

Skript QT2

Joris Josiek

6. Mai 2021

Inhaltsverzeichnis

0	Grundstruktur der Quantenmechanik	2
0.1	Postulate	2
0.2	Ortsraum, Teilchen in 1D	2
1	Relativistische Quantenmechanik	3
1.1	Kontinuierliche Symmetrien (Bsp. Rotationsinvarianz)	3
1.1.1	Drehungen in 3D	3
1.1.2	Darstellungen	3
1.1.3	Drehungen in der Quantenmechanik	4
1.2	Lorentzinvarianz	5
1.2.1	Lorentzgruppe	5
1.2.2	Darstellungen	5
1.2.3	Diracspinoren und γ -Matrizen	6
1.3	Überblick über relativistische Wellengleichungen	6
1.3.1	Klein-Gordon-Gleichung	7
1.3.2	Dirac-Gleichung	8
1.4	Physik und Lösungen der Diracgleichung	9
1.4.1	Freie Lösungen, Impuls-/Spin-Eigenzustände	9
1.4.2	Mehr zum Drehimpuls	10
1.4.3	Kopplung ans elektromagnetische Feld	11
1.4.4	Nichtrelativistischer Limes	11
1.4.5	Weitere Konsequenzen: Spin-Bahn-Kopplung	13

Kapitel 0

Grundstruktur der Quantenmechanik

0.1 Postulate

Essenz: Doppelspaltexperiment / Stern-Gerlach-Experiment

Zustand: eindeutig / maximal präpariertes physikalisches System, reproduzierbares Verhalten, eindeutige Zeitentwicklung. Beschreibung durch $|\psi\rangle$ eines Hilbertraums. Linearkombinationen erlaubt!

Observablen: Operatoren \hat{A} (hermitesch, da reelle Eigenwerte \leftrightarrow mögliche Messwerte)

Wahrscheinlichkeit: Für ein Messergebnis a_n ist die Wahrscheinlichkeit $|\langle a_n | \psi \rangle|^2$ (normierte Zustände).

Erwartungswert: (Korollar) $\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$

Zeitentwicklung: \hat{H} (Hamiltonoperator), \hat{H} sei nicht expl. zeitabh.

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | [\hat{A}, \hat{H}] | \psi_2 \rangle$$

Schrödinger-Bild

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Heisenberg-Bild

$$|\psi_H\rangle = e^{i\hat{H}t} |\psi(t)\rangle$$

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{A} e^{-i\hat{H}t}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}]$$

0.2 Ortsraum, Teilchen in 1D

Operatoren \hat{x} , \hat{p} , $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

EZe: $|x\rangle$, $|p\rangle$ (bilden jeweils Basis)

Wellenfunktionen: $\psi(x) := \langle x | \psi \rangle$, $\tilde{\psi}(p) := \langle p | \psi \rangle$

Kapitel 1

Relativistische Quantenmechanik

1.1 Kontinuierliche Symmetrien (Bsp. Rotationsinvarianz)

Frage: Was ist Drehimpuls?

1.1.1 Drehungen in 3D

(\rightarrow Liegruppe $SO(3)$)

Aktive Drehung: Bsp. $\mathbf{v}' = R_z(\theta)\mathbf{v}$ (Drehung um Winkel θ um z -Achse)

Infinitesimale Drehungen, $\theta = \varepsilon \rightarrow 0$:

$$R_z(\varepsilon) = \mathbf{1} - i\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} - i\varepsilon \ell_z$$

$$\ell_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \ell_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \ell_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\ell_k)_{i,j} = -i\varepsilon_{ijk}$$

“Generatoren der zugehörigen Lie-Algebra”

Charakteristische Kommutatorrelation: $[\ell_i, \ell_j] = i\varepsilon_{ijk}\ell_k$

Endliche Drehungen: $R_z(\theta) = \exp(-i\theta\ell_z)$

1.1.2 Darstellungen

Eine Darstellung einer Gruppe ist eine Zuordnung: $R \mapsto D(R) = \text{Matrix} / \text{linearer Operator}$, mit

$$D(R_1 R_2) = D(R_1) D(R_2)$$

Physikalische Idee: Viele physikalische Größen \rightarrow angeben, wie sie sich unter Drehungen verhält.

- Impuls: $\mathbf{p} \mapsto \mathbf{p}' = R\mathbf{p}$
- Energie: $E \mapsto E' = E = D(R)E$ mit $\forall R : D(R) = 1$

- Ladung: $Q \mapsto Q' = Q$
- Dichte: $\rho \mapsto \rho' : \rho'(R\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$
- Quantenzustand $|\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = \hat{D}(R)|\psi\rangle$

Generatoren für Darstellungen: $\theta = \varepsilon \rightarrow 0$

$$D(R_z(\varepsilon)) = \mathbf{1} - i\varepsilon J_z \quad (\text{Analog für } x, y)$$

mit Operatoren J_x, J_y, J_z wie $D(R_z(\varepsilon))$, diese sind spezifisch für die Darstellung.

$$D(R_z(\theta)) = \exp(-i\theta J_z)$$

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk} J_k$$

Die Generatoren jeder Darstellung erfüllen dieselben Vertauschungsrelationen.

1.1.3 Drehungen in der Quantenmechanik

Darstellung von Drehungen:

$$\hat{D}(R_k(\theta)) : |\psi\rangle \mapsto |\psi'\rangle = \hat{D}(R_k(\theta))|\psi\rangle$$

Gruppenstruktur:

$$\hat{D}(R_1 R_2) = \hat{D}(R_1) \hat{D}(R_2)$$

Falls Symmetrie:

$$\langle \psi' | \phi' \rangle = \langle \psi | \phi \rangle \Leftrightarrow \langle \psi | \hat{D}^\dagger \hat{D} | \phi \rangle$$

$\hat{D}(R)$ ist ein *unitärer* Operator. $[\hat{D}(R), H] = 0$.

Infinitesimale Drehung:

$$\hat{D}(R_k(\varepsilon)) = \mathbf{1} - i\varepsilon \hat{J}_k$$

Falls Symmetrie:

$$[\hat{J}_k, \hat{H}] = 0 \quad [\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$$

Per Definition: $\hat{\mathbf{J}}$ ist Drehimpuls dieser Quantentheorie.

Konsequenzen bei solchen $\hat{\mathbf{J}}$ -Operatoren: (QT1)

$$[\hat{J}_z, \hat{\mathbf{J}}] = 0 \quad \hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$$

Mögliche Eigenzustände: $|j, m\rangle$ mit $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ und $m = -j, \dots, j$

Einfachste nicht-triviale Darstellung: $j = \frac{1}{2}$, d.h. 2-Zustandssystem $|\pm\rangle := |j = \frac{1}{2}, m = \pm\frac{1}{2}\rangle$.

$$|\psi\rangle = \psi_+|+\rangle + \psi_-|-\rangle$$

$$\psi \xrightarrow{R_k(\theta)} \psi' = \left(\mathbf{1} - i\theta \frac{\sigma_k}{2} \right) \psi$$

mit Pauli-Matrizen σ_k .

1.2 Lorentzinvarianz

1.2.1 Lorentzgruppe

Drehungen: $(t, \mathbf{r}) \mapsto (t, R(\mathbf{r}))$

Boosts in x-Richtung:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cosh \beta & \sinh \beta & 0 & 0 \\ \sinh \beta & \cosh \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Generatoren: ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z wie gehabt. Boosts: $\Lambda_x(\beta) = \mathbf{1} - i\beta k_x + \mathcal{O}(\beta^2)$

$$k_x = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad k_y = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad k_z = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6 Generatoren: Vertauschungsrelationen (und zyklisch):

$$[\ell_x, \ell_y] = i\ell_z$$

$$[k_x, k_y] = -i\ell_z$$

$$[\ell_x, k_y] = ik_z$$

1.2.2 Darstellungen

Def. Darstellung: Matrizen/Operatoren J_i, K_i , mit $[J_x, J_y] = iJ_z$, $[K_x, K_y] = -iJ_z$, $[J_x, K_y] = iK_z$.

Triviale Darstellung: $J_i = 0, K_i = 0$

Spin $\frac{1}{2}$: $J_i = \sigma^i/2, K_i = -i\sigma^i/2$. Die Elemente des 2D Darstellungsraumes nennt man *linkshändige Weyl-Spinoren*. (Andere Variante mit $K_i = +i\sigma^i/2$: Elemente sind *rechtshändige Weyl-Spinoren*)

Partitt/Raumspiegelung P : $\mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x}, \mathbf{p} \mapsto -\mathbf{p}, \mathbf{J} \mapsto \mathbf{J}, \mathbf{K} \mapsto -\mathbf{K}$. Falls P -Transformation genutzt werden soll, sind beide Darstellungen nötig \Rightarrow 4D komplexer Spinorraum aus *Dirac-Spinoren* notwendig.

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

Darstellung für Diracspinoren:

$$J_i = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^i}{2} \end{pmatrix} \quad K_i = \begin{pmatrix} -i\frac{\sigma^i}{2} & 0 \\ 0 & i\frac{\sigma^i}{2} \end{pmatrix}$$

Diracspinoren: 4-komponentige komplexe Spinoren. Einfachste Darstellung mit P -Transformation.

Lorentztransformationen und Darstellungen:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$$

(mit infinitesimalem und antisymmetrischem $\omega^{\mu\nu}$ (wenn beide Indizes oben!), z.B Drehung, Boost)

$$\Lambda = \mathbf{1} - \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu}$$

mit $L_{ij} = -L_{ji} = \varepsilon_{ijk} \ell_k$ und $L_{i0} = -L_{0i} = k_i$

Für eine Darstellung S :

$$S(\Lambda) := \mathbf{1} - \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} L_{\mu\nu}$$

1.2.3 Diracspinoren und γ -Matrizen

$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) =$ komplexer Diracspinor.

Def γ -Matrizen: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}$

Weyl-Form:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Die Generatoren \mathbf{J} , \mathbf{K} lassen sich so ausdrücken:

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Dies reproduziert die Darstellungsmatrix $L_{\mu\nu}$ der Lorentztransformation.

$$\gamma^{\mu\dagger}: \gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0$$

$$S^\dagger_{\mu\nu} = \gamma^0 S_{\mu\nu} \gamma^0$$

$$S^{-1}(\Lambda) = \mathbf{1} + \frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = \gamma^0 S^\dagger(\Lambda) \gamma^0$$

Def *Adjungierter Spinor*: $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$

Lorentz:

$$\psi \mapsto S(\Lambda) \psi$$

$$\bar{\psi} \mapsto \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda)$$

$$\bar{\psi} \psi \mapsto \bar{\psi} \psi$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi$$

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$$

1.3 Überblick über relativistische Wellengleichungen

Welche Gleichungen wären erlaubt durch Lorentzinvarianz?

Notation:

- 4-Vektoren: $(x^\mu) = (t, \mathbf{x})$, $(p^\mu) = (E, \mathbf{p})$
- Lorentzinvarianten sind Skalarprodukte, z.B. $p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 =: m^2$

- Ableitungen: $\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial x^\mu}) = (\partial_t, \nabla)$, $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \Delta$
- Elektrodynamik: $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$, $\partial_\mu j^\mu = 0$, $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$
Maxwell: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$, homogene Gleichung automatisch durch Potentiale erfüllt.
Lorentz-Transf.: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, $j'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu(x)$

1.3.1 Klein-Gordon-Gleichung

$\phi(x)$ sei Skalarfeld ($\phi \mapsto \phi'$ mit $\phi'(x') = \phi(x)$).

$$\square \phi(x) + m^2 \phi(x) = 0$$

Interpretation?

- Einfachste relativistische Differentialgleichung
- “erraten aus QM” (mit QM Ersetzungsregeln $E \rightarrow i\partial_t$, $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$)
- Nichtrelativistischer Limes: ein Teilchen, $E \approx m + \text{Korrektur}$. Ansatz:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-imt} \psi_{n.r.}(\mathbf{x}, t)$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 \psi = (-2im\partial_t \psi_{n.r.} - m^2 \psi_{n.r.} + \mathcal{O}(\ddot{\psi})) e^{-imt}$$

$$\Rightarrow 2im\partial_t \psi_{n.r.} = -\Delta \psi_{n.r.}$$

- Klassische Feldgleichung:

$$\mathcal{L}_{KG} = (\partial^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi$$

Euler-Lagrange:

$$0 = \partial_\rho \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi^*)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*}$$

Rolle als QM Wellengleichung für ein Teilchen in Ortsdarstellung:

Schrödinger-Gleichung nicht-relativistisch: $i\partial_t \psi = -\frac{\Delta}{2m} \psi$

Klein-Gordon-Gleichung: $-\partial_t^2 \phi = (-\Delta + m^2) \phi$

Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte: Suche $(j^\mu) = (\rho, \mathbf{j})$ mit Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$:

$$\phi^*(\square + m^2)\phi - \phi(\square + m^2)\phi^* = 0$$

$$= \partial_\mu [\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*]$$

Definiere 4-Stromdichte:

$$j^\mu = \frac{i}{2m} [\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*]$$

$$\Rightarrow \mathbf{j} = -\frac{i}{2m} [\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*]$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{i}{2m} [\phi^* \partial_t \phi - \phi \partial_t \phi^*]$$

Interpretation

- ρ ist nicht positiv definit! $\rho < 0$ möglich! Also kann ρ nicht als Aufenthaltswahrscheinlichkeit interpretiert werden.
- Lösungen: $\phi \sim e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$: $\rho = \frac{E}{m} > 0$, $\rho \sim e^{+iEt-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$: $\rho = -\frac{E}{m} < 0$: negative Energie möglich!?
- Idee: KG-Gl. beschreibt zwei Teilchentypen (Teilchen + Antiteilchen) mit entgegengesetzten Ladungen. Interpretiere ρ als elektrische Ladungsdichte.

1.3.2 Dirac-Gleichung

$\psi(x)$ sein "Dirac-Spinorfeld" d.h. $\psi \mapsto \psi'$ mit $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$.

$$S(\Lambda) = \mathbf{1}_4 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}_4$$

Dirac-Gleichung:

$$\boxed{(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = 0}$$

Interpretation:

- nicht einfachste Differenzialgleichung
- erraten von Dirac: gewünscht "Wurzel aus KG-Gleichung" (Herleitung \curvearrowright Lit.)
- $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi$
- Adjungierte Dirac-Gl. $i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$
$$\Rightarrow \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$
- Def. $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, $\rho = \psi^\dagger\psi$ ist positiv-definit

Vollständige Darstellung der Lorentztransformationen

$$\psi'(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x) = (\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu})\psi(x - \omega x)$$

und

$$\psi' = (\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}\hat{J}_{\mu\nu})\psi$$

(\hat{J} Generatoren der Darstellung der Lorentz-Algebra auf dem Fkt.-Raum der Spinorfelder)

$$\Rightarrow \hat{J}_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) + S_{\mu\nu}$$

$$\hat{J}_{\mu\nu} = \hat{L}_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}$$

Analog zur KG-Gl. treten Inkonsistenzen auf, wenn man Diracgl. als 1-Teilchen-Theorie auffasst. Die Probleme sind ähnlich aber nicht gleich.

1.4 Physik und Lösungen der Diracgleichung

1.4.1 Freie Lösungen, Impuls-/Spin-Eigenzustände

Dirac-Gleichung: $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$

Gesamt-Drehimpuls: $\hat{J}_{ij} = \hat{L}_{ij} + S_{ij}$. Spin-EZ: $\pm \frac{1}{2}$

Ansatz: $\psi(x) = w(p)e^{\mp i p x}$ (mit $p x = p_\mu x^\mu$)

$$\Rightarrow (\pm \not{p} - m)w(p) = 0$$

Eigenwertgleichung für \not{p} !

Beachte: $\not{p}^2 = p^\mu \gamma_\mu p^\nu \gamma_\nu = p^\mu p^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = \frac{1}{2} p^\mu p^\nu \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = p^2 \mathbf{1}$

D.h. \not{p} hat EWe $\pm \sqrt{p^2}$ vermutlich je 2-fach entartet. Nicht-triviale Lösung der EW-Gl. für $p^2 = m^2$
 \rightarrow Teilchen mit Ruhemasse m beschrieben.

Bezeichnungen der Lösungen

$$(\not{p} - m)u(p, s) = 0$$

$$(\not{p} + m)v(p, s) = 0$$

Beispiel: $p^2 = m^2$, $(p^\mu) = (E, 0, 0, p_z)$ in z -Richtung, $E^2 = p_z^2 + m^2$.

$$\not{p} = p^\mu \gamma_\mu = E\gamma_0 + p_z\gamma_3 = E\gamma^0 - p_z\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}E & -p_z\sigma^3 \\ p_z\sigma^3 & -\mathbf{1}E \end{pmatrix}$$

Es gilt $[\not{p}, S_{12}] = 0$, d.h. \not{p} und S_z haben simultane Eigenzustände. (allg. \not{p} und $\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{p}|} =$ Helizitätsoperator simultan Diagonalisierbar).

EW-Gleichung lösen:

$$u(p, +1/2) = N \cdot \begin{pmatrix} E + m \\ 0 \\ p_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u(p, -1/2) = N \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ E + m \\ 0 \\ -p_z \end{pmatrix}$$

mit $N = \frac{1}{\sqrt{E+m}}$.

$$v(p, +1/2) = N \cdot \begin{pmatrix} p_z \\ 0 \\ E + m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v(p, -1/2) = N \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -p_z \\ 0 \\ E + m \end{pmatrix}$$

Spinoren für andere \mathbf{p} : $\mathbf{p} = R\mathbf{p}_z = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}L_{\mu\nu}}\mathbf{p}_z$:

$$u(p, s) = e^{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}u(p_z, s)$$

Negative Energien

$$\psi(x) = u(p, s) = e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\psi(x) = v(p, s) = e^{+iEt-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

D.h. Energie $(-E) < 0$ für v -Lösungen.

1.4.2 Mehr zum Drehimpuls

Man betrachte die Diracgleichung als quantenmechanische 1-Teilchen-Gleichung. (sinnvoll, solange Antiteilchen und QFT Effekte vernachlässigbar sind).

Formulierung analog zur Schrödingergleichung im Ortsraum:

$$(i\not{D} - m)\psi = 0$$

Multiplikation mit γ^0 von links und nach Zeitableitung umstellen:

$$i\partial_t\psi = (-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0)\psi =: \hat{H}_D^{(0)}\psi$$

Drehimpuls aus Darstellung der Lorentztransformation.

$$\hat{J}_{ij} = i(x_i\partial_j - x_j\partial_i) + \hat{S}_{ij} = \hat{L}_{ij} + \hat{S}_{ij}$$

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$$

Es gilt $[\hat{H}_D^{(0)}, \hat{\mathbf{J}}] = 0$, d.h. Gesamtdrehimpuls erhalten. $[\hat{H}_D^{(0)}, \hat{\mathbf{L}}] = \gamma^0\gamma_1\partial_y - \gamma^0\gamma_2\partial_x$.

Helizität

$$\frac{\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{|\hat{\mathbf{p}}|}$$

$$[\hat{H}_D^{(0)}, \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}}] = [\hat{H}_D^{(0)}, \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}S_{ij}\hat{p}^k] = \sim \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\gamma^0\gamma_i\partial_j\partial_k = 0$$

Es gibt simultane Eigenzustände zu Energie, Impuls, Helizität.

Interpretation der 4 Komponenten von ψ

Zu gegebenem Impuls \mathbf{p} : 4 linear unabhängige Lösungen:

- $E > 0$, Helizität $\pm\frac{1}{2}$
- $E < 0$, Helizität $\pm\frac{1}{2}$

1.4.3 Kopplung ans elektromagnetische Feld

Freie Diracgleichung: $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$

Freie Klein-Gordon-Gleichung: $(-\partial_\mu \partial^\mu - m^2)\phi = 0$

Relativistisches klassisches Teilchen: $L = \frac{1}{2}m \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}$

Kopplung and e.m. Feld soll relativistisch invariant und eichinvariant sein. (Eichung $A^\mu(x) \mapsto A^\mu(x) + \partial^\mu \theta(x)$).

Klassisches Teilchen:

$$L = \frac{1}{2}m \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} - e \frac{dx_\mu}{d\tau} A^\mu(x)$$

(Einfachste denkbare relativistische WW, Wirkung ist eichinvariant, reproduziert Coulomb- und Lorentzkraft)

Kanonisch konjugierter Impuls:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\mu &= \frac{\partial L}{\partial \frac{dx_\mu}{d\tau}} = m \frac{dx^\mu}{d\tau} - e A^\mu \\ \Rightarrow H &= \frac{1}{2m} (\mathcal{P}^\mu + e A^\mu)^2 \end{aligned}$$

Rezept: minimale Kopplung $\mathcal{P}^\mu \rightarrow \mathcal{P}^\mu + e A^\mu$, Klein-Gordon-Gleichung:

$$\boxed{[(i\partial^\mu + e A^\mu)(i\partial_\mu + e A_\mu) - m^2] \phi = 0}$$

Dirac-Gleichung:

$$\boxed{(i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m) \psi = 0}$$

Elektromagnetische Stromdichte:

$$j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

Eichinvarianz:

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &\longrightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \theta(x) \\ \psi(x) &\longrightarrow e^{ie\theta(x)} \psi(x) \end{aligned}$$

Eichkovariante Ableitung: $D^\mu \psi := (\partial^\mu - ie A^\mu) \psi$. Damit gilt $D^\mu \psi \longrightarrow e^{ie\theta(x)} D^\mu \psi$

1.4.4 Nichtrelativistischer Limes

Nichtrelativistische Schrödingergleichung mit e.m. Feld:

$$(i\partial_t + e\Phi) \psi = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2}{2m} \psi$$

Klein-Gordon-Gleichung:

$$[(i\partial^\mu + e A^\mu)(i\partial_\mu + e A_\mu) - m^2] \phi = 0$$

$(A^\mu) = (\Phi, \mathbf{A})$, $(i\partial^j) = (-i\partial_j) = (p^j)$.

Ansatz:

- ϕ ist Energie-EZ, $i\partial_t \phi = E\phi$

- $E = m + \text{klein}, E > 0$
- $e|A^\mu| \ll m$
- $|\partial_t A^\mu| \ll |mA^\mu|$
- $|p| \ll m$

Einsetzen in KG-Gl.:

$$[(i\partial_t + e\Phi)(E + e\Phi) - (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 - m^2] \phi = 0$$

Vernachlässigen von $\partial_t \Phi$:

$$[(E + e\Phi)^2 - (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 - m^2] \phi = 0$$

Mit $E + e\Phi = m + (E - m + e\Phi)$ mit Vernachlässigung des Quadrates der letzten Klammer:

$$[2m(E - m + e\Phi) - (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2] \phi = 0$$

Daraus folgt direkt die nichtrelativistische Schrödingergleichung.

Diracgleichung mit e.m. Feld

$$(i\not{D} - m)\psi = 0$$

Ansatz wie oben. Aufteilung des Diracspinors in zwei Paulispinoren:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} iD_0 - m & iD_i \sigma^i \\ -iD_i \sigma^i & -iD_0 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = 0$$

Nach Ansatz: $iD_0 \rightarrow E + e\Phi$, $iD_i \sigma^i = -\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})$.

$$\begin{aligned} (E - m + e\Phi)\psi_A - \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})\psi_B &= 0 \\ (-E - m - e\Phi)\psi_B + \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})\psi_A &= 0 \end{aligned}$$

Eliminiere

$$\begin{aligned} \psi_B &= \frac{\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})}{E + m + e\Phi} \psi_A \cong \left(\frac{1}{2m} + \mathcal{O}(m^{-2}) \right) \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}) \psi_A \\ \Rightarrow (E - m + e\Phi)\psi_A &= \frac{1}{2m} (\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})) (\boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})) \psi_A \end{aligned}$$

Vereinfachung der σ -Anteile

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{O}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{O}}) &= \sigma^i \hat{O}^i \sigma^j \hat{O}^j = \sigma^i \sigma^j \hat{O}^i \hat{O}^j \\ &= \left(\frac{1}{2} \{ \sigma^i, \sigma^j \} + \frac{1}{2} [\sigma^i, \sigma^j] \right) \hat{O}^i \hat{O}^j = \left(\delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k \right) \hat{O}^i \hat{O}^j \\ &= \hat{\mathbf{O}}^2 + i\epsilon^{ijk} \sigma^k \frac{1}{2} [\hat{O}^i, \hat{O}^j] \end{aligned}$$

Hier: $\hat{\mathbf{O}} = (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})$:

$$\dots = (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + i\epsilon^{ijk} \sigma^k (-i\partial_i eA^j)$$

$$= (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + e\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

$$(E - m + e\Phi)\psi_A = \left[\frac{(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \psi_A$$

Pauli-Gleichung enthält Term $\mathbf{S} \cdot \mathbf{B}$ ($\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2$) mit Vorfaktor:

$$g_s \frac{e}{2m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad , \quad g_s = 2$$

Bedeutung des g_s -Terms Allg. Hamiltonian für magnetischen Dipol $\boldsymbol{\mu}$ im \mathbf{B} -Feld:

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}_{ext}$$

Vergleich mit Pauli-Gleichung liefert $\boldsymbol{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m} \mathbf{S}$ mit $g_s = 2$. Das ist ein intrinsisches magnetisches Dipolmoment, proportional zum Spin.

Vergleich mit klassischer Elektrodynamik (rotierende Ladungsverteilung, Ladung Q , Masse M , Drehimpuls \mathbf{L}) liefert $\boldsymbol{\mu} = \frac{Q}{M} \mathbf{L} \Rightarrow$ Klassisches Ergebnis entspricht $g = 1$.

Interpretation des ersten Terms (identisch in der nicht-relativistischen Schrödingergleichung)

$$\frac{(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2}{2m} = \underbrace{\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}}_{E_{kin}} + \underbrace{\frac{e}{2m}(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}})}_{\text{e.m. WW}} + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2$$

Bsp. homogenes \mathbf{B} -Feld: setze $\mathbf{A}(x) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} \times \mathbf{B})$, dann $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

$$\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{L}}$$

$$\Rightarrow \text{Erster Term} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{e}{2m} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{L}} + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2$$

1.4.5 Weitere Konsequenzen: Spin-Bahn-Kopplung

Höhere Ordnungen im nicht-relativistischen Limes:

- Spin-Bahn-Kopplung $\sim \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ (Feinstrukturaufspaltung)
- Darwin-Term
- Korrektur E-kin.

Saubere Herleitung durch systematische Entwicklung in Potenzen von m . $\frac{1}{m}$ sei eine kleine Größe.
 \rightarrow Foldy-Wouthuysen-Transformation/-Bild.

$$(i\not{D} - m)\psi = 0$$

$$\Leftrightarrow i\partial_t \psi = (-e\Phi + m\gamma^0 - iD_i \gamma^0 \gamma^i) \psi = H_D \psi$$

Idee: Unitäre Transformation / neues "Bild", Zerlegung in 2-Spinoren.

$$\psi = e^{-iS} \psi' = e^{-iS} \begin{pmatrix} \psi'_A \\ \psi'_B \end{pmatrix}$$

S hermitesch, eventuell t -abhängig.

Neuer Hamiltonian:

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi' &= i\partial_t(e^{iS}\psi) = (i\partial_t e^{iS})\psi + e^{iS}i\partial_t\psi \\ &= [(i\partial_t e^{iS})e^{-iS} + e^{iS}H_D e^{-iS}] \psi' \\ H'_D &= i(i\dot{S} + \frac{i^2}{2}[S, \dot{S}] + \frac{i^3}{6}[S, [S, \dot{S}]] + \dots) + H_D + i[S, H_D] + \frac{i^2}{2}[S, [S, H_D]] + \dots \end{aligned}$$

Idee 2: H'_D soll blockdiagonal sein in 2-Spinoren (bis zu bestimmter Ordnung) \rightarrow Gleichung für ψ'_A reicht aus.

Konkret:

$$H_D = m\gamma^0 + (-e\Phi) + \begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{m\gamma^0}_{\mathcal{O}(m^1)} + \underbrace{\mathcal{E}}_{\mathcal{O}(m^0)} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\mathcal{O}(m^0)}$$

Häufige Umformung: $\gamma^0 O = -O\gamma^0$ mit ungeradem Operator O .

1. Schritt: arbeite bis $\mathcal{O}(m^0)$: Setze $S = \mathcal{O}(m^{-1})$

$$\begin{aligned} H'_D &= H_D + i[S, H_D] + \mathcal{O}(m^{-1}) = m\gamma^0 + \mathcal{E} + \mathcal{O} + i[S, m\gamma^0 + \mathcal{E} + \mathcal{O}] + \mathcal{O}(m^{-1}) \\ &= m\gamma^0 + \mathcal{E} + \mathcal{O} + i[S, m\gamma^0] \end{aligned}$$

Lösung: $S = -\frac{i}{2m}\gamma^0\mathcal{O}$

Damit H'_D komplett ausrechnen bis $\mathcal{O}(m^{-2})$:

$$H'_D = H_D + i[S, H_D] - \dot{S} + \frac{i^2}{2}[S, [S, H_D]] - \frac{i}{2}[S, \dot{S}] + \frac{i^3}{6}[S, [S, [S, H_D]]] + \mathcal{O}(m^{-3})$$

Für die einzelnen Terme finden Wirkung

$$\begin{aligned} i[S, H_D] &= i \left[-\frac{i}{2m}\gamma^0\mathcal{O}, m\gamma^0 + \mathcal{E} + \mathcal{O} \right] = -\mathcal{O} + \frac{1}{2m}\gamma^0[\mathcal{O}, \mathcal{E}] + \frac{1}{m}\gamma^0\mathcal{O}^2 \\ -\dot{S} &= \frac{i}{2m}\gamma^0\dot{\mathcal{O}} \\ \frac{i}{2}[S, \dot{S}] &= -\frac{i}{8m^2}[\mathcal{O}, \dot{\mathcal{O}}] \\ \frac{i^2}{2}[S, [S, H_D]] &= -\frac{1}{2m}\gamma^0\mathcal{O}^2 - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]] - \frac{1}{2m^2}\mathcal{O}^3 \\ \frac{i^3}{3!}[S, [S, [S, H_D]]] &= \frac{1}{6m^2}\mathcal{O}^3 \end{aligned}$$

Der neue Hamiltonian ist nun

$$\begin{aligned} H'_D &= \underbrace{m\gamma^0 + \mathcal{E} + \frac{1}{2m}\gamma^0\mathcal{O}^2 - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}, i\dot{\mathcal{O}} + [\mathcal{E}, \mathcal{O}]]}_{\text{gerade} =: H'_{D,\text{even}}} + \\ &= \underbrace{\frac{1}{2m}\gamma^0(i\dot{\mathcal{O}} + [\mathcal{O}, \mathcal{E}]) - \frac{1}{6m^2}\mathcal{O}^3}_{\text{ungerade} =: \mathcal{O}'} \\ &=: H'_{D,\text{even}} + \mathcal{O}' \end{aligned}$$

2. Schritt: arbeite bis $\mathcal{O}(m^{-1})$:

In Analogie setzen wir $\psi' = e^{iS'}\psi''$ mit $S' = -\frac{i}{2m}\gamma^0\mathcal{O}'$ und erhalten

$$H_D'' = H_{D,\text{even}}' + i[S', \mathcal{E}] - \dot{S}' + \mathcal{O}(m^{-3}) := D_{D,\text{even}} + \mathcal{O}''$$

3. Schritt: arbeite bis $\mathcal{O}(m^{-2})$:

Wir setzen wieder $\psi'' = e^{iS''}\psi'''$ mit $S'' = -\frac{i}{2m}\gamma^0\mathcal{O}'' = \mathcal{O}(m^{-3})$.

HIER FEHLT NOCH DIE GLEICHUNG FÜR H_D'''

Vollständig ausgerechnet:

$$H_D''' = \underbrace{m\gamma^0 + \mathcal{E} + \frac{1}{2m}\gamma^0\mathcal{O}^2}_{\mathcal{O}(m^{-1})} - \underbrace{\frac{1}{8m^2}[\mathcal{O}, i\dot{\mathcal{O}} + [\mathcal{O}, \mathcal{E}]]}_{\mathcal{O}(m^{-2})}$$

- Terme bis $\mathcal{O}(m^{-1})$ liefern genau den Limes aus 1.4.4 inkl. des $g-2$ -Terms
- Zusätzliche Terme der relativistischen Korrektur bis $\mathcal{O}(m^{-2})$

Wir diskutieren diese Terme anhand des Zentralpotentials mit $\mathbf{A} = 0$ und $\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi(r)$ mit $r = |\mathbf{x}|$.
Es ergeben sich die Terme

$$\begin{aligned}\nabla\Psi(r) &= \frac{\mathbf{x}}{r} \frac{d\Psi}{dr} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Psi \\ \mathcal{E} &= e\Psi \\ \mathcal{O} &= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla & 0 \end{pmatrix} \\ [\mathcal{O}, \mathcal{E}] &= -ie \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} & 0 \end{pmatrix} \\ [\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{E}]] &= (-i)(-ie) \begin{pmatrix} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}] & 0 \\ 0 & [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}] \end{pmatrix} \\ [\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}] &= \sigma^i \sigma^j (\partial_i E^j + E^j \partial_i) - \sigma^j \sigma^i E^j \partial_i \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E} + \underbrace{i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})}_{=0} + \underbrace{i^2 \epsilon^{ijk} \sigma^k E^j \partial_i}_{=2\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p})} \\ &= \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{2}{r} \frac{d\Psi}{dr} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}\end{aligned}$$

Wir finden den nun bis zum $\mathcal{O}(m^{-2})$ Term blockdiagonalen Hamiltonian

$$H_D''' = \frac{e}{8m^2} \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{e}{2m^2 r} \frac{d\Psi}{dr} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$$

Der obere Block ist

$$\begin{aligned}H_{\text{eff}} &= m + H_{\mathcal{O}(m^{-1})} + H_{\mathcal{O}(m^{-2})} + \dots \\ H_{\mathcal{O}(m^{-1})} &= H_{\text{Pauli}} = -e\Psi + \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \\ H_{\mathcal{O}(m^{-2})} &= \underbrace{\frac{e}{8m^2} \nabla \cdot \mathbf{E}}_{\text{Darwin-Term}} - \underbrace{\frac{e}{2m^2 r} \frac{d\Psi}{dr} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}}_{\text{Spin-Bahn-Kopplung}}\end{aligned}$$

Diskussion:

- Darwin-Term: beim Atom $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{Kern}} \propto \delta^{(3)}(\mathbf{x})$ ergibt sich eine Korrektur für die s-Orbitale, die am Kern eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit haben
- Spin-Bahn-Kopplung: Wegen dieses Terms $[H_{\text{eff}}, \mathbf{S}] \neq 0$ und $[H_{\text{eff}}, \mathbf{L}] \neq 0$, aber $[H_{\text{eff}}, \mathbf{J}] = 0$.