③ a) Streupotential erzeugt durch Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r})\ \underbrace{e\,\delta^{(3)}(\vec{x})}_{\text{Kern}} - \underbrace{e\,|\psi_{100}(\vec{r})|^2}_{\text{Elektron}}$$

• elektrostatisches Potential!

$$V(\vec{r}) = -e\int d^3x'\,\frac{\rho(x)}{\boxed{4\pi|\vec{r}-\vec{x}'|}}$$

stört uns sehr im Ortsintegral, wollen wir ersetzen

alternativ: straightforward Elektrodynamik

b)

suche $\hat{V}(\vec{q}) = \int d^3x\, e^{-i\vec{q}\vec{x}}\, V(\vec{r})$

nutze FT von Coulomb

↳ wie Yukawa

$$\Delta\underbrace{\frac{-1}{4\pi r}}_{V_{coul}(\vec{x})} = \delta^{(3)}(\vec{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{V}_{coul} = \frac{1}{\vec{q}^2}$$

$$V_{coul}(\vec{x}) = \int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,e^{i\vec{q}\vec{x}}\,\frac{1}{\vec{q}^2}$$

$$\to \hat{V}(\vec{q}) = \int d^3x\, e^{-i\vec{q}\vec{x}} \int d^3x' \int\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{q}'(\vec{x}-\vec{x}')}\,\frac{1}{\vec{q}'^2}\,(-e\rho(\vec{r}'))$$

$$\int d^3x\, e^{-i\vec{q}\vec{x}+i\vec{q}'\vec{x}} = (2\pi)^3\,\delta^{(3)}(\vec{q}-\vec{q}')$$

$$= \int d^3x'\, e^{-i\vec{q}\vec{x}'}\,\frac{1}{\vec{q}^2}(-e\rho(\vec{x}')) = \hat{V}(\vec{q})$$

$$= \frac{1}{\vec{q}^2}\underbrace{\int d^3x'\, e^{-i\vec{q}\vec{x}'}\,\rho(\vec{r}')(-e)}_{\hat{\rho}(\vec{q})}$$

→ suche FT der Ladungsverteilung

$$\hat{\rho}(\vec{q}) = e\cdot 1 - e\underbrace{\int d^3x\,\frac{1}{\pi a_B^3}\,e^{-i\vec{q}\vec{x}}\,e^{-2r/a_B}}_{I}$$

Standardintegral

$$I = 2\pi\int dr\int d\cos\theta\ r^2\, e^{-iqr\cos\theta}\, e^{-2r/a_B}$$

$$\int_0^\infty = \frac{1}{a^2}$$

uno

$$= 2\pi\int dr\ r^2\, e^{-2r/a_B}\,\frac{1}{-iqr}\left(e^{-iqr} - e^{iqr}\right)$$

~sin

$$= \frac{2\pi}{-iq}\int dr\ r\left(e^{-r(2/a_B+iq)} - c.c.\right)$$

$$\int dx\, x\, e^{ax} = \frac{e^{ax}(ax-1)}{a^2}$$

[AKO] P.I.

$$= \frac{2\pi}{-iq}\left(\frac{1}{\left[\frac{2}{a_B}+iq\right]^2} - \frac{1}{\left[\frac{2}{a_B}-iq\right]^2}\right)$$

$$= \frac{16\pi}{a_B}\frac{1}{\left[\frac{4}{a_B{}^2}+q^2\right]^2} = I$$

$$\hookrightarrow \tilde{\rho} = e(1-I) \Rightarrow \hat{V}(q) = \frac{-e}{q^2}\tilde{\rho} = -e^2\frac{8a^2+q^2a^4}{\left[4+q^2a^2\right]^2}$$

$$\rightarrow f(\theta) = -\frac{m}{2\pi}\hat{V}(q) \qquad a_B = \frac{1}{\alpha m} = \frac{4\pi}{me^2}$$

$$\frac{me^2}{2\pi} = \frac{2}{a_B} \qquad = \frac{2a\left(8+q^2a^2\right)}{\left[4+q^2a^2\right]^2} \qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f^{(1)}(\theta)|^2$$

c)

$$\sigma^{(1)} = \int d\Omega \; |f(\theta)|^2 \qquad \int d\Omega = \int d\varphi \, d\theta \sin\theta$$

$$= 2\pi \int d\cos\theta \; |f(\theta)|^2$$

$$q^2 = 4k^2\sin^2\theta/2 = 2k^2(1-\cos\theta) = 2k^2 - 2k^2\cos\theta$$

related

$$\int_{-1}^{1} d\cos\theta \; \ldots = -\int_{4k^2}^{0}\frac{dq^2}{2k^2}\ldots = +\int_{0}^{4k^2}\frac{dq^2}{2k^2}$$

$$dq^2 = -2k^2 \, d\cos\theta$$

$\Downarrow$

$$x = \frac{q^2}{4k^2a^2} \qquad \sigma = \frac{2\pi}{2k^2}\int_0^{4k^2} dq^2 \left(\frac{2a\left(8+q^2a^2\right)}{\left[4+q^2a^2\right]^2}\right)^2$$

$$x = q^2a^2 \qquad dx = dq^2a^2 \qquad = \frac{\pi}{k^2}\frac{1}{a^2}\int_0^{4k^2a^2} dx \left(2a\,\frac{8+x}{(4+x)^2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi}{k^2}\frac{4\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}}\int_0^{4k^2a^2} dx \left(\frac{(8+x)}{(4+x)^2}\right)^2$$

rationale Fkt integrieren

Partialbruchzerlegung

$$\frac{(8+x)^2}{(4+x)^4} = \frac{A}{4+x} + \frac{B}{(4+x)^2} + \frac{C}{(4+x)^3} + \frac{D}{(4+x)^4}$$

$A=0$
$B=1$
$C=8$
$D=16$

$$\rightarrow \sigma^{(1)} = \underbrace{\pi a^2}_{\text{geometrische Fläche}} \; \frac{12 + 18 k^2 a^2 + 7 k^4 a^4}{3(1+k^2a^2)^3}$$

geometrische Fläche würde man klassisch erwarten

naiv

rationale Funktion

$\beta = k^2 a^2$

d) Kleine Energien $\beta \ll 1$

$$\sigma^{(1)} \hat{=} 4\pi a^2 \quad \text{(s-Wellenstreuung)}$$

$$\hat{=} 4 \cdot \underbrace{\text{Querschnitt}}_{\text{klassisch}}$$

s-Welle reicht meist aus!!

hohe Energien $\beta \gg 1$ (s-Welle)

hat nichts mehr mit Kugel zu tun?
hohe E ⇒ Schale-irrelevant-only scattering am Kern
→ Kern sei klein

$$\sigma^{(1)} \hat{=} \pi a^2 \frac{7}{3} \frac{1}{k^2 a^2} = \frac{7}{3}\frac{\pi}{k^2} \sim \frac{1}{k^2}$$

woran erinnert uns das?

Unitarität: $\sigma_l \leq \frac{4\pi}{k^2}(2l+1)$ ✓ $\frac{7}{3} < 4$

„richtiges" Born Kriterium:

$$\frac{m}{2\pi} \left| \int d^3x' \, V(\vec{x}') \, \phi_{\vec{k}}(\vec{x}') \cdot \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right| \ll 1$$

nutze: I) $V(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{x}} \hat{V}(\vec{q})$ haben wir schon berechnet

II) $$\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = -4\pi \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{q}(\vec{x}-\vec{x}')}}{k^2 - q^2 + i\varepsilon}$$

→ Teil 1

$$\hookrightarrow \left| \int d^3x' \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \hat{V}(\vec{q}) \, e^{i\vec{q}\vec{x}'} \, \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \, e^{i\vec{k}\vec{x}'} \right|$$

$$e^{i(\vec{q}+\vec{k})\vec{x}'}$$

first make replacement

$$= \int d^3x' \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, \tilde V(q)\, e^{i(\vec q+\vec k)\vec x'} \left(-4\pi \int \frac{dq'}{\cancel{(2\pi)^3}} \frac{e^{i\vec q'(\vec x-\vec x')}}{k^2-q'^2+i\varepsilon}\right)$$

$$(2\pi)^3\, \delta^{(3)}\left(\vec q' - (\vec q+\vec k)\right)$$

$$(\vec q+\vec k)^2 = \vec q^{\,2} + 2\vec q\vec k + \vec k^2$$

$$\underbrace{\qquad}_{-q^2-2\vec q\vec k+i\varepsilon}$$

$$= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{-4\pi\, \tilde V(q)}{-q^2-2\vec q\vec k+i\varepsilon}$$

$$\cancel{e^2 = \frac{a}{4\pi}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{2\,\cancel{4\pi}\, e^2\, a^2(8+q^2a^2)}{(4+q^2a^2)^2\left[-q^2-2\vec q\vec k+i\varepsilon\right]} \cdot \overbrace{\frac{m}{\cancel{2\pi}}}^{\text{von Bedingung}}$$

$$a = \frac{4\pi}{me^2} \qquad me^2 = \frac{4\pi}{a}$$

überflüssiges a

$$= \int \frac{d^3\bar q}{(2\pi)^3} \frac{a}{a^3} \frac{8\pi}{\cancel{a}}\, \cancel{a}\, \frac{(8+\overbrace{q^2a^2}^{\bar q^2})}{(4+\underbrace{q^2a^2}_{\bar q^2})^2} \frac{1}{\left[-\underbrace{q^2}_{\bar q^2/a^2} - \underbrace{2\vec q\vec k}_{2\bar q\gamma/a^2} + i\varepsilon\right]}$$

3 Dimensionen rescaling der Impulse

$$\bar q = qa \qquad \gamma = ka \qquad d\bar q = a\, dq$$

$$q^2 = \frac{\bar q^2}{a^2} \qquad qk = \frac{\bar q}{a}\cdot\frac{\gamma}{a} = \frac{\bar q\gamma}{a^2}$$

$$= 8\pi \underbrace{\int \frac{d^3\bar q}{(2\pi)^3} \frac{8+\bar q^2}{(4+\bar q^2)^2\left[-\bar q^2 - 2\vec{\bar q}\vec\gamma + i\varepsilon\right]}}_{\text{kann nur von } \vec\gamma \text{ abhängen}}$$

Dimensionslos

$$\Rightarrow \left| \frac{8\pi}{(2\pi)^3}\, 2\pi \int \underbrace{d\cos\theta}_{\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta}\, d\bar q\, \bar q^2 \frac{8+\bar q^2}{(4+\bar q^2)^2} \frac{1}{\left[-\bar q^2 - 2\bar q\gamma\cos\theta + i\varepsilon\right]} \right| \ll 1$$

Fälle: $\gamma = 0$ (kleine E) $\rightarrow 2\, \frac{8\pi\, 2\pi}{(3\pi)^3} \underbrace{\int d\bar q \frac{8+\bar q^2}{(4+\bar q^2)^2}}_{\frac{3\pi}{8}}$ → order 1 → det. nicht erfüllt

↪ unbrauchbar

$\gamma \to \infty$ (große E) $\int \frac{1}{\gamma} \rightsquigarrow \ln(\gamma)$

↪ könnte klappen