1. Példa
egy robotkar DH paramétereinek meghatározására

Kiegészítő anyag

Robot operációs rendszerek és fejlesztői ökoszisztémák

BMEVIIIAV55

Összeállította: Gincsainé Szádeczky-Kardoss Emese

szadeczky.emese@vik.bme.hu

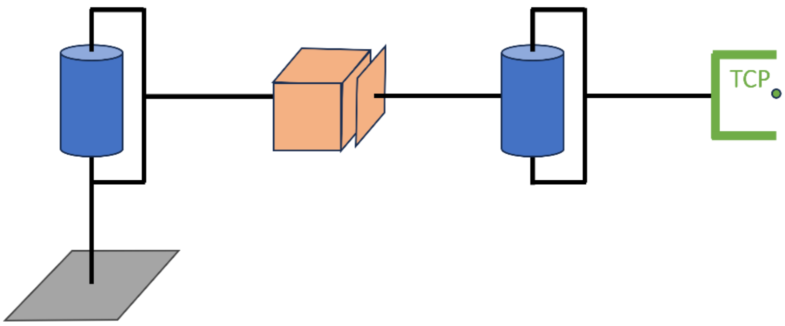
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Irányítástechnika és Informatika Tanszék

2023

Példarobot

Tekintsünk egy három szabadságfokú (3 DoF – degree of freedom) robotkart, aminek a csuklóképlete RTR, azaz egy rotációs, egy transzlációs és ismét egy rotációs csuklóból áll (ld. 1. ábra).

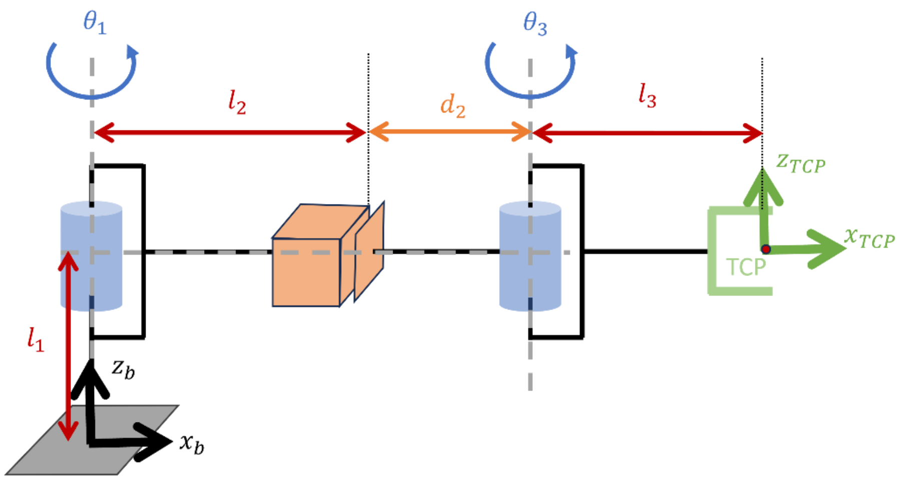


1. ábra: A példarobot

A szürke sík a fix bázist jelöli, a kék hengerek szemléltetik a rotációs csuklókat, míg a sárga kocka a transzlációs csuklót jelzi. A robot végén található egy zöld színű megfogó. A megfogó közepén lévő pont a TCP (tool center point), aminek a térbeli elhelyezkedése (pozíciója és orientációja (szöghelyzete)) alapvető fontosságú a robot által elvégzendő feladat szempontjából.

Célunk a robotkar Denavit-Hartenberg (röviden DH) paramétereinek meghatározása. Ha ismerjük ezeket a paramétereket, akkor bármilyen robotkonfiguráció esetén meg tudjuk határozni TCP helyzetét. (Robotkonfiguráció alatt azt értjük, hogy minden csukló esetén ismerjük az elmozdulás/elforgás mértékét, azaz ismertek a csuklóváltozók.)

A következő ábrán piros szín jelöli a robot geometriájához tartozó konstans mennyiségeket, l_1, l_2 és l_3 hosszakat:



2. ábra: Példarobot méretei, csuklói, fő koordináta-rendszerei

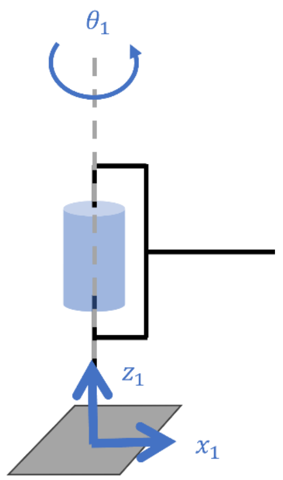
Továbbá láthatók még a csuklókhoz tartozó tengelyek is (szaggatott szürke vonalak), a csuklóváltozók (rotációs csuklóknál θ_1 és θ_3, transzlációs csuklónál d_2). Két koordináta-rendszert is jelöl az ábra. A fekete egy fix, a bázishoz rögzített koordináta-rendszer. A zöld egy, a robot megfogójával együtt mozgó koordináta-rendszer. Utóbbi origójának és bázisvektorainak helyzete leírja a megfogó elhelyezkedését a térben. (A koordináta-rendszerek a térben értelmezendők és jobbsodrásúak. A könnyebb átláthatóság érdekében az y tengelyek hiányoznak az ábráról, de könnyen kitalálható irányuk.)

DH paraméterek meghatározása

A DH paraméterek meghatározásához sorban minden csuklóhoz definiálunk egy-egy újabb koordináta-rendszert, és megadjuk ezek egymáshoz képesti helyzetét. Minden csukló esetén olyan koordináta-rendszerrel dolgozunk, aminek z tengelye egybeesik a csuklótengellyel. Az x tengely irányát az alapján határozzuk meg, hogy az egymást követő csuklótengelyek egymáshoz viszonyított geometriai elhelyezkedése milyen. Térben három eset fordulhat elő:

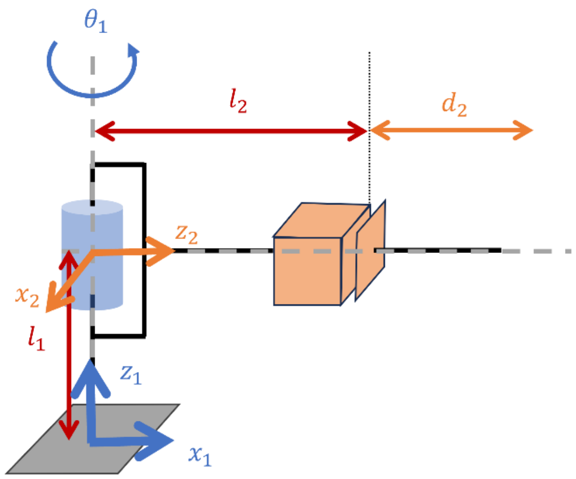
- Kitérő egyenesek: Ekkor megkeressük azt az egyenest, ami merőleges mindkét csuklótengelyre. Ez adja az újonnan meghatározandó koordináta-rendszer x tengelyének egyenesét. (Az előadás fóliákon ilyen példa szerepelt.)
- Metsző egyenesek: Ekkor a két egyenes irányvektorának keresztszorzata adja meg az új x irányt.
- Párhuzamos egyenesek: Bármely, mindkét csuklótengelyre merőleges egyenes választható x irányának, de érdemes olyat keresni, ami egyszerű DH alakot eredményez (pl. 0 lesz valamelyik paraméter értéke).

A legelső csuklóhoz tartozó koordináta-rendszer esetén tetszőleges x irány alkalmazható, ami merőleges z_1-re, azaz az első csuklóhoz tartozó forgástengelyre. Például élhetünk azzal a választással, hogy az első csuklóhoz olyan koordináta-rendszer veszünk fel, ami egybeesik a fekete bázis koordináta-rendszerrel. (Megfigyelhető, hogy a koordináta-rendszer origója nem esik egybe a csukló pozíciójával. Ez nem gond. A lényeg, hogy a z tengely egyezzen meg a csuklótengellyel.)



3. ábra: Az első csuklóhoz rendelt koordináta-rendszer

Nézzük a következő csuklótengelyt. A transzlációs csuklóhoz egy vízszintes tengely tartozik. Az első csukló tengelye metszi ezt az egyenest, ezért a keresztszorzatuk határozza meg x_2 tengelyt:



4. ábra: A második csuklóhoz is rendelünk koordináta-rendszert

Most nézzük meg, hogy miként lehet x_1, z_1 koordináta-rendszert átvinni x_2, z_2-be. A DH konvenció szerint négy műveletet végzünk el egymás után:

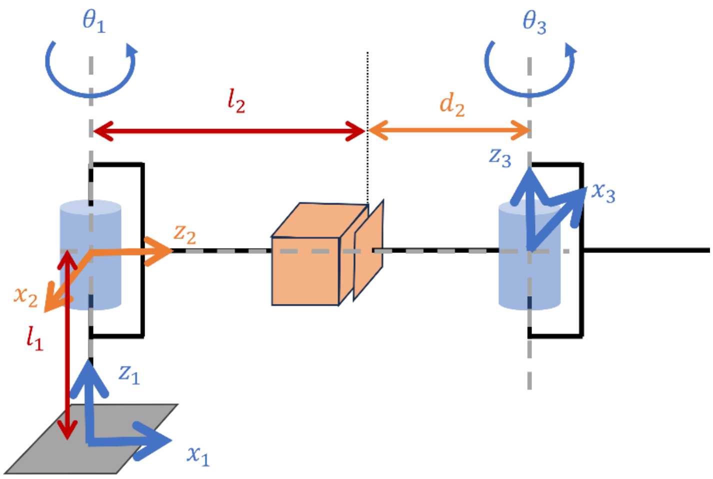
1. Forgatás a régi z tengely körül θ_i szöggel
2. Eltolás a régi z tengely mentén d_i távolsággal
3. Eltolás az új x tengely mentén a_i távolsággal
4. Forgatás az új x tengely körül α_i szöggel

Nézzük sorra ezt a négy lépést x_1, z_1 és x_2, z_2 esetén:

1. Először z_1 körül $\theta_1 - \frac{\pi}{2}$ rad szöggel kell forgatást végezni, hogy az elforgatott x_1 tengely párhuzamos legyen x_2-vel. (Az ábrán $\theta_1 = 0$ rad helyzetben látjuk a robotkart.)
2. Ha z_1 tengely mentén l_1 eltolást végzünk, akkor az origó az x_2 tengelyre kerül.
3. Most 0 m eltolásra van szükség x_2 mentén, hiszen az origók egybeesnek.
4. Azt kell megmondani, hogy x_2 tengely körül mekkora elforgatást kell végeznünk, hogy z_1-et z_2-be forgassuk. Az ábráról leolvasható, hogy ez $-\frac{\pi}{2}$ rad

A felsorolásban pirossal kiemelt mennyiségek az első csuklóhoz tartozó DH paraméterek.

Következhet a harmadik csuklóhoz tartozó koordinátarendszer meghatározása. Van egy függőleges forgástengelye, ez fogja adni z_3 irányát. Mivel a megelőző (transzlációs) csukló tengelye metszi az új csukló tengelyét, ismét a keresztszorzat alapján határozhatjuk meg x_3 tengelyt:

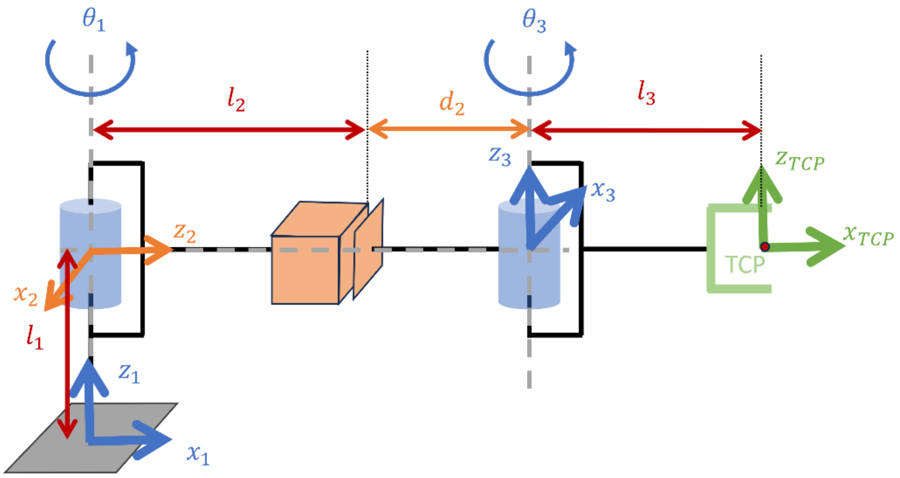


5. ábra: A harmadik koordináta-rendszer definiálása

Nézzük a négy lépést, ami átviszi x_2, z_2 koordináta-rendszert x_3, z_3-ba:

1. Ha z_2 tengely körül x_2-t π rad-nyit elforgatjuk, akkor párhuzamos lesz x_3-mal. (Lehet forgatni $-\pi$ radiánnal is, a végeredmény ugyanaz lesz.)
2. Most végezzünk z_2 mentén egy $l_2 + d_2$ hosszúságú eltolást. Így x_3 egyenesén lesz az új origó.
3. Mivel az origók pontosan egybeesnek, 0 m eltolásra van szükség x_3 mentén.
4. Végül $-\frac{\pi}{2}$ rad-nyi elforgatásra van szükség x_3 körül ahhoz, hogy z_2-t beforgassuk z_3-ba.

Most már csak azt kell megadni, hogy a TCP-hez rendelt koordináta-rendszer miként érhető el x_3, z_3 koordináta-rendszerből kiindulva:



6. ábra: A példarobot összes koordináta-rendszere

A négy lépés a következő:

1. z_3 tengely körül $\theta_3 - \frac{\pi}{2}$ rad elforgatással x_3 párhuzamos lesz x_{TCP}-vel.
2. z_3 tengely mentén most 0 m eltolásra van szükség, hiszen az origó már az új x tengelyen helyezkedik el.
3. Az új x_{TCP} mentén kell l_3 eltolást végeznünk.
4. x_{TCP} körül 0 rad elforgatásra van szükség, hiszen z_3 párhuzamos volt z_{TCP}-vel.

Gyűjtsük össze minden csuklóra a négy DH paramétert, amit egy táblázatba lehet röviden összefoglalni:

1. táblázat: A példarobot DH paraméterei

i	θ_i [rad]	d_i [m]	a_i [m]	α_i [rad]
1	$\theta_1 - \frac{\pi}{2}$	l_1	0	$-\frac{\pi}{2}$
2	π	$l_2 + d_2$	0	$-\frac{\pi}{2}$
3	$\theta_3 - \frac{\pi}{2}$	0	l_3	0

Homogén transzformációs mátrixok felírása

Megjegyzés: Ez a rész csak érdekességként került ide azok számára, akik tudják, mi az a homogén transzformációs mátrix.

Amennyiben ismertek a DH paraméterek, csuklóról-csuklóra és az eredő transzformációs mátrixot is fel lehet könnyedén írni. Nézzük a négy DH-lépésnek milyen transzformációs mátrixok felelnek meg általánosan!

1. Egy z tengely körüli elforgatás θ_i szöggel:
$$\begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
2. Egy z tengely körüli eltolás d_i-vel:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
3. Egy x tengely körüli eltolás a_i-vel:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
4. Egy x tengely körüli elforgatás α_i szöggel:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A négy mátrix szorzata adja meg az egy csuklóhoz tartozó homogén transzformációs mátrixot:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel az 1. táblázatban összefoglalt paraméterekre. Kezdjük az $i = 1$ sorral:

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)\cos-\frac{\pi}{2} & \sin\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)\sin-\frac{\pi}{2} & 0\cdot\cos\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)\cos-\frac{\pi}{2} & -\cos\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right)\sin-\frac{\pi}{2} & 0\cdot\sin\left(\theta_1-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \sin-\frac{\pi}{2} & \cos-\frac{\pi}{2} & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ -\cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az eredményként kapott mátrix első oszlopának első három eleme ($(\sin\theta_1\,, -\cos\theta_1\,, 0)^T$) megadja x_2 bázisvektort az x_1, z_1 koordináta-rendszerben felírva. Hasonlóan, a második oszlop ($(0{,}0,-1)^T$) y_2 , a harmadik oszlop ($(\cos\theta_1, \sin\theta_1, 0)^T$) z_2 bázisvektor az x_1, z_1 koordináta-rendszerben felírva. Az x_2, z_2 koordináta-rendszer origójának pozícióját az x_1, z_1 koordináta-rendszerben pedig az utolsó oszlop első három eleme adja ($(0{,}0, l_1)^T$). (Ez a 4. ábra alapján ellenőrizhető.)

Nézzük most $i = 2$-t:

$$\begin{bmatrix} \cos\pi & -\sin\pi\cos-\frac{\pi}{2} & \sin\pi\sin-\frac{\pi}{2} & 0\cdot\cos\pi \\ \sin\pi & \cos\pi\cos-\frac{\pi}{2} & -\cos\pi\sin-\frac{\pi}{2} & 0\cdot\sin\pi \\ 0 & \sin-\frac{\pi}{2} & \cos-\frac{\pi}{2} & l_2+d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_2+d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az 5. ábra alapján ellenőrizhető, hogy ha az x_2, z_2 koordináta-rendszerben fel szeretném írni sorra x_3, y_3 és z_3 bázisvektorokat, akkor az eredményül kapott mátrix első három oszlopának felső három elemét kapom, az origó pozíciója pedig az utolsó oszlopban található.

Írjuk fel $i = 3$-ra a homogén transzformációs mátrixot:

$$\begin{bmatrix} \cos\left(\theta_3-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\theta_3-\frac{\pi}{2}\right)\cos 0 & \sin\left(\theta_3-\frac{\pi}{2}\right)\sin 0 & l_3\cos\left(\theta_3-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta_3-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\theta_3-\frac{\pi}{2}\right)\cos 0 & -\cos\left(\theta_3-\frac{\pi}{2}\right)\sin 0 & l_3\sin\left(\theta_3-\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \sin 0 & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3\sin\theta_3 \\ -\cos\ \theta_3 & \sin\theta_3 & 0 & -l_3\cos\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A kapott eredmény összevethető a 6. ábrával. A TCP-hez tartozó koordináta-rendszert írtuk most fel x_3, z_3 koordináta-rendszerben.

Ha az első, x_1, z_1 kooridánáta-rendszerben szeretném megkapni TCP koordináta-rendszer helyzetét, akkor az előző három mátrixot össze kell szorozni:

$$\begin{bmatrix} \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ -\cos\theta_1 & 0 & \sin\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_2 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & l_3 \sin\theta_3 \\ -\cos\ \theta_3 & \sin\theta_3 & 0 & -l_3 \cos\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_3) & -\sin\,(\theta_1 + \theta_3) & 0 & (d_2 + l_2)\cos\theta_1 + l_3\cos(\theta_1 + \theta_3) \\ \sin(\theta_1 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_3) & 0 & (d_2 + l_2)\sin\theta_1 + l_3 \sin\,(\theta_1 + \theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Azt látjuk, hogy a TCP koordináta-rendszer bázisvektorai könnyen felírhatók az első koordináta-rendszerben, hiszen összességében annyi történt, hogy $\theta_1 + \theta_3$ szöggel elforgattuk a bázisvektorok a z_1 tengely körül. (A bal felső 3×3-as méretű mátrix ennek felel meg.) A TCP pozíciójának koordinátáit az utolsó oszlopban látjuk. A z koordináta ellenőrzése egyszerű, a másik kettőhöz kell egy kis matek.

Ha ismerjük a robot geometriai felépítéséből származó l_1, l_2, l_3 konstans paramétereket, akkor egy adott $(\theta_1, d_2, \theta_3)^T$ robotkonfigurációhoz a fenti mátrix segítségével egyértelműen meg tudjuk mondani, hogy hol helyezkedik el a térben végberendezés (TCP). Ezt nevezzük direkt geometriai feladatnak. Az inverz geometriai feladat ennek az ellentéte: Megmondjuk, hogy hol legyen a TCP, és ki kell találni hozzá a csuklóváltozók $(\theta_1, d_2, \theta_3)$ értékeit. Ez utóbbi feladatra viszont általában nincs ilyen szépen levezethető, általánosan alkalmazható analitikus megoldás.