

Klasszikus fizika laboratórium

2. mérés

Rugalmas állandók mérése



Bakó Bence

Kedd délelőtti csoport

Mérés dátuma: 2020. március 10.

Leadás dátuma: 2020. március 24.

1. A mérés célja:

Szilárd testek rugalmasságának vizsgálata statikus (lehajlás) és dinamikus (torziós inga) módszerrel. Meghatározzuk az előbbi esetben a Young-modulusz, utóbbiban a Torziós modulusz értékét különböző testekre.

2. Mérőeszközök:

- Kétkarú mérleg
- Tolómérő, mérőszalag, csavarmikrométer
- Súlyok
- Kör keresztmetszetű rúd (V3)
- Téglalap keresztmetszetű rúd (A1)
- Torziós inga
- Analitikai mérleg
- 5-ös, 6-os tárcsa
- Ismeretlen próbatest (téglalap alapú hasáb)

3. A mérés menete:

3.1. Young-modulusz mérése

Először a kör keresztmetszetű rudat tettem terhelés alá, lépésenként növelve a terhelést és minden esetben lejegyezve a tömeget és a lehajlást. (A tömegek értékét egyből felsoroztam a karon jelölt faktorokkal és összeadtam őket.) Figyeltem arra, hogy legalább 10 mért értékem legyen és a lehajlással ne haladjam meg a 2 mm-t. Ugyanezt elvégeztem a téglalap alapú hasábra is, külön-külön mindkét lapjára fektetve. Ezek után újra a hengeres rúddal mértem. Kiválasztottam két tömeget (500 g, 7500 g) és mindig ezeket használva, az éktávolságot 30 mm-enként változtatva mértem a lehajlást. Adott éktávolságnál kiszámoltam a lehajlások különbségét (a két tehelésre).

3.2. Torziós modulusz mérése

A mérési berendezésben a torziós szál végére erősített tengelyre szimmetrikusan helyeztem el a két tárcsát. Az egymástól való távolságuk függvényében mértem 10 teljes lengés idejét, majd egyik helyzetnél többször is lemértem a hibaszámításhoz. Ezek után egy ismeretlen téglatest tehetetlenségi nyomatékának meghatározása céljából mértem a lengésidőt két különböző oldalára fektetve.

4. A mérés elmélete:

4.1. Young-modulusz mérése

A neutrális zónára a lehajlás nagysága:

$$s = \frac{1}{48} \frac{l^3}{EI} F$$

Ahol l az éktávolság, E a Young-modulusz, F a terhelési erő és I a keresztmetszet másodrendű nyomatéka, amely a kör illetve téglalap keresztmetszetű rudakra:

$$I_k = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$$

$$I_t = \frac{\text{alap} \cdot \text{magassag}^3}{12}$$

Ezekből kifejezhető a Young-modulusz.

Ha a lehajlást ábrázoljuk a terhelés függvényében és a pontokra egyenest illesztünk, akkor ennek a meredekségével (m) a Young-modulusz:

$$E = \frac{1}{48} \frac{l^3}{mI}$$

Állandó terhelés és változó éktávolság mellett (m szintén az illesztett egyenes meredeksége):

$$E = \frac{1}{48} \frac{F}{mI}$$

4.2. Torziós modulusz mérése

A torziós modulusz a periódusidő (T) függvényében:

$$G = K \frac{\Theta}{T^2}, \quad K = \frac{8\pi l}{r^4},$$

ahol Θ a lengő rendszer tehetetlenségi nyomatéka, l a torziós szál hossza és r a sugara.

$$\Theta = \Theta_e + \Theta_s + Ma^2,$$

ahol Θ_e az üres inga tehetetlenségi nyomatéka, Θ_s a két tárcsa együttes tehetetlenségi nyomatéka és Ma^2 pedig a Steiner-tétel értelmében került a kifejezésbe.

A $T^2(a^2)$ függvényre illesztett egyenes meredekségéből (m) kiszámítható a torziós modulusz:

$$G = K \frac{m_1 + m_2}{m},$$

ahol m_1, m_2 a tárcsák tömege. Az üres inga tehetetlenségi nyomatéka is meghatározható a tengelymetszetből (b):

$$\Theta_e = \frac{Gb}{K} - \Theta_s; \quad \Theta_{si} = \frac{1}{2} m_i R_i^2$$

Ismeretlen test tehetetlenségi nyomatéka a következő módon adható meg:

$$\Theta_x = \frac{m_1 + m_2}{m} (T_x^2 - T_0^2) + \Theta_s,$$

ahol T_0 a periódusidő amikor a tárcsák középen vannak.

5. Mérési adatok:

5.1. Young-modulusz mérése

- A kör keresztmetszetű (V3) rúd átmérője: $d = 9,95 \text{ mm}$
- A téglalap keresztmetszetű (A1) rúd oldalai: $a = 7,85 \text{ mm}$, $b = 11,95 \text{ mm}$
- A használt éktávolság: 400 mm

A V3 rúd esetében a mért adatok:

Tömeg [g]	Lehajlás [0,01 mm]
500	50
1000	61
1500	71
2000	81
2500	92
3000	102
3500	119
4000	124
4500	135
5000	145
6000	166
7000	186

Az A1 rúdat kisebbik lapjára fektetve (a):

Tömeg [g]	Lehajlás [0,01 mm]
500	38
1500	56
2500	72
3500	89
4500	106
5500	123
6500	139
7500	156
8500	171
9500	188

Az A1 rúdat nagyobbik lapjára fektetve (b):

Tömeg [g]	Lehajlás [0,01 mm]
500	11
1000	31
1500	50
2000	71
2500	92
3000	112
3500	131
4000	149
4500	167
5000	185

A V3 rúd esetében az éktávolságot változtatva 500 és 7500 g terhelés mellett a mérési adatok:

l [mm]	$s_0[0,01mm]$	$s[0,01mm]$	$\Delta s[0,01mm]$
400	52	198	146
370	71	189	118
340	74	166	92
310	52	123	71
280	59	112	53
250	59	96	37
220	54	79	25
190	36	52	16
160	53	64	11
130	38	43	5

5.2. Torziós modulusz mérése

- A torziós szál hossza: 59,2 cm
- A torziós szál átmérője: 0,69 mm
- Az 5-ös számú tárcsa tömege $m = 194,626$ g, átmérője $d = 45,15$ mm
- A 6-os számú tárcsa tömege $m = 196,189$ g, átmérője $d = 45$ mm

A tárcsákat egymáshoz közelítve, a tengelyen szimmetrikusan (a tengely közepétől egyenlő távolságra) elhelyezve 10 teljes lengés ideje:

A tárcsák távolsága [cm]	10T [s]
20	75,837
18	69,409
16	63,131
14	56,938
12	51,012
10	45,412
8	40,220
6	35,654
0	28,733

A reprodukálhatóság vizsgálatára a 12 cm-nél mért lengésidők:

$10T_1$	51,012 s	$10T_2$	51,185	$10T_3$	51,183	$10T_4$	51,171
---------	----------	---------	--------	---------	--------	---------	--------

Az ismeretlen téglatest esetében a lengésidők:

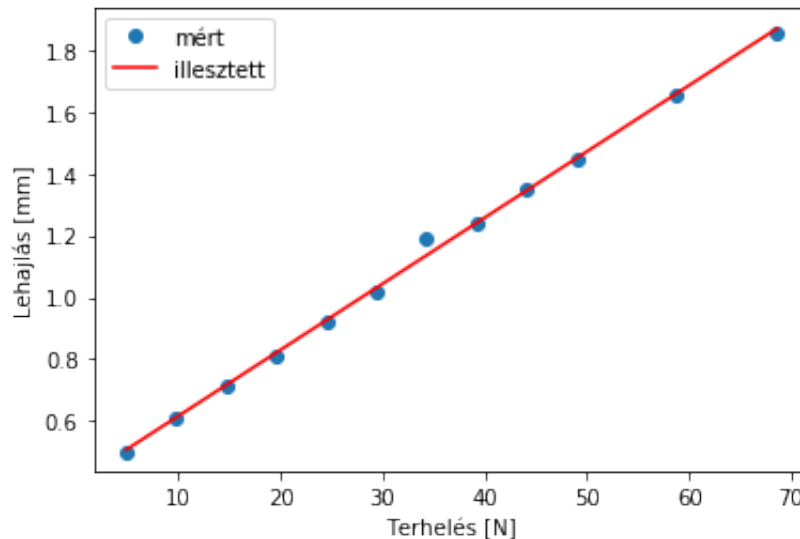
- A nagyobbik lapjára fektetve: $10T_x = 41,947s$
- A kisebbik lapjára fektetve: $10T_x = 41,532s$

6. Kiértékelés:

6.1. Young-modulusz mérése

6.1.1. Kör keresztmetszetű rúd:

A lehajlást ábrázoltam a terhelés függvényében (a gravitációs gyorsulást $g = 9.8m/s^2$ -nek tekintettem) :



Az egyenes meredeksége:

$$m = 2,14 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

A kör keresztmetszet másodrendű nyomatéka:

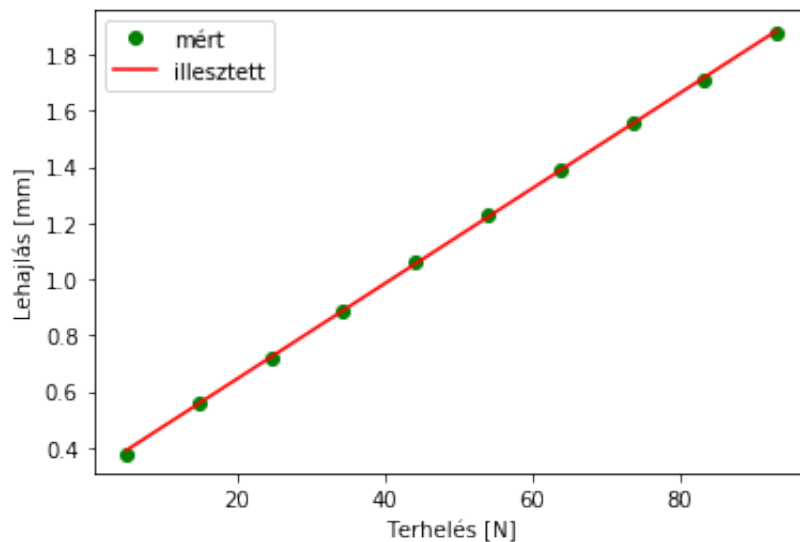
$$I_k = 4,81 \cdot 10^{-10} m^4$$

Innen a Young-modulusz:

$$E = 12,95 \cdot 10^{10} Pa$$

6.1.2. Téglalap keresztmetszetű rúd kisebbik lapjára fektetve (a):

A lehajlást ábrázoltam a terhelés függvényében (a gravitációs gyorsulást $g = 9.8m/s^2$ -nek tekintettem) :



Az egyenes meredeksége:

$$m = 1,69 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

A téglalap keresztmetszet másodrendű nyomatéka:

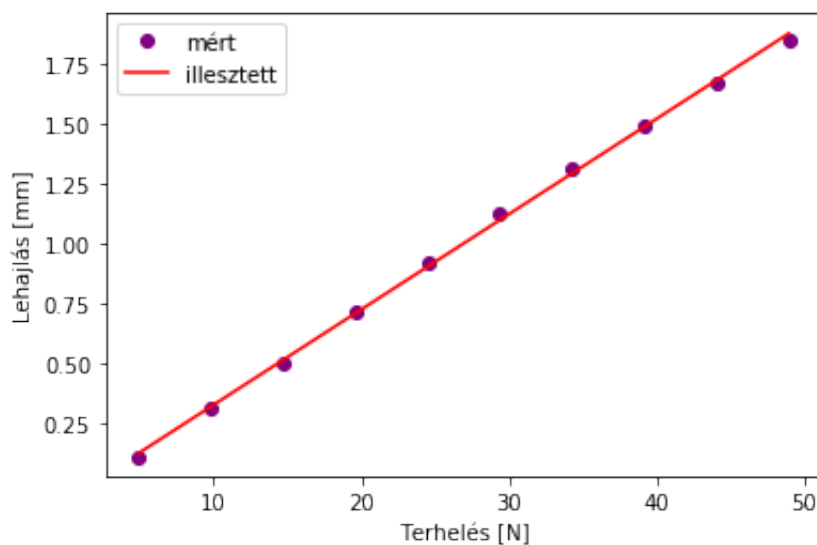
$$I_t = 11,16 \cdot 10^{-10} m^4$$

Innen a Young-modulusz:

$$E = 7,07 \cdot 10^{10} Pa$$

6.1.3. Téglalap keresztmetszetű rúd nagyobbik lapjára fektetve (b):

A lehajlást ábrázoltam a terhelés függvényében (a gravitációs gyorsulást $g = 9.8m/s^2$ -nek tekintettem) :



Az egyenes meredeksége:

$$m = 3,97 \cdot 10^{-5} \frac{m}{N}$$

A téglalap keresztmetszet másodrendű nyomatéka:

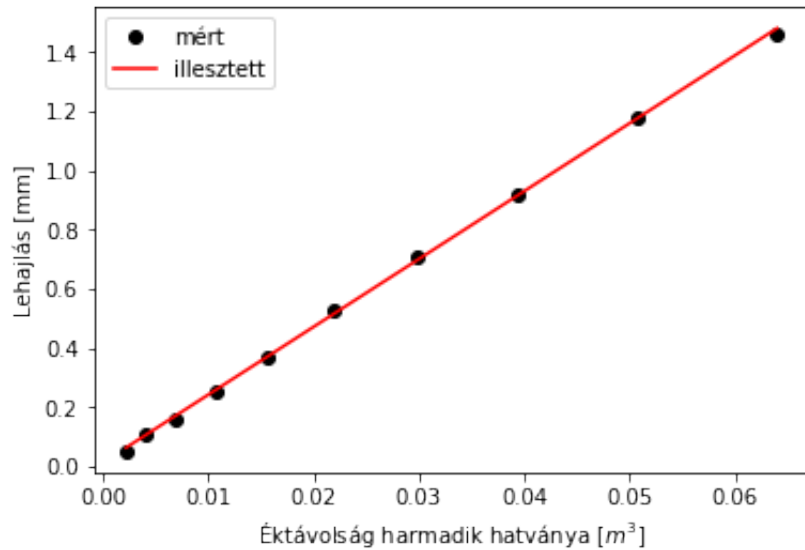
$$I_t = 4,81 \cdot 10^{-10} m^4$$

Innen a Young-modulusz:

$$E = 6,98 \cdot 10^{10} Pa$$

6.1.4. A kör keresztmetszetű rúd esetében változó éktávolsággal:

Ábrázoltam a lehajlást az éktávolság harmadik hatványának függvényében:



Az illesztett egyenes meredeksége:

$$m = 2,29 \cdot 10^{-2} \frac{1}{m^2}$$

A kör keresztmetszet másodrendű nyomatéka:

$$I_k = 4,81 \cdot 10^{-10} m^4$$

A terhelési erő:

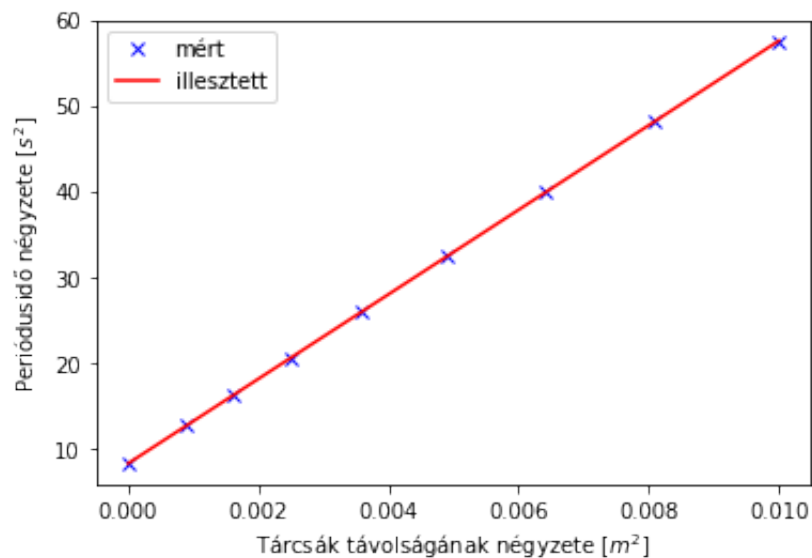
$$F = 7 kg \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 68,6 N$$

Innen a Young-modulusz:

$$E = 12,97 \cdot 10^{10} Pa$$

6.2. Torziós modulusz mérése

Ábrázoltam a tárcsák középponttól mért távolság-négyzetének függvényében a periódusidők négyzetét és egyenest illesztettem:



Az illesztett egyenes meredeksége és tengelymetszete:

$$m = 4925,41 \frac{s^2}{m^2}; \quad b = 8,28 s^2$$

Ezek ismeretében, tudva a tárcsák és a torziós szál paramétereit a torziós modulusz:

$$G = 8,333 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$$

A két tárcsa tehetetlenségi nyomatéka egyenlőnek tekinthető, és ennek értéke:

$$\Theta_{s5} = \Theta_{s6} = 4,9593 \cdot 10^{-5} kgm^2$$

Az üres inga tehetetlenségi nyomatéka ezekből kiszámolható:

$$\Theta_e = 55,77 \cdot 10^{-5} kgm^2$$

Tovább kiszámolható az ismeretlen test tehetetlenségi nyomatéka mindkét esetben:

$$\Theta_{x1} = 84,03 \cdot 10^{-5} kgm^2$$

$$\Theta_{x2} = 81,27 \cdot 10^{-5} kgm^2$$

7. Hibaszámitás:

7.1. Young-modulusz mérése

Hibaszámitásra a hibaterjedés módszerét alkalmazzuk.

A Young-modulusz relatív hibája:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta I}{I} + 3 \frac{\Delta l}{l}$$

Ahol a másodrendű nyomaték hibája:

$$\frac{\Delta I_k}{I_k} = 4 \cdot \frac{\Delta R}{R}$$

$$\frac{\Delta I_t}{I_t} = 3 \cdot \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a}, \text{ ahol } b \text{ a magasság, } a \text{ az alap}$$

Az éktávolság hibája: $\Delta l = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} m$, mert mindkét oldalon van alátámasztás és milliméteres skálán mérjük, tehát a relatív hiba:

$$\frac{\Delta l}{l} = 2,5 \cdot 10^{-3}$$

7.1.1. Kör keresztmetszetű rúd:

A meredekség hibája:

$$\Delta m = 2,81 \cdot 10^{-7} \frac{m}{N} \Rightarrow \frac{\Delta m}{m} = 1,31 \cdot 10^{-2}$$

A sugár hibája $\Delta R = 0,0025 m$, mert az átmérő mérésének a hibája a mérőműszer miatt 0,005. Innen a másodrendű nyomaték relatív hibája:

$$\frac{\Delta I}{I} = 2,01 \cdot 10^{-3}$$

Tehát a Young-modulusz relatív hibája:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= 22,61 \cdot 10^{-3} \\ \Rightarrow \Delta E &= 29,28 \cdot 10^8 Pa \end{aligned}$$

7.1.2. Téglalap keresztmetszetű rúd kisebbik lapjára fektetve (a):

A meredekség hibája:

$$\Delta m = 8,01 \cdot 10^{-8} \frac{m}{N} \Rightarrow \frac{\Delta m}{m} = 4,74 \cdot 10^{-3}$$

A magasság $b=11,95$ mm és hibája $\Delta b = 0,005mm$, az alap $a=7,85$ mm és hibája szintén $\Delta a = 0,005mm$. Innen a másodrendű nyomaték relatív hibája:

$$\frac{\Delta I}{I} = 1,89 \cdot 10^{-3}$$

Tehát a Young-modulusz relatív hibája:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= 14,13 \cdot 10^{-2} \\ \Rightarrow \Delta E &= 9,99 \cdot 10^8 \text{ Pa} \end{aligned}$$

7.1.3. Téglalap keresztmetszetű rúd nagyobbik lapjára fektetve (b):

A meredekség hibája:

$$\Delta m = 3,88 \cdot 10^{-7} \frac{m}{N} \Rightarrow \frac{\Delta m}{m} = 9,79 \cdot 10^{-3}$$

A magasság $b=7,85$ mm és hibája $\Delta b = 0,005mm$, az alap $a=11,95$ mm és hibája szintén $\Delta a = 0,005mm$. Innen a másodrendű nyomaték relatív hibája:

$$\frac{\Delta I}{I} = 2,32 \cdot 10^{-3}$$

Tehát a Young-modulusz relatív hibája:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= 19,61 \cdot 10^{-3} \\ \Rightarrow \Delta E &= 6,454 \cdot 10^8 \text{ Pa} \end{aligned}$$

7.1.4. A kör keresztmetszetű rúd esetében változó éktávolságnál:

Itt is a hibaterjedés módszerével számoljuk a hibát:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta I}{I}$$

A meredekség hibája:

$$\Delta m = 0,1937 \cdot 10^{-3} \frac{m}{N} \Rightarrow \frac{\Delta m}{m} = 8,45 \cdot 10^{-3}$$

A másodrendű nyomaték relatív hibáját már kiszámoltuk:

$$\frac{\Delta I}{I} = 2,01 \cdot 10^{-3}$$

Tehát a Young-modulusz relatív hibája:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= 10,46 \cdot 10^{-3} \\ \Rightarrow \Delta E &= 13,56 \cdot 10^8 \text{ Pa} \end{aligned}$$

7.2. Torziós modulusz mérése

A hibaterjedés módszerével a torziós modulusz hibája:

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta m}{m} + 4 \frac{\Delta r}{r}$$

A torziós szál hosszát mérőszalaggal mértem, melynek hibája

$$\Delta l = 0,5mm \Rightarrow \frac{\Delta l}{l} = 8,445 \cdot 10^{-4}$$

A meredekség hibája:

$$\Delta m = 2,64 \frac{s^2}{m^2} \Rightarrow \frac{\Delta m}{m} = 5,35 \cdot 10^{-4}$$

A szál sugarának hibája (csavarmikrométer):

$$\Delta r = 0,0025mm \Rightarrow \frac{\Delta r}{r} = 72,46 \cdot 10^{-4}$$

Tehát a torziós modulusz relatív hibája:

$$\frac{\Delta G}{G} = 30,36 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \Delta G = 0,253 \cdot 10^{10} Pa$$

A tárcsák sugarának hibája:

$$\Delta R = 0,025mm \Rightarrow \frac{\Delta R}{R} = 0,55 \cdot 10^{-3}$$

Innen a tárcsák tehetetlenségi nyomatékának hibája:

$$\frac{\Delta \Theta_s}{\Theta_s} = 2 \frac{\Delta R}{R} = 1,1 \cdot 10^{-3}$$

Az illesztett egyenes tengelymetszetének hibája:

$$\Delta b = 0,014s^2 \Rightarrow \frac{\Delta b}{b} = 1,69 \cdot 10^{-3}$$

Az üres inga tehetetlenségi nyomatékának hibája:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Theta_e}{\Theta_e} &= \frac{\Delta G}{G} + \frac{\Delta b}{b} + 4 \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta \Theta_s}{\Theta_s} = 62,978 \cdot 10^{-3} \\ &\Rightarrow \Delta \Theta_e = 3,512 \cdot 10^{-5} kgm^2 \end{aligned}$$

A hibaszámításhoz mért eredményekből a periódus hibája:

$$\Delta T = 0,173s \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = 4,16 \cdot 10^{-3}$$

Az ismeretlen test tehetetlenségi nyomatékának hibája:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Theta_x}{\Theta_x} &= \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta \Theta_s}{\Theta_s} = 9,95 \cdot 10^{-3} \\ &\Rightarrow \Delta \Theta_{x1} = 0,836 \cdot 10^{-5} kgm^2 \\ &\Rightarrow \Delta \Theta_{x2} = 0,809 \cdot 10^{-5} kgm^2 \end{aligned}$$

8. Diszkusszió:

A végeredmények összegezve:

V3 rúd Young-modulusza (1. módszer):	$(12,95 \pm 0,2928) \cdot 10^{10} Pa$
A1 rúd Young-modulusza (kisebbik lapján):	$(7,07 \pm 0,0999) \cdot 10^{10} Pa$
A1 rúd Young-modulusza (nagyobbik lapján):	$(6,98 \pm 0,06454) \cdot 10^{10} Pa$
V3 rúd Young-modulusza (2. módszer):	$(12,97 \pm 0,1356) \cdot 10^{10} Pa$
Torziós modulusz:	$(8,33 \pm 0,253) \cdot 10^{10} Pa$
Az üres inga tehetetlenségi nyomatéka:	$(55,77 \pm 3,512) \cdot 10^{-5} kgm^2$
Az ismeretlen test tehetetlenségi nyomatéka (1):	$(84,03 \pm 0,836) \cdot 10^{-5} kgm^2$
Az ismeretlen test tehetetlenségi nyomatéka (2):	$(81,27 \pm 0,809) \cdot 10^{-5} kgm^2$

A Young-modulusz mérésénél meghatároztuk mindkét próbatestre kétféle módon és hibahatáron belül azonos eredményeket kaptunk, tehát úgy gondolom jól mértem. Az ismeretlen test tehetetlenségi nyomatékánál, látszik, hogy csak kis eltérés van a két eset között, ami összhangban van az elmélettel.

Hivatkozások

- Az ELTE Természettudományi Kar Oktatói: Fizikai Mérések (Összevont Laboratóriumi Tananyag I.) Szerkesztette: Havancsák Károly, Lektorálta: Kemény Tamás, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2013.

1) Young-modulus mérése

korrekciós. rúd: $d = 9,95 \text{ mm}$ (V3)

higlat ——— rúd: $a = 7,85 \text{ mm}$, $b = 11,95 \text{ mm}$ (A4)

hossz: 400 mm

V3:

tömeg (g)	hajlás (0,01mm)	
2250-500	88 50	6000 → 166
1000	104 61	7000 → 186
1500	110 71	
2000	118 81	
2500	126 92	
3000	134 102	
3500	142 119	
4000	150 124	
4500	158 135	
5000	166 145	

A1: a:

tömeg (g)	hajlás (0,01mm)	b: m(g)	s (0,01mm)
500	38	500	11
1500	56	1000	31
2500	72	1500	50
3500	89	2000	71
4500	106	2500	92
5500	123	3000	112
6500	139	3500	131
7500	156	4000	149
8500	171	4500	167
9500	188	5000	185

Bátai

- az átlagsúlyát változtatva V3-ra (500 - 7500 g)

l (mm)	s_0 (0,01mm)	S (0,01mm)	ΔS (0,01mm)
400	152 52	198	146
370	147 71	118 189	118
340	147 4	166	92
310	52	123	71
280	59	112	53
250	115 9	96	113 37
220	54	79	25
190	36	52	16
160	53	64	11
130	38	43	5

2) Torziós modulusz mérés

pozíció (cm)	$10 T$ (s)
20	75,937
18	69,409
16	63,131
14	56,938
12	51,012
10	45,412
8	40,220
6	35,654
0	28,733

reproduktálhatóság - hibaszámítás: 12 cm-nél

$$10 T_4 = 51,012, \quad 10 T_2 = 51,185, \quad 10 T_3 = 51,183$$

$$10 T_1 = 51,171$$

3) ismeretlen test tehetetlenségi nyomatéka

• téglatest

$$\hookrightarrow \text{magasabbik lapjára fektetve: } T_x = 41,947 \text{ s}$$

$$\hookrightarrow \text{rövidebbik lapjára fektetve: } T_x = 41,532 \text{ s}$$

a torziós szál hossza: 59,2 cm

a torziós szál átmérője: 0,69 mm

5-ös számú tárcsa tömege: 194,626 g; $d = 44,5 \text{ mm} \rightarrow 45,15 \text{ mm}$

6-os ————— : 136,189 g; $d = 40,5 \text{ mm} \rightarrow 45 \text{ mm}$

Béla