

# 1 Ein-Teilchen

## Lorentzgruppe

### Generatoren

$$\begin{aligned}
 k_x &= i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & k_y &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & k_z &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 l_x &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & l_y &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & l_z &= i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 [l_i, l_j] &= \epsilon_{ijk} l_k & [k_x, k_j] &= -i \epsilon_{ijk} l_k & [l_i, k_j] &= i \epsilon_{ijk} k_k
 \end{aligned}$$

### Lorentztransform

$$\begin{aligned}
 \Lambda_\nu^\mu &= \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu \\
 \text{or } S(\Lambda) &:= \mathbb{1} - \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu} \\
 \omega &\dots \text{ antisymmetrisch}
 \end{aligned}$$

### Spinoren

$$\text{Drehung von Spinorlsg: } S(R_i(\theta)) = e^{-i\theta S_i} \quad (1)$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad S_{\mu\nu}^\dagger = \gamma^0 S_{\mu\nu} \gamma^0 \quad S^{-1}(\Lambda) = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0 = 1 + \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} S_{\mu\nu}$$

### Spinoridentitäten unter Lorentztransform

$$\begin{aligned}
 \Psi &\mapsto S(\Lambda) \Psi \\
 \bar{\Psi} &\mapsto \bar{\Psi} S^{-1}(\Lambda) \\
 \bar{\Psi} \Psi &\mapsto \bar{\Psi} \Psi \\
 \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi &\mapsto \Lambda_\nu^\mu \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi \\
 S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) &\mapsto \Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu
 \end{aligned}$$

### Matrixidentitäten

<b>Gamma</b>	$\gamma^{\mu*} = \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2$ $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}$	$\gamma^{i\dagger} = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0$ $\gamma^i \gamma^i = -\mathbb{1}$	with $i \in \{1, 2, 3\}$
<b>Sigma</b>	$\sigma^i \sigma^j = \delta_{i,j} \mathbb{1} + i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma^k$	$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i \epsilon_{jkl} \sigma_l$	

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 2\delta_{jk} \mathbb{1}$$

## Relativistisch

**Klein-Gordon-Gleichung:**  $\square\Phi(x) + m^2\Phi(x) = 0$

**4-Stromdichte:**  $j^\mu = \frac{i}{2m}[\Psi^*\partial^\mu\Psi - \Psi\partial^\mu\Psi^*] \quad j^0 = \rho \quad j^i = \vec{j}$

**Dirac-Gleichung:**  $(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0 = (i\not{\partial} - m)\Psi = (p - m)\Psi$

**Ansatz:**  $\Psi(x) = \omega(p)e^{\mp ip_\mu x^\mu} \rightarrow (\pm\not{p} - m)\omega p = 0$

$$+ \not{p} - m1 \quad = E\gamma^0 - p_x\gamma^1 - p_y\gamma^2 - p_z\gamma^3 = \begin{pmatrix} E-m & 0 & -p_z & -p_x + ip_y \\ 0 & E-m & p_x - ip_y & p_z \\ p_z & p_x - ip_y & -E-m & 0 \\ p_x + ip_y & -p_z & 0 & -E-m \end{pmatrix}$$

mit  $\begin{cases} \text{Teilchenspinoren} & u \\ \text{Antiteilchenspinoren} & v \end{cases}$

LSG:  $u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \quad \text{mit } N = \sqrt{E+m} \rightarrow u\bar{u} = 2E$

$$v_1 = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Dirac-Hamiltonian:**  $(\gamma^0 v. \text{ links multiplizieren})$

$$i\partial_t\psi = (-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0)\psi = \hat{H}_D\psi$$

**Electronmagn. Eichinvarianz:**

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu\theta(x) \quad \psi(x) \rightarrow e^i e\theta(x)\psi(x)$$

$$D^\mu\psi := (\partial^\mu - ieA^\mu)\psi \quad P^\mu\psi \rightarrow e^i e\theta(x)D^\mu\psi$$

Sinnvolle Rechenregel:  $(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{B}) = \vec{A}\vec{B} + i\vec{\sigma}(\vec{A} \times \vec{B})$

## Viel-Teilchen

### Symmetrisierungsoperator

$$S_N^\pm := \frac{1}{N!} \sum_{\mathcal{P}} (\pm)^p \mathcal{P}$$

mit  $\mathcal{P} = \Pi\mathcal{P}$  Alle Permutationen

hermitisch

$$S_N^\pm S_N^\pm = S_N^\pm$$

$$[P_{ij}, S_N] = 0$$

$$P_{ij} S_N^\pm = \pm S_N^\pm$$

$$[P_{ij}, \hat{A}_N] = 0 \quad \forall \text{ sinnvolle } \hat{A}_N$$

### Fock-Raum:

Bosonen:  $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2^\pm \oplus \mathcal{H}_3^\pm \dots$

Fermionen:  $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2^\mp \oplus \mathcal{H}_3^\mp \dots$

### Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

Bosonen:  $[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{nm}, [a_n^\dagger, a_m^\dagger] = 0, [a_n, a_m] = 0.$

Fermionen:  $\{a_n, a_m^\dagger\} = \delta_{nm}, \{a_n^\dagger, a_m^\dagger\} = 0, \{a_n, a_m\} = 0.$

In Teilchenzahldarstellung:

$$\begin{aligned} a_r^\dagger |\dots n_r \dots\rangle^{(+)} &= \sqrt{n_r + 1} |\dots n_r + 1 \dots\rangle^{(+)} \\ a_r |\dots n_r \dots\rangle^{(+)} &= \sqrt{n_r} |\dots n_r - 1 \dots\rangle^{(+)} \\ a_r^\dagger |\dots n_r \dots\rangle^{(-)} &= (-1)^{N_r} \delta_{n_r,0} |\dots n_r + 1 \dots\rangle^{(-)} \\ a_r |\dots n_r \dots\rangle^{(-)} &= (-1)^{N_r} \delta_{n_r,1} |\dots n_r - 1 \dots\rangle^{(-)} \end{aligned}$$

Besetzungszahloperator:  $n_m = a_m^\dagger a_m$

Teilchenzahloperator:  $N = \sum_m n_m$  mit den Vertauschungsrelationen  $[N, a_j^\dagger] = a_j^\dagger$ ,  $[N, a_j] = -a_j$ ,  $[N, H] = 0$ .

## Streuung

$$\text{Ansatz} \quad \Psi = e^{ikx} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}$$

löst die Schrödingergleichung  $H\Psi = E\Psi$  mit  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ .

$$\begin{aligned} \text{Diff. Wirkungsquerschnitt} \quad d\sigma &= |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega \\ \text{Lippmann-Schwinger-Gl.} \quad \Psi_k(x) &= \underbrace{e^{ikx}}_{\text{hom. Lsg.}} + \underbrace{\int d^3x' G(x-x') v(x') \Psi_k(x')}_{\text{Falt. mit Greenfkt. von } (\Delta + k^2)} \\ \text{Greensche Funktion} \quad G(x) &= -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \\ \text{Streuamplitude} \quad f(\theta, \phi) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' e^{-i\vec{k}\vec{x}'} v(\vec{x}') \psi_k(\vec{x}) \end{aligned}$$

Bornsche Näherung durch rekursives Einsetzen:

$$1. \text{ Näherung} \quad f^{(1)}(\vec{k}' - \vec{k} := \vec{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int d^3x' e^{i\vec{q}\vec{x}'} V(\vec{x}')$$

Beispiele:

	$V$	DGl	$\tilde{V}$
Coulomb	$\frac{1}{4\pi r}$	$\Delta V = -\delta^3$	$\frac{1}{q^2}$
Yukawa	$\frac{e^{-Mr}}{4\pi r}$	$(\Delta - M^2)V = -\delta^3$	$\frac{1}{q^2 + M^2}$
Delta	$\delta^3(\vec{x})$		$1$
Ladungsvert.	$\int d^3x \frac{\rho(\vec{x})}{4\pi \vec{x}-\vec{x}' }$	$\Delta V = -\rho$	$\frac{\tilde{\rho}}{q^2}$

## Partialwellenmethode

Lösung der Schrödingergleichung  $\frac{1}{r} \partial_r^2 (rR(r)) + (k^2 - \frac{l(l+1)}{r})R(r) = v(r)R(r)$  für den Radialteil  $R(r)$  der Wellenfunktion über Bessel-  $j_l$  und Neumannfunktionen  $n_l$ .

Für  $r \rightarrow \infty$  ist  $rR(r) \propto \sin(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l)$ .

Falls  $\delta_l$  bekannt gilt für  $r \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta, \phi) &= \sum_l \frac{2l+1}{2k} \left( [-i + 2e^{i\delta_l} \sin \delta_l] \frac{e^{ikr}}{r} + i(-1)^l \frac{e^{-ikr}}{r} \right) P_l(\cos \theta) \\ e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} &= \sum_l \frac{2l+1}{2k} \left( -i \frac{e^{ikr}}{r} + i(-1)^l \frac{e^{-ikr}}{r} \right) P_l(\cos \theta) \\ f(\theta) &= \sum_l \frac{2l+1}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \\ \frac{d\sigma}{d\Sigma} &= |f(\theta)|^2 = \sum_{l,l'} \frac{(2l+1)(2l'+1)}{k^2} e^{i\delta_l - i\delta_{l'}} \sin \delta_l \sin \delta_{l'} P_l P_{l'} \\ \sigma &= \int d\sigma = \int d\Sigma |f(\theta)|^2 = 2\pi \int_{-1}^1 d\cos \theta |f(\theta)|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l \end{aligned}$$

Optisches Theorem:  $\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(\theta=0)$