Ítéletlogika

A. Elméleti háttér

0. Bevezetés

Állítások

Csak kétértékű logikai modellekkel foglalkozunk, azaz kétfajta **igazságérték** van, az igaz (i) és a hamis (h). (Néha 1 és 0.)

Az **egyszerű állítás** egy olyan jelen vagy múlt idejű, kijelentő módú egyszerű, magyar nyelvű mondat létező individuum(ok)ról, amelynek az igazságértéke egyértelműen, kontextustól függetlenül eldönthető.

Az **összetett állítás** egy egyszerű állításokból álló összetett mondat, amelynek az igazságértéke csak az egyszerű állítások igazságértékeitől függ. Ezért az összetett állítások csak olyan nyelvtani összekötő szavakat tartalmazhatnak amelyek logikai műveleteknek feleltethetőek meg.

Logikai műveletek

A legfontosabb logikai műveletek:
$\neg$ **negáció** (nem igaz, hogy...)
$\wedge$ **konjunkció** (logikai és)
$\vee$ **diszjunkció** (megengedő vagy)
$\rightarrow$ **implikáció** (ha ... akkor ...) [alternatív jelölés: $\supset$]

x	y	$\neg x$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$
i	i	h	i	i	i
i	h	h	h	i	h
h	i	i	h	i	i
h	h	i	h	h	i

I. Szintaktika

Az ítéletlogika leíró nyelve

Ábécé

Adott (megszámlálhatóan) végtelen sok ún. **ítéletváltozó**: Var$= \{x, y, z; x_1, x_2, \ldots\}$, továbbá a $\neg; \wedge; \vee; \rightarrow$; (;) szimbólumok.

Ítéletlogikai formulák Form nyelve

- Az ítéletváltozók ítéletlogikai formulák. (Ezek az ú.n. prímformulák.)
- Ha A és B ítéletlogikai formulák, akkor $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$ is ítéletlogikai formulák.
- Csak az ítéletlogikai formula, ami az első két pont alapján az. (Tehát az első két pont véges sokszori alkalmazásával kapott (véges) sorozatok az ítéletlogikai formulák.)

Alapfogalmak
(itt néhány fogalom kicsit formálisabban van definiálva, mint az előadáson)

Az ítéletlogikai formulák logikai összetettsége

- Egyetlen, x ítéletváltozóból álló prímformula logikai összetettsége 0, azaz $\ell(x) = 0$.
- $\ell(\neg A) = \ell(A) + 1$.
- $\ell(A \circ B) = \ell(A) + \ell(B) + 1$, ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Közvetlen részformula

- Az egyetlen, x ítéletváltozóból álló prímformulának nincs közvetlen részformulája.
- $\neg A$ közvetlen részformulája A.
- $A \circ B$ közvetlen részformulája A és B, ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

Részformula

- Maga a formula részformulája önmagának.
- Formula részformulájának közvetlen részformulái részformulái a formulának.
- Csak ezek a formula részformulái.

Logikai műveletek hatásköre

A logikai műveletek hatásköre a formula részformulái közül az a legkisebb logikai összetettségű, amelyben az adott logikai összekötőjel előfordul.

Formula fő műveleti jele (logikai összekötője)

Formula fő műveleti jele az a logikai művelet, melynek hatásköre az egész formula.

A fő logikai összekötő alapján megkülönböztetünk **negációs** ($\neg$), **konjunkciós** ($\wedge$), **diszjunkciós** ($\vee$), **implikációs** ($\rightarrow$) formulákat.

Formula szerkezeti fája

Olyan gyökeres, csúcscímkézett, bináris fa, ahol a gyökér címkéje maga a formula, a csúcsok címkéi pedig a formula részformulái. Egy csúcs gyerekeinek címkéi a csúcsnak megfelelő részformula közvetlen részformulái.

zárójelelhagyás

Prioritási sorrend: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
zárójelelhagyás célja egy formulából a legtöbb zárójel elhagyása a formula szerkezetének megtartása mellett.

- a formula külső zárójel párjának elhagyása (ha még van ilyen)

- egy binér logikai összekötő hatáskörének A közvetlen részformulája esetén A külső zárójelei akkor hagyhatók el, ha A fő logikai összekötőjele nagyobb prioritású nála.

Láncformulák zárójelelhagyása:

- Konjunkció illetve diszjunkcióánc esetén minden belső zárójel elhagyható.
- Implikációlánc: $(A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to \ldots A_n)))$ a default zárójelezés.

II. Szemantika

A logika nyelvének interpretációja:

Az A formula interpretációja az $I : \mathrm{Var}(A) \to \{i, h\}$ függvény. ($\mathrm{Var}(A)$: A ítéletváltozóinak halmaza.)

Formulák igazságkiértékelése

Egy I interpretációban egy A formula $\mathcal{B}_I(A)$ **igazságértékét** (helyettesítési értékét, Boole értékét) a következőképpen kapjuk meg:

- ha A ítéletváltozó, akkor $\mathcal{B}_I(A) := I(A)$,
- $\mathcal{B}_I(\neg A) := \neg\mathcal{B}_I(A)$,
- $\mathcal{B}_I(A \circ B) := \mathcal{B}_I(A) \circ \mathcal{B}_I(B)$, ahol $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$

  (Az igazságértékek logikai műveleteit a korábbi táblázat alapján értelmezzük.)

Igazságtábla

Egy formula igazságértéke csak a benne szereplő ítéletváltozók kiértékelésétől függ. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ az A formulában szereplő ítéletváltozók.

Az ítéletváltozók egy rögzített sorrendjét **bázisnak** nevezzük.

2^n lehetséges interpretáció van (ha nem törődünk a formulában nem szereplő ítéletváltozók kiértékelésével).

Egy A ítéletlogikai formula **igazságtáblája** egy $2^n \times (n+1)$-es táblázat, ha $x_1, \ldots, x_n$ az A formulában szereplő ítéletváltozók. A sorok megfelelnek a lehetséges interpretációknak. Az első n oszlop tartalmazza az ítéletváltozók kiértékelését. Az I interpretációhoz tartozó sor $n + 1$. oszlopa pedig $\mathcal{B}_I(A)$-t.

Igazhalmaz/hamishalmaz

Az A formula **igazhalmaza**: $A^i := \{ I \,|\, \mathcal{B}_I(A) = i\}$.

Az A formula **hamishalmaza**: $A^h := \{ I \,|\, \mathcal{B}_I(A) = h\}$.

Rögzített bázis esetén az interpretációkat megfeleltethetjük egy rendezett n-esnek, például $(x \to y)^i = \{(i, i), (h, i), (h, h)\}$ az x, y bázisban.

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

- Egy I interpretáció **kielégít** egy B formulát ($I \models_0 B$) ha a formula helyettesítési értéke i az I interpretációban.
- Egy B formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy B formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.
- Egy B formula **tautologia** (ítéletlogikai törvény) ($\models_0 B$), ha minden interpretáció kielégíti.
- Egy I interpretáció **kielégít** egy $\mathcal{F}$ formulahalmazt ($I \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formuláját kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha nincs olyan interpretáció, ami egyszerre minden $\mathcal{F}$-beli formulát kielégít.
- Egy A formulának a B formula **tautologikus következménye**($A \models_0 B$), ha minden A-t kielégítő interpretáció kielégíti B-t is.
- A és B **tautologikusan ekvivalensek** ($A \sim_0 B$), ha $A \models_0 B$ és $B \models_0 A$ is teljesül.
- Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaznak a B formula **tautologikus következménye**($\mathcal{F} \models_0 B$), ha minden $\mathcal{F}$-t kielégítő interpretáció kielégíti B-t is.

Nevezetes ekvivalenciák ($\top$ tautológia, $\perp$ kielégíthetetlen formula.)

(a) $\neg\neg A \sim_0 A$,

(b) $A \vee A \sim_0 A$ valamint $A \wedge A \sim_0 A$,

(c) $A \vee B \sim_0 B \vee A$ valamint $A \wedge B \sim_0 B \wedge A$,

(d) $(A \vee B) \vee C \sim_0 A \vee (B \vee C)$ valamint $(A \wedge B) \wedge C \sim_0 A \wedge (B \wedge C)$,

(e) $(A \vee B) \wedge C \sim_0 (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ valamint $(A \wedge B) \vee C \sim_0 (A \vee C) \wedge (B \vee C)$,

(f) $(A \vee B) \wedge B \sim_0 B$ valamint $(A \wedge B) \vee B \sim_0 B$,

(g) $A \rightarrow B \sim_0 \neg A \vee B$,

(h) $\neg(A \wedge B) \sim_0 \neg A \vee \neg B$ valamint $\neg(A \vee B) \sim_0 \neg A \wedge \neg B$,

(i) $A \vee \neg A \sim_0 \top$ valamint $A \wedge \neg A \sim_0 \perp$,

(j) $A \vee \top \sim_0 \top$ valamint $A \wedge \perp \sim_0 \perp$,

(k) $A \vee \perp \sim_0 A$ valamint $A \wedge \top \sim_0 A$.

III. Konjunktív és diszjunktív normálforma

Literál

Prímformula (azaz: ítéletváltozó) vagy a negáltja. A literál **alapja**: maga a prímformula. Egyetlen literál másik elnevezései: Egységkonjunkció, egységdiszjunkció (egységklóz). Egy literál **komplemens párja**: a másik ugyanilyen alapú literál.

(Teljes) elemi kon-/diszjunkció

Elemi konjunkció: Különböző alapú literálok konjunkciója. **Elemi diszjunkció (klóz)**: Egységdiszjunkció vagy különböző alapú literálok diszjunkciója. Egy elemi konjunkció/diszjunkció **teljes** egy n változós műveletre, ha mind az n ítéletváltozó alapja valamely literáljának.

DNF, KDNF, KNF, KKNF

Diszjunktív normálforma (DNF): elemi konjunkciók diszjunkciója.
Konjunktív normálforma (KNF): elemi diszjunkciók konjunkciója.
Kitűntetett diszjunktív / konjunktív normálforma (KDNF / KKNF): teljes elemi diszjunkciók konjunkciója / konjunkciók diszjunkciója.

III. Rezolúció

Tétel: $\mathcal{F} \models_0 \varphi$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{F} \cup \{\neg\varphi\}$ kielégíthetetlen.

Legyenek C_1 és C_2 pontosan 1 komplemens literálpárt tartalmazó klózok. Tehát $C_1 = C_1' \vee \ell_1$, $C_2 = C_2' \vee \ell_2$, ahol ℓ_1 és ℓ_2 komplemens literálpár, C_1' és C_2' viszont nem tartalmaz ilyet. A $\mathrm{res}(C_1, C_2) := C_1' \vee C_2'$ klózt (esetleges egyszerűsítés után) a (C_1, C_2) klózpár **rezolvensének** nevezzük. (Ha $C_1 = \ell_1$, $C_2 = \ell_2$, akkor $\mathrm{res}(C_1, C_2) = \square$.)

Mi a rezolvensük?

klózpár	rezolvens
$(x \vee y, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee z)$	$x \vee z$
$(x \vee \neg y, \neg y \vee z)$	nincs: mindkét azonos alapú literál negált
$(x \vee \neg y, z \vee \neg v)$	nincs: nincs két azonos alapú literál
$(x \vee y \vee z, \neg y \vee \neg z)$	nincs: két komplemens literálpár van
$(x, \neg x)$	$\square$ (neve **üres klóz**; szemantikailag $\perp$)

Egy $\mathcal{S}$ klózhalmazból a C klóz **rezolúciós levezetése** egy olyan véges $K_1, K_2, \ldots, K_m$ ($m \geq 1$) klózsorozat, ahol minden $j = 1, 2, \ldots, m$-re:

- vagy $K_j \in \mathcal{S}$,
- vagy van olyan $1 \leq s, t < j$, hogy $K_j = \mathrm{res}(K_s, K_t)$,

és $K_m = C$.

Tétel: $\mathcal{S}$ klózhalmaz kielégíthetetlen $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{S}$-ből levezethető $\square$.

B. Feladatok

1. Melyik (egyszerű) állítás?

   (a) A természetes számok körében kétszer kettő az öt.

   (b) Holnap megírom a leckém.

   (c) Alfréd, a szárnyas rózsaszín elefánt ma 999 éves.

   (d) Iskolánk tanára 50 éves.

   (e) x nagyobb, mint 3, ahol x eleme a természetes számoknak.

   (f) Ez az állítás hamis.

   (g) Mi értelme ennek a feladatnak?

2. Formalizálás. Az alábbi összetett állításoknak mely egyszerű állítások a komponensei és a nyelvi összekötők mely logikai összekötőnek felelnek meg?

   (a) Elviszlek vacsorázni, de a meccset is megnézem.

   (b) Anna nem táncol Bélával kivéve ha Béla meghívja egy üdítőre.

   (c) Csak úgy lehet sikeres egy vállalkozás, ha van egy jó üzleti terv.

   (d) A vizsgára jelentkezés előfeltétele a gyakorlati jegy megszerzése.

   (e) Ádám csak akkor hívja meg Évát egy kólára, ha Éva rámosolyog.

3. Készítsünk ítéletlogikai formulákat csak az x, y és z ítéletváltozók felhasználásával és határozzuk meg a logikai összetettségüket. Rajzoljuk fel egy legalább 3 összetettségű formula szerkezeti fáját és határozzuk meg az összes részformuláját!

4. Jelöljük be az alábbi formulákban az egyes logikai összekötők hatáskörét!

   (a) $((((x \to y) \land (y \to z)) \to \neg x) \lor z)$

   (b) $(((x \lor y) \land \neg z) \land (z \to (\neg z \to y)))$

5. Adjuk meg, hogy mennyire összetettek az alábbi formulák! Hagyjuk el a lehető legtöbb zárójelet az alábbi formulákból!

   (a) $(((x \to y) \land (y \to z)) \to (\neg x \lor z))$

   (b) $((x \to y) \to (y \to x))$

   (c) $(((x \to (\neg y \land z)) \lor (x \land y)) \lor z)$

   (d) $((y \to (x \land z)) \land \neg((x \lor z) \to y))$