Skript QT2

Joris Josiek

1. Mai 2021

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Grundstruktur der Quantenmechanik

0.1 Postulate

Essenz: Doppelspaltexperiment / Stern-Gerlach-Experiment

Zustand: eindeutig / maximal präpariertes physikalisches System, reproduzierbares Verhalten, eindeutige Zeitentwicklung. Beschreibung durch $|\psi\rangle$ eines Hilbertraums. Linearkombinationen erlaubt!

Observablen: Operatoren $\hat{A}$ (hermitesch, da reelle Eigenwerte $\leftrightarrow$ mögliche Messwerte)

Wahrscheinlichkeit: Für ein Messergebnis a_n ist die Wahrscheinlichkeit $|\langle a_n|\psi\rangle|^2$ (normierte Zustände).

Erwartungswert: (Korrollar) $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

Zeitentwicklung: $\hat{H}$ (Hamiltonoperator), $\hat{H}$ sei nicht expl. zeitabh.

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi_1|\hat{A}|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|[\hat{A},\hat{H}]|\psi_2\rangle$$

Schrödinger-Bild

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

Heisenberg-Bild

$$|\psi_H\rangle = e^{i\hat{H}t}|\psi(t)\rangle$$
$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{A}e^{-i\hat{H}t}$$
$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t),\hat{H}]$$

0.2 Ortsraum, Teilchen in 1D

Operatoren $\hat{x}$, $\hat{p}$, $[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$.

EZe: $|x\rangle$, $|p\rangle$ (bilden jeweils Basis)

Wellenfunktionen: $\psi(x) := \langle x|\psi\rangle$, $\tilde{\psi}(p) := \langle p|\psi\rangle$

Kapitel 1

Relativistische Quantenmechanik

1.1 Kontinuierliche Symmetrien (Bsp. Rotationsinvarianz)

Frage: Was ist Drehimpuls?

1.1.1 Drehungen in 3D

($\rightarrow$ Liegruppe $SO(3)$)

Aktive Drehung: Bsp. $\mathbf{v}' = R_z(\theta)\mathbf{v}$ (Drehung um Winkel θ um z-Achse)

Infinitesimale Drehungen, $\theta = \varepsilon \to 0$:

$$R_z(\varepsilon) = \mathbf{1} - i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} - i\varepsilon\ell_z$$

$$\ell_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ell_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \ell_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\ell_k)_{i,j} = -i\varepsilon_{ijk}$$

"Generatoren der zugehörigen Lie-Algebra"

Charakteristische Kommutatorrelation: $[\ell_i, \ell_j] = i\varepsilon_{ijk}\ell_k$

Endliche Drehungen: $R_z(\theta) = \exp(-i\theta\ell_z)$

1.1.2 Darstellungen

Eine Darstellung einer Gruppe ist eine Zuordnung: $R \mapsto D(R) =$ Matrix / linearer Operator, mit

$$D(R_1R_2) = D(R_1)D(R_2)$$

Physikalische Idee: Viele physikalische Größen $\rightarrow$ angeben, wie sie sich unter Drehungen verhält.

- Impuls: $\mathbf{p} \longmapsto \mathbf{p}' = R\mathbf{p}$
- Energie: $E \longmapsto E' = E = D(R)E$ mit $\forall R : D(R) = 1$

- Ladung: $Q \longmapsto Q' = Q$
- Dichte: $\rho \longmapsto \rho' : \rho'(R\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$
- Quantenzustand $|\psi\rangle \longmapsto |\psi'\rangle = \hat{D}(R)|\psi\rangle$

Generatoren für Darstellungen: $\theta = \varepsilon \to 0$

$$D(R_z(\varepsilon)) = \mathbf{1} - i\varepsilon J_z \qquad \text{(Analog für x, y)}$$

mit Operatoren J_x, J_y, J_z wie $D(R_z(\varepsilon))$, diese sind spezifisch für die Darstellung.

$$D(R_z(\theta)) = \exp(-i\theta J_z)$$

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$$

Die Generatoren jeder Darstellung erfüllen dieselben Vertauschungsrelationen.

1.1.3 Drehungen in der Quantenmechanik

Darstellung von Drehungen:

$$\hat{D}(R_k(\theta)) : |\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = \hat{D}(R_k(\theta))|\psi\rangle$$

Gruppenstruktur:

$$\hat{D}(R_1 R_2) = \hat{D}(R_1)\hat{D}(R_2)$$

Falls Symmetrie:

$$\langle\psi'|\phi'\rangle = \langle\psi|\phi\rangle \Leftrightarrow \langle\psi|\hat{D}^\dagger \hat{D}|\phi\rangle$$

$\hat{D}(R)$ ist ein *unitärer* Operator. $[\hat{D}(R), H] = 0$.

Infinitesimale Drehung:

$$\hat{D}(R_k(\varepsilon)) = \mathbf{1} - i\varepsilon \hat{J}_k$$

Falls Symmetrie:

$$[\hat{J}_k, \hat{H}] = 0 \qquad [\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$$

Per Definition: $\hat{\mathbf{J}}$ is Drehimpuls dieser Quantentheorie.

Konsequenzen bei solchen $\hat{\mathbf{J}}$-Operatoren: (QT1)

$$[\hat{J}_z, \hat{\mathbf{J}}] = 0 \qquad \hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$$

Mögliche Eigenzustände: $|j, m\rangle$ mit $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ und $m = -j, \ldots, j$

Einfachste nicht-triviale Darstellung: $j = \frac{1}{2}$, d.h. 2-Zustandssystem $|\pm\rangle := |j = \frac{1}{2}, m = \pm\frac{1}{2}\rangle$.

$$|\psi\rangle = \psi_+|+\rangle + \psi_-|-\rangle$$

$$\psi \overset{R_k(\theta)}{\longmapsto} \psi' = \left(\mathbf{1} - i\theta\frac{\sigma_k}{2}\right)\psi$$

mit Pauli-Matrizen σ_k.

1.2 Lorentzinvarianz

1.2.1 Lorentzgruppe

Drehungen: $(t, \mathbf{r}) \longmapsto (t, R(\mathbf{r}))$

Boosts in x-Richtung:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cosh\beta & \sinh\beta & 0 & 0 \\ \sinh\beta & \cosh\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Generatoren: ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z wie gehabt. Boosts: $\Lambda_x(\beta) = \mathbf{1} - i\beta k_x + \mathcal{O}(\beta^2)$

$$k_x = i\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad k_y = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad k_z = i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Generatoren: Vertauschungsrelationen (und zyklisch):

$$[\ell_x, \ell_y] = i\ell_z$$

$$[k_x, k_y] = -i\ell_z$$

$$[\ell_x, k_y] = ik_z$$

1.2.2 Darstellungen

Def. Darstellung: Matrizen/Operatoren J_i, K_i, mit $[J_x, J_y] = iJ_z$, $[K_x, K_y] = -iJ_z$, $[J_x, K_y] = iK_z$.

Triviale Darstellung: $J_i = 0$, $K_i = 0$

Spin $\frac{1}{2}$: $J_i = \sigma^i/2$, $K_i = -i\sigma^i/2$. Die Elemente des 2D Darstellungsraumes nennt man *linkshändige Weyl-Spinoren*. (Andere Variante mit $K_i = +i\sigma^i/2$: Elemente sind *rechtshändige Weyl-Spinoren*)

Partität/Raumspiegelung P: $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}$, $\mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}$, $\mathbf{J} \mapsto \mathbf{J}$, $\mathbf{K} \mapsto -\mathbf{K}$. Falls P-Transformation genutzt werden soll, sind beide Darstellungen nötig $\Rightarrow$ 4D komplexer Spinorraum aus *Dirac-Spinoren* notwendig.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}$$

Darstellung für Diracspinoren:

$$J_i = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^i}{2} \end{pmatrix} \qquad K_i = \begin{pmatrix} -i\frac{\sigma^i}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{\sigma^i}{2} \end{pmatrix}$$

Diracspinoren: 4-komponentige komplexe Spinoren. Einfachste Darstellung mit P-Transformation.

Lorentztransformationen und Darstellungen:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$$

(mit infinitesimalem und antisymmetrischem $\omega^{\mu\nu}$ (wenn beide Indizes oben!), z.B Drehung, Boost)

$$\Lambda = \mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}$$

mit $L_{ij} = -L_{ji} = \varepsilon_{ijk}\ell_k$ und $L_{i0} = -L_{0i} = k_i$

Für eine Darstellung S:

$$\boxed{S(\Lambda) := \mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}}$$

1.2.3 Diracspinoren und γ-Matrizen

$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) =$ komplexer Diracspinor.

Def γ-Matrizen: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}$

Weyl-Form:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Die Generatoren $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ lassen sich so ausdrücken:

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Dies reproduziert die Darstellungsmatrix $L_{\mu\nu}$ der Lorentztransformation.

$\gamma^{\mu\dagger}$: ${\gamma^0}^\dagger = \gamma^0$, ${\gamma^i}^\dagger = -\gamma^i = \gamma^0\gamma^i\gamma^0$

$${S^\dagger}_{\mu\nu} = \gamma^0 S_{\mu\nu}\gamma^0$$

$$S^{-1}(\Lambda) = \mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0$$

Def *Adjungierter Spinor:* $\overline{\psi} := \psi^\dagger\gamma^0$

Lorentz:

$$\psi \longmapsto S(\Lambda)\psi$$

$$\overline{\psi} \longmapsto \overline{\psi}S^{-1}(\Lambda)$$

$$\overline{\psi}\psi \longmapsto \overline{\psi}\psi$$

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi \longmapsto {\Lambda^\mu}_\nu\overline{\psi}\gamma^\nu\psi$$

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = {\Lambda^\mu}_\nu\gamma^\nu$$

1.3 Überblick über relativistische Wellengleichungen

Welche Gleichungen wären erlaubt durch Lorentzinvarianz?

Notation:

- 4-Vektoren: $(x^\mu) = (t, \mathbf{x})$, $(p^\mu) = (E, \mathbf{p})$
- Lorentzinvarianten sind Skalarprodukte, z.B. $p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 =: m^2$

- Ableitungen: $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = (\partial_t, \nabla)$, $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t - \Delta$
- Elektrodynamik: $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$, $\partial_\mu j^\mu = 0$, $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$
  Maxwell: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$, homogene Gleichung automatisch durch Potentiale erfüllt.
  Lorentz-Transf.: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, $j'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x)$

1.3.1 Klein-Gordon-Gleichung

$\phi(x)$ sei Skalarfeld ($\phi \mapsto \phi'$ mit $\phi'(x') = \phi(x)$).

$$\boxed{\Box\phi(x) + m^2\phi(x) = 0}$$

Interpretation?

- Einfachste relativistische Differentialgleichung
- "erraten aus QM" (mit QM Ersetzungsregeln $E \to i\partial_t$, $\mathbf{p} \to -i\nabla$)
- Nichtrelativistischer Limes: ein Teilchen, $E \approx m +$ Korrektur. Ansatz:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-imt}\psi_{n.r.}(\mathbf{x}, t)$$

$$\Rightarrow \partial_t^2\psi = (-2im\partial_t\psi_{n.r.} - m^2\psi_{n.r.} + \mathcal{O}(\ddot{\psi}))e^{-imt}$$

$$\Rightarrow 2im\partial_t\psi_{n.r.} = -\Delta\psi_{n.r.}$$

- Klassische Feldgleichung:

$$\mathcal{L}_{KG} = (\partial^\mu\phi^*)(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

  Euler-Lagrange:

$$0 = \partial_\rho \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\rho\phi^*)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}$$

Rolle als QM Wellengleichung für ein Teilchen in Ortsdarstellung:

Schrödinger-Gleichung nicht-relativistisch: $i\partial_t\psi = -\frac{\Delta}{2m}\psi$
Klein-Gordon-Gleichung: $-\partial_t^2\phi = (-\Delta + m^2)\phi$

Aufenthaltwahrscheinlichkeitsdichte: Suche $(j^\mu) = (\rho, \mathbf{j})$ mit Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$:

$$\phi^*(\Box + m^2)\phi - \phi(\Box + m^2)\phi^* = 0$$

$$= \partial_\mu[\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*]$$

Definiere 4-Stromdichte:

$$j^\mu = \frac{i}{2m}\left[\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*\right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{j} = -\frac{i}{2m}\left[\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right]$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{i}{2m}\left[\phi^*\partial_t\phi - \phi\partial_t\phi^*\right]$$

Interpretation

- ρ ist nicht positiv definit! $\rho < 0$ möglich! Also kann ρ nicht als Aufenthaltswahrscheinlichkeit interpretiert werden.
- Lösungen: $\phi \sim e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$: $\rho = \frac{E}{m} > 0$, $\rho \sim e^{+iEt-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$: $\rho = -\frac{E}{m} < 0$: negative Energie möglich!?
- Idee: KG-Gl. beschreibt zwei Teilchentypen (Teilchen + Antiteilchen) mit entgegengesetzten Ladungen. Interpretiere ρ als elektrische Ladungsdichte.

1.3.2 Dirac-Gleichung

$\psi(x)$ sein "Dirac-Spinorfeld" d.h. $\psi \mapsto \psi'$ mit $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$.

$$S(\Lambda) = \mathbf{1}_4 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_4$$

Dirac-Gleichung:

$$\boxed{(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0}$$

Interpretation:

- nicht einfachste Differenzialgleichung
- erraten von Dirac: gewünscht "Wurzel aus KG-Gleichung" (Herleitung $\curvearrowright$ Lit.)
- $\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi$
- Adjungierte Dirac-Gl. $i\partial_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu + m\overline{\psi} = 0$

$$\Rightarrow \partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

- Def. $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$, $\rho = \psi^\dagger\psi$ ist positiv-definit

Vollständige Darstellung der Lorentztransformationen

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = (\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu})\psi(x - \omega x)$$

und

$$\psi' = (\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\hat{J}_{\mu\nu})\psi$$

($\hat{J}$ Generatoren der Darstellung der Lorentz-Algebra auf dem Fkt.-Raum der Spinorfelder)

$$\Longrightarrow \hat{J}_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu}$$

$$\hat{J}_{\mu\nu} = \hat{L}_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$$

Analog zur KG-Gl. treten Inkonsistenzen auf, wenn man Diracgl. als 1-Teilchen-Theorie auffasst. Die Probleme sind ähnlich aber nicht gleich.

1.4 Physik und Lösungen der Diracgleichung

1.4.1 Freie Lösungen, Impuls-/Spin-Eigenzustände

Dirac-Gleichung: $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$
Gesamt-Drehimpuls: $\hat{J}_{ij} = \hat{L}_{ij} + S_{ij}$. Spin-EZ: $\pm\frac{1}{2}$

Ansatz: $\psi(x) = w(p)e^{\mp ipx}$ (mit $px = p_\mu x^\mu$)

$$\Rightarrow (\pm\not{p} - m)w(p) = 0$$

Eigenwertgleichung für $\not{p}$!

Beachte: $\not{p}^2 = p^\mu\gamma_\mu p^\nu\gamma_\nu = p^\mu p^\nu\gamma_\mu\gamma_\nu = \frac{1}{2}p^\mu p^\nu\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = p^2\mathbf{1}$

D.h. $\not{p}$ hat EWe $\pm\sqrt{p^2}$ vermutlich je 2-fach entartet. Nicht-triviale Lösung der EW-Gl. für $p^2 = m^2$ $\rightarrow$ Teilchen mit Ruhemasse m beschrieben.

Bezeichnungen der Lösungen

$$(\not{p} - m)u(p,s) = 0$$

$$(\not{p} + m)v(p,s) = 0$$

Beispiel: $p^2 = m^2$, $(p^\mu) = (E, 0, 0, p_z)$ in z-Richtung, $E^2 = p_z^2 + m^2$.

$$\not{p} = p^\mu\gamma_\mu = E\gamma_0 + p_z\gamma_3 = E\gamma^0 - p_z\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}E & -p_z\sigma^3 \\ p_z\sigma^3 & -\mathbf{1}E \end{pmatrix}$$

Es gilt $[\not{p}, S_{12}] = 0$, d.h. $\not{p}$ und S_z haben simultane Eigenzustände. (allg. $\not{p}$ und $\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{S}}{|\mathbf{p}|}$ = Helizitätsoperator simultan Diagonalisierbar).

EW-Gleichung lösen:

$$u(p, +1/2) = N \cdot \begin{pmatrix} E+m \\ 0 \\ p_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(p, -1/2) = N \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ E+m \\ 0 \\ -p_z \end{pmatrix}$$

mit $N = \frac{1}{\sqrt{E+m}}$.

$$v(p, +1/2) = N \cdot \begin{pmatrix} p_z \\ 0 \\ E+m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(p, -1/2) = N \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -p_z \\ 0 \\ E+m \end{pmatrix}$$

Spinoren für andere $\mathbf{p}$: $\mathbf{p} = R\mathbf{p}_z = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}}\mathbf{p}_z$:

$$u(p,s) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}u(p_z,s)$$

Negative Energien

$$\psi(x) = u(p,s) = e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\psi(x) = v(p,s) = e^{+iEt-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

D.h. Energie $(-E) < 0$ für v-Lösungen.

1.4.2 Mehr zum Drehimpuls

Man betrachte die Diracgleichung als quantenmechanische 1-Teilchen-Gleichung. (sinnvoll, solange Antiteilchen und QFT Effekte vernachlässigbar sind).

Formulierung analog zur Schrödingergleichung im Ortsraum:

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$$

Multiplikation mit γ^0 von links und nach Zeitableitung umstellen:

$$i\partial_t\psi = (-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0)\psi =: \hat{H}_D^{(0)}\psi$$

Drehimpuls aus Darstellung der Lorentztransformation.

$$\hat{J}_{ij} = i(x_i\partial_j - x_j\partial_i) + \hat{S}_{ij} = \hat{L}_{ij} + \hat{S}_{ij}$$

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$$

Es gilt $[\hat{H}_D^{(0)}, \hat{\mathbf{J}}] = 0$, d.h. Gesamtdrehimpuls erhalten. $[\hat{H}_D^{(0)}, \hat{\mathbf{L}}] = \gamma^0\gamma_1\partial_y - \gamma^0\gamma_2\partial_x$.

Helizität

$$\frac{\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{p}}}{|\hat{\mathbf{p}}|}$$

$$[\hat{H}_D^{(0)}, \hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{p}}] = [\hat{H}_D^{(0)}, \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}S_{ij}\hat{p}^k] =\sim \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\gamma^0\gamma_i\partial_j\partial_k = 0$$

Es gibt simultane Eigenzustände zu Energie, Impuls, Helizität.

Interpretation der 4 Komponenten von ψ

Zu gegebenem Impuls $\mathbf{p}$: 4 linear unabhängige Lösungen:

- $E > 0$, Helizität $\pm\frac{1}{2}$
- $E < 0$, Helizität $\pm\frac{1}{2}$

1.4.3 Kopplung ans elektromagnetische Feld

Freie Diracgleichung: $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$

Freie Klein-Gordon-Gleichung: $(-\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi = 0$

Relativistisches klassisches Teilchen: $L = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}$

Kopplung and e.m. Feld soll relativistisch invariant und eichinvariant sein. (Eichung $A^\mu(x) \mapsto A^\mu(x) + \partial^\mu\theta(x)$).

Klassisches Teilchen:

$$L = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau} - e\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}A^\mu(x)$$

(Einfachse denkbare relativistische WW, Wirkung ist eichinvariant, reproduziert Coulomb- und Lorentzkraft)

Kanonisch konjugierter Impuls:

$$\mathcal{P}^\mu = \frac{\partial L}{\partial\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}\tau}} = m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} - eA^\mu$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2m}(\mathcal{P}^\mu + eA^\mu)^2$$

Rezept: minimale Kopplung $\mathcal{P}^\mu \to \mathcal{P}^\mu + eA^\mu$, Klein-Gordon-Gleichung:

$$\boxed{\left[(i\partial^\mu + eA^\mu)(i\partial_\mu + eA_\mu) - m^2\right]\phi = 0}$$

Dirac-Gleichung:

$$\boxed{\left(i\not{\partial} + e\not{A} - m\right)\psi = 0}$$

Elektromagnetische Stromdichte:

$$j^\mu = e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Eichinvarianz:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &\longrightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu\theta(x) \\ \psi(x) &\longrightarrow e^{ie\theta(x)}\psi(x) \end{aligned}$$

Eichkovariante Ableitung: $D^\mu\psi := (\partial^\mu - ieA^\mu)\psi$. Damit gilt $D^\mu\psi \longrightarrow e^{ie\theta(x)}D^\mu\psi$

1.4.4 Nichtrelativistischer Limes

Nichtrelativistische Schrödingergleichung mit e.m. Feld:

$$(i\partial_t + e\Phi)\psi = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2}{2m}\psi$$

Klein-Gordon-Gleichung:

$$\left[(i\partial^\mu + eA^\mu)(i\partial_\mu + eA_\mu) - m^2\right]\phi = 0$$

$(A^\mu) = (\Phi, \mathbf{A})$, $(i\partial^j) = (-i\partial_j) = (p^j)$.

Ansatz:

- ϕ ist Energie-EZ, $i\partial_t\phi = E\phi$

- $E = m + klein$, $E > 0$
- $e|A^\mu| \ll m$
- $|\partial_t A^\mu| \ll |mA^\mu|$
- $|p| \ll m$

Einsetzen in KG-Gl.:

$$\left[(i\partial_t + e\Phi)(E + e\Phi) - (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 - m^2\right]\phi = 0$$

Vernachlässigen von $\partial_t \Phi$:

$$\left[(E + e\Phi)^2 - (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 - m^2\right]\phi = 0$$

Mit $E + e\Phi = m + (E - m + e\Phi)$ mit Vernachlässigung des Quadrates der letzten Klammer:

$$\left[2m(E - m + e\Phi) - (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2\right]\phi = 0$$

Daraus folgt direkt die nichtrelativistische Schrödingergleichung.

Diracgleichung mit e.m. Feld

$$(i\not{D} - m)\psi = 0$$

Ansatz wie oben. Aufteilung des Diracspinors in zwei Paulispinoren:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} iD_0 - m & iD_i\sigma^i \\ -iD_i\sigma^i & -iD_0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = 0$$

Nach Ansatz: $iD_0 \to E + e\Phi$, $iD_i\sigma^i = -\vec{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})$.

$$(E - m + e\Phi)\psi_A - \vec{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})\psi_B = 0$$
$$(-E - m - e\Phi)\psi_B + \vec{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})\psi_A = 0$$

Eliminiere

$$\psi_B = \frac{\vec{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})}{E + m + e\Phi}\psi_A \cong \left(\frac{1}{2m} + \mathcal{O}(m^{-2})\right)\vec{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})$$

$$\Rightarrow \quad (E - m + e\Phi)\psi_A = \frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})\right)\left(\vec{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})\right)\psi_A$$

Vereinfachung der σ-Anteile

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{O}})(\vec{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{O}}) = \sigma^i \hat{O}^i \sigma^j \hat{O}^j = \sigma^i \sigma^j \hat{O}^i \hat{O}^j$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left\{\sigma^i, \sigma^j\right\} + \frac{1}{2}\left[\sigma^i, \sigma^j\right]\right)\hat{O}^i\hat{O}^j = \left(\delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k\right)\hat{O}^i\hat{O}^j$$

$$= \hat{\mathbf{O}}^2 + i\epsilon^{ijk}\sigma^k\frac{1}{2}[\hat{O}^i, \hat{O}^j]$$

Hier: $\hat{\mathbf{O}} = (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})$:

$$\cdots = (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + i\epsilon^{ijk}\sigma^k(-i\partial_i eA^j)$$

$$= (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + e\mathbf{B} \cdot \vec{\sigma}$$

$$\boxed{(E - m + e\Phi)\psi_A = \left[\frac{(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m}\vec{\sigma} \cdot \mathbf{B}\right]\psi_A}$$

Pauli-Gleichung enthält Term $\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ ($\mathbf{S} = \vec{\sigma}/2$) mit Vorfaktor:

$$\boxed{g_s \frac{e}{2m}\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \qquad , \qquad g_s = 2}$$

Bedeutung des g_s-Terms Allg. Hamiltonian für magnetischen Dipol $\vec{\mu}$ im **B**-Feld:

$$H = -\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}_{ext}$$

Vergleich mit Pauli-Gleichung liefert $\vec{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m}\mathbf{S}$ mit $g_s = 2$. Das ist ein intrinsisches magnetisches Dipolmoment, proportional zum Spin.

Vergleich mit klassischer Elektrodynamik (rotierende Ladungsverteilung, Ladung Q, Masse M, Drehimpuls $\mathbf{L}$) liefert $\vec{\mu} = \frac{Q}{M}\mathbf{L} \Rightarrow$ Klassisches Ergebnis entspricht $g = 1$.

Interpretation des ersten Terms (identisch in der nicht-relativistischen Schrödingergleichung)

$$\frac{(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2}{2m} = \underbrace{\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}}_{E_{kin}} + \underbrace{\frac{e}{2m}(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}) + \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2}_{\text{e.m. WW}}$$

Bsp. homogenes **B**-Feld: setze $\mathbf{A}(x) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} \times \mathbf{B})$, dann $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

$$\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{L}}$$

$$\Rightarrow \text{Erster Term } = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{e}{2m}\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \frac{e^2}{2m}\mathbf{A}^2$$