

A számításelmélet alapjai II.

1. gyakorlat

Cél: A logika tárgyának ismertetése. Ítéletlogika nyelvének megismerése.

Fogalmak: következtetési forma, állítás, logikai műveletek, ítéletlogika szintaxisa, formula, részformula, formula összetettsége, prioritás, zárójelezés, interpretáció, igazságtábla, szemantikus fa

Logika (és a matematikai logika) **tárgya** az emberi gondolkodás vizsgálata.

A gondolkodás fontos része a mindennapi életnek.

A gondolkodás fontos része bármely (humán- vagy természet-) tudománynak

A logika tárgya, célkitűzése.

Gondolkodási folyamatok vizsgálata

A helyes következtetés törvényeinek feltárása.

KÖVETKEZTETÉS - (ekvivalens megfogalmazások)

Adott ismeretek \Rightarrow új ismeret

premisszák \Rightarrow konklúzió

feltételek \Rightarrow következmény

állítások \Rightarrow állítás

$A \Rightarrow$ jel a gondolkodási folyamatot jelöli, amelynek eredménye a következmény.

Definíció: Gondolkodásforma vagy következtetésforma egy $F = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ állításhalmaz és egy A állításból álló (F, A) pár.

Definíció:

Helyes következtetésforma egy (F, A) pár, ha minden olyan esetben, amikor az F -ben minden állítás igaz, akkor a következmény állítás (az A állítás) is igaz.

Logika (és a matematikai logika) feladata, helyes gondolkodásformák kiválasztása és új helyes következtetési formák keresése.

Példa (csak a logikai összekötő jelek értelmén alapuló következtetésre)

Ha nálam van a kapukulcs, akkor ki tudom nyitni a kaput.

Nálam van a kapukulcs. _____ (tehát)

Ki tudom nyitni a kaput.

A következtetés sémája:

Ha A, akkor B.

A. _____ (tehát)

B.

Egy másik következtetés:

Erika Sándor felesége.

Anna Sándor édesanyja. _____ (tehát)

Anna Erika anyósa.

Kérdés, itt mi a séma?

Az állítás és az állítások közötti kapcsolatok a logika alapját képezik.

Feladat: Helyes-e az alábbi okoskodás? Mi az okoskodás sémája?

Ha a benzin elfogyott az autóból, akkor az autó megáll. Nem fogyott el a benzin. Tehát az autó nem áll meg.

Ha A, akkor B.

Nem A. _____ (tehát??)

Nem B.

Az állítás fogalma, igazságértéke. Hogyan lehet az állítás igazságértékét megállapítani?

Az **állítás** egy olyan kijelentés, amelyről el lehet dönteni, hogy igaz-e vagy nem.

Azt, hogy egy állítás **igaz (i)** vagy **hamis (h)** az állítás **igazságértékének** nevezzük.

Klasszikus kétértékű logikában két igazságértéket használunk.

Ellentmondástalanság elve: egyetlen állítás sem lehet igaz is és hamis is.

Kizárt harmadik elve: nincs olyan állítás, amely sem nem igaz, sem nem hamis.

Az állítás igazságértékét vagy tapasztalati tények, vagy a tudományos eredmények ismeretében állapítjuk meg.

Nem állítás egy mondat, ha

- nem kijelentő mondat,
- **nem létező individuumról** állít valamit,
- az állítás **nem egyértelmű**;
- az állítás **jövőidejű**;
- **nem dönthető el, hogy igaz-e vagy nem.**

Feladat: Döntsük el, hogy az alábbi mondatok közül melyek állítások!

1. Piros a hó.
2. Anna tud úszni.
3. Amelyik kutya ugat az nem harap.
4. Holnap megírom a leckém.
5. Ha nem tanulok, akkor rossz eredményt érek el.
6. A magyar államfő felesége tanár.
7. Iskolánk igazgatója 50 éves.
8. Iskolánk tanára 50 éves.
9. Péter nem túl öreg.
10. Az 5 nagyobb, mint 3.
11. x nagyobb, mint 3, ahol x eleme a természetes számoknak.
12. „Minden krétai hazudik.” Mondta az általam ismert egyetlen krétai.

Megoldás: 1., 2., 3., 5., 7., 10.

Gyakorlat (vagy házi feladat):

Döntsük el, hogy az alábbi mondatok közül melyek állítások!

1. Budapesten 2007. szeptember 7-én sütött a nap.
2. Egynél több páros törzsszámnak kell lennie.
3. Ádám, hol voltál?
4. A világháborúban.

5. Ami nem azonos önmagával, az különbözik minden mástól is.
6. Van-e ennek valami értelme?
7. Minden szám osztható vagy kettővel vagy hárommal.
8. Semmi nem ugyanaz többé.
9. A Vénusz azonos az Esthajnalcillaggal.
10. Vedd tudomásul, ami elromolhat, az el is romlik!

Függvényosztályozás, D: értelmezési tartomány, R: értékkészlet

1. logikai függvény

D tetszőleges, $R = \{i, h\}$

2. matematikai függvény – művelet.

$D = \mathbb{R}^n$.

Logikai műveletek

A lehetséges kétváltozós logikai műveletek közös igazságtáblája.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$	$\neg \leftrightarrow$	$\neg \wedge$	$\neg \vee$	$\neg \rightarrow$	$\neg \leftarrow$	$X \leftarrow Y$	$\neg X$	$\neg Y$	X	Y	i	h
i	i	i	i	i	i	h	h	h	h	h	i	h	h	i	i	i	h
i	h	h	i	h	h	i	i	h	i	h	i	h	i	i	h	i	h
h	i	h	i	i	h	i	i	h	h	i	h	i	h	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i	h	i	i	h	h	i	i	i	h	h	i	h

A táblázat tartalmazza a 16 db. 2-változós műveletet (köztük található a 4.db.1- és a 2.db. 0-változós művelet).

Az ítéletlogika leíró nyelve

ábécé= ítéletváltozók X, Y, X_i, \dots együttesen V_I -vel jelöljük

unér és binér logikai műveleti jelek $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

elválasztójelek $()$

a teljes ábécé V_θ

Szintaxis (L_0 ítéletlogika)

1. (alaplépés) minden ítéletváltozó ítéletlogikai formula. (prímformula)

2. (rekurzív lépés)

Ha A ítéletlogikai formula, akkor $\neg A$ is az.

Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor $(A \circ B)$ is ítéletlogikai formula (\circ) a három binér művelet bármelyike.

3. Minden ítéletlogikai formula az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Definíció: Formula logikai összetettsége $l(A)$ (rekurzív definíció)

1. Ha A ítéletváltozó, akkor $l(A)=0$

2. $l(\neg A)=l(A)+1$

3. $l(A \circ B)=l(A)+l(B)+1$

Annak érdekében, hogy a formulákat kevesebb zárójellel írassuk fel bevezetjük a műveletek **prioritását** csökkenő sorrendben: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$

Feladat: a) Adjuk meg, hogy mennyire összetettek az alábbi formulák!

b) Hagyjuk el a lehető legtöbb zárójelet az alábbi formulákból!

1. $((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (\neg X \vee Z)$
2. $((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$
3. $((X \rightarrow (\neg Y \wedge Z)) \vee (X \wedge Y)) \wedge Z$
4. $((Q \rightarrow (P \wedge R)) \wedge \neg((P \vee R) \rightarrow Q))$

Feladat: Döntsük el, hogy mi igaz az alábbi karakter sorozatokra!

- a) $P \rightarrow Q \rightarrow R \wedge \neg(P) \rightarrow P$ nem formula/ konjunkciós/ diszjunkciós/ implikációs
- b) $(P \vee Q) \vee R \wedge (\neg P \rightarrow P)$ nem formula/ konjunkciós/ diszjunkciós/ implikációs
- c) $P \wedge Q \neg(Q \vee R) \wedge \neg(P \rightarrow P)$ nem formula/ konjunkciós/ diszjunkciós/ implikációs
- d) $(P \rightarrow R) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \vee Q \rightarrow R))$ nem formula/ konjunkciós/ diszjunkciós/ implikációs
- e) $Q \rightarrow (P \wedge R) \wedge \neg(P \vee R) \vee Q$ nem formula/ konjunkciós/ diszjunkciós/ implikációs

Definíció: *Interpretáció:* $I: V_v \rightarrow \{i, h\}$

Egy formula véges sok ítéletváltozót tartalmaz és így a formula vizsgálatához csak ezeknek az interpretációja szükséges. Szerepeljenek egy formulában az $\{X, Y, Z\}$ ítéletváltozók. E változók egy sorrendjét bázisnak nevezzük. Legyen most a bázis X, Y, Z . Ekkor az összes interpretációt megadhatjuk **táblázattal** vagy *szemantikus fával*.

Definíció: Egy *n*-változós formula igazságtáblája egy olyan $n+1$ oszlopból és 2^n+1 sorból álló táblázat, ahol a fejlécben a bázis (a formula változói rögzített sorrendben) és a formula szerepel. A sorokban a változók alatt az **interpretációk** (a **változók igazságkiértékelései**), a formula alatt a formula **helyettesítési értékei** találhatók.

Definíció: Egy *n*-változós szemantikus fa egy **n-szintű bináris fa**, ahol a szintek a bázisbeli változóknak vannak megfelelően. Egy *X* változó szintjén a csúcsokból kiinduló élpárokhoz *X*, $\neg X$. címkéket rendelünk. **X** jelentése **X igaz**, $\neg X$ jelentése **X hamis**, így egy *n*-szintű szemantikus fa ágain az összes (2^n) lehetséges igazságkiértékelés (**I interpretáció**) megjelenik.

Feladat: Készítsük el az alábbi formula igazságtábláját!

$$P \rightarrow Q \rightarrow R \wedge \neg(R \rightarrow P)$$

Feladat: Bizonyítsuk be igazságtáblával, hogy $(\{A \rightarrow B, \neg A\}, \neg B)$ következtetési forma nem helyes!