1 Ein-Teilchen

Lorentzgruppe

Generatoren

$$k_x = i\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad k_y = i\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad k_z = i\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$l_x = i\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \qquad l_y = i\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix} \qquad l_z = i\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$[l_i, l_j] = \epsilon_{ijk} l_k \qquad [k_x, k_j] = -i\epsilon_{ijk} l_k \qquad [l_i, k_j] = i\epsilon_{ijk} k_k$$

Lorentztransform

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu_\nu$$
$$\text{or } S(\Lambda) := \mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu})$$
$$\omega \ldots \text{antisymmetrisch}$$

Spinoren

$$\text{Drehung von Spinorlsg: } S(R_i(\theta)) = \mathrm{e}^{-i\theta S_i} \tag{1}$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \qquad S^\dagger_{\mu\nu} = \gamma^0 S_{\mu\nu}\gamma^0 \qquad S^1(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = 1 + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$$

Spinoridentitäten unter Lorentztransform

$$\begin{aligned}
\Psi &\mapsto S(\Lambda)\Psi \\
\overline{\Psi} &\mapsto \overline{\Psi} S^{-1}(\Lambda) \\
\overline{\Psi}\Psi &\mapsto \overline{\Psi}\Psi \\
\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi &\mapsto \Lambda^\mu_\nu \overline{\Psi}\gamma^\Psi \\
S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) &\mapsto \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu
\end{aligned}$$

Matrixidentitäten

Gamma	$\gamma^{\mu *} = \gamma^2\gamma^\mu\gamma^2$	$\gamma^{i\dagger} = \gamma^0\gamma^i\gamma^0 i$	
	$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$	$\gamma^i\gamma^i = -\mathbb{1}$	with $i \in \{1,2,3\}$
Sigma	$\sigma^i\sigma^j = \delta_{i,j}\mathbb{1} + i\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\sigma^k$	$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$	$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk}\mathbb{1}$

Relativistisch

Klein-Gordon-Gleichung: $\Box\Phi(x) + m^2\Phi(x) = 0$

4-Stromdichte: $j^\mu = \frac{i}{2m}[\Psi^*\partial^\mu\Psi - \Psi\partial^\mu\Psi^*] \qquad j^0 = \rho \qquad j^i = \vec{j}$

Dirac-Gleichung: $(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0 = (i\not{\partial} - m)\Psi = (p - m)\Psi$

Ansatz: $\Psi(x) = \omega(p)\mathrm{e}^{\mp ip_\mu x^\mu} \to (\pm\not{p} - m)\omega p = 0$

$$+\not{p} - m1 \qquad = E\gamma^0 - p_x\gamma^1 - p_y\gamma^2 - p_z\gamma^3 = \begin{pmatrix} E-m & 0 & -p_z & -p_x+ip_y \\ 0 & E-m & p_x-ip_y & p_z \\ p_z & p_x-ip_y & -E-m & 0 \\ p_x+ip_y & -p_z & 0 & -E-m \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \begin{cases} \text{Teilchenspinoren}u \\ \text{Antiteilchenspinoren}v \end{cases}$$

LSG:
$$u_1 = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \qquad u_2 = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } N = \frac{1}{\sqrt{(E+m)} \to u\overline{u} = 2E}$$

$$v_1 = N\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = N\begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dirac-Hamiltonian: (γ^0v. links multiplizieren)

$$i\partial_t\psi = (-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0)\psi = \hat{H}_D\psi$$

Electronmagn. Eichinvarianz:

$$A^\mu(x) \to A^\mu(x) + \partial^\mu\theta(x) \qquad \psi(x) \to \mathrm{e}^i e\theta(x)\psi(x)$$
$$D^\mu\psi := (\partial^\mu - ieA^\mu)\psi \qquad P^\mu\psi \to \mathrm{e}^i e\theta(x)D\mu\psi$$

Sinnvolle Rechenregel: $(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{B}) = \vec{A}\vec{B} + i\vec{\sigma}(\vec{A}\times\vec{B})$

Viel-Teilchen

Symetrisierungsoperator

$S_N^\pm := \frac{1}{N!}\sum_{\mathcal{P}}(\pm)^p\mathcal{P}$ — mit $\mathcal{P} = \Pi\mathcal{P}$ Alle Permutationen

hermitisch — $S_N^\pm S_N^\pm = S_N^\pm$

$[P_{ij}, S_N] = 0$ — $P_{ij}S_N^\pm = \pm S_N^\pm$

$[P_{ij}, \hat{A}_N] = 0 \quad \forall sinnvolle\hat{A}_N$

Fock-Raum:

Bosonen:$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2^\pm \oplus \mathcal{H}_3^\pm \dots$ Fermionen:$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2^\mp \oplus \mathcal{H}_3^\mp \dots$

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Bosonen: $[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{nm}$, $[a_n^\dagger, a_m^\dagger] = 0$, $[a_n, a_m] = 0$.
Fermionen: $\{a_n, a_m^\dagger\} = \delta_{nm}$, $\{a_n^\dagger, a_m^\dagger\} = 0$, $\{a_n, a_m\} = 0$.

In Teilchenzahldarstellung:

$$\begin{aligned}
a_r^\dagger \,|\ldots n_r \ldots\rangle^{(+)} &= \sqrt{n_r+1}\,|\ldots n_r+1\ldots\rangle^{(+)} \\
a_r \,|\ldots n_r \ldots\rangle^{(+)} &= \sqrt{n_r}\,|\ldots n_r-1\ldots\rangle^{(+)} \\
a_r^\dagger \,|\ldots n_r \ldots\rangle^{(-)} &= (-1)^{N_r}\delta_{n_r,0}\,|\ldots n_r+1\ldots\rangle^{(-)} \\
a_r \,|\ldots n_r \ldots\rangle^{(-)} &= (-1)^{N_r}\delta_{n_r,1}\,|\ldots n_r-1\ldots\rangle^{(-)}
\end{aligned}$$

Besetzungszahloperator: $n_m = a_m^\dagger, a_m$

Teilchenzahloperator: $N = \sum_m n_m$ mit den Vertauschungsrelationen $[N, a_j^\dagger] = a_j^\dagger$, $[N, a_j] = -a_j$, $[N, H] = 0$.

Streuung

Ansatz $$\Psi = e^{ikx} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

löst die Schrödingergleichung $H\Psi = E\Psi$ mit $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

Diff. Wirkungsquerschnitt $$d\sigma = |f(\theta,\phi)|^2 d\Omega$$

Lippmann-Schwinger-Gl. $$\Psi_k(x) = \underbrace{e^{ikx}}_{\text{hom. Lsg.}} + \underbrace{\int d^3x' G(x-x')v(x')\Psi_k(x')}_{\text{Falt. mit Greenfkt. von } (\Delta+k^2)}$$

Greensche Funktion $$G(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

Streuamplitude $$f(\theta,\phi) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' e^{-i\vec{k}\vec{x}'} v(\vec{x})\psi_k(\vec{x})$$

Bornsche Näherung durch rekursives Einsetzen:

1. Näherung $$f^{(1)}(\vec{k}' - \vec{k} := \vec{q}) = -\frac{m}{2\pi}\int d^3x' e^{i\vec{q}\vec{x}'} V(\vec{x}')$$

Beispiele:

	V	DGl	$\tilde{V}$
Coulomb	$\frac{1}{4\pi r}$	$\Delta V = -\delta^3$	$\frac{1}{\vec{q}^2}$
Yukawa	$\frac{e^{-Mr}}{4\pi r}$	$(\Delta - M^2)V = -\delta^3$	$\frac{1}{\vec{q}^2+M^2}$
Delta	$\delta^3(\vec{x})$		1
Ladungsvert.	$\int d^3x \frac{\rho(\vec{x})}{4\pi\lvert\vec{x}-\vec{x}'\rvert}$	$\Delta V = -\rho$	$\frac{\tilde{\rho}}{\vec{q}^2}$

Partialwellenmethode

Lösung der Schrödingergleichung $\frac{1}{r}\partial_r^2(rR(r)) + (k^2 - \frac{l(l+1)}{r})R(r) = v(r)R(r)$ für den Radialteil $R(r)$ der Wellenfunktion über Bessel- j_l und Neumannfunktionen n_l.

Für $r \to \infty$ ist $rR(r) \propto \sin\left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l\right)$.

Falls δ_l bekannt gilt für $r \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\psi(r,\theta,\phi) &= \sum_l \frac{2l+1}{2k}\left(\left[-i + 2e^{i\delta_l}\sin\delta_l\right]\frac{e^{ikr}}{r} + i(-1)^l\frac{e^{-ikr}}{r}\right)P_l(\cos\theta) \\
e^{i\mathbf{kx}} &= \sum_l \frac{2l+1}{2k}\left(-i\frac{e^{ikr}}{r} + i(-1)^l\frac{e^{-ikr}}{r}\right)P_l(\cos\theta) \\
f(\theta) &= \sum_l \frac{2l+1}{k}e^{i\delta_l}\sin\delta_l P_l(\cos\theta) \\
\frac{d\sigma}{d\Sigma} &= |f(\theta)|^2 = \sum_{ll'}\frac{(2l+1)(2l'+1)}{k^2}e^{i\delta_l - i\delta_{l'}}\sin\delta_l\sin\delta_{l'}P_lP_{l'} \\
\sigma &= \int d\sigma = \int d\Sigma|f(\theta)|^2 = 2\pi\int_{-1}^{1} d\cos\theta|f(\theta)|^2 = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)\sin^2\delta_l
\end{aligned}$$

Optisches Theorem: $\sigma = \frac{4\pi}{k}Imf(\theta = 0)$