacijų matricos įvertinys $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_4}$ yra:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_4} := \boldsymbol{I}_{d+1+d_0} - n_d\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{V}}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}. \tag{3.11}$$

Čia $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}$ yra (2.21) apibrėžtos matricos $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}$ pirmosios $d+1+d_0$ eilutės ir pirmieji $r+d_0$ stulpeliai. Statistika T_4 yra skaičiuojama taip:

$$T_4 := \boldsymbol{h}'_4\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_4}\boldsymbol{h}_4. \tag{3.12}$$

Teiginys 3.2 *Tai pačiai duomenų matricai $\tilde{\boldsymbol{V}}$ ir tiems patiems įverčiams $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}$ ir $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, statistikos T_3 ir T_4 yra lygios.*

Teiginio 3.2 įrodymas yra visiškai algebrinis, jis pateiktas priede D. Įrodyme parodoma, kad įvertiniai prie papildomų stacionarių kintamųjų į statistiką T_4 iš tikrųjų neįeina, t.y., jie padauginami iš nulio. Vadinasi, tokio tipo statistikoje papildomos informacijos iš šių įvertinių suderinamumo prie $\tilde{H}_0$ ir nesuderinamumo prie $\tilde{H}_1$ negaunama.

Teiginys 3.2 yra tik įdomus pastebėjimas, kuris tačiau veda prie naudingo kito teiginio. Pastebėkime, kad į statistikų T_3 ir T_4 apibrėžimus įtraukiami papildomų stacionarių kintamųjų duomenys, tačiau neįtraukiami integruotų kintamųjų duomenys. Tai gana didelis jų trūkumas, nes, norint suskaičiuoti šias statistikas, reikia žinoti, kurie papildomi kintamieji yra stacionarūs, o kurie – integruoti. Vadinasi, jei tai nėra žinoma, reikia atlikinėti integruotumo tikrinimo statistinius testus. Tai apribojimo funkcijos adekvatumo testą daro nepatrauklų bei prideda rizikos, kad bus padaryta pirmos ar antros rūšies klaida, testuojant kintamųjų stacionarumą-integruotumą. Todėl reikalinga tokia testo statistika, į kurią simetriškai įeitų visi modelio kintamieji. Toliau tokia statistika ir bus apibrėžta.

Apibrėšime statistiką T_5, kuri nuo statistikos T_4 skirsis tik tuo, kad į ją bus įtraukti visi modelio paaiškinantieji kintamieji bei visų parametrų įverčiai. Pagal Cholesky dekompoziciją, tegu $\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}$ yra tokia matrica, kad $\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{Z}}} = n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}$. Apibrėžkime $\boldsymbol{h}_5$, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_5}$ ir statistiką T_5

taip:

$$\boldsymbol{h}_5 := \frac{\sqrt{n_d}}{\hat{\sigma}_u^2}\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}\big(\hat{\boldsymbol{\Gamma}} - \tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\big),$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_5} := \boldsymbol{I}_{\tilde{d}} - n_d\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{Z}}},$$

$$T_5 := \boldsymbol{h}'_5\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_5}\boldsymbol{h}_5.$$

Teiginys 3.3 *Jei galioja prielaidos N1-N5, tai:*

- *jei $\tilde{H}_0$ teisinga, tai $T_5 - T_3 \xrightarrow{p} 0$, kai $n_d \to \infty$;*
- *jei $\tilde{H}_1$ teisinga, tai $n_d^{-1}(T_5 - T_3) \xrightarrow{p} 0$, kai $n_d \to \infty$.*

Teiginio 3.3 įrodymas nukeltas į priedą E. Priede E taip pat parodyta, kad visi įvertiniai, išskyrus $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}$ ir $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$, įeinantys į statistiką T_5, yra padauginami iš nulių.

Iš teiginio 3.3 galima nesunkiai išvesti statistikos T_5 asimptotinį elgesį nulinės ir alternatyvios hipotezės atvejais. Remiantis teiginiu 3.1 ir [7] teiginiu 7.3 (Proposition 7.3, p. 184), iš teiginio 3.3 išplaukia, kad $T_5 \xrightarrow{d} \chi^2(d+1-r)$, kai $n_d \to \infty$, jei teisinga $\tilde{H}_0$. Jei $\tilde{H}_0$ neteisinga, tai $n_d^{-1}T_3 \xrightarrow{p} c$, kur c yra teigiamas skaičius, todėl iš teiginio 3.3 išplaukia, kad $n_d^{-1}T_5 \xrightarrow{p} c$, kai $n_d \to \infty$. Vadinasi, $T_5 \xrightarrow{p} \infty$, kai $n_d \to \infty$. Formaliai užrašykime šį teiginį.

Teiginys 3.4 *Jei galioja prielaidos N1-N5, tai:*

- *jei $\tilde{H}_0$ teisinga, tai $T_5 \xrightarrow{d} \chi^2(d+1-r)$, kai $n_d \to \infty$;*
- *jei $\tilde{H}_1$ teisinga, tai $T_5 \xrightarrow{p} \infty$, kai $n_d \to \infty$.*

Į statistiką T_5 visi modelio kintamieji įeina simetriškai, t.y., norint ją suskaičiuoti, nebūtina žinoti, kurie papildomi kintamieji yra stacionarūs, o kurie – integruoti. Matricoje $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ kintamieji gali būti išdėstyti bet kokia tvarka. Suprantama, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$ vieta visų įvertinių vektoriuje turi atitikti matricos $\boldsymbol{V}$ vietą duomenų matricoje $\tilde{\boldsymbol{Z}}$. Vietoj likusių įvertinių skirtumo galima įstatyti bet kokius skaičius. Be to, statistika T_5 yra natūralus 2.3 skyrelyje apibrėžtos statistikos T_1 apibendrinimas.

4 Imitacinė analizė

Šiame skyriuje aprašomi dviejų pagrindinių tikslų įgyvendinimo rezultatai. Pirmas tikslas yra empiriškai patikrinti 2 ir 3 skyriuose aprašytų rezultatų teisingumą. Pirma, reikia įsitikinti, ar tikrai testo statistikos nulinės hipotezės atveju asimptotiškai yra χ^2 atsitiktiniai dydžiai su konkrečiu laisvės laipsnių skaičiumi. Antra, reikia patikrinti gautą rezultatą, kad neteisingos nulinės hipotezės atveju testo statistikos pagal tikimybę artėja į begalybę.

Straipsnyje [12] pateikiamas kitas apribojimo funkcijos adekvatumo statistinis testas, kurį pagal autoriaus pavardę vadinsime Miller'io testu. Antras šio skyriaus tikslas yra konkretiems duomenis generuojantiems procesams palyginti nagrinėjamo ir Miller'io testų galią. Abiejų testų galia įvertinama naudojantis Monte Carlo metodu.

Skyrelyje 4.1 aprašomi naudoti duomenis generuojantys procesai. Rezultato, kad nulinės hipotezės galiojimo atveju aprašytos statistikos pagal pasiskirstymą artėja į χ^2 atsitiktinį dydį, tikrinimas aprašomas 4.2 skyrelyje. Skyrelyje 4.3 parodoma, kad neteisingos nulinės hipotezės atveju testo statistikos pagal tikimybę artėja į begalybę. Miller'io testas aprašomas 4.4 skyrelyje. Šiame skyrelyje taip pat patikrinama, ar tikrai šio testo statistika pagal pasiskirstymą konverguoja į nurodytą atsitiktinį dydį, kai nulinė hipotezė yra teisinga. Skyrelyje 4.5 palyginama abiejų testų galia.

4.1 Duomenis generuojantys procesai

Šiame skyrelyje aprašomi naudoti duomenis generuojantys procesai. Aukšto dažnio procesų v ir x realizacijos generuotos pagal tokią struktūrą:

$$v_\tau = a v_{\tau-1} + \varepsilon_\tau, \quad x_\tau = \sum_{i=1}^{\tau} v_i, \quad \varepsilon_\tau \sim N(0,1), \quad v_0 = 0, \quad \tau = 1, \dots, nm.$$

Žemo dažnio proceso y realizacijos buvo generuojamos pagal (2.4) modelio formą:

$$y_t = \sum_{i=0}^{d} \beta_i v_{tm-i} + \beta_d x_{tm-d-1} + u_t, \quad u_t \sim N\left(0, \sigma_u^2\right), \quad t \in \{t_1, \dots, n\}. \tag{4.1}$$

Liekanos u_t ir ε_τ generuotos kaip nepriklausomos tarpusavyje ir neautokoreliuotos. Be to, $\mathrm{E}\left(\varepsilon_\tau | v_{\tau-1}, v_{\tau-2}, \dots\right) = 0$. Parametrų $\boldsymbol{\beta}_{0,d} = (\beta_0, \dots, \beta_d)'$ ir σ_u^2 reikšmės bus apibrėžtos vėliau šiame skyrelyje.

Modelio su papildomais paaiškinančiaisiais kintamaisiais atveju prie y_t išraiškos (4.1) pridedamas laisvasis narys α ir du stacionarūs procesai ξ_{01} ir ξ_{02} tokie, kad būtų koreliuoti tarpusavyje ir su procesu v:

$$\xi_{01,t} = v_{tm} + \varepsilon_{01,t}, \quad \xi_{02,t} = v_{tm} + \xi_{01,t} + \varepsilon_{02,t}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{0,t} = (\varepsilon_{01,t}, \varepsilon_{02,t})' \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_2).$$

Liekanos $\boldsymbol{\varepsilon}_{0,t}$ generuotos nepriklausomai nuo liekanų u_t ir ε_τ. Taip pat pridedami du integruoti procesai ξ_{11} ir ξ_{12} tokie, kad:

$$\xi_{11,t} = \sum_{i=1}^{t} \xi_{01,i}, \quad \xi_{12,t} = \sum_{i=1}^{t} \xi_{02,i}.$$

Pocesas y generuotas taip:

$$y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{d} \beta_i v_{tm-i} + \beta_d x_{tm-d-1} + \eta_{01}\xi_{01,t} + \eta_{02}\xi_{02,t} + \eta_{11}\xi_{11,t} + \eta_{12}\xi_{12,t} + u_t,$$
$$(\alpha, \eta_{01}, \eta_{02}, \eta_{11}, \eta_{12}) = (1,1,1,1,1), \quad u_t \sim N\left(0, \sigma_u^2\right), \quad t \in \{t_1, \ldots, n\}.$$

Aprašyti procesai generuojami su tokiais galimais parametrų a, m ir d variantais:

$$a \in \{0.5, 0.9\}; \quad m \in \{12, 24\};$$
$$d \in \{11, 23\}, \text{ jei } m = 12; \quad d \in \{23, 47\}, \text{ jei } m = 24.$$

Koeficientai $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ yra reikšmės vienos iš trijų toliau apibrėžtų apribojimo funkcijų f_1, f_2 ir f_3.

$$\beta_i = f_1(\boldsymbol{\gamma}, i+1) = \gamma_1 \frac{\exp\left(\gamma_2 \frac{i+1}{100} + \gamma_3 \left(\frac{i+1}{100}\right)^2\right)}{\sum_{j=0}^{d} \exp\left(\gamma_2 \frac{j+1}{100} + \gamma_3 \left(\frac{j+1}{100}\right)^2\right)}, \quad i = 0, \ldots, d,$$
$$\boldsymbol{\gamma}' := (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (10, 2, -10), \quad \sigma_u^2 = 1.$$

$$\beta_i = f_2(\boldsymbol{\gamma}, i+1) = \gamma_1 \frac{i+1}{100} \exp\left(\gamma_2 \frac{i+1}{100} + \gamma_3 \left(\frac{i+1}{100}\right)^2\right), \quad i = 0, \ldots, d,$$
$$\boldsymbol{\gamma}' := (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (10, -10, -10), \quad \sigma_u^2 = 1.$$

$$\beta_i = f_3(\boldsymbol{\gamma}, i+1) = \gamma_1 \frac{i+1}{d} + \gamma_2 \sin\left(\gamma_3 \frac{i+1}{d} \pi\right), \quad i = 0, \ldots, d,$$
$$\boldsymbol{\gamma}' := (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (1, 1, 1),$$
$$\sigma_u^2 = \begin{cases} 1, & \text{jei } d = 11; \\ 4, & \text{jei } d = 23; \\ 16, & \text{jei } d = 47. \end{cases}$$

f_1 yra dažnai literatūroje taikoma „Almon lag" apribojimo funkcija. Panaši į f_2 funkcija naudojama straipsnyje [8]. Parametrai $\boldsymbol{\gamma}$ vertinami naudojant funkciją f_1. Vadinasi, jei koeficientai $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ yra generuojami pagal f_1 , tai f_1 yra teisingai parinkta apribojimo funkcija. Jeigu $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ aprašomi f_2 ir f_3 funkcijomis, tai apribojimo funkcija f_1 pasirinkta neteisingai. Parametrų $\boldsymbol{\gamma}$ reikšmės funkcijoms f_2 ir f_3 yra parinktos taip, kad funkcijos f_1 grafikas $\left\{\left(i, f_1(\boldsymbol{\gamma}, i)\right)\right\}_{i=1,\ldots,d+1}$ kažkurioms $\boldsymbol{\gamma}$ reikšmėms galėtų būti panašus į funkcijų f_2 ir

f_3 grafikus, t.y., norima, kad neteisinga nulinė hipotezė būtų gana „artima" teisingai alternatyvai. Taip daroma dėl to, kad vienas iš imitacinės analizės tikslų yra palyginti aprašyto testo galią su Miller'io testo galia, ko neišeitų padaryti, jei testų galios būtų artimos vienetui daugumai parametrų n_d, a, m ir d reikšmių. Dėl tos pačios priežasties atitinkamai parenkamos σ_u^2 reikšmės. 1 pav. pateikti funkcijų f_j grafikai $\{(i, f_j(\boldsymbol{\gamma}, i))\}_{i=1,\dots,d+1}$, $j = 2, 3$, visoms nagrinėjamoms parametrų m ir d reikšmėms. Taip pat pateikti funkcijos f_1 grafikai $\{(i, f_1(\boldsymbol{\gamma}_0, i))\}_{i=1,\dots,d+1}$, kur $\boldsymbol{\gamma}_0 \approx \operatorname{plim}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$, kai vietoj f_2 ar f_3 neteisingai parenkama apribojimo funkcija f_1. Koeficientai $\boldsymbol{\gamma}_0$ gauti, kai autoregresinis parametras $a = 0{,}5$.

4.2 Testo statistikų empiriniai skirstiniai, kai nulinė hipotezė teisinga

Šio skyrelio tikslas yra Monte Carlo metodu patvirtinti, kad 2 ir 3 skyriuose apibrėžtos testo statistikos, esant teisingai parinktai apribojimo funkcijai, pagal pasiskirstymą artėja į $\chi^2(d+1-r)$ atsitiktinį dydį[9]. Vadinasi, esant pakankamai dideliam imties dydžiui n_d, testo statistikos pasiskirstymo funkcija turi mažai skirtis nuo χ^2 atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijos. Tikra statistikos pasiskirstymo funkcija konkrečiam n_d nėra žinoma, tačiau ją kiek norima tiksliai galima įvertinti naudojantis Monte Carlo metodu.

Statistikų ir $\chi^2(d+1-r)$ atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcijų panašumą matuokime palygindami jas keliuose pasirinktuose taškuose. Tegu $F_{\chi^2(d+1-r)}$ yra $\chi^2(d+1-r)$ atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija. Tada, jei atsitiktinis dydis T_i yra apytiksliai taip pat pasiskirstęs kaip ir $\chi^2(d+1-r)$, tai $P\big(T_i < F^{-1}_{\chi^2(d+1-r)}(p)\big) \approx p$, $\forall p \in (0,1)$. Pasirinkus Monte Carlo kartojimų skaičių rep, gaunami testo statistikų rinkiniai $\{T_{i,1}, \dots, T_{i,rep}\}$, $i = 1, 2, 3$. Natūralus tikimybės $P\big(T_i < F^{-1}_{\chi^2(d+1-r)}(p)\big)$ įvertinys $\hat{P}\big(T_i < F^{-1}_{\chi^2(d+1-r)}(p)\big)$ yra:

$$\hat{P}\big(T_i < F^{-1}_{\chi^2(d+1-r)}(p)\big) := \frac{1}{rep}\sum_{j=1}^{rep} \mathbb{1}\big\{T_{i,j} < F^{-1}_{\chi^2(d+1-r)}(p)\big\}, \tag{4.2}$$

kur $\mathbb{1}\big\{T_{i,j} < F^{-1}_{\chi^2(d+1-r)}(p)\big\}$ yra indikatorinė funkcija tokia, kad

$$\mathbb{1}\big\{T_{i,j} < F^{-1}_{\chi^2(d+1-r)}(p)\big\} = \begin{cases} 1, & \text{jei } T_{i,j} < F^{-1}_{\chi^2(d+1-r)}(p); \\ 0, & \text{jei } T_{i,j} \geq F^{-1}_{\chi^2(d+1-r)}(p). \end{cases}$$

Kaip pakankamai didelis, imties dydis pasirinktas $n_d = 2\,000$. Lentelėje 1 pateikti (4.2) apibrėžtų tikimybių įverčiai statistikai T_1 šioms p reikšmėms:

$$p \in \{0.01, 0.05, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95, 0.99\}.$$

Parametrus $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ generuojanti funkcija yra f_1 ir NMKM įvertiniai vertinami su teisingai

[9] Parametrų $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ skaičius $d+1$ yra vienas iš 4.1 skyrelyje nurodytų d reikšmių. Funkcijos $f_1(\boldsymbol{\gamma}, i)$ parametrų $\boldsymbol{\gamma}$ skaičius $r = 3$.

parinkta apribojimo funkcija f_1, kurios parametrų skaičius $r = 3$. Monte Carlo kartojimų skaičius $rep = 4\,000$.

1 lentelė. Tikimybės $\hat{P}\big(T_1 < F^{-1}_{\chi^2(d+1-3)}(p)\big)$ statistikai T_1, kai $n_d = 2\,000$, $rep = 4\,000$ ir NMKM įvertiniai $\hat{\gamma}$ gaunami naudojant teisingai parinktą apribojimo funkciją $f_1(\gamma, i)$.

a	m	d	p								
			0,01	0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99
0,5	12	11	0,012	0,052	0,099	0,289	0,486	0,704	0,904	0,954	0,990
		23	0,006	0,046	0,096	0,304	0,493	0,692	0,894	0,950	0,990
	24	23	0,012	0,051	0,100	0,296	0,501	0,697	0,895	0,946	0,990
		47	0,009	0,050	0,110	0,292	0,500	0,696	0,894	0,948	0,990
0,9	12	11	0,009	0,048	0,092	0,300	0,500	0,700	0,899	0,952	0,989
		23	0,012	0,056	0,098	0,298	0,500	0,706	0,898	0,945	0,986
	24	23	0,009	0,050	0,109	0,298	0,500	0,699	0,904	0,949	0,988
		47	0,012	0,050	0,099	0,300	0,490	0,686	0,886	0,942	0,987

Iš 1 lentelės galima spręsti, kad, kai imties dydis $n_d = 2000$, statistikos T_1 empirinės pasiskirstymo funkcijos beveik nesiskiria nuo $\chi^2(d + 1 - r)$ pasiskirstymo funkcijos visoms pasirinktoms parametrų m, d ir a reikšmėms. Analogiški tikimybių įvertiniai statistikai T_2 pateikti 2 lentelėje. Esant tokiam dideliam n_d, Statistikų T_1 ir T_2 realizacijos tiems patiems duomenims skiriasi labai nedaug. Tą atspindi 1 ir 2 lentelėse pateiktų skaičių panašumas.

2 lentelė. Tikimybės $\hat{P}\big(T_2 < F^{-1}_{\chi^2(d+1-3)}(p)\big)$ statistikai T_2, kai $n_d = 2\,000$, $rep = 4\,000$ ir NMKM įvertiniai $\hat{\gamma}$ gaunami naudojant teisingai parinktą apribojimo funkciją $f_1(\gamma, i)$.

a	m	d	p								
			0,01	0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99
0,5	12	11	0,012	0,052	0,099	0,289	0,488	0,704	0,904	0,954	0,990
		23	0,006	0,046	0,096	0,304	0,494	0,693	0,894	0,950	0,990
	24	23	0,012	0,051	0,100	0,296	0,502	0,697	0,896	0,946	0,990
		47	0,010	0,050	0,111	0,295	0,502	0,698	0,894	0,948	0,990
0,9	12	11	0,009	0,048	0,092	0,300	0,500	0,700	0,899	0,952	0,989
		23	0,012	0,056	0,098	0,298	0,500	0,708	0,898	0,945	0,986
	24	23	0,009	0,050	0,109	0,299	0,501	0,700	0,904	0,949	0,988
		47	0,012	0,051	0,099	0,302	0,492	0,688	0,887	0,942	0,987

Tikimybių įverčiai (4.2) statistikai T_3 pateikti 3 lentelėje. Į modelį papildomai įtraukiamas laisvasis narys ir po du stacionarius ir integruotus kintamuosius, kaip apibrėžta 4.1 skyrelyje. Iš 3 lentelės matyti, kad gautos tikimybės yra artimos tikrosioms. 2 pav. priede II pateikti statistikos T_3 empirinės tankio funkcijos grafikai, gauti iš tų pačių T_3 realizacijų, kurioms skaičiuotos 3 lentelės tikimybės. Taip pat pateikiami $\chi^2(d+1-r)$ atsitiktinio dydžio tankio funkcijos grafikai, visais atvejais beveik sutampantys su T_3 tankio funkcijos grafikais. Analogiški tankio funkcijų grafikai statistikoms T_1 ir T_2 yra ne mažiau artimi $\chi^2(d + 1 - r)$ tankio funkcijos grafikams, todėl, nenorint dubliuoti informacijos, nepateikiami.

Paskutinis šio skyrelio tikslas yra empiriškai patikrinti teiginio 3.3 galiojimą $\tilde{H}_0$ atveju, t.y., kad $T_5 - T_3 \xrightarrow{p} 0$, kai $n_d \to \infty$. Kaip jau minėta, iš šio teiginio išplaukia teiginys 3.4

3 lentelė. Tikimybės $\hat{P}\big(T_3 < F^{-1}_{\chi^2(d+1-3)}(p)\big)$ statistikai T_3, kai $n_d = 2\,000$, $rep = 4\,000$ ir NMKM įvertiniai $\hat{\gamma}$ gaunami naudojant teisingai parinktą apribojimo funkciją $f_1(\gamma, i)$.

a	m	d	p								
			0,01	0,05	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99
0,5	12	11	0,011	0,049	0,098	0,303	0,508	0,706	0,894	0,942	0,986
		23	0,012	0,049	0,102	0,292	0,484	0,691	0,894	0,946	0,990
	24	23	0,010	0,054	0,108	0,306	0,502	0,695	0,895	0,947	0,988
		47	0,009	0,052	0,103	0,295	0,489	0,691	0,899	0,947	0,990
0,9	12	11	0,009	0,049	0,099	0,301	0,516	0,707	0,907	0,955	0,987
		23	0,010	0,051	0,099	0,308	0,505	0,712	0,904	0,947	0,989
	24	23	0,011	0,050	0,099	0,304	0,505	0,699	0,894	0,947	0,990
		47	0,009	0,046	0,098	0,287	0,495	0,701	0,896	0,953	0,992

apie statistikos T_5 asimptotinį elgesį. Jeigu $\mathrm{E}(T_5 - T_3)^2 \to 0$, kai $n_d \to \infty$, tai $T_5 - T_3 \xrightarrow{p} 0$, kai $n_d \to \infty$. Empiriškai patikrinkime, kad $\mathrm{E}(T_5 - T_3)^2 \to 0$, kai $n_d \to \infty$. Gavus statistikų T_3 ir T_5 realizacijų rinkinius $\{T_{3,1}, \ldots, T_{3,rep}\}$ ir $\{T_{5,1}, \ldots, T_{5,rep}\}$, skaičiuojamas jų vidutinis kvadratinis nuokrypis $mse(T_5, T_3)$:

$$mse(T_5, T_3) := \frac{1}{rep} \sum_{i=1}^{rep} (T_{5,i} - T_{3,i})^2 .$$

$mse(T_5, T_3)$ yra $\mathrm{E}(T_5 - T_3)^2$ Monte Carlo metodo įvertinys. 4 lentelėje pateiktos gautos $\sqrt{mse(T_5, T_3)}$ reikšmės, kai statistikos skaičiuojamos duomenis generuojant su imties dydžiais $n_d \in \{75, 125, 200, 500, 1\,000, 2\,000\}$, Monte Carlo kartojimų skaičius $rep = 1\,000$.

4 lentelė. $\sqrt{mse(T_5, T_3)}$ reikšmės skirtingiems imties dydžiams, kai $rep = 1\,000$ ir NMKM įvertiniai $\hat{\gamma}$ gaunami naudojant teisingai parinktą apribojimo funkciją $f_1(\gamma, i)$.

a	m	d	n_d					
			75	125	200	500	1 000	2 000
0,5	12	11	0,934	0,477	0,262	0,103	0,048	0,025
		23	2,856	1,354	0,759	0,255	0,126	0,060
	24	23	2,655	1,106	0,681	0,228	0,114	0,055
		47	15,905	3,542	1,701	0,549	0,250	0,120
0,9	12	11	0,915	0,505	0,267	0,095	0,050	0,026
		23	3,104	1,337	0,785	0,278	0,120	0,060
	24	23	2,572	1,153	0,613	0,234	0,108	0,055
		47	16,629	3,810	1,706	0,554	0,253	0,121

Iš 4 lentelės galima spręsti, kad $\sqrt{mse(T_5, T_3)}$ reikšmės mažėja, didėjant imties dydžiui n_d. Tai patvirtina teiginio, kad $T_5 - T_3 \xrightarrow{p} 0$, kai $n_d \to \infty$, galiojimą teisingos nulinės hipotezės atveju. $\sqrt{mse(T_5, T_3)}$ reikšmės taip pat parodo, kiek maždaug vidutiniškai T_5 skiriasi nuo T_3 kiekvienoje imtyje[10]. Iš 4 lentelės paskutinio stulpelio matome, kad statistikos T_5 ir T_3 yra praktiškai lygios, kai $n_d = 2\,000$.

[10] Čia sakoma „maždaug", nes kiek vidutiniškai T_5 skiriasi nuo T_3 parodytų vidurkio $\mathrm{E}|T_5 - T_3|$ įvertis.

4.3 Testo statistikų asimptotinis elgesys, kai nulinė hipotezė neteisinga

Skyriuose 2 ir 3 statistikoms T_i, $i = 1, 3, 5$ gautas rezultatas, kad, jei nulinė hipotezė neteisinga, $T_i \xrightarrow{p} \infty$, kai $n_d \to \infty$, $i = 1, 3, 5$. Nors formaliai statistikai T_2 tokio teiginio nepavyko įrodyti, greičiausiai jis yra teisingas ir šiai statistikai. Šiame skyrelyje aprašomas šių rezultatų empirinis patikrinimas.

Aprašysime naudotą metodą. Pasirenkamas didelis imties dydis n, kuriam sugeneruojamas vienas iš 4.1 skyrelyje aprašytų duomenis generuojančių procesų. Tegu mažesni imties dydžiai $n_1, \dots, n_k$ yra tokie, kad $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n$. Kiekvienam n_j, $j = 1, \dots, k$, nuo imties pradžios iki n_j-ojo stebėjimo suskaičiuojamos statistikos $\{T_i(n_1), \dots, T_i(n_k)\}$, $i = 1, 2, 3, 5$. Čia $T(n_j)$ žymi, kad statistika T skaičiuota duomenų imčiai, kurios dydis yra n_j. Lieka nubrėžti grafikus $G_i := \{(n_j, T_i(n_j))\}_{j=1,\dots,k}$, $i = 1, 2, 3, 5$. Jei apribojimo funkcija yra pasirinkta neteisingai, šie grafikai turi iliustruoti teiginio, kad $T_i \xrightarrow{p} \infty$, kai $n_d \to \infty$, teisingumą.

Taip pat įvertinamas statistikų vidurkis imties dydžiams $n_1, \dots, n_k$. Monte Carlo kartojimų skaičiui rep gaunami statistikų rinkiniai $\{T_{i,1}(n_j), \dots, T_{i,rep}(n_j)\}$, $i = 1, 2, 3, 5$, $j = 1, \dots, k$. Skaičiuojami statistikų vidurkių įverčiai $\overline{T}_i(n_j) = 1/rep \sum_{l=1}^{rep} T_{i,l}(n_j)$, $i = 1, 2, 3, 5$, $j = 1, \dots, k$. Šiems įverčiams gaunami grafikai $\overline{G}_i := \{(n_j, \overline{T}_i(n_j))\}_{j=1,\dots,k}$, $i = 1, 2, 3, 5$.

Pasirinktos tokios 4.1 skyrelyje aprašytų DGP reikšmės: $a = 0.5$, $m = 12$, $d = 23$. Koeficientai $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ tenkina apribojimą f_2, bet vertinami naudojant funkciją f_1, kaip apibrėžta 4.1 skyrelyje. Didžiausias imties dydis pasirinktas $n_k = 20\,000$, skirtumas tarp imties dydžių $n_j - n_{j-1} = 200$, $j = 1, \dots, k$, $n_0 = 0$. Procesas kartojamas penkis kartus, t.y., gaunama po penkias grafikų G_i, $i = 1, 2, 3, 5$, realizacijas, kurios pateiktos 3 pav. priede II. Storesne linija taip pat pateikti grafikai $\overline{G}_i$, $i = 1, 2, 3, 5$, kai Monte Carlo kartojimų skaičius $rep = 100$.

Iš 3 pav. matome, kad neteisingos nulinės hipotezės atveju visų statistikų reikšmės didėja, augant imties dydžiui. Kintantis atstumas tarp skirtingų grafiko G_1 realizacijų paaiškinamas tuom, kad iš (A.44), $T_1 = O_p(n_d) + O_p(n_d^{1/2}) + O_p(1)$. Būtent nariai $O_p(n_d^{1/2}) + O_p(1)$ daugiausia lemia šį kintantį atstumą. Toks pats paaiškinimas galioja ir statistikoms T_2, T_3 ir T_5.

4.4 Miller'io parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo testas ir jo empirinio reikšmingumo tyrimas

Šiame skyrelyje trumpai aprašomas Miller'io apribojimo funkcijos adekvatumo testas. Taip pat pateikiama nedidelė Miller'io testo empirinio reikšmingumo analizė. Remiantis V. Kvedaro pastebėjimu, iš [12] lentelės 2 galima numanyti, kad testo statistika prie nulinės hipotezės neturi χ^2 skirstinio su nurodytu laisvės laipsnių skaičiumi, kurį, pagal [12] teiginį 5 (Proposition 5) privalo turėti. [12] lentelėje 2 pateiktos testo empirinio reikšmingumumo reikšmės tik mažiems imties dydžiams (25, 50, 100), todėl, norint patikrinti, ar Miller'io testo statistika yra asimptotiškai pasiskirsčiusi pagal χ^2 skirstinį su konkrečiu laisvės laipsnių skaičiumi, reikia atlikti Monte Carlo eksperimentą su didesniais imties dydžiais.

Trumpai aprašysime [12] pateiktą statistinį testą. Lygiai kaip ir mūsų nagrinėjamas, Miller'io testas gali būti naudojamas tiek integruotų, tiek stacionarių skirtingo dažnio kintamųjų atveju. Taip pat Miller'io testas gali būti naudojamas, kai į dviejų kintamųjų modelį įtraukiami kiti paaiškinantieji kintamieji. Šiame ir kitame skyreliuose apsiribojama baziniu (4.1) modeliu be papildomų kintamųjų. [12] nagrinėjamas tik $d + 1 = m$ atvejis, tačiau nėra priežasčių, kodėl Miller'io testas negali būti taikomas be šio apribojimo. Tegu pradinis modelis matriciniu pavidalu yra toks, kaip apibrėžta (2.18):

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta}_{0,d} + \boldsymbol{X}\beta_d + \boldsymbol{u}. \tag{4.3}$$

Parametrams $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ apriboti naudojama funkcija $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma})$:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\gamma) + \boldsymbol{X}\beta_d + \boldsymbol{e}.$$

Gavus parametrų $\boldsymbol{\gamma}$ ir β_d įverčius $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ ir $\hat{\beta}_d$, įvertinamos liekanos $\boldsymbol{e}$:

$$\hat{\boldsymbol{e}} := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\hat{\gamma}) - \boldsymbol{X}\hat{\beta}_d.$$

Miller'io testas paremtas tokio regresinio modelio sudarymu:

$$\hat{\boldsymbol{e}} = \big(\boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)\zeta_0 + (\boldsymbol{V}\boldsymbol{W})\,\boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{X}\zeta_2 + \boldsymbol{\varepsilon_e}. \tag{4.4}$$

Čia $\boldsymbol{W}$, kaip teigiama [12], yra $(d + 1) \times q$ laisvai pasirenkamų svorių matrica. Miller'io testas paremtas hipotezės, kad $\boldsymbol{\zeta}_1 = \boldsymbol{0}$, testavimu[11]. Jeigu yra parinkta teisinga apribojimo funkcija, tuomet $\boldsymbol{\zeta}_1 = \boldsymbol{0}$. Jei apribojimo funkcija yra parinkta blogai, tuomet jeigu dalį įvertintų liekanų $\hat{\boldsymbol{e}}$ dispersijos paaiškina kintamieji $\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}$, tai $\boldsymbol{\zeta}_1 \neq \boldsymbol{0}$.

Straipsnyje [12] tiksliai nėra pateikta hipotezės, kad $\boldsymbol{\zeta}_1 = \boldsymbol{0}$, testo statistikos. Tačiau iš [12] teiginio 5 įrodymo galima suprasti, kad tai tiesiog Wald testo statistika, kuri toliau ir apibrėžta. Tegu $q \times (q + 2)$ išrinkimo matrica $\boldsymbol{P}$ yra tokia kad $\boldsymbol{P}(\zeta_0, \boldsymbol{\zeta}_1', \zeta_2)' = \boldsymbol{\zeta}_1$. Gaunami parametrų ζ_0, $\boldsymbol{\zeta}_1$ ir ζ_2 MKM įverčiai $\hat{\zeta}_0$, $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1$ ir $\hat{\zeta}_2$. Taip pat gaunamas įprastinis liekanų $\boldsymbol{\varepsilon_e}$ dispersijos $\sigma^2_{\boldsymbol{\varepsilon_e}}$ įvertis $\hat{\sigma}^2_{\boldsymbol{\varepsilon_e}}$, kurio skaičiavime, kaip įprasta, atsižvelgiama į vertinamų parametrų skaičių. Tegu $\boldsymbol{V}^*$ yra $n_d \times (q + 2)$ bendra duomenų matrica (4.4) regresijoje, t.y.,

$$\boldsymbol{V}^* := \Big[\boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\hat{\gamma}), \quad \boldsymbol{V}\boldsymbol{W}, \quad \boldsymbol{X}\Big].$$

Tuomet Miller'io testo statistika T_M yra:

$$T_M := \frac{1}{\hat{\sigma}^2_{\boldsymbol{\varepsilon}}}\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1' \Big[\boldsymbol{P}\big(\boldsymbol{V}^{*\prime}\boldsymbol{V}^*\big)^{-1}\boldsymbol{P}'\Big]^{-1}\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1. \tag{4.5}$$

[11] Iš tikrųjų, [12] testuojama hipotezė, kad $\boldsymbol{\zeta}_1 = \boldsymbol{0}$ ir $\zeta_2 = 0$, tačiau mūsų atveju parametras β_d prie $\boldsymbol{X}$ nėra apribojamas (panašu, kad ir [12] jis nėra apribojamas), todėl $\zeta_2 = 0$ tiek prie nulinės, tiek prie alternatyvios hipotezių. Todėl nėra priežasties kartu tikrinti, kad $\zeta_2 = 0$, ir taip mažinti testo galią.

Statistika T_M yra įprastinė Wald testo statistika hipotezei, kad $\boldsymbol{\zeta}_1 = \mathbf{0}$, tikrinti (4.4) modelyje. Pagal [12], esant teisingai parinktai apribojimo funkcijai, $T_M \xrightarrow{d} \chi^2(q)$, kai $n_d \to \infty$, kur q yra matricos $\boldsymbol{W}$ stulpelių skaičius.

Norint įsitikinti ir įtikinti, kad T_M statistika yra teisingai apibrėžta, taip pat atliktas hipotezės, kad $\boldsymbol{\zeta}_1 = \mathbf{0}$, testas tokiai kontrolinei regresijai:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_W = (\boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}))\,\zeta_0 + (\boldsymbol{V}\boldsymbol{W})\,\boldsymbol{\zeta}_1 + \boldsymbol{X}\zeta_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_W, \quad (\zeta_0, \boldsymbol{\zeta}_1', \zeta_2) = (0, \mathbf{0}, 0), \quad \varepsilon_{W,t} \sim N(0,1), \tag{4.6}$$

kur $\boldsymbol{\varepsilon}_W$ yra generuotas nepriklausomai nuo proceso v ir yra n.v.p. Skaičiuojame statistiką T_W, analogišką statistikai T_M:

$$T_W = \frac{1}{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_W}} \hat{\zeta}_1' \left[\boldsymbol{P}\left(\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}'\right]^{-1} \hat{\boldsymbol{\zeta}}_1. \tag{4.7}$$

Šiuo atveju įverčiai $\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_W}$, $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_1$ yra gauti vertinant (4.6) regresijos parametrus. Jei T_W statistika apibrėžta teisingai, tai tokiai regresijai teiginys, kad $T_W \xrightarrow{d} \chi^2(q)$, kai $n_d \to \infty$, turi galioti.

Monte Carlo eksperimentas atliktas, kai $m = 12$, $d = 11$, $a = 0.5$, $\sigma_u^2 = 1$, imties dydžiams $n_d \in \{25, 50, 100, 200, 500, 1000\}$, kartojimų skaičius $rep = 4\,000$. Naudojama „Almon lag" apribojimo funkcija f_1 su trimis hiper-parametrais, kaip apibrėžta 4.1 skyrelyje. Su šia apribojimo funkcija generuojami ir parametrai $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$. Svorių matrica $\boldsymbol{W}$ atitinka [12] naudotos svorių matricos paskutinius šešis stulpelius. Taigi $q = 6$. Šie svoriai nurodyti [12] lentelėje 1 ir yra tokie, kad kiekvieno matricos $\boldsymbol{W}$ stulpelio suma lygi vienetui. Svorių matrica nenaudojama lygiai tokia pati [12] dėl iškylančios multikolinearumo problemos, kada MKM įverčiai $\hat{\boldsymbol{\zeta}}$ negali būti suskaičiuoti[12]. Primintina, kad svorių matrica $\boldsymbol{W}$, kaip teigiama [12], yra laisvai pasirenkama.

Gautus rezultatus lengviausia apibūdinti grafiškai lyginant skirtingiems imties dydžiams gautas empirines statistikų T_M ir T_W tankio funkcijas su $\chi^2(6)$ tankio funkcija. Šios tankio funkcijos pateiktos 4 pav. priede II. Iš 4 pav. galima teigti, kad statistika T_M pagal pasiskirstymą į $\chi^2(6)$ atsitiktinį dydį nekonverguoja. Taip pat galima teigti, kad statistikos T_W pasiskirstymas didesniems imties dydžiams yra labai artimas $\chi^2(6)$ pasiskirstymui. Todėl T_W sudaryta teisingai, t.y., T_W yra Wald testo statistika paramerų $\boldsymbol{\zeta}_1$ lygybės nuliui hipotezei tikrinti. Reikia paminėti, kad tokios pačios išvados apie Miller'io testo statistikos pasiskirstymą $\tilde{H}_0$ atveju būtų daromos, jei (4.3) modelyje nebūtų integruoto kintamojo $\boldsymbol{X}$, t.y., būtų generuojami stacionarūs procesai, kas atitiktų [8] nagrinėtą modelį.

Modelyje (4.4) svorių matricos $\boldsymbol{W}$ galima ir nenaudoti, t.y., imti $\boldsymbol{W} := \boldsymbol{I}_{d+1}$. Tuomet parametrų $\boldsymbol{\zeta}_1$ skaičius būtų lygus $d+1$. Tada, pagal [12] teiginį 5, $T_M \xrightarrow{d} \chi^2(d+1)$, jei $\tilde{H}_0$ teisinga. Tačiau Monte Carlo eksperimentu[13] toks skirstinys negaunamas. Visais atvejais T_M empirinė tankio funkcija gaunama panaši į χ^2 tankio funkciją su mažesniu už $d+1$ laisvės laipsnių skaičiumi, tačiau nėra visiškai aišku, su kokiu tiksliai.

[12] [12] taip pat minima multikolinearumo problema, tačiau nevisiškai aišku, tiksliai kaip ji yra išsprendžiama.

[13] Šio Monte Carlo eksperimento rezultatai darbui nėra esminiai, todėl nepateikiami.

Reikia pasakyti, kad šiame skyrelyje nėra teigiama, kad [12] teiginys 5 yra neteisingas. Tačiau jeigu Monte Carlo eksperimentai atlikti teisingai, tuomet kyla abejonių dėl teiginio 5 teisingumo.

4.5 Apribojimo funkcijos adekvatumo testų galios palyginimas

Šiame skyrelyje palyginama nagrinėjamo ir Miller'io testų galia ir koreguota galia. Apsiribojama (4.1) modeliu be papildomų paaiškinančiųjų kintamųjų, tiems patiems generuotiems duomenims skaičiuojant statistikas T_1, T_2 ir T_M.

Miller'io teste naudojamamos svorių matricos dimensija yra $(d+1)\times q$. Taigi skirtingiems d reikia apibrėžti vis kitokias svorių matricas. Atveju $d = 11$ skyrelyje 4.4 buvo naudota tokia svorių matrica, kokia apibrėžta [12] lentelėje 1. Testo galios Monte Carlo eksperimente $d = 11$ atveju naudota ta pati svorių matrica $\boldsymbol{W}$. Kai $d = 23$ arba $d = 47$, atitinkamai apibrėžtos tokios svorių matricos $\boldsymbol{W}_{24}$ ir $\boldsymbol{W}_{48}$:

$$\boldsymbol{W}_{24}' := \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}' & \boldsymbol{W}' \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{W}_{48}' := \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}' & \boldsymbol{W}' & \boldsymbol{W}' & \boldsymbol{W}' \end{bmatrix}.$$

Visais atvejais svorių matricų stulpelių skaičius $q = 6$.

Testo galia yra tikimybė atmesti neteisingą nulinę hipotezę $\tilde{H}_0$. Tegu pasirinktas reikšmingumo lygmuo α^*. Statistikoms T_1 ir T_2 hipotezę $\tilde{H}_0$ atmetame, jei $T_i > F^{-1}_{\chi^2(d+1-r)}(1-\alpha^*)$. Statistikai T_M hipotezę $\tilde{H}_0$ atmetame, jei $T_M > F^{-1}_{\chi^2(q)}(1-\alpha^*)$. Monte Carlo eksperimentas atliktas 4.1 skyrelyje aprašytiems duomenis generuojantiems procesams, kada koeficientai $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ yra generuojami funkcijų f_2 ir f_3, bet NMKM metodu vertinami, naudojant neteisingai parinktą apribojimo funkciją f_1. Testo galia įvertinama imant $\tilde{H}_0$ atmetimų dalį nuo kartojimų skaičiaus $rep = 4\,000$.

Lentelėje 5 priede III pateikti aprašyto Monte Carlo eksperimento rezultatai, kai $\alpha^* = 0{,}05$. Matome, kad statistitų T_1 ir T_2 galia yra panaši, tačiau T_1 galia dažniau yra didesnė už T_2 galią. Taip pat matome, kad augant imties dydžiui, testo galia didėja. Esant fiksuotiems dydžiams m, d ir n_d, bet keičiant autoregresinį parametrą a iš 0,5 į 0,9, galia statistikoms T_1 ir T_2 yra didesnė $a = 0{,}9$ atveju. Tikėtina, kad taip yra dėl tikslesnių modelio parametrų įvertinių, kai $a = 0{,}9$.

Iš 5 lentelės matome, kad visais duomenis generuojančių procesų atvejais statistikoms T_1 ir T_2 galia yra didesnė už Miller'io testo galią. Tačiau toks testų galios palyginimas nėra visiškai korektiškas dėl statistikų empirinių skirstinių neatitikimo asimptotiniams baigtinėje imtyje, jei nulinė hipotezė teisinga. Todėl reikalinga palyginti koreguotas testų galias, kai hipotezės atmetimo kritinės reikšmės gaunamos Monte Carlo metodu, kuriuo įvertinamas statistikų pasiskirstymas, kai nulinė hipotezė teisinga. Visgi tokios galimybės neturi testuotojas, kuomet turima tik viena duomenų imtis. Taigi neteisinga nulinė hipotezė bus atmesta dažniau naudojant statistikas T_1 ar T_2 nei statistiką T_M.

Toliau šiame skyrelyje lyginama tik koreguota testų galia. Trumpai aprašysime naudotą metodą. Tegu $\overline{F}_{0,T}$ ir $\overline{F}_{1,T}$ yra statistikos T išlikimo funkcijos[14] atitinkamai $\tilde{H}_0$ ir $\tilde{H}_1$ atvejais. Tuomet pasirinktam reikšmingumo lygmeniui α^* koreguota galia statistikai T yra $\overline{F}_{1,T}\big(\overline{F}_{0,T}^{-1}(\alpha^*)\big)$. $\overline{F}_{0,T}^{-1}(\alpha^*)$ yra tikslus statistikos T pasiskirstymo $1-\alpha^*$ lygmens kvantilis, kai $\tilde{H}_0$ teisinga. Koreguota galia įvertinama, Monte Carlo metodu gavus funkcijų $\overline{F}_{0,T}$ ir $\overline{F}_{1,T}$ įverčius.

Lentelėje 6 priede III pateikti koreguotos testų galios Monte Carlo eksperimento rezultatai statistikoms T_1, T_2 ir T_M. Reikšmingumo lygmuo $\alpha^* = 0{,}05$, kartojimų skaičius $rep = 4\,000$. Matome, kad koreguota testo galia statistikoms T_1 ir T_2 beveik nesiskiria. Vadinasi, nėra pagrindo naudoti sudėtingesnę statistiką T_2 vietoj T_1 net mažose imtyse. Palyginkime gautus rezultatus statistikoms T_1 ir T_M. Iš 6 lentelės matome, kad dažniau koreguota galia yra didesnė statistikos T_M, tačiau gana nežymiai. Didesnis nei 0,1 koreguotų galių skirtumas gautas 7 kartus statistikai T_1 ir 5 kartus statistikai T_M. Likusiems 52 duomenis generuojančių procesų atvejais koreguotų galių skirtumo modulis neviršija 0,1. Įdomu, kad $d = 47$ koreguota galia statistikai T_1 yra didesnė už T_M beveik visiems imties dydžiams n_d.

Testų galios palyginimo išvados gali skirtis pasirinktiems skirtingiems reikšmingumo lygmenims. Koreguota testų galia kiekvienam reikšmingumo lygmeniui $\alpha^* \in [0,1]$ dažnai lyginama grafiškai. Grafikas $\big\{\big(\alpha^*, \overline{F}_{1,T}\big(\overline{F}_{0,T}^{-1}(\alpha^*)\big)\big)\big\}_{\alpha^*\in[0,1]}$ straipsnyje [9] vadinamas ROC kreive[15]. Didinant α^*, mažėja kritinė reikšmė $\overline{F}_{0,T}^{-1}(\alpha^*)$, taigi didėja koreguota galia $\overline{F}_{1,T}\big(\overline{F}_{0,T}^{-1}(\alpha^*)\big)$. Viename grafike galima piešti kelias ROC kreives skirtingoms statistikoms ir taip grafiškai palyginti testų galią įvairiems reikšmingumo lygmenims α^*. Tame pačiame pav. galima iliustruoti ir testo statistikų empirinio ir teorinio asimptotinio pasiskirstymų skirtumus, kai $\tilde{H}_0$ teisinga[16]. Tegu $\overline{F}_{a,T}$ yra statistikos T teorinė asimptotinė pasiskirstymo funkcija, kai $\tilde{H}_0$ teisinga. Grafiką $\big\{\big(\alpha^*, \overline{F}_{0,T}\big(\overline{F}_{a,T}^{-1}(\alpha^*)\big)\big)\big\}_{\alpha^*\in[0,1]}$ vadinsime P-P kreive[17], kuri iliustruoja statistikos T pasiskirstymo nuokrypius baigtinėje imtyje nuo teorinio asimptotinio pasiskirstymo. Kuo šis grafikas labiau panašus į 45° tiesę, tuo labiau sutampa baigtinės imties ir teoriniai asimptotiniai pasiskirstymai.

Pasirinkta 16 skirtingų duomenis generuojančių procesų šiems parametrų variantams: $n_d \in \{125, 500\}$; $a \in \{0.5, 0.9\}$; $d = 11$, kai $m = 12$; $d = 47$, kai $m = 24$. 5 pav. pateikti ROC ir P-P kreivių grafikai statistikoms T_1 ir T_M, kai ROC kreivėms parametrai $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ yra funkcijos f_2 reikšmės, 6 pav. – funkcijos f_3 reikšmės. Matome, kad statistikos T_1 P-P kreivės $n_d = 500$ atveju gana tiksliai sutampa su 45° tiese. Atvirkščiai, statistikos T_M P-P kreivės rodo jos empirinių skirtstinių neatitikimą teoriniam asimptotiniam $\chi^2(q)$ skirstiniui visais atvejais. ROC kreivės gautos arba beveik sutampančios, arba besiskiriančios kažkurios statistikos naudai visiems $\alpha^* \in [0,1]$. Apibendrinant, šio Monte Carlo eksperimento rezultatai neleidžia teigti, kad kažkuris parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo testas yra geresnis už kitą.

[14] Jei $F(x) = \mathrm{P}(T \le x)$, $x \in \mathbb{R}$, yra atsitiktinio dydžio T pasiskirstymo funkcija, tai funkciją $\overline{F}(x) = \mathrm{P}(T > x)$ vadinsime atsitiktinio dydžio T išlikimo funkcija. $\overline{F}^{-1}(\alpha^*)$, $\alpha^* \in [0,1]$, žymėsime $\overline{F}$ atvirkštinę funkciją.

[15] ROC curve – receiver operating characteristic curve, angl.

[16] T_1 ir T_2 teorinis asimptotinis pasiskirstymas, kai $\tilde{H}_0$ teisinga, yra $\chi^2(d+1-r)$, statistikos T_M – $\chi^2(q)$.

[17] Probability-Probability, angl.

5 Išvados

Darbe nagrinėtas parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo statistinis testas, kuris pristatytas straipsnyje [8]. Testas pritaikytas integruotų kintamųjų regresiniam modeliui. Dviejų skirtingo dažnio kintamųjų regresiniame modelyje [8] testo statistika apibrėžta integruoto paaiškinančiojo kintamojo skirtumams. Taip pat darbe parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo testas apibendrintas integruotų kintamųjų regresiniam modeliui su papildomais paaiškinančiaisiais kintamaisiais. Apibrėžtos dvi testo statistikos. Į pirmos statistikos apibrėžimą įtraukiami papildomų stacionarių kintamųjų duomenys. Į antros statistikos apibrėžimą simetriškai įtraukiami visų modelio kintamųjų duomenys. Jei nulinė hipotezė teisinga, visoms paminėtoms statistikoms įrodytas jų konvergavimas pagal pasiskirstymą į χ^2 atsitiktinį dydį su žinomu laisvės laipsnių skaičiumi. Jei nulinė hipotezė neteisinga, įrodytas statistikų divergavimas. Šie matematiniai rezultatai patikrinti empiriškai. Taip pat palyginta nagrinėjamo ir [12] pristatyto testų galia. Gauta, kad nagrinėjamo testo galia yra didesnė visiems nagrinėtiems duomenis generuojantiems procesams. Viena iš šio rezultato priežasčių yra dideli [12] pristatyto testo statistikos teorinio asimptotinio ir empirinio baigtinės imties pasiskirstymų skirtumai. Palyginus koreguotas galias gauta, kad nei vienas testas nėra geresnis už kitą visiems nagrinėtiems duomenis generuojantiems procesams.

Tolimesnis tyrimas galėtų būti vykdomas keliomis kryptimis. Pirma, reikalingas gautų matematinių rezultatų patvirtinimas sušvelninus prielaidas. Taip parametrų apribojimo funkcijos adekvatumo testas būtų apibendrintas didesniam duomenis generuojančių procesų ratui. Antra, reikalingi testo statistikos ar parametrų vertinimo modifikavimai, kurie padidintų testo galią.

Literatūra

[1] E. Andreou, E. Ghysels, A. Kourtellos. Regression models with mixed sampling frequencies, *Journal of Econometrics*, 2010, **158** (2), p. 246–261.

[2] D. W. K. Andrews. Asymptotic results for generalized Wald tests, *Econometric Theory*, 1987, **3** (03), p. 348-358.

[3] R. Davidson, J. G. Mackinnon. *Econometric theory and methods*, New York: Oxford University Press, 1999, 688 p.

[4] E. Ghysels, P. Santa-Clara, R. Valkanov. The MIDAS touch: mixed data sampling regression models, *CIRANO Working Paper*, 2004, 2004s-20.

[5] E. Ghysels, P. Santa-Clara, R. Valkanov. There is a risk-return trade-off after all, *Journal of Financial Economics*, 2005, **76** (3), p. 509-548.

[6] E. Ghysels, A. Sinko, R. Valkanov. MIDAS regressions: further results and new directions, *Econometric Reviews*, 2007, **26** (1), p. 53-90.

[7] J. D. Hamilton. *Time series analysis*, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1994, 820 p.

[8] V. Kvedaras, V. Zemlys. Testing the functional constraints on parameters in regressions with variables of different frequency, *Economics Letters*, 2012, **116** (2), p. 250-254.

[9] C. J. Lloyd. Estimating test power adjusted for size, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 2005, **75** (11), p. 921-934.

[10] H. Lütkepohl. *Handbook of matrices*, Chichester: John Wiley & Sons, 1996, 304 p.

[11] H. Lütkepohl. *New introduction to multiply time series analysis*, Berlin Heidelberg: Springer, 2005, 764 p.

[12] J. I. Miller. Cointegrating MIDAS regressions and a MIDAS test. Department of Economics, University of Missouri-Columbia, 2011, *Working Papers* 1104.

[13] M. Schatzman. *Numerical analysis: a mathematical introduction*, New York: Oxford University Press, 2002, 512 p.

I Teiginių įrodymai

A Teiginio 2.2 įrodymas

Įrodyme reikės $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}$ ir $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}$ konvergavimo greičių, kai $n_d \to \infty$. Pastebėkime, kad $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} = \sum_{t=t_1}^{n}(\tilde{\boldsymbol{v}}_t\tilde{\boldsymbol{v}}_t')$. Remiantis [7] teiginiu 18.1 (p. 547),

$$n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} \xrightarrow{p} \boldsymbol{Q},$$

kur $\boldsymbol{Q} := \mathrm{E}(\tilde{\boldsymbol{v}}_t\tilde{\boldsymbol{v}}_t')$ iš prielaidos P4.

Parodykime, kad $n_d^{-1/2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{u} \xrightarrow{d} N\left(\boldsymbol{0}, \sigma_u^2\boldsymbol{Q}\right)$. Šio fakto įrodymas susiveda į [7] teiginio 7.9 (p. 194) (centrinė ribinė teorema vektorinių martingalinių skirtumų sekai) prielaidų patikrinimą. Pažymėkime $\boldsymbol{z}_t := \tilde{\boldsymbol{v}}_t u_t$. Remiantis prielaida P1, $\mathrm{E}(\tilde{\boldsymbol{v}}_t u_t) = \mathrm{E}\tilde{\boldsymbol{v}}_t \mathrm{E}u_t$. Remiantis ta pačia prielaida, $\mathrm{E}\left(u_t \mid u_{t-1}, v_{t-1}, \ldots\right) = 0$. Todėl $\{\boldsymbol{z}_t\}_{t=t_1}^{\infty}$ yra vektorinių martingalinių skirtumų seka. Reikia parodyti, kad ši seka tenkina [7] teiginio 7.9 sąlygas. Suskaidykime $\boldsymbol{z}_t = (z_{t,1}, \ldots, z_{t,d+1})'$. Iš prielaidos P1, $\mathrm{E}\big(|z_{t,i_1}z_{t,i_2}z_{t,i_3}z_{t,i_4}|\big) = \mathrm{E}\big(|v_{t,i_1}v_{t,i_2}v_{t,i_3}v_{t,i_4}|\big)\mathrm{E}u_t^4$, $\forall i_1, i_2, i_3, i_4 = 1, \ldots, d+1$. Iš prielaidos P4 ir [7] teiginio 10.2 (p. 263) išplaukia, kad $\mathrm{E}\big(|v_{t,i_1}v_{t,i_2}v_{t,i_3}v_{t,i_4}|\big) < \infty$. Kadangi $\mathrm{E}u_t^4 < \infty$, tai $\boldsymbol{z}_t$ tenkina [7] teiginio 7.9 baigtinių ketvirtų momentų sąlygą. $\mathrm{E}\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_t u_t\right)\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_t u_t\right)' = \mathrm{E}u_t^2\mathrm{E}(\tilde{\boldsymbol{v}}_t\tilde{\boldsymbol{v}}_t') = \sigma_u^2\boldsymbol{Q}$. Kadangi $\boldsymbol{Q}$ yra teigiamai apibrėžta, tai ir $\sigma_u^2\boldsymbol{Q}$ yra teigiamai apibrėžta. Lieka parodyti, kad $n_d^{-1}\sum_{t=t_1}^{n}(\boldsymbol{z}_t\boldsymbol{z}_t') \xrightarrow{p} \sigma_u^2\boldsymbol{Q}$. Galima pasiremti [7] pavyzdžiu 7.15 (p. 194) ir teigti, kad $z_{t,i}z_{t,j} \xrightarrow{p} \sigma_u^2 Q_{ij}$, $\forall i, j = 1, \ldots, d{+}1$, kur Q_{ij} žymi $\boldsymbol{Q}$ i-osios eilutės ir j-ojo stulpelio narį. Iš čia išplaukia norimas rezultatas. Vadinasi, remiantis [7] teiginiu 7.9,

$$n_d^{-1/2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{u} = n_d^{-1/2}\sum_{t=t_1}^{n}\tilde{\boldsymbol{v}}_t u_t \xrightarrow{d} N\left(\boldsymbol{0}, \sigma_u^2\boldsymbol{Q}\right). \tag{A.1}$$

Raskime $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ ir $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}$ asimptotinį elgesį. Pažymėkime

$$\boldsymbol{v}_t^* = \left(v_{t,1}^*, \ldots, v_{t,m}^*\right)' := \left(v_{tm-d-1}, v_{tm-d-2}, \ldots, v_{tm-d-m}\right)'.$$

Iš prielaidos P4, $\tilde{\boldsymbol{v}}_t = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{W}_j\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$. Taigi procesą $\boldsymbol{v}_t^*$ taip pat galima užrašyti MA(∞) forma per $\boldsymbol{\varepsilon}_t$:

$$\boldsymbol{v}_t^* = \sum_{j=0}^{\infty}\boldsymbol{W}_j^*\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}.$$

$m \times (d+1)$ koeficientų matricų $\boldsymbol{W}_j^*$, $j = 1, 2, \ldots$, narius sudaro matricų $\boldsymbol{W}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, nariai. Priklausomai nuo d dydžio, kelios pirmosios koeficientų matricos $\boldsymbol{W}_j^*$ gali būti nulinės. Reikia parodyti, kad procesas $\Delta x_{tm-d-1} := \sum_{i=1}^{m} v_{t,i}^*$ taip pat užrašomas MA(∞) forma. Tegu $\boldsymbol{W}_{j,i}^*$ yra i-oji matricos $\boldsymbol{W}_j^*$ eilutė, o $s_i\left(\boldsymbol{W}_j^*\right)$ žymi matricos $\boldsymbol{W}_j^*$ i-ojo stulpelio elementų sumą. Tegu $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{t,1}, \ldots, \varepsilon_{t,d+1})'$. Tada

$$\begin{aligned}\Delta x_{tm-d-1} &= \sum_{i=1}^{m} v_{t,i}^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{W}_{j,i}^* \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{W}_{j,i}^* \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{d+1} s_i\left(\boldsymbol{W}_j^*\right)\varepsilon_{t-j,i} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left[s_1\left(\boldsymbol{W}_j^*\right), \ldots, s_{d+1}\left(\boldsymbol{W}_j^*\right)\right]\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Pažymėkime $\boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{W}_j^*\right) := \left[s_1\left(\boldsymbol{W}_j^*\right), \ldots, s_{d+1}\left(\boldsymbol{W}_j^*\right)\right]$. Tada procesas $(\tilde{\boldsymbol{v}}_t', \Delta x_{tm-d-1})'$ turi tokią MA (∞) formą:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{v}}_t \\ \Delta x_{tm-d-1} \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{W}}_j \\ \boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{W}_j^*\right) \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}. \tag{A.3}$$

Kiekvienam $i = 1, \ldots, d+1$,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(j|s_i\left(\boldsymbol{W}_j^*\right)|\right) \le \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(j|W_{j,ki}^*|\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty}\left(j|W_{j,ki}^*|\right) < \infty.$$

Taigi procesas $(\tilde{\boldsymbol{v}}_t', \Delta x_{tm-d-1})'$ tenkina [7] teiginio 18.1 sąlygas[18]. $x_{tm-d-1} = \sum_{j=0}^{t} \Delta x_{jm-d-1}$, $(x_\tau = 0$, kai $\tau \le 0)$, todėl iš minėto teiginio, $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}_p\left(n_d\right)$, $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = O_p\left(n_d^2\right)$. Rezultatas, kad $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u} = O_p\left(n_d\right)$, gaunamas pasinaudojus [7] teiginiu 18.1, kai $(\tilde{\boldsymbol{v}}_t', \Delta x_{tm-d-1}, u_t)'$ užrašomas MA(∞) forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{v}}_t \\ \Delta x_{tm-d-1} \\ u_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_0 & 0 \\ \boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{W}_0^*\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ u_t \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_j & 0 \\ \boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{W}_j^*\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \\ u_{t-j} \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

Remiantis prielaidomis P1 ir P4, $(\boldsymbol{\varepsilon}_t', u_t)'$ yra n.v.p. atsitiktiniai vektoriai.

Apibrėžkime tokią simetrinę ir diagonalinę $(d+2) \times (d+2)$ normavimo matricą $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L} := \begin{bmatrix} n_d^{1/2}\boldsymbol{I}_{d+1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & n_d \end{bmatrix}. \tag{A.5}$$

Iš [7] teiginio 18.1 ir iš (A.1) gauname:

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} n_d^{-1/2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{u} \\ n_d^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u} \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \begin{bmatrix} N\left(\boldsymbol{0}, \sigma_u^2\boldsymbol{Q}\right) \\ \operatorname{dlim}\left(n_d^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}\right) \end{bmatrix}. \tag{A.6}$$

(A.6) riboje pagal pasiskirtymą dlim $\left(n_d^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}\right)$ tiesiog žymime tolydų atsitiktinį dydį, kurio pasiskirstymas nurodytas [7] teiginyje 18.1, tačiau šiame įrodyme jo detalizavimas yra nereikalingas. Svarbiausia, kad su tikimybe vienas šis atsitiktinis dydis neįgyja begalybės ar nulio reikšmių. Kada reikės pabrėžti, kad $n_d^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}$ ir $n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ ne tik yra $\boldsymbol{O}_p(1)$, bet nėra

[18](A.3) koeficientų matricos nėra kvadratinės. Kvadratinėmis jas galima paversti, prijungus prie $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ kitą n.v.p. atsitiktinių dydžių seką.

$\boldsymbol{o}_p(1)$, rašysime $\text{dlim}\left(n_d^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}\right)$ ir $\text{dlim}\left(n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)$. Šių ribų pagal pasiskirstymą tikslaus detalizavimo įrodyme taip pat nereikės.

$\tilde{H}_0$ atvejis

Tegu $\boldsymbol{\gamma} \in \Lambda$ yra toks, kad $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\beta}_{0,d}$. Pažymėkime tikrąjį bendrą parametrų vektorių $\boldsymbol{\psi} := (\boldsymbol{\gamma}', \beta_d)'$. Tuomet modelis yra:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}) + \beta_d \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{u}. \tag{A.7}$$

Parodysime, kad $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$. Imkime įvertinių $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ būtinosios sąlygos (2.23) paskutinę eilutę:

$$\boldsymbol{X}'\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) - \boldsymbol{X}\hat{\beta}_d^{nls}\right) = 0. \tag{A.8}$$

Įsistatę $\boldsymbol{y}$ išraišką iš (A.7) į (A.8) ir padauginę abi puses iš n_d^{-2}, gauname:

$$n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\left(\hat{\beta}_d^{nls} - \beta_d\right) = n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}) - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\right) + n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}. \tag{A.9}$$

Kadangi $n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V} \xrightarrow{p} \boldsymbol{0}$, $n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u} \xrightarrow{p} 0$, perėję prie ribos abiejose (A.9) pusėse, turime:

$$\text{dlim}\left(n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)\left(\beta_d - \text{plim}\hat{\beta}_d^{nls}\right) = 0. \tag{A.10}$$

Kad (A.10) būtų tenkinama, būtina, kad $\text{plim}\hat{\beta}_d^{nls} = \beta_d$. Pasinaudoję šiuo faktu, įrodysime, kad $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$. Būtinosios sąlygos (2.23) pirmosios $d+1$ eilutės, padauginus jas iš n_d^{-1}, yra:

$$n_d^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\boldsymbol{V}'\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) - \boldsymbol{X}\hat{\beta}_d^{nls}\right) = \boldsymbol{0}. \tag{A.11}$$

Iš (A.7) ir (A.11) turime:

$$n_d^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma})\right) = n_d^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X}\left(\beta_d - \hat{\beta}_d^{nls}\right) + n_d^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{u}. \tag{A.12}$$

Pasinaudoję prielaida P3, pažymėkime $\boldsymbol{\gamma}_0 := \text{plim}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$. Iš tolydaus atvaizdžio teoremos, $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}$. Kadangi $\hat{\beta}_d^{nls} \xrightarrow{p} \beta_d$, $n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{u} \xrightarrow{p} \boldsymbol{0}$, $n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} \xrightarrow{p} \boldsymbol{Q}$ ir $n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}_p(1)$, perėję prie ribos (A.12), gauname:

$$\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\right) = \boldsymbol{0}. \tag{A.13}$$

Akivaizdu, kad $\boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{\gamma}$ tenkina (A.13), tačiau tai nebūtinai yra vienintelis šios lygybės sprendinys. Reikia pastebėti, kad, jei galioja prielaida P4, minimizuojamos funkcijos, t.y. modelio liekanų kvadratų vidurkio, minimali reikšmė, kai $\boldsymbol{\gamma}_0 = \boldsymbol{\gamma}$, artėja į σ_u^2, kai $n_d \to \infty$. Jei $\boldsymbol{\gamma}_0 \neq \boldsymbol{\gamma}$, bet $\boldsymbol{\gamma}_0$ tenkina (A.13) lygybę, tai nesunku parodyti, kad minimizuojamos funkcijos minimali reikšmė augant duomenų skaičių artėtų į $\sigma_u^2 + \left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\right)'\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\right) > \sigma_u^2$, o tai reiškia, kad $\boldsymbol{\gamma}_0$ prieštarautų savo apibrėžimui. Taigi $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$.

Skirtumą $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$ išsireikškime per modelio kintamuosius. Naudojantis [8] pavyzdžiu, pagal tikslios Teiloro eilutės pirmos eilės aproksimaciją taške $\boldsymbol{\gamma}$, į kurį pagal tikimybę artėja $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, turime tokią lygybę:

$$\boldsymbol{f}(\hat{\gamma}) = \boldsymbol{f}(\gamma) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma+}(\hat{\gamma} - \gamma), \tag{A.14}$$

kur $\boldsymbol{\gamma}+ \in \Lambda$ yra toks taškas, kuriame (A.15) galioja. Jei $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$, tai ir $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) \xrightarrow{p} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma})$. Tuomet, kaip teigiama [8], remiantis vidutinės reikšmės teorema, $\boldsymbol{\gamma}+ \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$. Remiantis tolydaus atvaizdžio teorema, $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+} \xrightarrow{p} \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma}$. Pastebėkime, kad iš $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}$ apibrėžimo (2.21) seka tokia lygybė:

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) = \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}\big). \tag{A.15}$$

Pasinaudojus (A.15), modeliu (A.7), būtinoji įvertinių $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ sąlyga yra:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\big) &= \boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\big(\boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{u} - \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\big) \\ &= \boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{\psi} - \hat{\boldsymbol{\psi}}\big) + \boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{A.16}$$

Iš (A.16) gauname:

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi} = \big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}. \tag{A.17}$$

Tada, pasinaudojus (A.15) ir (A.17):

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) - \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}. \tag{A.18}$$

Lygybės (A.17) ir (A.18) yra išvestos remiantis [8], kur jos užrašytos modelio su stacionariais kintamaisiais įvertiniams.

$\boldsymbol{P}$ pažymėkime tokią $(d+1) \times (d+2)$ matricą, kuri išrenka iš $d+2$ ilgio vektoriaus pirmuosius $d+1$ elementus:

$$\boldsymbol{P} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{d+1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \tag{A.19}$$

Nesunku pastebėti, kad $\boldsymbol{PA}$ yra matrica, sudaryta iš pirmųjų $d+1$ matricos $\boldsymbol{A}$ eilučių. Kadangi $\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{P}\big(\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) - \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi})\big)$ ir $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{\beta}_{0,d}$, tai iš (A.18) turime:

$$\boldsymbol{f}(\hat{\gamma}) - \boldsymbol{\beta}_{0,d} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}. \tag{A.20}$$

MKM įvertiniams $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}$ panašią lygybę išsivesti paprasčiau:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} &= \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u} \\ &= \boldsymbol{\beta}_{0,d} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{A.21}$$

Skirtumas $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$ iš (A.20) ir (A.21) gaunamas toks:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma}) = \boldsymbol{P}\Big[(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1} - \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\Big]\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}. \tag{A.22}$$

Reikia rasti $\sqrt{n_d}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{V}}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)$ asimptotinį pasiskirstymą. Kadangi $\sqrt{n_d}\boldsymbol{I}_{d+1} = \boldsymbol{PL}$, iš

(A.22) seka, kad

$$\sqrt{n_d}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}'\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big) = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}, \tag{A.23}$$

$$\boldsymbol{B}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} := \boldsymbol{L}\left[(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1} - \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big(\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'\right]\boldsymbol{L}. \tag{A.24}$$

Iš (A.23) matome, kad $\sqrt{n_d}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}'\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)$ asimptotinio pasiskirstymo išvedimas susiveda į $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}$, $\boldsymbol{B}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}$ ir $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}$ asimptotinių pasiskirstymų arba ribų pagal tikimybę radimą. $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}$ ribą pagal pasiskirstymą jau radome (A.6).

Raskime $\boldsymbol{B}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}$ asimptotinį elgesį. Apibrėžkime kitos dimensijos, $(r+1)\times(r+1)$, normavimo matricą $\tilde{\boldsymbol{L}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{L}} := \begin{bmatrix} n_d^{1/2}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & n_d \end{bmatrix}. \tag{A.25}$$

Iš matricos $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}$ apibrėžimo (2.21), $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}$ yra blokinė-diagonalinė matrica, todėl galima pastebėti, kad galioja tokios lygybės:

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}} = \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\tilde{\boldsymbol{L}}, \quad \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}} = \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\tilde{\boldsymbol{L}}^{-1}, \tag{A.26}$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}' = \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'\boldsymbol{L}, \quad \tilde{\boldsymbol{L}}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}' = \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'\boldsymbol{L}^{-1}. \tag{A.27}$$

Suprantama, tokios pačios lygybės galioja ir matricai $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}$. Remiantis tokiu matricų $\boldsymbol{L}$ ir $\tilde{\boldsymbol{L}}$ „perkėlimu”, gauname:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} &= \boldsymbol{L}\,(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\,\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big(\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'\boldsymbol{L} \\ &= \big(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\big)^{-1} - \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big(\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'. \end{aligned} \tag{A.28}$$

Kadangi $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}_p\,(n_d)$ ir $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = O_p\,(n_d^2)$, tai

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1} = \begin{bmatrix} n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} & n_d^{-3/2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X} \\ n_d^{-3/2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V} & n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \operatorname{dlim}\big(n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\big) \end{bmatrix}. \tag{A.29}$$

Pasinaudojus $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}$ blokiniu išskaidymu (2.21) lygybėje, matricą $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}$ galima išskaidyti taip:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+} &= \begin{bmatrix} n_d^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}+} & n_d^{-3/2}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}'\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X} \\ n_d^{-3/2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}+} & n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{d} \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \operatorname{dlim}\big(n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\big) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{A.30}$$

Čia riba pagal pasiskirtymą gauta pasinaudojus Jakobiano $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}$ tolydumu ir tuom, kad $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$ ir $\boldsymbol{\gamma}+ \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$. Dar kartą pasinaudojus $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}$ blokiniu išskaidymu (2.21), blokinės diagonalinės matricos atvirkštinės matricos skaičiavimo taisykle[19] , iš (A.28), (A.29) ir (A.30) gauname:

$$\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}} \xrightarrow{p} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{bmatrix}, \tag{A.31}$$

kur (A.31) matricos apatinis dešinys elementas lygus nuliui, dėl to, kad tai pačiai realizacijai $\{n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\}_{n_d=1}^{\infty}$ galioja:

$$\left(\text{dlim}\left(n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)\right)^{-1} - \left(\text{dlim}\left(n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)\right)^{-1} = 0.$$

(A.31) nuo ribos pagal pasiskirstymą pereita prie ribos pagal tikimybę remiantis tuom, kad pagal [11] teiginį C.1 (p. 683), konvergavimas pagal pasiskirstymą į neatsitiktinį dydį ekvivalentus konvergavimui pagal tikimybę.

Raskime $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}$ ribą pagal tikimybę. Kadangi matrica $\boldsymbol{Q}$ yra teigiamai apibrėžta, tai jai galima taikyti Cholesky dekompoziciją: $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}'$. Kadangi $\boldsymbol{Q} = \text{plim}\left(n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}\right)$, iš [13] lemos 12.1.6 (p. 295)[20], remiantis tolydaus atvaizdžio teorema,

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{F}. \tag{A.32}$$

Gautas $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}$, $\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}}$ ir $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}$ asimptotinis elgesys, galima pereiti prie $\sqrt{n_d}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{V}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\right)$ asimptotinio pasiskirstymo išvedimo. Iš (A.6), (A.23), (A.31) ir (A.32) gauname:

$$\begin{aligned} \sqrt{n_d}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{V}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\right) &\xrightarrow{d} \boldsymbol{F}'\boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N\left(\boldsymbol{0}, \sigma_u^2\boldsymbol{Q}\right) \\ O_p(1). \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{F}'\left(\boldsymbol{Q}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\right) N\left(\boldsymbol{0}, \sigma_u^2\boldsymbol{Q}\right). \end{aligned}$$

Taigi

$$\sqrt{n_d}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{V}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\right) \xrightarrow{d} N\left(\sigma_u^2\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}\right),$$

kur, pasinaudodami tuom, kad $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}'$ ir $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{F}'^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}$, turime:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1} &= \boldsymbol{F}'\left(\boldsymbol{Q}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{Q}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)'\boldsymbol{F} \\ &= \boldsymbol{F}'\boldsymbol{F}'^{-1}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{F} - 2\boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{F} + \\ &\quad + \boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{F} \\ &= \boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{F}. \end{aligned} \tag{A.33}$$

Dabar reikia parodyti, kad $\hat{\sigma}_u^2 \xrightarrow{p} \sigma_u^2$. Parodžius, kad MKM įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$ yra suderinti,

---

[19]

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{bmatrix}.$$

[20] Cholesky dekompozicija yra tolydi funkcija iš simetrinių teigiamai apibrėžtų matricų aibės į trikampių matricų su teigiamais diagonalės elementais aibę.

galima pasinaudoti [7] skyrelyje 8.2 esančiu įrodymu. $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$ yra suderinti, nes $\boldsymbol{L}\big(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}-\boldsymbol{\Gamma}\big)=\left(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}=\boldsymbol{O}_p(1)$, taigi $\big(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}-\boldsymbol{\Gamma}\big)\xrightarrow{p}\boldsymbol{0}$. Taigi $\hat{\sigma}_u^2\xrightarrow{p}\sigma_u^2$, todėl

$$\boldsymbol{h}_1=\frac{\sqrt{n_d}}{\hat{\sigma}_u}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}'\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}-\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)\xrightarrow{d}N\left(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}\right). \tag{A.34}$$

Raskime $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}$ rangą. Iš (A.33) matyti, kad $\boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}'\boldsymbol{F}$ yra idempotentinė. Kadangi $\boldsymbol{F}$ ir $\boldsymbol{Q}$ yra pilno rango, o $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)=r$, kur r yra matricos $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}$ stulpelių skaičius, tai remiantis [10] matricų sandaugos rangų taisyklėmis:

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}'\boldsymbol{F}\right)=r.$$

Remiantis [10] taisykle 17c (sk. 4.3.1, p. 59)[21],

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}\right)=d+1-r.$$

Kadangi $\boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}'\boldsymbol{F}$ yra idempotentinė, tai ir $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}$ yra idempotentinė.

Iš $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}$ apibrėžimo (2.27) turime:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}&=\boldsymbol{I}_{d+1}-\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}'n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}\\&=\boldsymbol{I}_{d+1}-\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}.\end{aligned}$$

Taigi $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}$ taip pat yra idempotentinė ir $\operatorname{rank}\big(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}\big)=d+1-r$. Be to, kadangi $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}\xrightarrow{p}\boldsymbol{F}$ ir $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\xrightarrow{p}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}$, remiantis tolydaus atvaizdžio teorema, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}\xrightarrow{p}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}$. Remiantis [10] taisykle 3b (sk. 9.8, p. 138), simetrinės ir idempotentinės matricos apibendrinta atvirkštinė matrica lygi jai pačiai. Galima pasiremti [2] teorema 1, iš kur ir gauname, kad

$$T_1=\boldsymbol{h}_1'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}\boldsymbol{h}_1\xrightarrow{d}\chi^2\left(d+1-r\right).$$

$\tilde{H}_1$ atvejis

Likusioje įrodymo dalyje tarkime, kad $\tilde{H}_0$ negalioja. Tada $\boldsymbol{\beta}_{0,d}-\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\gamma}\right)\neq\boldsymbol{0}$, $\forall\boldsymbol{\gamma}\in\Lambda$. Nagrinėkime atsitiktinį dydį $\hat{\sigma}_u^2n_d^{-1}T_1$.

$$\hat{\sigma}_u^2n_d^{-1}T_1=\hat{\sigma}_un_d^{-1/2}\boldsymbol{h}_1'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}\boldsymbol{h}_1\hat{\sigma}_un_d^{-1/2}=\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}-\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)'\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}'\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}-\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big). \tag{A.35}$$

Parodysime, kad $\hat{\sigma}_u^2n_d^{-1}T_1$ pagal tikimybę artėja į teigiamą skaičių.

Panašiai kaip ir $\tilde{H}_0$ atveju išsireikšime atsitiktinį vektorių $\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}-\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)$ per modelio kintamuosius. Pažymėkime $\boldsymbol{\gamma}_0:=\operatorname{plim}\left(\hat{\boldsymbol{\gamma}}\right)$. Remiantis prielaida P3, $\boldsymbol{\gamma}_0$ egzistuoja. Šiuo

[21] Jei $\boldsymbol{A}$ yra idempotentinė ir $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}\right)=r$, tai $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{I}_{d+1}-\boldsymbol{A}\right)=d+1-r$.

atveju nagrinėjamą modelį galima užrašyti taip:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\gamma_0) + \boldsymbol{X}\beta_d + \boldsymbol{e},$$
$$\boldsymbol{e} := \boldsymbol{u} + \boldsymbol{V}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\gamma_0)\big).$$

Naudojantis [8] pavyzdžiu, pagal tikslią Teiloro eilutės pirmos eilės aproksimaciją taške $\boldsymbol{\gamma}_0$:

$$\boldsymbol{f}(\hat{\gamma}) = \boldsymbol{f}(\gamma_0) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma+}(\hat{\gamma} - \gamma_0). \tag{A.36}$$

Kadangi $\tilde{H}_1$ atveju tikro parametrų vektoriaus nėra, imkime $\boldsymbol{\psi} := (\boldsymbol{\gamma}_0', \beta_d)'$. Tada iš (A.36) seka:

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) - \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}\big). \tag{A.37}$$

Lygybės (A.37) paskutinė eilutė yra tiesiog $\hat{\beta}_d - \beta_d = \hat{\beta}_d - \beta_d$. Tuomet įvertinių $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ būtinoji sąlyga yra:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\big) &= \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\big(\boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{e} - \boldsymbol{Z}\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\big)\\ &= \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{\psi} - \hat{\boldsymbol{\psi}}\big) + \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}.\end{aligned} \tag{A.38}$$

Iš (A.37) ir (A.38) gauname:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) - \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi}) &= \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{e}\\ &= \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\gamma_0)\big) +\\ &+ \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}.\end{aligned} \tag{A.39}$$

Pažymėkime

$$\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}} := \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'.$$

Kadangi $\boldsymbol{f}(\hat{\gamma}) - \boldsymbol{f}(\gamma_0) = \boldsymbol{P}\big(\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) - \tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi})\big)$, tai iš (A.39):

$$\boldsymbol{f}(\hat{\gamma}) - \boldsymbol{f}(\gamma_0) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\gamma_0)\big) + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}. \tag{A.40}$$

MKM įvertiniams $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}$ lieka galioti (A.21):

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} = \boldsymbol{\beta}_{0,d} + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}. \tag{A.41}$$

Taigi iš (A.40) ir (A.41) gauname tokią $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})$ išraišką:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma}) = \big[\boldsymbol{I}_{d+1} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V}\big]\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\gamma_0)\big) + \boldsymbol{P}\big[(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1} - \boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\big]\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u}. \tag{A.42}$$

Pastebėjus, kad $\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Z}\big((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1} - \boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}'\big)\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}}'\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{P}'$ ir $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{I}_{d+1}n_d^{-1/2}$, išraiška

(A.35) tampa tokia:

$$\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1} T_1 = \Big[\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\big(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{V}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Delta}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{P}'\big) + \boldsymbol{u}'\boldsymbol{Z} n_d^{-1/2}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{B}'_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{P}'\Big] \times$$
$$\times \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{V}}\Big[\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} n_d^{-1/2}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u} + \big(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V}\big)\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)\Big]. \quad \text{(A.43)}$$

Ieškokime $\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1} T_1$ ribos pagal tikimybę. Kadangi $\boldsymbol{B}_{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} = \boldsymbol{O}_p(1)$, $n_d^{-1/2}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{O}_p\big(n_d^{-1/2}\big)$, ir, kaip vėliau bus parodyta, $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Delta}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}} = \boldsymbol{O}_p(1)$, tai (A.43) susiprastina:

$$\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1} T_1 = \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\big(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{V}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Delta}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{P}'\big)\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{V}} \times$$
$$\times \big(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V}\big)\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) + O_p\big(n_d^{-1/2}\big) + O_p\big(n_d^{-1}\big). \quad \text{(A.44)}$$

Raskime $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V}$ ribą pagal tikimybę.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V} &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V} \\ &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}} n_d^{-1/2}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V}.\end{aligned} \quad \text{(A.45)}$$

Kadangi $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}_0$ ir $\boldsymbol{\gamma}_+ \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}_0$, iš (A.30) ir $\boldsymbol{P}$ apibrėžimo (A.19) turime:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\boldsymbol{\gamma}+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}} \xrightarrow{p} \Big[\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\big(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}, \quad \boldsymbol{0}\Big]. \quad \text{(A.46)}$$

Kadangi $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V} = \boldsymbol{O}_p(n_d)$, tai

$$n_d^{-1/2}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} \\ n_d^{-3/2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}\end{bmatrix} \xrightarrow{p} \begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}. \quad \text{(A.47)}$$

Taigi iš (A.45), (A.46) ir (A.47) gauname:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V} \xrightarrow{p} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\big(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{Q} \quad \text{(A.48)}$$

kur $\boldsymbol{\Delta} := \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\big(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}$. Pažymėkime $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{F}'\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{F}$. Turime $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1} \xrightarrow{p} \boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{A}$. Pastebėkime, kad matrica $\boldsymbol{A}$ yra idempotentinė ir simetrinė. Imkime kvadratinėje formoje (A.44) esančią matricą. Jos ribą pagal tikimybę galima suprastinti:

$$\begin{aligned}&\big(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{V}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Delta}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{P}'\big)\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_1}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{V}}\big(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V}\big) \xrightarrow{p} \\ &\xrightarrow{p} (\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Delta})\,\boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{F}'\,(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{Q}) \\ &= (\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}'\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{F})\,(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{F}' - \boldsymbol{F}'\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}') \\ &= \boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{A})\,(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{F}' \\ &= \boldsymbol{F}\,(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{Q}.\end{aligned} \quad \text{(A.49)}$$

Taigi, iš (A.44) ir (A.49) turime:

$$\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1} T_1 \xrightarrow{p} \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\big(\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{Q}\big)\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big). \quad \text{(A.50)}$$

Kadangi $\boldsymbol{Q}$ yra teigiamai apibrėžta, tai $\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\boldsymbol{Q}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) > 0$. Toliau parodysime, kad $\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{Q}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) = 0$.

Iš NMKM įvertinių būtinosios sąlygos (2.23) paskutinės eilutės turime:

$$\boldsymbol{X}'\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) - \boldsymbol{X}\hat{\beta}_d^{nls}\big) = 0. \tag{A.51}$$

Kadangi $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta}_{0,d} + \boldsymbol{X}\beta_d + \boldsymbol{u}$, tai lygybę (A.51) padauginę iš n_d^{-2}, gauname:

$$n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\big(\beta_d - \hat{\beta}_d^{nls}\big) = n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}\big(\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) - \boldsymbol{\beta}_{0,d}\big) - n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}. \tag{A.52}$$

Dešinioji (A.52) lygybės pusė pagal tikimybę artėja į nulį. Kadangi $n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} \neq o_p(1)$, tai, kad (A.52) galiotų ir riboje, būtina, kad $\hat{\beta}_d^{nls} \xrightarrow{p} \beta_d$. Taigi $\hat{\beta}_d^{nls}$ yra suderintas net ir esant neteisingai apribojimo funkcijai. Iš NMKM įvertinių būtinosios sąlygos (2.23) pirmųjų $d+1$ eilučių turime:

$$n_d^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{V}'\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) - \boldsymbol{X}\hat{\beta}_d^{nls}\big) = \boldsymbol{0}. \tag{A.53}$$

Įsistatę į (A.53) išraišką $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta}_{0,d} + \boldsymbol{X}\beta_d + \boldsymbol{u}$, gauname:

$$n_d^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big) = n_d^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X}\big(\hat{\beta}_d^{nls} - \beta_d\big) - n_d^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{u}. \tag{A.54}$$

Dešinioji (A.54) lygybės pusė artėja į nulį, nes $\hat{\beta}_d^{nls} \xrightarrow{p} \beta_d$, $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}_p(n_d)$ ir $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{O}_p(n_d)$. Kadangi $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}_0$ ir $n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} \xrightarrow{p} \boldsymbol{Q}$, tai (A.54) lygybė riboje pagal tikimybę yra:

$$\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}_0}\boldsymbol{Q}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) = \boldsymbol{0}. \tag{A.55}$$

Vadinasi, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ artėja į tokį parametrų vektorių $\boldsymbol{\gamma}_0$, kuriam tenkinama (A.55). Iš (A.55) gauname, kad

$$\begin{aligned}&\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{Q}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) = \\ &= \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}_0}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}_0}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}_0}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}_0}\boldsymbol{Q}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) = 0.\end{aligned}$$

Taigi[22] iš (A.50), $\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1}T_1 \xrightarrow{p} \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\boldsymbol{Q}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) > 0$. Todėl $T_1 \xrightarrow{p} \infty$, kai $n_d \to \infty$. □

B Teiginio 2.3 įrodymas

$\tilde{H}_0$ atvejis

Tegu galioja $\tilde{H}_0$. Reikia parodyti, kad $\boldsymbol{h}_2$ asimptotiškai pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį, rasti asimptotinę $\boldsymbol{h}_2$ kovariacijų matricą $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2}$ ir parodyti, kad $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}2} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2}$. Įrodžius,

[22] Šį rezulatą galima gauti ir kitu būdu. Kadangi $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) \xrightarrow{p} \boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)$, tai, perėjus prie ribos (A.44) abejose pusėse, būtina, kad $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) \xrightarrow{p} \boldsymbol{0}$. Tada iš (A.48), $\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{Q}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) = \boldsymbol{0}$. Tokiu būdu nereikia naudotis NMKM įvertinių būtinąja sąlyga.

kad $\operatorname{rank}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2}) = d + 1 - r$, galima pasiremti [2] teorema 1.

Pagal Cholesky dekompoziciją, tegu matrica $\boldsymbol{F}$ yra tokia, kad $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{Q}$. Priede A pagrįsta, kad $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{F}$ ir $n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} \xrightarrow{p} \boldsymbol{Q}$. Kadangi $\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{V}}'^{-1}\boldsymbol{h}_1$, tai iš (A.34) ir tolydaus atvaizdžio teoremos gauname:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_2 &\xrightarrow{d} N\big(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{F}'^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}\boldsymbol{F}^{-1}\big), \text{ kur}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1} &= \boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{F}.\end{aligned}$$

Čia $\boldsymbol{\gamma}$ yra toks, kad $\boldsymbol{\beta}_{0,d} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma})$. Pažymėkime $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2} := \boldsymbol{F}'^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}\boldsymbol{F}^{-1}$. Iš $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}$ išraiškos turime:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2} &= \boldsymbol{F}'^{-1}\boldsymbol{F}^{-1} - \boldsymbol{F}'^{-1}\boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{-1}\\ &= \boldsymbol{Q}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{\gamma}}.\end{aligned} \tag{B.1}$$

Parodykime, kad $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2}$. Matrica $\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}'$ yra pirmieji $d+1$ matricos $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{L}$ eilutės ir stulpeliai. Iš (A.29) turime:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}' \xrightarrow{p} \boldsymbol{Q}^{-1}.$$

Iš (A.30) ir $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}$ apibrėžimo (2.21) turime:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{P}' \xrightarrow{p} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}.$$

Taigi $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2}$.

Liko parodyti, kad $\operatorname{rank}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2}) = d+1-r$. Kadangi $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2} = \boldsymbol{F}'^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}\boldsymbol{F}^{-1}$ ir $\boldsymbol{F}$ yra pilno rango, tai, remiantis [10] taisykle 10 (sk. 4.3.1, p. 58), $\operatorname{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_1}) = d + 1 - r$. Sunkiau yra įrodyti, kad $\operatorname{rank}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}) = d + 1 - r$. Matricos $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{L} = (\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1})^{-1}$ blokinis išskaidymas yra toks:

$$\left(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} & n_d^{-3/2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X}\\ n_d^{-3/2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V} & n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\end{bmatrix}\right)^{-1}.$$

$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{P}'$ yra viršutinis kairysis matricos $\left(\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\right)^{-1}$ blokas. Remiantis blokinės atvirkštinės matricos skaičiavimo taisykle 2b iš [10] (sk. 9.11.3, p. 148), gauname:

$$\boldsymbol{A}_1 := \boldsymbol{P}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}' = \left(n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} - n_d^{-3/2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X}\left(n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}n_d^{-3/2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}\right)^{-1}.$$

Čia reikia pasakyti, kad, kadangi $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}$ yra simetrinė ir teigiamai apibrėžta, tai matrica $n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} - n_d^{-3/2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X}\left(n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}n_d^{-3/2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}$ yra simetrinė ir teigiamai apibrėžta[23], todėl turi atvirkštinę matricą, kuri taip pat yra teigiamai apibrėžta. Remiantis $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}$ apibrėžimu

[23]Knygoje [10] šio fakto nėra, tačiau jį galima rasti bet kurioje iš šių nuorodų:

- http://en.wikipedia.org/wiki/Schur_complement
- http://www.cis.upenn.edu/ jean/schur-comp.pdf
- http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/IFEM.d/IFEM.AppP.d/IFEM.AppP.pdf

(2.21), matricą $\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}$ suskaidome į dalis taip:

$$\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}} & \boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}n_d^{-3/2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X} \\ n_d^{-3/2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}} & n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} \end{bmatrix}.$$

Matricos $\left(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\right)^{-1}$ viršutinis kairysis blokas $\boldsymbol{A}_2$, remiantis taisykle 2b iš [10] (sk. 9.11.3, p. 148) yra :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_2 &= \left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}} - \boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}n_d^{-3/2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X}\left(n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}n_d^{-3/2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\right)^{-1} \\ &= \left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\left(n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} - n_d^{-3/2}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{X}\left(n_d^{-2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}n_d^{-3/2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{V}\right)\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\right)^{-1} \\ &= \left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Iš $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}$ apibrėžimo (2.21):

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}.$$

Taigi $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}$ galima užrašyti tokiu pavidalu:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2} = \boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}. \tag{B.2}$$

Kadangi $\boldsymbol{A}_1$ teigiamai apibrėžta, pagal Cholesky dekompoziciją, $\exists \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}$ tokia, kad $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{A}_1}$. Kadangi $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}$ yra pilno rango, tai ir $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}^{-1}$ yra pilno rango, todėl

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}'^{-1}\right) = \operatorname{rank}\left(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}\right).$$

Raskime $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}'^{-1}$ rangą. Iš (B.2) turime:

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}'^{-1} = \boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}'^{-1}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}'^{-1}. \tag{B.3}$$

(B.3) gauto skirtumo antroji matrica yra idempotentinė ir jos rangas lygus r. Remiantis [10] 17c taisykle (sk. 4.3.1, p. 59),

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}_1}'^{-1}\right) = d + 1 - r.$$

Taigi $\operatorname{rank}\left(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}\right) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2}\right) = d + 1 - r$.

Lieka pasiremti [2] teorema 1, iš kur gauname, kad

$$T_2 = \boldsymbol{h}'_2\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-}_{\boldsymbol{h}_2}\boldsymbol{h}_2 \xrightarrow{d} \chi^2\left(d + 1 - r\right).$$

$\tilde{H}_1$ atvejis

Tegu galioja $\tilde{H}_1$. Lygybės (A.44) analogas statistikai T_2 nesunkiai gaunamas toks:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1} T_2 = \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\big(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{V}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Delta}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{P}'\big)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^-_{\boldsymbol{h}_2}\times \\ \times\left(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V}\right)\left(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\right) + O_p\big(n_d^{-1/2}\big) + O_p\left(n_d^{-1}\right).\end{aligned} \tag{B.4}$$

Priminsime, kad $\boldsymbol{\gamma}_0 := \text{plim}\hat{\boldsymbol{\gamma}}$. Iš (B.1):

$$\text{plim}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2} = \boldsymbol{Q}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}.$$

Taigi $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0} = \text{plim}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}$.

Parodysime, kad $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^-_{\boldsymbol{h}_2} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}$. Reikia parodyti, kad $\text{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}) = d+1-r$, ir pasiremti [2] teorema 2. $\boldsymbol{F}$ yra pilno rango, todėl $\text{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}) = \text{rank}(\boldsymbol{F}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}\boldsymbol{F})$, o

$$\boldsymbol{F}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{F}'\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\boldsymbol{F}. \tag{B.5}$$

Matrica $\boldsymbol{F}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}\boldsymbol{F}$ yra idempotentinė ir jos rangas lygus $d+1-r$. Kadangi $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_2}$ ir $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}$ rangai sutampa, tai galima pasiremti [2] teorema 2 ir teigti, kad $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^-_{\boldsymbol{h}_2} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}$. Bendru atveju apibendrintoms atvirkštinėms matricoms tai nebūtinai yra teisinga.

Paėmę (B.4) kvadratinės formos matricą ir perėję prie ribos pagal tikimybę, pasinaudoję (A.48), gauname:

$$\begin{aligned}&\big(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{V}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\Delta}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{P}'\big)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^-_{\boldsymbol{h}_2}\left(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Delta}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{V}\right) \xrightarrow{p} \left(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Delta}\right)\boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}\left(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{Q}\right) \\ &= \boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0} - \boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{Q}.\end{aligned} \tag{B.6}$$

Iš (A.55) žinome, kad $\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{Q}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) = \boldsymbol{0}$. Taigi iš (B.4) ir (B.6):

$$\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1} T_2 \xrightarrow{p} \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big). \tag{B.7}$$

Liko pagrįsti, kad $\boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}$ yra neneigiamai apibrėžta. Iš (B.5) žinome, kad $\boldsymbol{F}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}\boldsymbol{F}$ yra simetrinė ir idempotentinė, todėl, remiantis [10] taisykle 3c (sk. 9.8, p. 138), yra neneigiamai apibrėžta. Kadangi $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0} = \boldsymbol{F}'^{-1}\left(\boldsymbol{F}'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}\boldsymbol{F}\right)\boldsymbol{F}^{-1}$, tai $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}$ yra neneigiamai apibrėžta pagal [10] taisyklę 10a (sk. 9.12.1, p. 152). Kadangi $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}$ yra simetrinė, tai ir $\boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}$ yra simetrinė pagal [10] taisyklę 8b (sk. 3.6.2, p. 34). Todėl $\boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}$ tenkina lygybę $\boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0} = \boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}\boldsymbol{\Sigma}^{-'}_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}$, iš ko seka, kad $\boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2,\gamma_0}$ yra neneigiamai apibrėžta ([10] taisyklė 10a iš sk. 9.12.1, p. 152). Iš (B.7), $\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1} T_2$ pagal tikimybę artėja į neneigiamą skaičių.

Šioje vietoje tenka įrodymą pabaigti. Galima parodyti, kad jei $\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_2\gamma_0}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) > 0$, tai ir $\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\boldsymbol{\Sigma}^-_{\boldsymbol{h}_2\gamma_0}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) > 0$, tačiau neaišku, kaip patikrinti pirmąją salygą.

□

C Teiginio 3.1 įrodymas

Įrodymo struktūra panaši į 2.2 teiginio įrodymo struktūrą. $\tilde{H}_0$ atveju parodžius, kad NMKM įvertiniai yra suderinti, įrodoma, kad MKM ir NMKM įvertinių skirtumas $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$, padaugintis iš $\sqrt{n_d}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}$, asimptotiškai pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Tuo pačiu randama šio atsitiktinio vektoriaus kovariacijų matrica $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_3}$. Tada nesunku parodyti, kad $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_3}$, ir kad $\operatorname{rank}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_3}) = d+1-r$. Iš to seka, kad $T_3 \xrightarrow{p} \chi^2(d+1-r)$. Jei yra teisinga $\tilde{H}_1$, panašiai kaip ir 2.2 teiginio atveju, parodoma, kad $n_d^{-1}T_3$ pagal tikimybę artėja į teigiamą skaičių. Vadinasi, $T_3 \xrightarrow{p} \infty$.

Pasiremdami priedu A, raskime sumų $\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}$ ir $\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{u}$ asimptotinį elgesį. Suskaidykime matricą $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ į tris dalis taip:

$$\tilde{\boldsymbol{Z}} = \begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{V}} & \mathbf{1} & \tilde{\boldsymbol{X}}\end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{V}} := \begin{bmatrix}\boldsymbol{V} & \Xi_0\end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{X}} := \begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & \Xi_1\end{bmatrix}. \tag{C.1}$$

Taigi matricą $\tilde{\boldsymbol{V}}$ sudaro stacionarūs kintamieji, kurių yra $d+1+d_0$, o matricą $\tilde{\boldsymbol{X}}$ sudaro integruoti kintamieji, kurių yra d_1+1. Sudarykime $(d+1+d_0)\times\left(\tilde{d}-2\right)$ dimensijos matricą $\boldsymbol{P}_0$ tokią:

$$\boldsymbol{P}_0 := \begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{d+1+d_0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

Turime $\boldsymbol{P}_0\tilde{\boldsymbol{v}}_t = \left(v_{tm}, \ldots, v_{tm-d}, \boldsymbol{\xi}'_{0,t}\right)'$. Proceso $\boldsymbol{P}_0\tilde{\boldsymbol{v}}_t$ kovariacijų matrica $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ yra:

$$\tilde{\boldsymbol{Q}} := \boldsymbol{P}_0 \mathrm{E}\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_t\tilde{\boldsymbol{v}}'_t\right)\boldsymbol{P}'_0.$$

$\tilde{\boldsymbol{Q}}$ yra pirmieji $d+1$ matricos $\mathrm{E}\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_t\tilde{\boldsymbol{v}}'_t\right)$ eilutės ir stulpeliai. Iš prielaidos N4, $\mathrm{E}\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_t\tilde{\boldsymbol{v}}'_t\right)$ yra teigiamai apibrėžta, todėl, remiantis [10] taisykle 12 (sk. 5.3.2, p. 75), $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ yra teigiamai apibrėžta. Kitos [7] teiginio 7.9 (p. 194) sąlygos patvirtinamos kaip ir priede A. Taigi, pasiremiant priedu A, galima teigti, kad

$$n_d^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{V}}'\boldsymbol{u} = n_d^{-1/2}\sum_{t=t_1}^{n}\boldsymbol{P}_0\tilde{\boldsymbol{v}}_t u_t \xrightarrow{d} N\left(\mathbf{0}, \sigma_u^2\tilde{\boldsymbol{Q}}\right).$$

Iš [7] teiginio 18.1 (p. 547):

$$n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}} = n_d^{-1}\sum_{t=t_1}^{n}\boldsymbol{P}_0\tilde{\boldsymbol{v}}_t\tilde{\boldsymbol{v}}'_t\boldsymbol{P}'_0 \xrightarrow{p} \boldsymbol{P}_0\mathrm{E}\left(\tilde{\boldsymbol{v}}_t\tilde{\boldsymbol{v}}'_t\right)\boldsymbol{P}'_0 = \tilde{\boldsymbol{Q}}.$$

Taip pat iš [7] 18.1 teiginio, $\tilde{\boldsymbol{V}}'\mathbf{1} = \boldsymbol{O}_p\left(n_d^{1/2}\right)$.

Raskime $\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{V}}$, $\tilde{\boldsymbol{X}}'\mathbf{1}$, $\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}$ ir $\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{u}$ konvergavimo greičius. Kaip ir priede A, procesas $(\tilde{\boldsymbol{v}}'_t, x_{tm-d-1} - x_{tm-d-m})'$ užrašomas $\mathrm{MA}(\infty)$ forma. Parodymas, kad ši forma tenkina [7] 18.1 teiginio sąlygas, iš esmės nesiskiria nuo pateikto priede A. Vadinasi, galima pasiremti [7] teiginiu 18.1, iš kurio $\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{O}_p\left(n_d^2\right)$, $\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{O}_p\left(n_d\right)$. Iš to paties teiginio, $\tilde{\boldsymbol{X}}'\mathbf{1} = \boldsymbol{O}_p(n_d^{3/2})$. Kaip pagrįsta priede A, $(\tilde{\boldsymbol{v}}'_t, x_{tm-d-1} - x_{tm-d-m}, u_t)'$ $\mathrm{MA}(\infty)$ forma tenkina [7] teiginio 18.1 sąlygas, todėl $\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{O}_p(n_d)$. Be to, $n_d^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{V}}'\mathbf{1}$, $n_d^{-3/2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\mathbf{1}$, $n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{X}}$, $n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}$

ir $n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{u}$ nėra $\boldsymbol{o}_p(1)$. Kaip ir teiginio 2.2 įrodyme, iš su integruotais nariais susijusių sumų bus reikalingi tik konvergavimo greičiai, tiksliai nedetalizuojant asimptotinių skirstinių.

Modelio (3.4) atveju reikia apibrėžti tokią $\tilde{d}\times\tilde{d}$. normavimo matricą $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L} := \begin{bmatrix} \sqrt{n_d}\boldsymbol{I}_{d+d_0+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{n_d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & n_d\boldsymbol{I}_{d_1+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{n_d}\boldsymbol{I}_{d+d_0+2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n_d\boldsymbol{I}_{d_1+1} \end{bmatrix}.$$

Čia $\sqrt{n_d}\boldsymbol{I}_{d+d_0+2}$ atitinka stacionarius kintamuosius ir laisvąjį narį, o $n_d\boldsymbol{I}_{d_1+1}$ atitinka integruotus kintamuosius matricoje $\tilde{\boldsymbol{Z}}$. Iš centrinės ribinės teoremos n.v.p. atsitiktiniams dydžiams, $n_d^{-1/2}\mathbf{1}'\boldsymbol{u} \xrightarrow{d} N\left(0,\sigma_u^2\right)$. Taigi,

$$\boldsymbol{L}^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} n_d^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{V}}'\boldsymbol{u} \\ n_d^{-1/2}\mathbf{1}'\boldsymbol{u} \\ n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{u} \end{bmatrix} \xrightarrow{d} \begin{bmatrix} N\left(\mathbf{0},\sigma_u^2\tilde{\boldsymbol{Q}}\right) \\ N\left(0,\sigma_u^2\right) \\ \mathrm{dlim}\left(n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{u}\right) \end{bmatrix}. \tag{C.2}$$

$\tilde{H}_0$ atvejis

Tegu galioja $\tilde{H}_0$. Tegu $\boldsymbol{\gamma}\in\Lambda$ yra toks, kad $\boldsymbol{f}\left(\gamma\right)=\boldsymbol{\beta}_{0,d}$. Parodysiu, kad $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$. Pažymėkime $\boldsymbol{f}_0:\Lambda\times\mathbb{R}^{d_0}\to\mathbb{R}^{d+1+d_0}$ tokią funkciją, kad $\boldsymbol{f}_0\left(\boldsymbol{\psi}_0\right)=\boldsymbol{P}_0\tilde{\boldsymbol{f}}\left(\boldsymbol{\psi}\right)$, kur $\boldsymbol{\psi}_0:=\left(\boldsymbol{\gamma}',\boldsymbol{\eta}_0'\right)'$ yra parametrai prie stacionarių modelio kintamųjų. Tegu $\boldsymbol{\psi}_1:=\left(\beta_d,\boldsymbol{\eta}_1'\right)'$ yra parametrai prie integtuotų kintamųjų. Tada (3.4) modelis, esant teisingai $\tilde{H}_0$, užrašomas taip:

$$\boldsymbol{y}=\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{f}_0\left(\boldsymbol{\psi}_0\right)+\mathbf{1}\alpha+\tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\psi}_1+\boldsymbol{u}. \tag{C.3}$$

Iš įvertinių $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ būtinosios sąlygos (3.7) paskutinių d_1+1 lygybių, padauginę jas iš n_d^{-2} ir pasinaudoję (C.3), gauname tokią lygybę, kurią tenkina įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\psi}}$:

$$n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\left(\boldsymbol{\psi}_1-\hat{\boldsymbol{\psi}}_1\right)=n_d^{-2}\left[-\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{u}+\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{V}}\left(\boldsymbol{f}_0(\hat{\boldsymbol{\psi}}_0)-\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{\psi}_0)\right)+\tilde{\boldsymbol{X}}'\mathbf{1}\left(\hat{\alpha}^{nls}-\alpha\right)\right]. \tag{C.4}$$

Kadangi $\tilde{\boldsymbol{X}}'\mathbf{1}=\boldsymbol{O}_p\left(n_d^{3/2}\right)$, $\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{u}=\boldsymbol{O}_p\left(n_d\right)$, $\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{O}_p\left(n_d\right)$ ir egzistuoja $\mathrm{plim}\hat{\boldsymbol{\psi}}$, tai dešinė (C.4) lygybės pusė pagal tikimybę artėja į $\mathbf{0}$. Perėjus prie ribos (C.4) abiejose pusėse, gauname:

$$\mathrm{dlim}\left(n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\right)\left(\boldsymbol{\psi}_1-\mathrm{plim}\hat{\boldsymbol{\psi}}_1\right)=\mathbf{0}.$$

Kadangi $\mathrm{dlim}\left(n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\right)$ nėra $\boldsymbol{o}_p(1)$, tai $\hat{\boldsymbol{\psi}}_1 \xrightarrow{p} \boldsymbol{\psi}_1$. Iš įvertinių $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ būtinosios sąlygos (3.7) pirmųjų $d+1+d_0$ lygybių, pasinaudoję (C.3), turime:

$$\begin{aligned} n_d^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}'\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}\left(\boldsymbol{f}_0\left(\boldsymbol{\psi}_0\right)-\boldsymbol{f}_0(\hat{\boldsymbol{\psi}}_0)\right) = n_d^{-1}\Big[&-\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}'\tilde{\boldsymbol{V}}'\boldsymbol{u}+\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}'\tilde{\boldsymbol{V}}'\mathbf{1}\left(\hat{\alpha}^{nls}-\alpha\right)+ \\ &+\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}'\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\left(\hat{\boldsymbol{\psi}}_1-\boldsymbol{\psi}_1\right)\Big]. \end{aligned} \tag{C.5}$$

Čia $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}$ yra matrica sudaryta iš matricos $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}$ pirmųjų $d+1+d_0$ eilučių ir pirmųjų $r+d_0$ stulpelių. Pasinaudoję prielaida N3, turime, kad $\exists\mathrm{plim}\hat{\alpha}^{nls}$ ir $\exists\mathrm{plim}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}$. Kadangi

$\boldsymbol{V}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{O}_p\big(n_d^{1/2}\big)$, $\boldsymbol{V}'\mathbf{1} = \boldsymbol{O}_p\big(n_d^{1/2}\big)$, $\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{O}_p\left(n_d\right)$ ir $\hat{\boldsymbol{\psi}}_1 \xrightarrow{p} \boldsymbol{\psi}_1$, perėję prie ribos (C.5) lygybėje pagal tikimybę, turime:

$$\operatorname{plim}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\boldsymbol{\gamma}}}\right)\tilde{\boldsymbol{Q}}\big(\boldsymbol{f}_0\left(\boldsymbol{\psi}_0\right) - \boldsymbol{f}_0(\operatorname{plim}\hat{\boldsymbol{\psi}}_0)\big) = \mathbf{0}.$$

Iš tų pačių argumentų kaip ir priede A išplaukia, kad $\hat{\boldsymbol{\psi}}_0 \xrightarrow{p} \boldsymbol{\psi}_0$, taigi ir $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$.

Skirtumą $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}\left(\hat{\boldsymbol{\gamma}}\right)$ išsireikškime per modelio kintamuosius. Kaip ir teiginio 2.2 įrodyme, pagal tikslios Teiloro eilutės pirmos eilės aproksimaciją taške $\boldsymbol{\gamma}$, į kurį pagal tikimybę artėja $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, turime tokią lygybę:

$$\boldsymbol{f}\left(\hat{\gamma}\right) = \boldsymbol{f}\left(\gamma\right) + \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma+}\big(\hat{\gamma} - \gamma\big). \tag{C.6}$$

(C.6) papildymas visiems modelio įvertiniams $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ yra:

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) = \tilde{\boldsymbol{f}}\left(\boldsymbol{\psi}\right) + \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}\big). \tag{C.7}$$

Kadangi $\boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{Z}}\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) + \boldsymbol{u}$, iš įvertinių $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ būtinosios sąlygos (3.7), pasinaudoję (C.7) gauname:

$$\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\big(\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{Z}}\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\big) = \boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{\psi} - \hat{\boldsymbol{\psi}}\big) + \boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{u} = \mathbf{0}. \tag{C.8}$$

Iš (C.7) ir (C.8):

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}}) - \tilde{\boldsymbol{f}}\left(\boldsymbol{\psi}\right) = \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{u}. \tag{C.9}$$

Tegu išrinkimo matrica $\boldsymbol{P}$ yra tokia, kad $\boldsymbol{f}\left(\gamma\right) = \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\psi})$. Kadangi $\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{f}}\left(\boldsymbol{\psi}\right) = \boldsymbol{\beta}_{0,d}$, tai iš (C.9) gauname:

$$\boldsymbol{f}\left(\hat{\gamma}\right) - \boldsymbol{\beta}_{0,d} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{u}. \tag{C.10}$$

MKM įvertiniams $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$ gauname:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} = \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{\Gamma}} &= \boldsymbol{P}\left(\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{P}\left(\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{u}\\ &= \boldsymbol{\beta}_{0,d} + \boldsymbol{P}\left(\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{u}.\end{aligned} \tag{C.11}$$

Iš (C.10) ir (C.11) turime tokį skirtumo $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}\left(\hat{\gamma}\right)$ pavidalą:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}\left(\hat{\gamma}\right) = \boldsymbol{P}\left[\big(\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\big)^{-1} - \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\right]\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{u}. \tag{C.12}$$

Mums reikia rasti $\sqrt{n_d}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big)$ asimptotinį pasiskirstymą. Kadangi $\sqrt{n_d}\boldsymbol{I}_{d+1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{L}$, iš (C.12) turime:

$$\sqrt{n_d}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big) = \boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{u}, \tag{C.13}$$

kur
$$\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}} := \boldsymbol{L}\left[\big(\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\big)^{-1} - \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\right]\boldsymbol{L}. \tag{C.14}$$
Kaip matome, šiek tiek kitaip nei priede A apibrėžus matricas $\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{L}$ ir $\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}}$, išraiška (C.13) sutampa su (A.23).

Rasime atsitiktinės matricos $\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}}$ ribą pagal tikimybę. Kaip ir teiginio 2.2 įrodyme, naudojantis dėl $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}$ blokinės diagonalinės struktūros galiojančiu normavimo matricų „perkėlimu”, gauname:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}} &= \boldsymbol{L}\big(\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\big)^{-1}\boldsymbol{L} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}\\ &= \big(\boldsymbol{L}^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{L}^{-1}\big)^{-1} - \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}.\end{aligned} \tag{C.15}$$

Iš matricos $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ išdėstymo (C.1) turime:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{L}^{-1} &= \begin{bmatrix} n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}} & n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\boldsymbol{1} & n_d^{-3/2}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\\ n_d^{-1}\boldsymbol{1}'\tilde{\boldsymbol{V}} & 1 & n_d^{-3/2}\boldsymbol{1}'\tilde{\boldsymbol{X}}\\ n_d^{-3/2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{V}} & n_d^{-3/2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{1} & n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\end{bmatrix} \xrightarrow{d}\\ &\xrightarrow{d} \begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{Q}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 1 & \operatorname{dlim}\big(n_d^{-3/2}\boldsymbol{1}'\tilde{\boldsymbol{X}}\big)\\ \boldsymbol{0} & \operatorname{dlim}\big(n_d^{-3/2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{1}\big) & \operatorname{dlim}\big(n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\big)\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{C.16}$$

kur, pereinant prie ribos, pasinaudota rastais procesų konvergavimo greičiais. Atitinkamai (C.16) matricų išdėstymui, suskaidykime Jakobianą $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}$ taip:

$$\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{d_1+1}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}} := \begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{d_0}\end{bmatrix}. \tag{C.17}$$

Tada, remiantis tuo, kad $\hat{\boldsymbol{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\gamma}+ \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}$ iš vidutinės reikšmės teoremos, gauname:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\gamma+} &= \begin{bmatrix} n_d^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}} & n_d^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{V}}'\boldsymbol{1} & n_d^{-3/2}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\\ n_d^{-1}\boldsymbol{1}'\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}} & 1 & n_d^{-3/2}\boldsymbol{1}'\tilde{\boldsymbol{X}}\\ n_d^{-3/2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}} & n_d^{-3/2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{1} & n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\end{bmatrix}\\ &\xrightarrow{d} \begin{bmatrix}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 1 & \operatorname{dlim}\big(n_d^{-3/2}\boldsymbol{1}'\tilde{\boldsymbol{X}}\big)\\ \boldsymbol{0} & \operatorname{dlim}\big(n_d^{-3/2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{1}\big) & \operatorname{dlim}\big(n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\big)\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{C.18}$$

Prielaida N5 užtikrina (C.16) ir (C.18) ribose gautų matricų apatinio dešiniojo bloko apverčiamumą. Taigi iš (C.15), (C.16),(C.17), ir (C.18) gauname:

$$\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}} \xrightarrow{p} \begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{Q}}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma} & 0 & 0\\ \boldsymbol{0} & 0 & 0\\ \boldsymbol{0} & 0 & 0\end{bmatrix}. \tag{C.19}$$

Kadangi matrica $\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}}$ pagal pasiskirstymą konverguoja į neatsitiktinę matricą, tai šiuo atveju konvergavimas pagal pasiskirstymą taip pat yra konvergavimas pagal tikimybę.

Radome atsitiktinio vektoriaus $\boldsymbol{L}^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{u}$ asimptotinį pasiskirstymą ir atsitiktinės matricos $\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}}$ ribą pagal tikimybę. Dabar gaukime MKM ir NMKM įvertinių, esančių prie stacionarių kintamųjų, skirtumo asimptotinį pasiskirstymą. Pažymėkime $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0 := \big(\hat{\boldsymbol{\beta}}'_{0,d}, \hat{\boldsymbol{\eta}}'_0\big)$. Kadangi $\sqrt{n_d}\big(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0 - \boldsymbol{f}_0(\hat{\boldsymbol{\psi}}_0)\big) = \boldsymbol{P}_0\boldsymbol{L}\big(\hat{\boldsymbol{\Gamma}} - \tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\big)$, tai $\sqrt{n_d}\big(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0 - \boldsymbol{f}_0(\hat{\boldsymbol{\psi}}_0)\big) = \boldsymbol{P}_0\boldsymbol{B}_{\hat{\gamma}}\boldsymbol{L}^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\boldsymbol{u}$. Iš (C.2) ir (C.19) gauname:

$$\sqrt{n_d}\big(\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_0 - \boldsymbol{f}_0(\hat{\boldsymbol{\psi}}_0)\big) \xrightarrow{d} \left[\tilde{\boldsymbol{Q}}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\right] N\left(\boldsymbol{0}, \sigma_u^2\tilde{\boldsymbol{Q}}\right) = N\left(\boldsymbol{0}, \sigma_u^2\boldsymbol{\Sigma}_0\right),$$

kur

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_0 &= \left[\tilde{\boldsymbol{Q}}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\right] \tilde{\boldsymbol{Q}} \left[\tilde{\boldsymbol{Q}}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\right]' \\
&= \tilde{\boldsymbol{Q}}^{-1} - 2\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma} + \\
&+ \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big)^{-1}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big)\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma} \\
&= \tilde{\boldsymbol{Q}}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}.
\end{aligned} \tag{C.20}$$

$\sqrt{n_d}\big(\beta_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)$ asimptotinė kovariacijų matrica yra (C.20) gautos asimptotinės kovariacijų matricos pirmosios $d+1$ eilutės ir stulpeliai. Atitinkamai matricą $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ suskaidykime į dalis:

$$\tilde{\boldsymbol{Q}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12} \\ \boldsymbol{Q}'_{12} & \boldsymbol{Q}_{22}. \end{bmatrix}$$

Jei $\boldsymbol{A}^{-1}$ pažymėsime viršutinį kairįjį matricos $\tilde{\boldsymbol{Q}}^{-1}$ $(d+1)\times(d+1)$ bloką, tai, remiantis [10] taisykle 2b (sk. 9.11.3, p. 148), gauname:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \big(\boldsymbol{Q}_{11} - \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}'_{12}\big)^{-1}. \tag{C.21}$$

Kadangi $\boldsymbol{Q}$ yra teigiamai apibrėžta ir simetrinė, tai priede B pagrįsta, kad $\boldsymbol{Q}_{22}$ ir $\boldsymbol{Q}_{11} - \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}'_{12}$ yra teigiamai apibrėžtos, taigi turi savo atvirkštines matricas. Matrica $\boldsymbol{A}^{-1}$, kaip teigiamai apibrėžtos ir simetrinės matricos $\tilde{\boldsymbol{Q}}^{-1}$ blokas, taip pat yra teigiamai apibrėžta. Matrica $\boldsymbol{A}^{-1}$ yra simetrinė, nes $\boldsymbol{A} := (\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$ yra simetrinė.

Pasinaudodami $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\gamma}$ išskaidymu (C.17), gauname, kad $\big(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\gamma}\big)^{-1}$ yra tokia blokinė matrica:

$$\big(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\gamma}\big)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}_{11}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma} & \boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}_{12} \\ \boldsymbol{Q}'_{12}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma} & \boldsymbol{Q}_{22} \end{bmatrix}\right)^{-1}. \tag{C.22}$$

Pagal tą pačią [10] taisyklę 2b, viršutinis kairysis $(d+1)\times(d+1)$ šios matricos blokas $\boldsymbol{A}_D$ yra:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_D &= \big(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}_{11}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma} - \boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}'_{12}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\big)^{-1} = \\
&= \big(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{Q}_{11} - \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}'_{12}\right)\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\big)^{-1} = \big(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\big)^{-1}.
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Iš (C.23) ir (C.17), viršutinis kairysis matricos $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}}_0,\gamma}$ blokas yra $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}$.

Išsivedę tokias lygybes ir pasinaudoję (C.20) bei tuom, kad $\hat{\sigma}_u^2 \xrightarrow{p} \sigma_u^2$,[24] gauname ieškomą vektoriaus $\sqrt{n_d}/\hat{\sigma}_u^2\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)$ asimptotinį skirstinį:

$$\sqrt{n_d}/\hat{\sigma}_u^2\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big) \xrightarrow{d} N\left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\right). \tag{C.24}$$

Kadangi $\boldsymbol{A}$ yra teigiamai apibrėžta, pagal Cholesky dekompoziciją $\boldsymbol{A}$ galima išskaidyti: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{A}}$. Iš (3.8) apibrėžimo imkime $\hat{\boldsymbol{A}}$. Pastebėkime, kad $\hat{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{A}$, nes:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{A}} &= n_d^{-1}\big(\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}'\Xi_0\left(\Xi_0'\Xi_0\right)^{-1}\Xi_0'\boldsymbol{V}\big)\\
&= n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} - n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_0\left(n_d^{-1}\Xi_0'\Xi_0\right)^{-1}n_d^{-1}\Xi_0'\boldsymbol{V} \xrightarrow{p} \boldsymbol{Q}_{11} - \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}'_{12} = \boldsymbol{A}.
\end{aligned} \tag{C.25}$$

Iš (C.25) ir Cholesky dekompozicijos tolydumo, $\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}$. Todėl iš (C.24):

$$\boldsymbol{h}_3 = \sqrt{n_d}/\hat{\sigma}_u^2\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big) \xrightarrow{d} N\left(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_3}\right), \tag{C.26}$$

kur

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_3} &= \boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\left(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}\\
&= \boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}^{'-1}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}} - \boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}\\
&= \boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}.
\end{aligned}$$

Nesunku pastebėti, kad $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_3}$ ir $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}$ yra idempotentinės, taigi jų apibendrintos atvirkštinės matricos lygios joms pačioms. Be to, $\operatorname{rank}(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_3}\right) = d+1-r$. Kadangi $\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}$ ir $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma}$, tai, remiantis tolydaus atvaizdžio teorema, $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{h}_3}$. Dabar galima pasiremti [2] teorema 1, iš kur ir gauname, kad

$$T_3 = \boldsymbol{h}'_3\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}\boldsymbol{h}_3 \xrightarrow{d} \chi^2\left(d+1-r\right).$$

$\tilde{H}_1$ atvejis

Likusioje įrodymo dalyje tegu galioja $\tilde{H}_1$. Nagrinėkime atsitiktinį dydį $\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1}T_3$.

$$\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1}T_3 = \hat{\sigma}_u n_d^{-1/2}\boldsymbol{h}'_3\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}\boldsymbol{h}_3\hat{\sigma}_u n_d^{-1/2} = \big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big)'\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\big). \tag{C.27}$$

Pažymėkime $\boldsymbol{\gamma}_0 := \operatorname{plim}\hat{\boldsymbol{\gamma}}$. Remiantis prielaida N3, $\boldsymbol{\gamma}_0$ egzistuoja. Kadangi $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\beta}_{0,d}$, tai perėjus prie ribos abejose (C.27) pusėse gauname:

$$\operatorname{plim}\left(\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1}T_3\right) = \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\operatorname{plim}\big(\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\big)\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big). \tag{C.28}$$

[24]Kaip ir priede A, iš $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$ suderinamumo išplaukia, kad $\hat{\sigma}_u^2 \xrightarrow{p} \sigma_u^2$.

Čia[25] pasinaudota tolydaus atvaizdžio teorema. Kadangi $\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}$, tai iš tolydaus atvaizdžio teoremos išplaukia:

$$\operatorname{plim}\big(\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\big) = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}\operatorname{plim}\big(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}\big)\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{A}}.$$

Kadangi $\boldsymbol{\gamma} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\gamma}_0$ ir $\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}} \xrightarrow{p} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}$, tai

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3} &= \boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\big(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}\\ &\xrightarrow{p} \boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\big(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}. \end{aligned} \tag{C.29}$$

Pažymėkime

$$\boldsymbol{\Delta} := \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\left(\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\right)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\boldsymbol{f},\gamma_0}.$$

Iš (C.28) ir (C.29) gauname:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1} T_3 &\xrightarrow{p} \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\gamma_0)\big)'\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{I}_{d+1} - \boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{F}'_{\boldsymbol{A}}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\gamma_0)\big) \qquad \text{(C.30)}\\ &= \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\gamma_0)\big)'\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\gamma_0)\big) - \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\gamma_0)\big)'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\gamma_0)\big).\end{aligned}$$

Pastebėkime, kad (C.30) rezultatas yra analogiškas priedo A rezultataui (A.50), jei vietoj $\boldsymbol{Q}$ įsistatytume $\boldsymbol{A}$. Galima tikėtis, kad ir šiuo atveju $\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d}-\boldsymbol{f}(\gamma_0)\big)'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d}-\boldsymbol{f}(\gamma_0)\big) = 0$, kas toliau ir bus parodyta. Iš NMKM įvertinių būtinosios sąlygos (3.7) lygybių įvertiniams $\hat{\boldsymbol{\psi}}_1 = \big(\hat{\beta}_d^{nls}, \hat{\boldsymbol{\eta}}_1'^{nls}\big)'$:

$$\tilde{\boldsymbol{X}}'\big(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{f}\left(\hat{\gamma}\right) - \Xi_0\hat{\boldsymbol{\eta}}_0^{nls} - \boldsymbol{1}\hat{\alpha}^{nls} - \tilde{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{\psi}}_1\big) = \boldsymbol{0}, \tag{C.31}$$

Į (C.31) įsistatę $\boldsymbol{y}$ išraišką $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{\beta}_{0,d} + \Xi_0\boldsymbol{\eta}_0 + \boldsymbol{1}\alpha + \tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\psi}_1 + \boldsymbol{u}$, turime tokią lygybę:

$$\begin{aligned}n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\big(\hat{\boldsymbol{\psi}}_1 - \boldsymbol{\psi}_1\big) &= n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{V}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big) + n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\Xi_0\big(\boldsymbol{\eta}_0 - \hat{\boldsymbol{\eta}}_0^{nls}\big)\\ &\quad + n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{1}\big(\alpha - \hat{\alpha}^{nls}\big) + n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{u}.\end{aligned} \tag{C.32}$$

Dešinioji (C.32) lygybės pusė pagal tikimybę artėja į nulį. Kadangi $n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}$ yra $\boldsymbol{O}_p\left(1\right)$ ir nėra $\boldsymbol{o}_p(1)$, tai, kad (C.32) galiotų ir riboje, būtina, kad $\hat{\boldsymbol{\psi}}_1 \xrightarrow{p} \boldsymbol{\psi}_1$. Taigi įvertiniai prie integruotų kintamųjų yra suderinti ir $\tilde{H}_1$ atveju. Iš NMKM įvertinių būtinosios sąlygos (3.7) tų eilučių, kurios atitinka įvertininius $\hat{\boldsymbol{\eta}}_0^{nls}$ panašiai išsivedame tokią lygybę:

$$\begin{aligned}n_d^{-1}\Xi_0'\Xi_0\big(\hat{\boldsymbol{\eta}}_0^{nls} - \boldsymbol{\eta}_0\big) &= n_d^{-1}\Xi_0'\boldsymbol{V}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big) + n_d^{-1}\Xi_0'\boldsymbol{1}\big(\alpha - \hat{\alpha}^{nls}\big) +\\ &\quad + n_d^{-1}\Xi_0'\tilde{\boldsymbol{X}}\big(\boldsymbol{\psi}_1 - \hat{\boldsymbol{\psi}}_1\big) + n_d^{-1}\Xi_0'\boldsymbol{u}.\end{aligned} \tag{C.33}$$

Kadangi $\hat{\boldsymbol{\psi}}_1 \xrightarrow{p} \boldsymbol{\psi}_1$, $\Xi_0'\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{O}_p(n_d)$, $\Xi_0'\boldsymbol{1} = \boldsymbol{O}_p\big(n_d^{1/2}\big)$ ir $\Xi_0'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{O}_p\big(n_d^{1/2}\big)$, tai dešinioji (C.33)

[25] Čia reikia pakomentuoti. Teiginio 2.2 įrodyme buvo eita ilgesniu keliu ir ieškoma $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}\left(\hat{\gamma}\right)$ išraiškos per modelio kintamuosius ir galų gale gautas rezultatas, kuris galėjo būti gautas žymiai greičiau. Nors pradinis šio įrodymo variantas buvo parašytas analogiškai kaip ir 2.2 teiginio $\tilde{H}_1$ dalis, pastebėjus galimą trumpesnį variantą, jis ir pasirinktas. Tas pats nebuvo padaryta teiginio 2.2 įrodyme, nes tada išsitrintų rezultatas, kad T_1 išraiškoje yra $O_p(n_d^{1/2})$ narys. Šis faktas reikalingas 4 skyriuje, komentuojant empirinius rezultatus.

lygybės pusė pagal tikimybę artėja į $\boldsymbol{Q}_{12}'\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)$. Kadangi $n_d^{-1}\Xi_0'\Xi_0 \xrightarrow{p} \boldsymbol{Q}_{22}$, tai:

$$\text{plim}\left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_0^{nls}\right) - \boldsymbol{\eta}_0 = \boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}_{12}'\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big). \tag{C.34}$$

Taigi papildomų stacionarių kintamųjų įvertiniai $\hat{\boldsymbol{\eta}}_0^{nls}$ neteisingos apribojimo funkcijos atveju yra nesuderinti, jei $\boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}_{12}'\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) \neq \boldsymbol{0}$. Iš NMKM įvertinių būtinosios sąlygos (3.7) pirmųjų $d+1$ lygybių:

$$\begin{aligned} n_d^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V}\big(\boldsymbol{f}(\hat{\gamma}) - \boldsymbol{\beta}_{0,d}\big) &= n_d^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{V}'\Xi_0\big(\boldsymbol{\eta}_0 - \hat{\boldsymbol{\eta}}_0^{nls}\big) + \\ + n_d^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{V}'\boldsymbol{1}\big(\alpha - \hat{\alpha}^{nls}\big) &+ n_d^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{V}'\Xi_1\big(\boldsymbol{\psi}_1 - \hat{\boldsymbol{\psi}}_1^{nls}\big) + n_d^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}'\boldsymbol{V}'\boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{C.35}$$

Abiejose (C.35) pusėse perėję prie ribos pagal tikimybę ir pasinaudoję (C.34), gauname:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}'\boldsymbol{Q}_{11}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) &= \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}'\boldsymbol{Q}_{12}\big(\text{plim}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_0^{nls}) - \boldsymbol{\eta}_0\big) \\ &= \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}'\boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}_{12}'\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big). \end{aligned} \tag{C.36}$$

Priminsime, kad $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_{11} - \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}_{12}'$. Iš (C.36) gauname sąlygą, kurią turi tenkinti $\boldsymbol{\gamma}_0$:

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}'\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) = \boldsymbol{0}.$$

Kadangi $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}\right)^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\gamma_0}'$, tai

$$\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big) = 0.$$

Todėl iš (C.30) gauname:

$$\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1} T_3 \xrightarrow{p} \big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big)'\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\big).$$

Kadangi $\boldsymbol{A}$ yra teigiamai apibrėžta, tai $\hat{\sigma}_u^2 n_d^{-1} T_3$ pagal tikimybę artėja į teigiamą skaičių. Dėl to $T_3 \xrightarrow{p} \infty$, kai $n_d \to \infty$.

□

D Teiginio 3.2 įrodymas

Iš statistikos T_4 apibrėžimo (3.12) gauname:

$$T_4 = n_d/\hat{\sigma}_u^2\Big(\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}', \hat{\boldsymbol{\eta}}_0'\big)' - \boldsymbol{f}_0\big(\hat{\boldsymbol{\psi}}_0\big)\Big)'\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_4}\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}'\Big(\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d}', \hat{\boldsymbol{\eta}}_0'\big)' - \boldsymbol{f}_0\big(\hat{\boldsymbol{\psi}}_0\big)\Big).$$

Kadangi $\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}' = n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}$, tai iš $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_4}$ apibrėžimo (3.11), $\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_4}\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}'$ yra dviejų matricų skirtumas:

$$\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_4}\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}' = n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}} - n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}' n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}\right)^{-1}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}' n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}. \tag{D.1}$$

Pagal išdėstymą $\tilde{\boldsymbol{V}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V} & \Xi_0 \end{bmatrix}$, išskaidykime matricas $n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}$ ir $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}$:

$$n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}} = \begin{bmatrix} n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} & n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_0 \\ n_d^{-1}\Xi_0'\boldsymbol{V} & n_d^{-1}\Xi_0'\Xi_0 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_{11} & \boldsymbol{V}_{12} \\ \boldsymbol{V}_{12}' & \boldsymbol{V}_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{d_0} \end{bmatrix},$$

kur $\boldsymbol{D} := \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}$.

Parodysime, kad matricos $\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_4}\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}'$ visi blokai, išskyrus viršutinį kairįjį, lygūs nuliui. Matrica $\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}' n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}\right)^{-1}$ susideda iš keturių blokų:

$$\left(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}' n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12} \\ \boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D} & \boldsymbol{V}_{22} \end{bmatrix}^{-1} =: \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{12}' & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Iš [10] atvirkštinės blokinės matricos skaičiavimo taisyklės 2b (sk. 9.11.3, p. 148) gauname:

$$\boldsymbol{A}_{11} = \left(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D}\right)^{-1}, \tag{D.2}$$
$$\boldsymbol{A}_{12} = -\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}, \tag{D.3}$$
$$\boldsymbol{A}_{22} = \boldsymbol{V}_{22}^{-1} + \boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}. \tag{D.4}$$

Kadangi $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}' n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{V}}'\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}$ yra simetrinė ir teigiamai apibrėžta, tai, kaip pagrįsta priede B, matricos $\boldsymbol{V}_{22}$ ir $\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D}$ turi atvirkštines matricas. Lygybėje (D.1) gauto matricų skirtumo antrąją matricą pažymėkime $\boldsymbol{C}$ ir išskaidykime ją:

$$\boldsymbol{C} =: \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{C}_{12}' & \boldsymbol{C}_{22} \end{bmatrix}.$$

Reikia parodyti, kad $\boldsymbol{C}_{12} = \boldsymbol{V}_{12}$ ir $\boldsymbol{C}_{22} = \boldsymbol{V}_{22}$.

Pradėkime nuo lygybės $\boldsymbol{C}_{22} = \boldsymbol{V}_{22}$ įrodymo. Po paprastų blokinių matricų sandaugos veiksmų, pasinaudojant (D.2), (D.3) ir (D.4), gauta, kad $\boldsymbol{C}_{22} = \boldsymbol{C}_{22,1} + \boldsymbol{C}_{22,2} + \boldsymbol{C}_{22,3} + \boldsymbol{C}_{22,4}$, kur

$$\boldsymbol{C}_{22,1} := \boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}, \quad \boldsymbol{C}_{22,2} := -\boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12},$$
$$\boldsymbol{C}_{22,3} := -\boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}, \quad \boldsymbol{C}_{22,4} := \boldsymbol{V}_{22} + \boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}.$$

Galima matyti, kad $\boldsymbol{C}_{22} = \boldsymbol{V}_{22}$.

Parodykime, kad $\boldsymbol{C}_{12} = \boldsymbol{V}_{12}$. Po paprastų blokinių matricų sandaugos veiksmų gauta, kad $\boldsymbol{C}_{12} = \boldsymbol{C}_{12,1} + \boldsymbol{C}_{12,2} + \boldsymbol{C}_{12,3} + \boldsymbol{C}_{12,4}$, kur

$$\boldsymbol{C}_{12,1} := \boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}, \quad \boldsymbol{C}_{12,2} := -\boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12},$$
$$\boldsymbol{C}_{12,3} := -\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}, \quad \boldsymbol{C}_{12,4} := \boldsymbol{V}_{12} + \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}.$$

$\boldsymbol{C}_{12,1} + \boldsymbol{C}_{12,3} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{C}_{12,2} + \boldsymbol{C}_{12,4} = \boldsymbol{V}_{12}$. Taigi $\boldsymbol{C}_{12} = \boldsymbol{V}_{12}$.

Kadangi $\boldsymbol{C}_{22} = \boldsymbol{V}_{22}$ ir $\boldsymbol{C}_{12} = \boldsymbol{V}_{12}$, tai iš (D.1) išplaukia, kad matricos $\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_4}\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}'$ visi nariai, išskyrus viršutinį kairįjį bloką, lygūs nuliui. Tą nesunku patikrinti empiriškai. Vadinasi, iš tikrųjų įvertiniai prie papildomų stacionarių kintamųjų į statistiką T_4 neįeina, kas nėra akivaizdu ją apibrėžiant. Taigi,

$$T_4 = n_d/\hat{\sigma}_u^2\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big)'\big(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{C}_{11}\big)\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big). \tag{D.5}$$

Iš statistikos T_3 apibrėžimo (3.10) turime:

$$T_3 = n_d/\hat{\sigma}_u^2\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big)'\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big). \tag{D.6}$$

Taigi reikia parodyti, kad $\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{C}_{11}$.

Raskime, kam lygus matricos $\boldsymbol{C}$ viršutinis kairysis blokas $\boldsymbol{C}_{11}$. Po keleto algebrinių veiksmų gauta, kad $\boldsymbol{C}_{11} = \boldsymbol{C}_{11,1} + \boldsymbol{C}_{11,2} + \boldsymbol{C}_{11,3} + \boldsymbol{C}_{11,4}$, kur

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_{11,1} &:= \boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{11},\\
\boldsymbol{C}_{11,2} &:= -\boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{11},\\
\boldsymbol{C}_{11,3} &:= -\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}',\\
\boldsymbol{C}_{11,4} &:= \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}' + \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'.
\end{aligned}$$

Pažymėkime $\boldsymbol{\Delta} := \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'$. Iš $\hat{\boldsymbol{A}}$ apibrėžimo (3.8), $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'$. Tada

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_{11} &= \left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\right)\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{V}_{11} - \left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\right)\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}' + \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\\
&= \left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\right)\boldsymbol{\Delta}\left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\right) + \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\\
&= \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Delta}\hat{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'.
\end{aligned} \tag{D.7}$$

Taigi,

$$\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{C}_{11} = \hat{\boldsymbol{A}} - \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Delta}\hat{\boldsymbol{A}}. \tag{D.8}$$

Liko parodyti, kad $\boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}} = \hat{\boldsymbol{A}} - \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Delta}\hat{\boldsymbol{A}}$. Pastebėkime, kad iš (D.2):

$$\boldsymbol{A}_{11} = \Big(\boldsymbol{D}'\left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\right)\boldsymbol{D}\Big)^{-1} = \big(\boldsymbol{D}'\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}\big)^{-1}.$$

Todėl $\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{D}'\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'$. Taigi

$$\hat{\boldsymbol{A}} - \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{\Delta}\hat{\boldsymbol{A}} = \hat{\boldsymbol{A}} - \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{D}'\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{F}_{\hat{\boldsymbol{A}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}\boldsymbol{F}'_{\hat{\boldsymbol{A}}}, \tag{D.9}$$

kur paskutinė lygybė gauta pasinaudojant $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_3}$ apibrėžimu (3.9). Iš (D.5), (D.6), (D.8) ir (D.9) lygybių gauname, kad $T_4 = T_3$.

□

E Teiginio 3.3 įrodymas

Šis įrodymas panašus į teiginio 3.2 įrodymą. Lygiai taip pat parodoma, kad matrica, iš kurios padauginami įverčiai, susideda iš keturių blokų, iš kurių trys yra nulinės matricos. Tačiau, skirtingai nei statistikos T_4 atveju, $T_5 \neq T_3$.

$$T_5 = n_d/\hat{\sigma}_u^2\big(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\big)'\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_5}\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}\big(\hat{\mathbf{\Gamma}} - \tilde{\boldsymbol{f}}(\hat{\boldsymbol{\psi}})\big).$$

Matrica $\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_5}\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}$ yra tokia:

$$\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_5}\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{Z}}} = n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}} - n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\big(\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}. \tag{E.1}$$

Išskaidykime matricą $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ taip: $\tilde{\boldsymbol{Z}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{V} & \Xi_{0,1}\end{bmatrix}$, kur $\Xi_{0,1} := \begin{bmatrix}\Xi_0 & \mathbf{1} & \boldsymbol{X} & \Xi_1\end{bmatrix}$ yra visi likę duomenys be $\boldsymbol{V}$. Pagal šį išskaidymą matricas $n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}}$ ir $\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_5}\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}$ sudaro keturi blokai:

$$n_d^{-1}\tilde{\boldsymbol{Z}}'\tilde{\boldsymbol{Z}} = \begin{bmatrix} n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} & n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_{0,1} \\ n_d^{-1}\Xi'_{0,1}\boldsymbol{V} & n_d^{-1}\Xi'_{0,1}\Xi_{0,1}\end{bmatrix} =: \begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_{11} & \boldsymbol{V}_{12} \\ \boldsymbol{V}'_{12} & \boldsymbol{V}_{22}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{Z}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_5}\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{Z}}} =: \begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}'_{12} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix}. \tag{E.2}$$

Jakobianas $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}$ pagal savo apibrėžimą (3.5) yra:

$$\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{d_0+d_1+2}\end{bmatrix},$$

kur $\boldsymbol{D} := \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f},\hat{\gamma}}$. Čia reikia pastebėti, kad teiginio 3.2 įrodyme priede D lygiai taip pat išskaidyta matrica $\boldsymbol{F}_{\tilde{\boldsymbol{V}}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{h}_4}\boldsymbol{F}'_{\tilde{\boldsymbol{V}}}$ ir gauta, kad visi jos blokai, išskyrus kairįjį viršutinį, lygūs nuliui. Kadangi ir $\boldsymbol{D}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\hat{\gamma}}$ yra tos pačios struktūros kaip ir $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{f}_0,\hat{\gamma}}$, tai, nenorint perrašinėti to paties, galima pasiremti priede D pateiktu išvedimu ir teigti, kad $\boldsymbol{G}_{12} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{G}_{22} = \mathbf{0}$. Taigi,

$$T_5 = n_d/\hat{\sigma}_u^2\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big)'\boldsymbol{G}_{11}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big). \tag{E.3}$$

Raskime, kam lygi matrica $\boldsymbol{G}_{11}$. Skirtumo (E.1) antrąją matricą pažymėjus $\boldsymbol{C}$, jos kairysis viršutinis blokas $\boldsymbol{C}_{11}$, pagal (D.7) antrąją lygybę, yra:

$$\boldsymbol{C}_{11} = \left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}'_{12}\right)\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}'_{12}\right) + \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}'_{12}, \tag{E.4}$$

kur iš (D.2):

$$\boldsymbol{A}_{11} = \Big(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{11}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{D}'\boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}'_{12}\boldsymbol{D}\Big)^{-1} = \Big(\boldsymbol{D}'\left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}'_{12}\right)^{-1}\boldsymbol{D}\Big)^{-1}. \tag{E.5}$$

Iš (E.1) ir (E.4) gauname, kad

$$\boldsymbol{G}_{11} = \left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}'_{12}\right) - \left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}'_{12}\right)\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{D}'\left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}'_{12}\right). \tag{E.6}$$

Statistika T_3 iš (D.6) ir (D.9) yra:

$$T_3 = n_d/\hat{\sigma}_u^2\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big)'\boldsymbol{H}_{11}\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big), \text{ kur} \tag{E.7}$$
$$\boldsymbol{H}_{11} := \hat{\boldsymbol{A}} - \hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}\big(\boldsymbol{D}'\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{D}\big)^{-1}\boldsymbol{D}'\hat{\boldsymbol{A}}. \tag{E.8}$$

Taigi iš (E.3) ir (E.7), $T_5 - T_3$ yra:

$$T_5 - T_3 = n_d/\hat{\sigma}_u^2\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big)'\big(\boldsymbol{G}_{11} - \boldsymbol{H}_{11}\big)\big(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\gamma})\big). \tag{E.9}$$

Parodysime, kad $\boldsymbol{G}_{11} - \boldsymbol{H}_{11} \xrightarrow{p} \boldsymbol{0}$. Iš (E.5), (E.6) ir (E.8) galima matyti, kad užtenka parodyti, kad $\hat{\boldsymbol{A}} - \big(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\big) \xrightarrow{p} \boldsymbol{0}$. Iš $\boldsymbol{V}_{11}$, $\boldsymbol{V}_{12}$ ir $\boldsymbol{V}_{22}$ apibrėžimo (E.2) bei $\hat{\boldsymbol{A}}$ apibrėžimo (3.8):

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{A}} - \big(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\big) &= n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_{0,1}\left(n_d^{-1}\Xi_{0,1}'\Xi_{0,1}\right)^{-1}n_d^{-1}\Xi_{0,1}'\boldsymbol{V} - \\ &- n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_0\left(n_d^{-1}\Xi_0'\Xi_0\right)^{-1}n_d^{-1}\Xi_0'\boldsymbol{V}.\end{aligned} \tag{E.10}$$

Apibrėžkime tokią normavimo matricą $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{L} := \begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{d_0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & 1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & n_d^{1/2}\boldsymbol{I}_{d_1+1}\end{bmatrix}.$$

Tada (E.10) skirtumo pirmas narys yra:

$$\begin{aligned}&n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_{0,1}\left(n_d^{-1}\Xi_{0,1}'\Xi_{0,1}\right)^{-1}n_d^{-1}\Xi_{0,1}'\boldsymbol{V} = \\ &= n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_{0,1}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{L}\left(n_d^{-1}\Xi_{0,1}'\Xi_{0,1}\right)^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^{-1}n_d^{-1}\Xi_{0,1}'\boldsymbol{V} \\ &= n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_{0,1}\boldsymbol{L}^{-1}\left(\boldsymbol{L}^{-1}n_d^{-1}\Xi_{0,1}'\Xi_{0,1}\boldsymbol{L}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{L}^{-1}n_d^{-1}\Xi_{0,1}'\boldsymbol{V}.\end{aligned} \tag{E.11}$$

$n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_{0,1}\boldsymbol{L}^{-1}$ išsiskaido į tris dalis:

$$n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_{0,1}\boldsymbol{L}^{-1} = \begin{bmatrix}n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_0 & n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{1} & n_d^{-3/2}\boldsymbol{V}'\tilde{\boldsymbol{X}}\end{bmatrix} \xrightarrow{p} \begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{12} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}. \tag{E.12}$$

Čia pasinaudota teiginio 3.1 įrodyme gautais rezultatais, kad $\boldsymbol{V}'\boldsymbol{1} = \boldsymbol{O}_p\big(n_d^{1/2}\big)$, $\boldsymbol{V}'\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{O}_p(n_d)$ ir pažymėjimais

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{Q}_{12}' & \boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix} := \operatorname{plim}\begin{bmatrix}n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\boldsymbol{V} & n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_0\\ n_d^{-1}\Xi_0'\boldsymbol{V} & n_d^{-1}\Xi_0'\Xi_0\end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{X}} := \begin{bmatrix}\boldsymbol{X} & \Xi_1\end{bmatrix}.$$

Matricai $\left(\boldsymbol{L}^{-1} n_d^{-1} \Xi_{0,1}' \Xi_{0,1} \boldsymbol{L}^{-1}\right)^{-1}$ gauname:

$$\left(\boldsymbol{L}^{-1} n_d^{-1} \Xi_{0,1}' \Xi_{0,1} \boldsymbol{L}^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} n_d^{-1}\Xi_0'\Xi_0 & n_d^{-1}\Xi_0'\mathbf{1} & n_d^{-3/2}\Xi_0'\tilde{\boldsymbol{X}} \\ n_d^{-1}\mathbf{1}'\Xi_0 & 1 & n_d^{-3/2}\mathbf{1}'\tilde{\boldsymbol{X}} \\ n_d^{-3/2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\Xi_0 & n_d^{-3/2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\mathbf{1} & n_d^{-2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}} \end{bmatrix}^{-1} \xrightarrow{p}$$

$$\xrightarrow{p} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{22}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 1 & \operatorname{dlim}\left(n_d^{-3/2}\mathbf{1}'\tilde{\boldsymbol{X}}\right) \\ \operatorname{dlim}\left(n_d^{-3/2}\tilde{\boldsymbol{X}}'\mathbf{1}\right) & \operatorname{dlim}\left(\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}}\right) \end{bmatrix}^{-1}} \\ \mathbf{0} & & \end{bmatrix}. \tag{E.13}$$

Čia pasinaudota tuom, kad $\tilde{\boldsymbol{X}}'\tilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{O}_p(n_d^2)$, $\tilde{\boldsymbol{X}}'\mathbf{1} = \boldsymbol{O}_p\left(n_d^{3/2}\right)$. Kaip pagrįsta priede C, iš prielaidų N4 ir N5 išplaukia, kad (E.13) riboje visos atvirkštinės matricos egzistuoja. Taigi iš (E.11), (E.12) ir (E.13) gauname, kad

$$n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_{0,1}\left(n_d^{-1}\Xi_{0,1}'\Xi_{0,1}\right)^{-1} n_d^{-1}\Xi_{0,1}'\boldsymbol{V} \xrightarrow{p} \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}_{12}'.$$

Antrai skirtumo E.10 daliai taip pat galioja $n_d^{-1}\boldsymbol{V}'\Xi_0\left(n_d^{-1}\Xi_0'\Xi_0\right)^{-1} n_d^{-1}\Xi_0'\boldsymbol{V} \xrightarrow{p} \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}_{12}'$. Taigi iš (E.10): $\hat{\boldsymbol{A}} - \left(\boldsymbol{V}_{11} - \boldsymbol{V}_{12}\boldsymbol{V}_{22}^{-1}\boldsymbol{V}_{12}'\right) \xrightarrow{p} \mathbf{0}$, todėl $\boldsymbol{G}_{11} - \boldsymbol{H}_{11} \xrightarrow{p} \mathbf{0}$.

Tegu galioja $\tilde{H}_0$. Priede C parodyta, kad $\sqrt{n_d}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\right)$ asimptotiškai pasiskirstęs pagal normalųjį dėsnį. Vadinasi, $\sqrt{n_d}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})\right) = \boldsymbol{O}_p(1)$. Kadangi $\hat{\sigma}_u^2 \xrightarrow{p} \sigma_u^2$ ir $\boldsymbol{G}_{11} - \boldsymbol{H}_{11} \xrightarrow{p} \mathbf{0}$, tai iš (E.9) išplaukia, kad $T_5 - T_3 \xrightarrow{p} 0$.

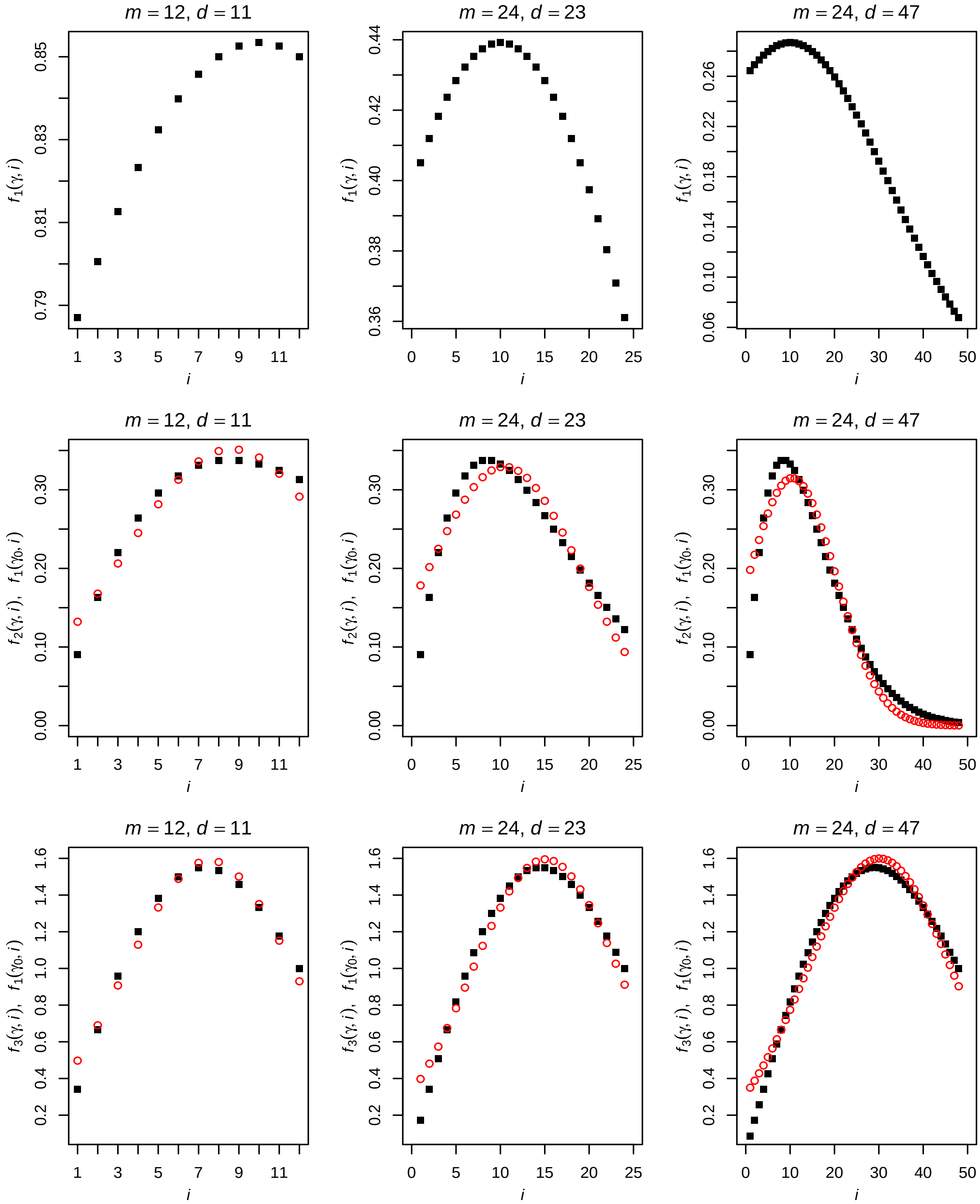
Tegu galioja $\tilde{H}_1$. Tegu $\boldsymbol{\gamma}_0 := \operatorname{plim}(\hat{\boldsymbol{\gamma}})$. Kadangi $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0,d} \xrightarrow{p} \boldsymbol{\beta}_{0,d}$ ir $\boldsymbol{G}_{11} - \boldsymbol{H}_{11} \xrightarrow{p} \mathbf{0}$, tai iš (E.9):

$$n_d^{-1}(T_5 - T_3) \xrightarrow{p} \left(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\right)'\mathbf{0}\left(\boldsymbol{\beta}_{0,d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\gamma}_0)\right)/\sigma_u^2 = 0.$$

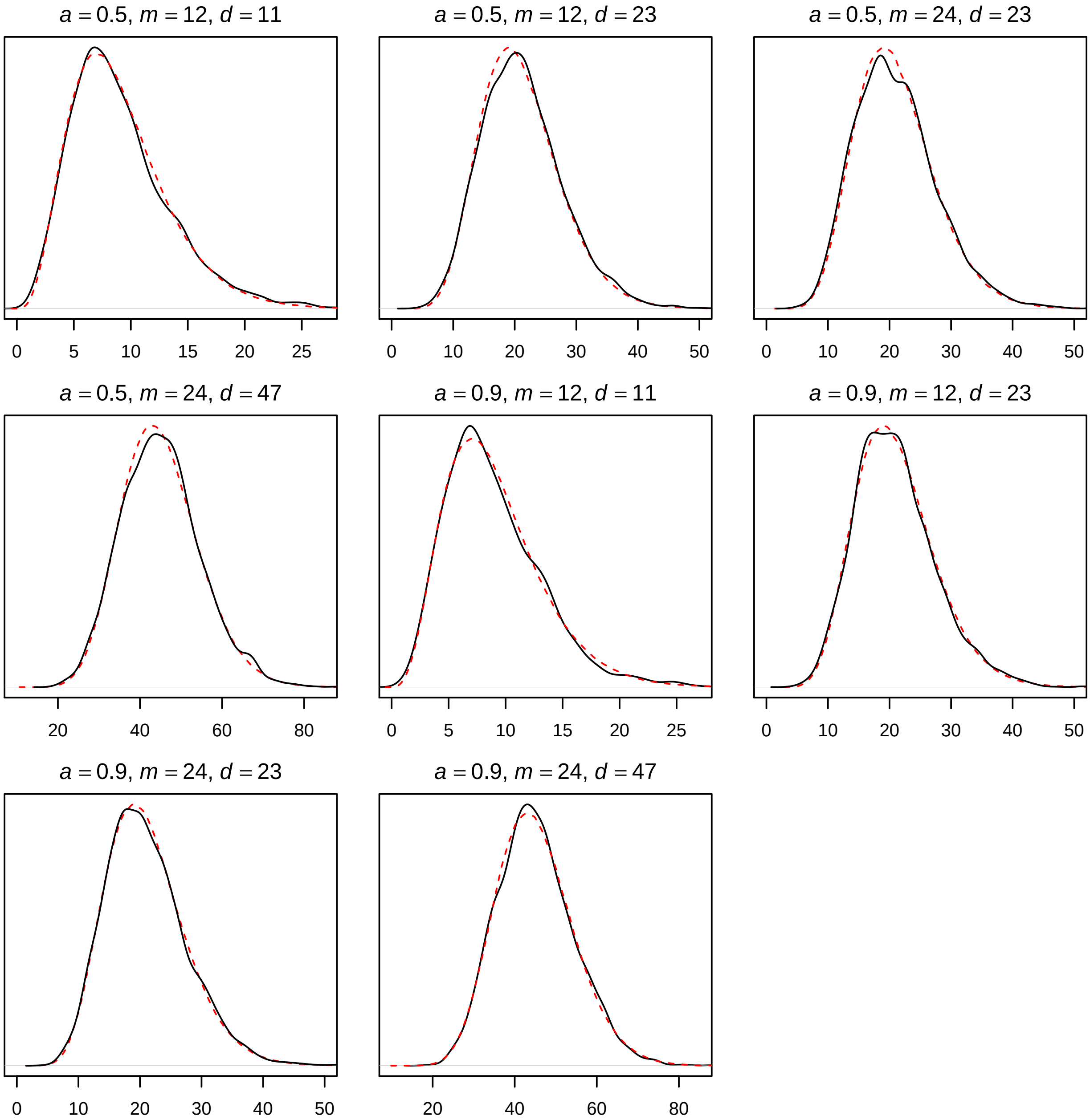
□

II Grafikai

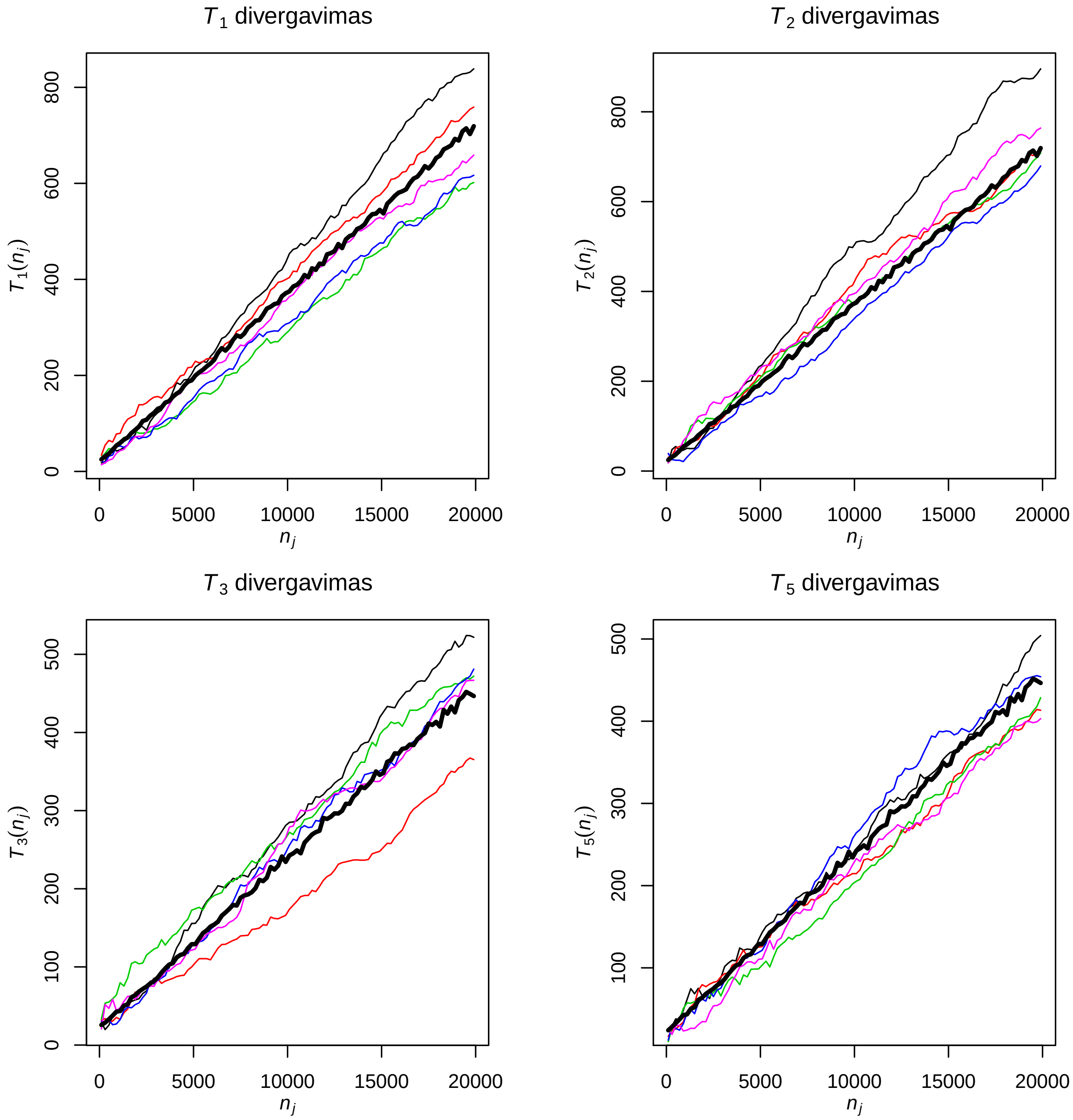
1 pav. Funkcijų f_j grafikai $\{(i, f_j(\gamma, i))\}_{i=1,\ldots,d+1}$, $j = 1, 2, 3$, bei funkcijos f_1 geriausios aproksimacijos grafikai $\{(i, f_1(\gamma_0, i))\}_{i=1,\ldots,d+1}$. Viršutiniai trys pav. atitinka funkcijos f_1, viduriniai – funkcijos f_2, apatiniai – funkcijos f_3 grafikus, kurie piešiami juodais kvadratėliais. Raudoni tuščiaviduriai rutuliukai – geriausios f_1 aproksimacijos funkcijoms f_2 ir f_3.



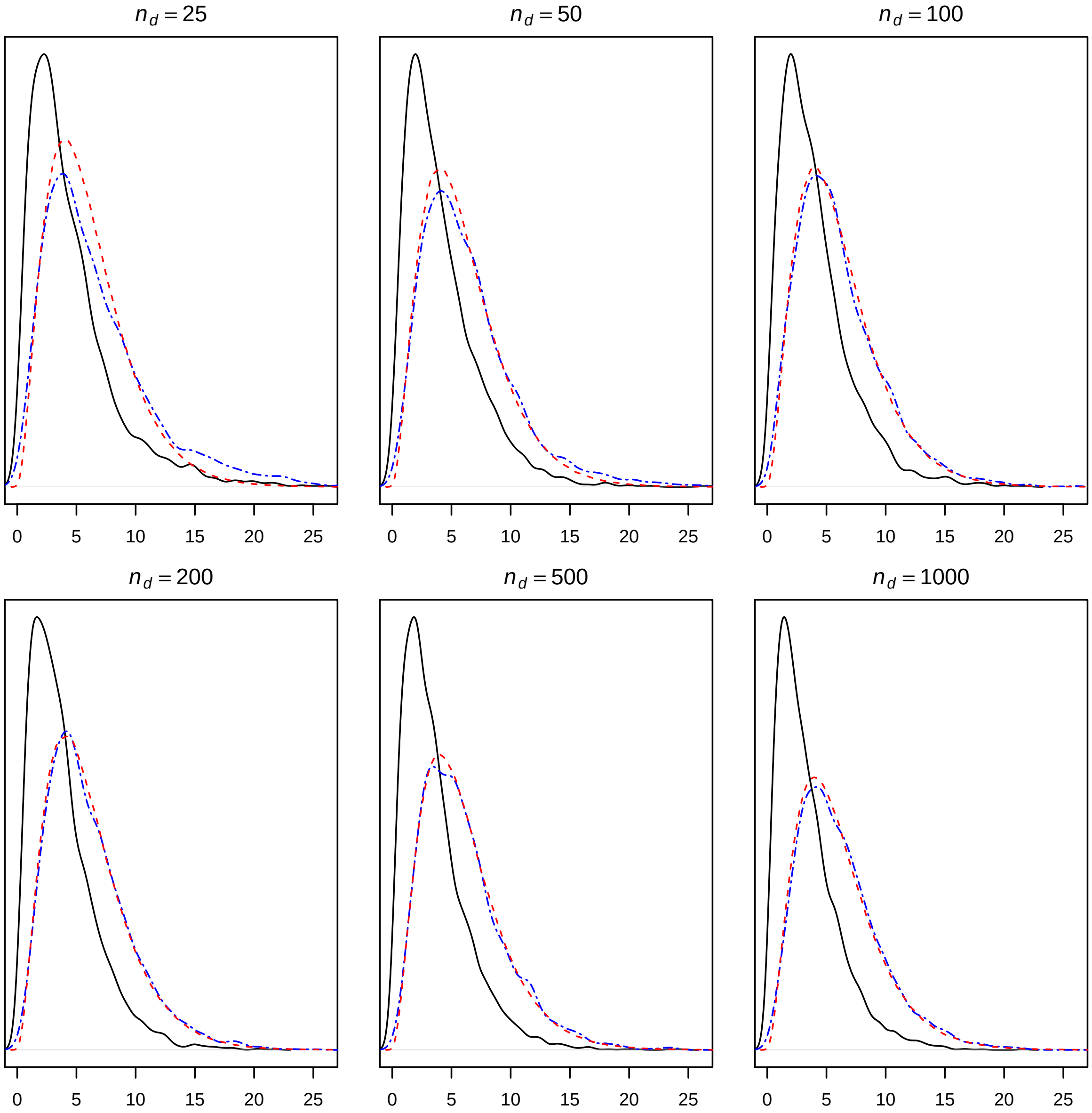
2 pav. Statistikos T_3 empirinės tankio funkcijos grafikai (juoda ištisinė linija), kai $\tilde{H}_0$ teisinga, bei $\chi^2(d+1-3)$ atsitiktinio dydžio tankio funkcijos grafikai (raudona punktyrinė linija). Imties dydis $n_d = 2\,000$, Monte Carlo kartojimų skaičius $rep = 4\,000$.



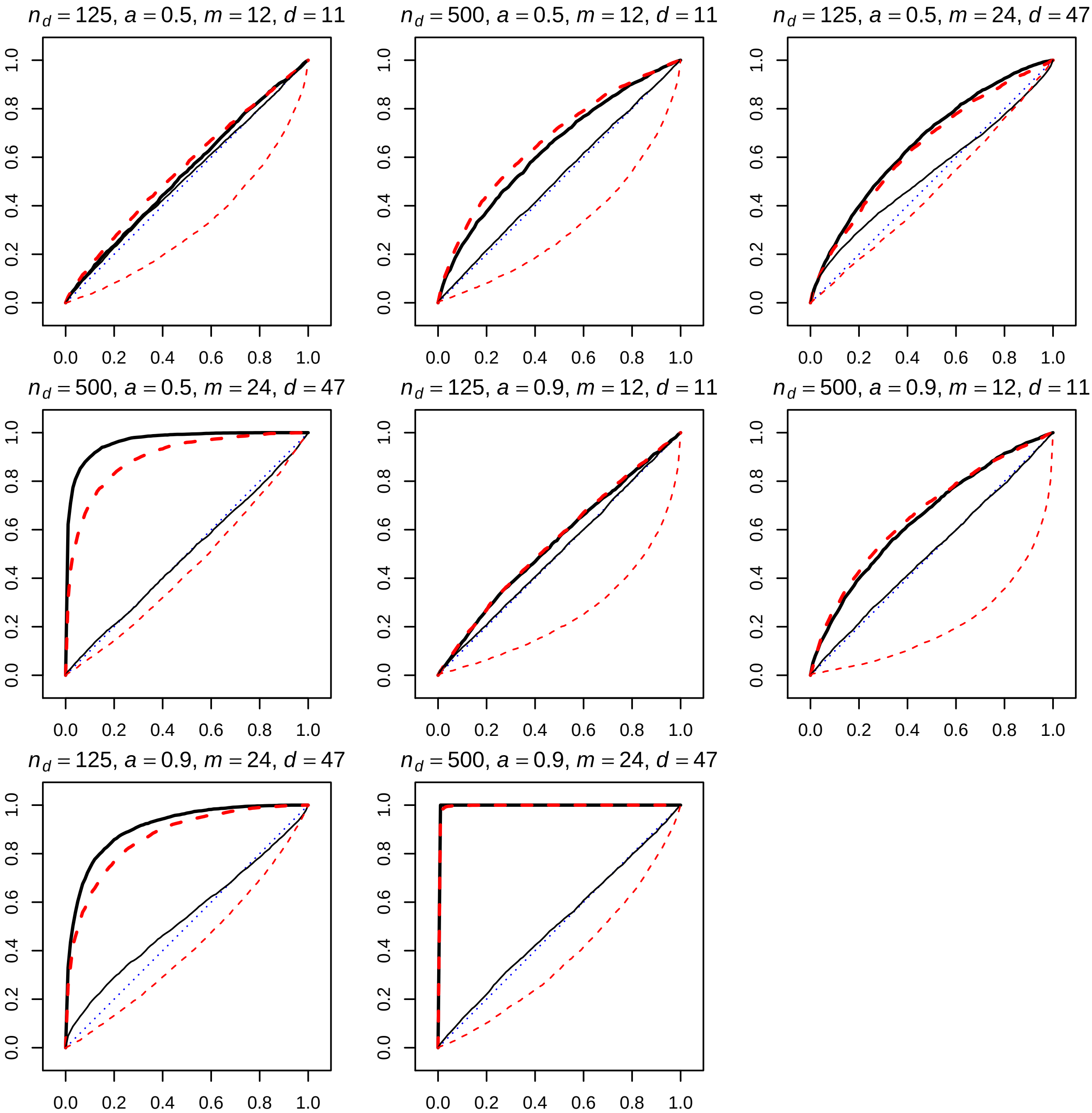
3 pav. Grafikų $G_i := \{(n_j, T_i(n_j))\}_{j=1,\dots,k}$ realizacijos statistikoms T_1, T_2, T_3 ir T_5, kai apribojimo funkcija pasirenkama neteisingai. Kiekvienai statistikai atskirame grafike pateikta po penkias G_i realizacijas, kurios žymimos plonesnėmis spalvotomis linijomis. Storesne juoda linija žymimi statistikų vidurkių grafikai $\overline{G}_i := \{(n_j, \overline{T}_i(n_j))\}_{j=1,\dots,k}$, $i = 1, 2, 3, 5$, kai Monte Carlo kartojimų skaičius $rep = 100$.



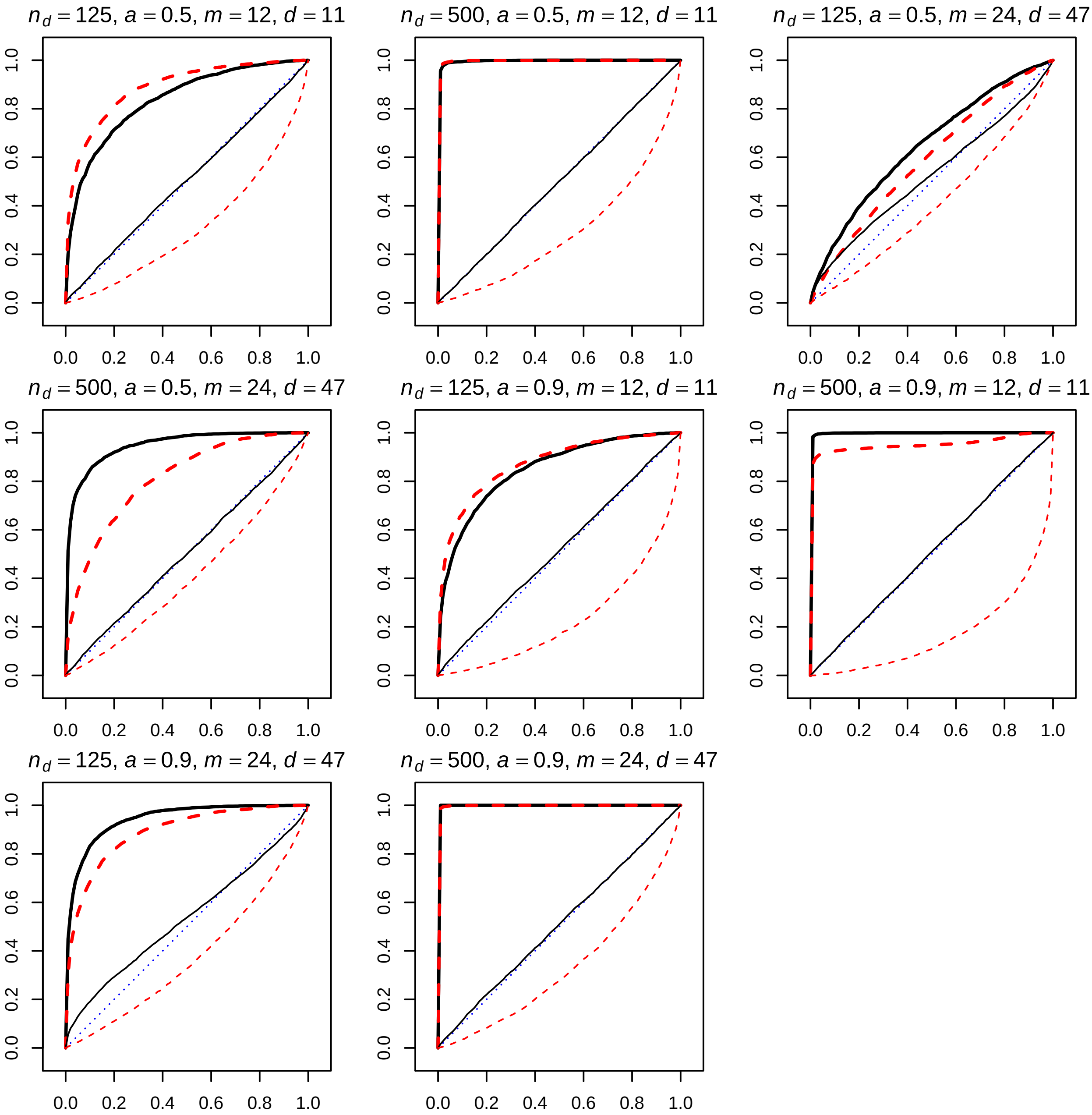
4 pav. Statistikų T_M ir T_W empirinių tankio funkcijų grafikai skirtingiems imties dydžiams n_d, kai nulinė hipotezė teisinga. Juoda ištisinė linija žymi T_M empirinės tankio funkcijos grafiką, mėlyna taškinė-punktyrinė linija – T_W empirinės tankio funkcijos grafiką, kai Monte Carlo kartojimų skaičius $rep = 4\,000$. Raudona punktyrinė linija yra $\chi^2(6)$ atsitiktinio dydžio tankio funkcijos grafikas.



5 pav. ROC ir P-P kreivės statistikoms T_1 ir T_M, kai parametrai $\beta_{0,d}$ yra funkcijos f_2 reikšmės. Stora juoda ištisinė linija – ROC kreivės statistikai T_1, stora raudona punktyrinė linija – ROC kreivės statistikai T_M. Plona juoda ištisinė linija – P-P kreivės statistikai T_1, plona raudona punktyrinė linija – P-P kreivės statistikai T_M. Mėlyna taškinė linija yra 45° tiesė. Monte Carlo kartojimų skaičius $rep = 4\,000$.



6 pav. ROC ir P-P kreivės statistikoms T_1 ir T_M, kai parametrai $\beta_{0,d}$ yra funkcijos f_3 reikšmės. Stora juoda ištisinė linija – ROC kreivės statistikai T_1, stora raudona punktyrinė linija – ROC kreivės statistikai T_M. Plona juoda ištisinė linija – P-P kreivės statistikai T_1, plona raudona punktyrinė linija – P-P kreivės statistikai T_M. Mėlyna taškinė linija yra 45° tiesė. Monte Carlo kartojimų skaičius $rep = 4\,000$.



III Lentelės

5 lentelė. Įvertinta testų galia statistikoms T_1, T_2 ir T_M, kai parametrams vertinti naudojama apribojimo funkcija f_1, o parametrai $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ yra funkcijų f_2 arba f_3 reikšmės. Reikšmingumo lygmuo $\alpha^* = 0{,}05$, Monte Carlo kartojimų skaičius $rep = 4\,000$.

a	m	d	n_d	$\boldsymbol{\beta}_{0,d} = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{\gamma})$			$\boldsymbol{\beta}_{0,d} = \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{\gamma})$		
				T_1	T_2	T_M	T_1	T_2	T_M
0,5	12	11	75	0,092	0,084	0,024	0,298	0,290	0,205
			125	0,088	0,085	0,033	0,450	0,442	0,360
			200	0,092	0,090	0,038	0,700	0,696	0,639
			500	0,149	0,148	0,108	0,988	0,988	0,978
		23	75	0,184	0,168	0,086	0,276	0,260	0,180
			125	0,200	0,190	0,132	0,385	0,374	0,299
			200	0,297	0,290	0,234	0,582	0,575	0,523
			500	0,688	0,685	0,616	0,974	0,974	0,962
	24	23	75	0,182	0,168	0,104	0,279	0,262	0,171
			125	0,212	0,204	0,149	0,375	0,364	0,303
			200	0,278	0,272	0,210	0,584	0,578	0,511
			500	0,682	0,680	0,638	0,976	0,976	0,962
		47	75	0,298	0,262	0,085	0,302	0,261	0,056
			125	0,288	0,270	0,132	0,268	0,253	0,078
			200	0,382	0,368	0,188	0,328	0,320	0,090
			500	0,856	0,854	0,496	0,784	0,780	0,255
0,9	12	11	75	0,098	0,092	0,018	0,346	0,335	0,175
			125	0,086	0,096	0,032	0,519	0,511	0,288
			200	0,102	0,121	0,045	0,754	0,749	0,486
			500	0,164	0,176	0,065	0,996	0,996	0,810
		23	75	0,273	0,253	0,135	0,525	0,508	0,326
			125	0,370	0,360	0,238	0,763	0,757	0,613
			200	0,582	0,576	0,434	0,950	0,949	0,882
			500	0,967	0,967	0,925	1,000	1,000	1,000
	24	23	75	0,282	0,265	0,142	0,523	0,505	0,325
			125	0,386	0,376	0,235	0,779	0,771	0,596
			200	0,571	0,562	0,408	0,953	0,952	0,868
			500	0,977	0,976	0,924	1,000	1,000	0,999
		47	75	0,558	0,527	0,230	0,630	0,592	0,245
			125	0,764	0,754	0,400	0,852	0,844	0,441
			200	0,955	0,953	0,634	0,988	0,988	0,688
			500	1,000	1,000	0,987	1,000	1,000	0,992

6 lentelė. Įvertinta koreguota testų galia statistikoms T_1, T_2 ir T_M, kai parametrams vertinti naudojama apribojimo funkcija f_1, o parametrai $\boldsymbol{\beta}_{0,d}$ yra funkcijų f_2 arba f_3 reikšmės. Reikšmingumo lygmuo $\alpha^* = 0{,}05$, Monte Carlo kartojimų skaičius $rep = 4\,000$.

a	m	d	n_d	$\boldsymbol{\beta}_{0,d} = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{\gamma})$			$\boldsymbol{\beta}_{0,d} = \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{\gamma})$		
				T_1	T_2	T_M	T_1	T_2	T_M
0,5	12	11	75	0,046	0,046	0,067	0,232	0,231	0,344
			125	0,069	0,068	0,083	0,397	0,396	0,532
			200	0,076	0,075	0,098	0,685	0,686	0,798
			500	0,152	0,151	0,126	0,988	0,988	0,993
		23	75	0,101	0,104	0,121	0,156	0,160	0,222
			125	0,134	0,134	0,168	0,292	0,290	0,374
			200	0,247	0,250	0,318	0,540	0,541	0,618
			500	0,680	0,680	0,712	0,970	0,970	0,975
	24	23	75	0.097	0.098	0.128	0.157	0.158	0.238
			125	0,160	0,158	0,209	0,286	0,282	0,366
			200	0,232	0,234	0,299	0,536	0,532	0,614
			500	0,657	0,656	0,704	0,972	0,972	0,980
		47	75	0,074	0,075	0,092	0,078	0,080	0,063
			125	0,144	0,148	0,144	0,132	0,133	0,109
			200	0,282	0,277	0,230	0,241	0,246	0,136
			500	0,831	0,832	0,545	0,748	0,746	0,347
0,9	12	11	75	0,078	0,080	0,070	0,262	0,258	0,356
			125	0,066	0,066	0,069	0,480	0,478	0,545
			200	0,086	0,080	0,080	0,742	0,742	0,736
			500	0,159	0,126	0,138	0,995	0,995	0,902
		23	75	0,158	0,158	0,206	0,342	0,346	0,468
			125	0,284	0,284	0,371	0,702	0,706	0,775
			200	0,500	0,499	0,608	0,932	0,932	0,944
			500	0,967	0,967	0,972	1,000	1,000	1,000
	24	23	75	0,145	0,155	0,214	0,372	0,374	0,471
			125	0,290	0,292	0,372	0,696	0,693	0,762
			200	0,530	0,527	0,612	0,943	0,944	0,957
			500	0,974	0,974	0,977	1,000	1,000	1,000
		47	75	0,224	0,229	0,272	0,248	0,266	0,319
			125	0,596	0,598	0,486	0,721	0,720	0,544
			200	0,932	0,933	0,713	0,976	0,976	0,806
			500	1,000	1,000	0,996	1,000	1,000	0,998